Annales de l'institut Fourier

T. H. Nguyen

Calcul fonctionnel dépendant de la croissance des coefficients spectraux

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 4 (1977), p. 169-199

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_169_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 4 (1977), 169-199.

CALCUL FONCTIONNEL DÉPENDANT DE LA CROISSANCE DES COEFFICIENTS SPECTRAUX

par NGUYEN the Hoc

Introduction.

1. Nous étendons le calcul fonctionnel holomorphe à des fonctions vérifiant une condition plus faible que la condition d'holomorphie, elle signifie que $\bar{\partial} f$ est petit près du spectre. Les résultats de cet article constituent la thèse de l'auteur [13]. Les algèbres considérées ici sont des b-algèbres étudiées par L. Waelbroeck [19]. Nous ne considérons que le cas des algèbres commutatives unifères sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

En gros, un calcul fonctionnel dans une algèbre A est un moyen de définir la « valeur » d'une fonction d'une variable en un élément a de A ou d'une fonction de n variables en un n-tuple $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, et construire un calcul fonctionnel dans A réside dans la détermination d'une algèbre de fonctions et dans la construction d'un homomorphisme de cette algèbre dans A.

C'est I. M. Gelfand [9] qui a défini le calcul fonctionnel pour les fonctions holomorphes au voisinage du spectre d'un élément a d'une algèbre de Banach au moyen de la formule de Cauchy

$$f[a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(s)(s - a)^{-1} \, ds$$

où Γ est un contour convenable entourant le spectre. Depuis, le calcul fonctionnel holomorphe de Gelfand a été étendu dans plusieurs directions par divers auteurs : 1) extension pluridimensionnelle par G. E. Shilov [16], L. Waelbroeck [18], R. Arens et A. P. Calderon [3], 2) extension dans des algèbres plus générales par L. Waelbroeck [19] et 3) extension de l'algèbre de fonctions de départ par L. Waelbroeck [21] et C. Wrobel [25] et [26]. Les résultats de Wrobel constituent les extensions dans le sens de 1) et 3).

Cet article présente une extension du calcul fonctionnel de Gelfand dans le sens de 1), 2) et 3). Nous construisons, sous certaines conditions, un calcul fonctionnel en un n-tuple d'éléments $a = (a_1, \ldots, a_n)$ d'une b-algèbre A. Ce travail est une extension pluridimensionnelle de [21] et fournit des résultats identiques à ceux de Wrobel lorsque A se réduit à une algèbre de Banach. Notons que ce travail a été effectué indépendamment de celui de Wrobel. Comme nous, Wrobel s'inspire du calcul fonctionnel holomorphe de Waelbroeck [19]. Sa construction est néanmoins différente de la nôtre, $f[a]$ est par exemple la limite d'une suite d'intégrales.

2. Rappelons qu'un *b-espace* (ou espace à bornologie complétante, ou espace bornologique convexe complet) est une réunion d'espaces de Banach $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ où I est un ordonné filtrant, où $E_i \subseteq E_j$ si $i \leqslant j$, l'inclusion étant continue. Une partie B de E est dite *bornée* (ou est *un borné* de E) si B est contenu dans un certain E_i et y est borné. Une *b-algèbre* A est un b-espace $A = \bigcup_{i \in I} E_i$ tel que pour tout $i, j \in I$ il existe $k \in I$ avec $E_i . E_j \subseteq E_k$ (la multiplication $E_i . E_j \to E_k$ est alors bornée, appliquant un borné de E_i et un borné de E_j sur un borné de E_k). Une b-algèbre $A = \bigcup_{i \in I} E_i$ est dite *idempotente* s'il est possible de trouver les $E_i = A_i$ de telle manière que chaque A_i soit une algèbre de Banach. Dans une b-algèbre générale A, un élément a est dit *régulier* si $a \in A_1 \subseteq A$, où A_1 est une algèbre de Banach avec inclusion bornée, appliquant la boule unité de A_1 sur une partie bornée de A. On voit que a est régulier s'il existe $M > 0$ tel que a^n/M^n soit une suite bornée dans A, ou encore s'il existe $M > 0$ tel que $a - s$ soit inversible, l'ensemble $\{(a-s)^{-1} \mid |s| > M\}$ étant borné.

Dans une b-algèbre A, on démontre que (cf. [22], p. 84-86) :

(i) l'ensemble A_r des éléments réguliers de A est une sous-algèbre de A,

(ii) A_r est la réunion des multiples scalaires d'ensembles bornés idempotents ($B.B \subseteq B$) de A,

(iii) A_r est une b-sous-algèbre idempotente de A dans le sens que A_r est une b-algèbre idempotente $A_r = \bigcup_{j \in} A_j$ où les A_j sont des algèbres de Banach avec l'inclusion $A_j \to A$ bornée pour tout $j \in J$, une partie étant bornée dans A_r si elle est incluse dans un multiple scalaire d'un borné idempotent de A.

Le lecteur peut consulter [4], [10] ou [22] pour plus de détails sur les b-structures.

3. Les *coefficients spectraux* d'un n-tuple d'éléments $a = (a_1, \ldots, a_n)$ d'une algèbre A sont des fonctions $u_1, \ldots, u_n$ définies sur une partie de $\mathbf{C}^n$ à valeurs dans A telles que

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - s_j)u_j(s) = 1 \quad \text{sur leur domaine}$$

où $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{C}^n$. Pour alléger l'écriture nous poserons

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - s_j)u_j(s) = \langle a - s, u(s) \rangle$$

où $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Les coefficients spectraux sont l'extension pluridimensionnelle naturelle de la résolvante

$$R_a(s) = (a - s)^{-1}.$$

Le *spectre simultané* de a, noté sp$a$, est le complémentaire de l'ensemble des $s \in \mathbf{C}^n$ tels qu'il existe $b \in A^n$ avec

$$\langle a - s, b \rangle = 1.$$

La seule considération du spectre simultané limite les calculs fonctionnels de Shilov, Waelbroeck, Arens et Calderon à des fonctions holomorphes au voisinage de sp$a$. Dans cet article, nous posons une définition de spectre de a, faisant intervenir la croissance des coefficients spectraux. Les propriétés de ce spectre nous permettront de construire un calcul fonctionnel qui, dans le cas banachique, s'étend à certaines fonctions supposées seulement holomorphes à l'intérieur de sp$a$.

Le spectre.

4. Une fonction $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$ est dite *spectrale pour* a s'il existe des coefficients spectraux $u_1, \ldots, u_n$ définis sur $P_\delta = \{s \in \mathbf{C}^n \mid \delta(s) > 0\}$ tels que la croissance des u_j soit contrôlée par δ dans le sens que l'ensemble

$$\Xi_1 = \{\delta(s)u_j(s) \mid s \in P_\delta,\ j = 1, \ldots, n\}$$

soit borné dans A. L'ensemble des fonctions spectrales pour a, noté $\Delta(a)$, s'appelle *spectre* de a. Le spectre $\Delta(a)$ possède des sous-ensembles importants, ce sont le *spectre lipschitzien* $\Delta_L(a)$ des fonctions de $\Delta(a)$ qui sont lipschitziennes et le *spectre régulier* $\Delta_r(a)$. Une fonction δ spectrale pour a est dite *régulière* (est dans $\Delta_r(a)$) si l'ensemble Ξ_1 est borné dans A_r.

5. Les spectres précédents possèdent des propriétés duales au spectre de Waelbroeck (cf. [19] et [7]). Les propriétés principales de ces spectres sont énumérées dans la proposition suivante :

Proposition 1. — (i) *$\Delta(a)$ est un filtre croissant de fonctions non négatives sur $\mathbf{C}^n$.*

(ii) *Si $\delta \in \Delta(a)$ alors il existe $M > 0$ tel que*

$$\delta(s) \leqslant M(1 + |s|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) *Une fonction $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$ n'est pas spectrale pour a s'il existe $M > 0$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $\delta(s) \geqslant M(1 + |s|^2)^{-k}$. Cette propriété généralise le théorème qui affirme que le spectre est non vide.*

(iv) *Toute fonction spectrale régulière pour a est majorée par une fonction lipschitzienne spectrale régulière pour a. On dit que $\Delta_r(a)$ possède une base lipschitzienne. Cette propriété est une conséquence de la proposition 2.*

La proposition suivante donne une description assez complète du spectre régulier. Soit $A_r = \bigcup_{i \in I} A_i$ la b-sous-algèbre idempotente de A (cf. sect. 2), les algèbres de Banach A_i étant munies de normes multiplicatives $\|.\|_i$. Posons

$$\Delta_i(a) = \{\delta \in \Delta(a) \mid \Xi_1 \text{ borné dans } A_i\}.$$

Pour tout $i \in I$, posons

$$(1) \quad \begin{cases} \delta_{i,a}(s) = \sup \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_i \right]^{-1} \mid \exists b \in A_i^n, \langle a - s, b \rangle = 1 \right\} \\ \qquad = 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Proposition 2. — (i) *Pour tout* $i \in I$, $\delta_{i,a}$ *est lipschitzienne de constante* 1.

(ii) $\delta_{i,a} \in \Delta_i(a)$.

(iii) $\Delta_i(a) = \{\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+ \mid \delta \leqslant M\delta_{i,a}, M > 0 \text{ dépend de } \delta\}$.

(iv) $\Delta_r(a) = \bigcup_{i \in I} \Delta_i(a)$.

Lissage des coefficients spectraux.

6. Fixons d'abord quelques notations. Soient δ une fonction continue non négative sur $\mathbf{C}^n$, $u_1, \ldots, u_n$ des fonctions sur $P_\delta = \{s \mid \delta(s) > 0\}$ à valeurs dans un espace de Banach. Pour $N \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}$, supposons que $u_1, \ldots, u_n$ soient de classe C^p, posons $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et désignons par $\Xi_{N,p}(\delta ; u)$ l'ensemble

$$\{\delta^{N+|q|}(s) D_q u_j(s) \mid s \in P_\delta, |q| \leqslant p, j = 1, \ldots, n\}$$

où D_q est l'opérateur de dérivation partielle d'ordre q, avec $q = (q_1, \ldots, q_{2n}) \in \mathbf{N}^{2n}$, $|q| = q_1 + \cdots + q_{2n}$.

Nous nous intéressons particulièrement au spectre lipschitzien $\Delta_L(a)$. Cet intérêt est justifié par le théorème de lissage suivant :

Théorème 3. — *Soit* $\delta \in \Delta_L(a)$, δ *bornée, alors pour tout* $p \in \mathbf{N}$, *il existe des coefficients spectraux* $u_1, \ldots, u_n$ *de* a

de classe C^p *sur* $P_\delta = \{s \mid \delta(s) > 0\}$ *tels que la croissance des* u_j *et des* $D_q u_j$ *soit contrôlée par* δ *dans le sens que l'ensemble* $\Xi_{2,p}(\delta\,;\,u)$ *soit borné dans* A.

La situation est plus favorable lorsque $\delta \in \Delta_r(a)$.

THÉORÈME 4. — *Si* $\delta \in \Delta_r(a)$, *alors il existe des coefficients spectraux* $u_1, \ldots, u_n$ *de* a *de classe* C^∞ *sur* P_δ *tels que* $\Xi_{1,p}(\delta\,;\,u)$ *soit borné dans* A_r, *pour tout* $p \in \mathbf{N}$.

Notons dans le cas régulier que δ n'a pas besoin d'être bornée, ni lipschitzienne. D'autre part l'ensemble $\Xi_{N,p}(\delta\,;\,u)$ est borné dans A_r pour $N = 1$ (donc pour $N \geqslant 1$ si δ est bornée). Dans le cas général du théorème 3, $\Xi_{N,p}(\delta\,;\,u)$ est borné dans A pour $N = 2$ (donc pour $N \geqslant 2$, δ étant bornée).

On verra que la condition de Lipschitz est fondamentale dans le théorème 3. Dans le théorème 4 elle n'est pas essentielle du fait que $\Delta_r(a)$ admet une base lipschitzienne.

7. Avant de démontrer les théorèmes 3 et 4, nous exposons d'abord un résultat technique sur les fonctions lipschitziennes. Il s'agit de la construction d'une partition de l'unité « tempérée » par rapport à une fonction lipschitzienne dans un certain sens.

LEMME 5. — *Soit* $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$ *une fonction lipschitzienne* (*de constante* 1). *Alors il existe un recouvrement* $\mathcal{R}_0$ *de* P_δ *formé de cubes ouverts et satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *L'intersection de* $2^{2n} + 1$ *cubes distincts est vide* (*on dit que la dimension de* $\mathcal{R}_0$ *est* $2^{2n} - 1$).

(ii) *Pour* $0 < \mu < 1/2$ et $1 < \rho < 3/2$, *on peut trouver* $\mathcal{R}_0$ *de dimension* $2^{2n} - 1$ *tel que*

$$\left(1 - \frac{\mu}{2\rho}\right)\delta(c(V)) \leqslant \frac{2\sqrt{2n}}{\mu}\, r(V) \leqslant 2\delta(c(V)) \qquad V \in \mathcal{R}_0$$

si $r(V)$ *désigne le côté de* V *et* $c(V)$ *le centre de* V.

Ce lemme généralise un théorème de H. Whitney [24] que l'on peut trouver dans E. M. Stein [17, p. 16]. Une autre formulation de ce lemme se trouve dans la thèse de B. André [2, p. 10] où la dimension est $440^{2n} - 1$. L. Waelboeck [20] a aussi construit un recouvrement de ce type tel que la dimension du recouvrement soit exactement $2n$. Dans les applications, nous n'utiliserons que le fait que la dimension de $\mathscr{R}_0$ est finie.

Le lemme précédent nous permettra de construire une partition de l'unité convenable pour le lissage des coefficients spectraux dans le cas banachique. Dans le cas d'une b-algèbre, nous utiliserons une technique analogue à celle du lemme fondamental de Waelbroeck [19] nécessitant une suite de recouvrements de P_δ de finesse décroissant vers zéro (la *finesse* d'un recouvrement est le suprémum des diamètres de ses éléments).

Lemme 6. — *Soit* $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$ *une fonction lipschitzienne (de constante* 1*). Alors il existe un* $M > 0$ *et une suite de recouvrements* $\mathscr{R}_k$ *de* P_δ, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ *formés de cubes ouverts* V *tels que :*

(i) $\dim \mathscr{R}_k = 2^{2n} - 1$ *pour tout* k,

(ii) *finesse de* $\mathscr{R}_k \leqslant M2^{-k}$ *pour tout* k,

(iii) $r(V) \leqslant M\delta(c(V))$ *pour tout* $V \in \mathscr{R}_k$ *et pour tout* k.

(Rappelons que $r(V)$ est le côté du cube V et que $c(V)$ est son centre.)

Comme conséquence des lemmes 5 et 6, nous avons la proposition suivante :

Proposition 7. — *Soient* δ *et* $\mathscr{R}_k$ *la fonction et les recouvrements des lemmes* 5 *et* 6, $k \in \mathbf{N}$, *alors pour chaque* k, *il existe une partition de l'unité de classe* C^∞ *subordonnée à* $\mathscr{R}_k$:

$$\sum_{V \in \mathscr{R}_k} \beta_V(s) = 1 \qquad s \in P_\delta$$

telle que $0 \leqslant \beta_V \leqslant 1$ *et que*

$$\sum_{V \in \mathscr{R}_k} |D_q\beta_V(s)| \leqslant M \max(\delta^{-|q|}(s), 2^{k|q|})$$

pour toute dérivée partielle D_q, $q = (q_1, \ldots, q_{2n}) \in \mathbf{N}^{2n}$, $|q| = q_1 + \cdots + q_{2n}$, *pour un* $M > 0$ *indépendant de* k.

8. *Preuve du théorème* 3. — Soient $u_1, \ldots, u_n$ des coefficients spectraux de a sur P_δ tels que l'ensemble

$$\{\delta(s)u_j(s) \mid s \in P_\delta,\ j = 1, \ldots, n\}$$

soit borné dans A. Pour $k = 1, 2, 3, \ldots,$ soit $\sum\limits_{V \in \mathcal{R}_k} \beta_V$ la partition de l'unité construite dans la proposition 7. Posons d'abord, pour $j = 1, \ldots, n,$

$$_k v'_j(s) = \sum_{V \in \mathcal{R}_k} \beta_V(s) u_j(c(V)).$$

Rappelons que $c(V)$ désigne le centre de V. De

$$\langle a - c(V),\ u(c(V))\rangle = 1$$

nous tirons $\langle a - s,\ _k v'(s)\rangle + {}_k w'(s) = 1$ pour $s \in P_\delta$, avec

$$_k w'(s) = \sum_{V \in \mathcal{R}_k} \beta_V(s) \langle s - c(V),\ u(c(V))\rangle.$$

Posons ensuite

$$_k v_j(s) = {}_k v'_j(s)[1 + {}_k w'(s) + \cdots + {}_k w'^{p-1}(s)]$$

et

$$_k w(s) = {}_k w'^p(s),$$

alors $\langle a - s,\ _k v(s)\rangle + {}_k w(s) = 1$. Posons enfin

$$v_j(s) = \sum_{k=1}^{\infty} [{}_{k+1}v_j(s)\,{}_k w(s) - {}_k v_j(s)\,{}_{k+1}w(s)] + {}_1 v_j(s)$$

alors $\langle a - s,\ v(s)\rangle = 1,\ s \in P_\delta$.

Il suffit de montrer que l'ensemble $\delta^{2+|q|}(s) D_q v_j(s)$ pour $s \in P_\delta,\ |q| \leqslant p,\ j = 1, \ldots, n$ est borné dans A. Par définition de la partition de l'unité $\sum\limits_{V \in \mathcal{R}_k} \beta_V$ et des fonctions $_k v'_j$ et $_k w'$, les ensembles

$$\{\delta(s)\,{}_k v'_j(s) \mid s \in P_\delta,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\{\delta(s)(\delta^{-1}(s) \vee 2^k)\,{}_k w'(s) \mid s \in P_\delta,\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\{\delta(s)(\delta^{|q|}(s) \wedge 2^{-k|q|}) D_{q\,k} v'_j(s) \mid s \in P_\delta,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\{\delta(s)(\delta^{|q|-1}(s) \wedge 2^{-k(|q|-1)}) D_{q\,k} w'(s) \mid s \in P_\delta,\ k = 1, 2, 3, \ldots\}$$

sont bornés dans A, pour $|q| \geqslant 1$, avec $f \wedge g = \min(f, g)$ et $f \vee g = \max(f, g)$. On utilise la formule de Leibniz pour la dernière estimation. En utilisant la formule, pour m entier positif

$$D_q f_1 \dots f_m = \sum_{{}_1p+\dots+{}_mp=q} \frac{q!}{{}_1p! \dots {}_mp!} D_{{}_1p} f_1 \dots D_{{}_mp} f_m$$

où ${}_1p, \dots, {}_mp \in \mathbf{N}^{2n}$ et où $q! = q_1! \dots q_{2n}!$, nous voyons que les ensembles

$$\{\delta^m(s)(\delta^{-m+|q|}(s) \vee 2^{k(m-|q|)}) D_{q\,k}\wp'^m(s) \mid s \in P_\delta, k = 1, 2, 3, \dots\}$$

pour $m \geqslant |q|$ et

$$\{\delta^m(s)(\delta^{-m+|q|}(s) \wedge 2^{k(m-|q|)}) D_{q\,k}\wp'^m(s) \mid s \in P_\delta, k = 1, 2, 3, \dots\}$$

pour $m \leqslant |q|$, sont bornés dans A, de sorte que l'ensemble

$$\{\delta^2(s)(\delta^{|q|-1}(s) \wedge 2^{-k(|q|-1)}) D_{q\,k}\wp_j(s) \mid s \in P_\delta, \quad j = 1, \dots, n,\ k = 1, 2, 3, \dots\}$$

pour $|q| \geqslant 1$, soit borné dans A. En utilisant la formule de Leibniz et les estimations précédentes, nous voyons enfin que l'ensemble

$$\{2^k \delta^{2+|q|}(s) D_q[{}_k\wp_j(s)\,{}_{k+1}\wp(s)] \mid s \in P_\delta, \quad j = 1, \dots, n,\ k = 1, 2, 3, \dots\}$$

est borné dans A, donc $\Xi_{2,p}(\delta; \wp)$ est borné dans A. □

9. Pour établir le théorème 4, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 8. — *Soit* $\delta_{i,a}$ *la fonction lipschitzienne définie par* (1) (cf. sect. 5), *alors pour tout* $s \in P_{\delta_{i,a}}$ *et pour tout* ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, *il existe* μ, $0 < \mu < 1/2$ *tel que sur la boule de centre* s *de rayon* $\mu\delta_{i,a}(s)$, *il existe des coefficients spectraux* $u_1, \dots, u_n$ *de* a *de classe* C^∞, *à valeurs dans* A_i, *tels que*

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} \|u_j(s')\|_i \leqslant [(1-\varepsilon)\delta_{i,a}(s)]^{-1} \leqslant [(1-2\varepsilon)\delta_{i,a}(s')]^{-1}$$

et

$$(3) \quad \|D_q u_j(s')\|_i \leqslant q![(1-\varepsilon)\delta_{i,a}(s)]^{-|q|-1} \leqslant q![(1-2\varepsilon)\delta_{i,a}(s')]^{-|q|-1}$$

Preuve. — Soit $0 < \varepsilon' < 1$, pour tout $s \in P_{\delta_{i,a}}$, il existe $b \in A_i^n$ tel que $\langle a - s, b\rangle = 1$ et

$$(1 - \varepsilon')\delta_{i,a}(s) \leqslant \left[\sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_i\right]^{-1} \leqslant \delta_{i,a}(s).$$

Soit $0 < \varepsilon'' \leqslant 1 - \varepsilon'$, si $t \in \mathbf{C}^n$ est tel que

$$|t| = \left[\sum_{j=1}^{n} |t_j|^2\right]^{1/2} \leqslant (1 - \varepsilon')\varepsilon''\delta_{i,a}(s),$$

alors $1 - \Sigma t_j b_j$ est inversible. Posons $s' = s + t$ et

$$u_k(s') = b_k(1 - \Sigma t_j b_j)^{-1},$$

alors $\langle a - s', u(s')\rangle = 1$. D'après le choix de b et de t, nous avons

$$(4) \quad \delta_{i,a}(s') \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_j(s')\|_i\right)^{-1} \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_i\right)^{-1} - |t| \geqslant (1 - \varepsilon')(1 - \varepsilon'')\delta_{i,a}(s).$$

La fonction $\delta_{i,a}$ étant lipschitzienne de constante 1, d'après le choix de t, nous avons

$$(5) \quad [1 - (1 - \varepsilon')\varepsilon'']\delta_{i,a}(s) \leqslant \delta_{i,a}(s') \leqslant [1 + (1 - \varepsilon')\varepsilon'']\delta_{i,a}(s).$$

De (4) et (5) nous tirons (2), avec $\varepsilon = (1 - \varepsilon')\varepsilon'' + \varepsilon'$, $\mu = (1 - \varepsilon')\varepsilon''$.

Soit maintenant $q = (q_1, \ldots, q_{2n}) \in \mathbf{N}^{2n}$, nous avons

$$\begin{aligned}\|D_q u_k(s')\|_i &\leqslant \|b_k\|_i \prod_{j=1}^{n} \|b_j\|_i^{q_{2j-1}+q_{2j}} \sum_{m=|q|}^{\infty} \frac{m!}{(m - |q|)!} (\varepsilon'')^{m-|q|} \\ &\leqslant q!\left(\frac{\Sigma\|b_j\|_i}{1-\varepsilon''}\right)^{|q|+1} \leqslant q![(1 - \varepsilon)\delta_{i,a}(s)]^{-|q|-1} \\ &\leqslant q![(1 - 2\varepsilon)\delta_{i,a}(s')]^{-|q|-1}. \ \square\end{aligned}$$

Preuve du théorème 4. — Soit $\delta \in \Delta_r(a)$, d'après la proposition 2, il existe un $M > 0$ et un $\delta_{i,a}$ tels que $\delta \leqslant M\delta_{ia}$.' Il suffit de montrer qu'il existe des coefficients spectraux $u_1, \ldots, u_n$ de a de classe C^∞ sur $P_{\delta_{i,a}} = \{\delta_{i,a}(s) > 0\}$ tels que l'ensemble

$$\Xi_{1,p}(\delta_{i,a}; u) = \{\delta_{i,a}^{1+|q|}(s) D_q u_j(s) \mid s \in P_{\delta_{i,a}}, |q| \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

soit borné dans l'algèbre de Banach A_i (cf. sect. 5)

Posons $u_j(s) = \sum_{V \in \mathfrak{R}_0} \beta_V(s) u_{V,j}(s)$ où $\Sigma \beta_V$ est la partition de l'unité construite dans la proposition 7, où $u_{V,j}$ sont des fonctions de classe C^∞ vérifiant les conditions du lemme 8 sur le cube V (les points $s \in P_{\delta_{i,a}}$ du lemme 8 étant remplacés par les centres des cubes V) et ceci est possible si nous prenons le même μ dans les lemmes 5 et 8. Alors les u_j sont des coefficients spectraux de a de classe C^∞ sur $P_{\delta_{i,a}}$ à valeurs dans A_i. D'après la formule de Leibniz et la construction des β_V, l'ensemble $\Xi_{1,p}(\delta_{i,a}; u)$ est borné dans A_i pour tout $p \in \mathbf{N}$. □

Une formule intégrale.

Soit A une b-algèbre. Dans le reste de cet article, sauf mention explicite du contraire, nous ne considérons que des systèmes $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tels que $\Delta(a)$ contienne des fonctions qui ne décroissent pas trop vite vers zéro à l'infini dans le sens qu'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que

$$\delta(s) \geqslant C|s|^{-k}$$

au voisinage de l'infini ($*$) et nous ne considérerons que des $\delta \in \Delta(a)$ qui vérifient la condition ($*$).

10. Soient δ une fonction lipschitzienne spectrale pour a, N un entier positif, Σ un voisinage compact de

$$\delta^{-1}(0) = \{s \mid \delta(s) = 0\}.$$

Nous désignons par $X(\delta; N; \Sigma)$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbf{C}^n$, à support dans Σ, telles que $\bar{\partial} f$ soit continue, soit nulle sur $\delta^{-1}(0)$ et que

$$\|f\|_{\delta^N} = \sup_{s \in \mathbf{C}^n} |f(s)| + \sup_{s \in P_\delta} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{s}_j}(s) \right| \delta^{-N}(s) < +\infty.$$

Alors $X(\delta; N; \Sigma)$ est une algèbre de Banach (non unifère) à une équivalence de norme près.

Pour simplifier l'écriture, nous omettrons le signe $\wedge$ du produit extérieur, nous poserons

$$d\bar{s}\, ds = d\bar{s}_1 \ldots d\bar{s}_n\, ds_1 \ldots ds_n$$
$$= d\bar{s}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{s}_n \wedge ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n.$$

Nous orientons l'espace $\mathbf{C}^n$ de telle manière que pour tout domaine D de $\mathbf{C}^n$ nous ayons $(2\pi i)^{-n}\int_D d\bar{s}\, ds > 0$. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont des fonctions de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ à valeurs dans un espace de Banach, nous écrivons

$$\bar{\partial} u_1 \ldots \bar{\partial}\hat{u}_j \ldots \bar{\partial} u_n = \bar{\partial} u_1 \ldots \bar{\partial} u_{j-1}\, \bar{\partial} u_{j+1} \ldots \bar{\partial} u_n$$

et nous poserons

$$\bar{\omega}(u) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} u_j\, \bar{\partial} u_1 \ldots \bar{\partial}\hat{u}_j \ldots \bar{\partial} u_n.$$

Nous désignerons par ${}_2\mathrm{E}^1(a;\, \delta)$ l'ensemble des n-tuples $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de coefficients spectraux de a de classe C^1 sur $P_\delta = \{s \mid \delta(s) > 0\}$ tels que l'ensemble $\Xi_{2,1}(\delta;\ u)$ (cf. sect. 6) soit borné dans A.

Pour N assez grand, $f \in X(\delta;\ N;\ \Sigma)$ et $u \in {}_2\mathrm{E}^1(a;\, \delta)$ (non vide d'après le théorème 3 lorsqu'on modifie δ au voisinage de l'infini pour qu'elle y soit bornée), nous poserons

$$(6) \qquad f[a;\, u] = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{(2\pi i)^n}\int_{P_\delta} \bar{\partial} f(s)\bar{\omega}(u(s))\, ds.$$

Alors l'intégrale (6) est non seulement convergente mais indépendante de $u \in {}_2\mathrm{E}^1(a;\, \delta)$. De façon plus précise, nous avons la

PROPOSITION 9. — *Si* $N \geqslant 5(n-1)$ *et si* $u, v \in {}_2\mathrm{E}^1(a;\, \delta)$, *les intégrales* $f[a;\, u]$ *et* $f[a;\, v]$ *existent et sont égales.*

11. Étudions d'abord quelques propriétés de $\bar{\omega}(u)$ avant d'établir cette proposition.

LEMME 10. — *Si* $u, v \in {}_2\mathrm{E}^1(a;\, \delta)$, *alors*

(i) $\bar{\omega}(u)$ *est* $\bar{\partial}$-*fermée :* $\bar{\partial}\bar{\omega}(u) = 0$.

(ii) $(a_j - s_j)\bar{\omega}(u)$ *est* $\bar{\partial}$-*exacte, pour* $j = 1, \ldots, n$:

$$(a_j - s_j)\bar{\omega}(u) = (-1)^{j-1}\, \bar{\partial} u_1 \ldots \bar{\partial}\hat{u}_j \ldots \bar{\partial} u_n.$$

(iii) $\bar{\omega}(v) - \bar{\omega}(u)$ *est* $\bar{\partial}$-*exacte, il existe* $\sigma(v;\, u)$ *tel que*

$$\bar{\omega}(v) - \bar{\omega}(u) = \bar{\partial}\sigma(v;\, u)$$

les dérivations extérieures $\bar{\partial}\bar{\omega}(u)$ *et* $\bar{\partial}\sigma(v;\, u)$ *étant prises au sens des distributions.*

Preuve. — (i) Il est facile à voir que $\bar{\omega}(u)$ est n-linéaire alternée et que $n^{-1}\,\bar{\delta}\bar{\omega}(u) = \bar{\delta}u_1 \ldots \bar{\delta}u_n = \bar{\delta}(u)$. De

$$\langle a - s,\, u\rangle = 1,$$

nous tirons

$$\begin{aligned}
n^{-1}\,\bar{\delta}\bar{\omega}(u) \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j\,\bar{\delta}u_1 \ldots \bar{\delta}u_{j-1}\,\bar{\delta}[(a_j - s_j)u_j]\,\bar{\delta}u_{j+1} \ldots \bar{\delta}u_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j\,\bar{\delta}u_1 \ldots \bar{\delta}u_{j-1}\,\bar{\delta}\Big[1 - \sum_{k\neq j}(a_k - s_k)u_k\Big]\,\bar{\delta}u_{j+1} \ldots \bar{\delta}u_n \\
&= -\sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{k\neq j}(a_k - s_k)\,\bar{\delta}u_1 \ldots \bar{\delta}u_{j-1}\,\bar{\delta}u_k\,\bar{\delta}u_{j+1} \ldots \bar{\delta}u_n = 0.
\end{aligned}$$

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned}
(a_j - s_j)\bar{\omega}(u) &= \bar{\omega}(u_1, \ldots, (a_j - s_j)u_j, \ldots, u_n) \\
&= \bar{\omega}\Big(u_1, \ldots, 1 - \sum_{k\neq j}(a_k - s_k)u_k, \ldots, u_n\Big) \\
&= (-1)^{j-1}\,\bar{\delta}u_1 \ldots \bar{\delta}\hat{u}_j \ldots \bar{\delta}u_n \\
&\qquad - \sum_{k\neq j}(a_k - s_k)\bar{\omega}(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \\
&= (-1)^{j-1}\,\bar{\delta}u_1 \ldots \bar{\delta}\hat{u}_j \ldots \bar{\delta}u_n.
\end{aligned}$$

(iii) Considérons le cas particulier suivant

$$\begin{gathered}
\mathrm{U}_1 = u_1 + (a_2 - s_2)\alpha, \qquad \mathrm{U}_2 = u_2 - (a_1 - s_1)\alpha \\
\mathrm{U}_j = u_j, \qquad j = 3, \ldots, n
\end{gathered}$$

où $\alpha : \mathrm{P}_\delta \to \mathrm{E}$ est de classe C^1, E étant un espace de Banach, $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{A}$ avec l'inclusion bornée. Nous avons $\langle a - s,\, \mathrm{U}\rangle = 1$ sur P_δ et

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}(\mathrm{U}) - \bar{\omega}(u) \\
&= \bar{\omega}(u_1 + (a_2 - s_2)\alpha,\, u_2 - (a_1 - s_1)\alpha,\, u_3, \ldots, u_n) - \bar{\omega}(u) \\
&= \bar{\omega}(\alpha,\, (a_1 - s_1)u_1 + (a_2 - s_2)u_2,\, u_3, \ldots, u_n) \\
&= \bar{\omega}\Big(\alpha,\, 1 - \sum_{j=3}^{n}(a_j - s_j)u_j,\, u_3, \ldots, u_n\Big) = \bar{\delta}\sigma(\mathrm{U}\,;\, u)
\end{aligned}$$

avec $\sigma(\mathrm{U}\,;\, u) = -\,\alpha\bar{\delta}u_3 \ldots \bar{\delta}u_n$. Ce qui démontre (iii) dans ce cas particulier. Soient maintenant $u, v \in {}_2\mathrm{E}^1(a\,;\,\delta)$, on a

(7)

$$v_j - u_j = \langle a - s,\, u\rangle v_j - \langle a - s,\, v\rangle u_j = \sum_{k=1}^{n}(a_k - s_k)\alpha_{kj}$$

où $\alpha_{kj} = u_k v_j - v_k u_j$ (donc $\alpha_{kj} = -\alpha_{jk}$, $\alpha_{jj} = 0$) (ces égalités correspondent à l'unicité de la résolvante dans le cas unidimensionnel). Le cas général se déduit donc du cas particulier précédent. □

Le lemme suivant contrôle la croissance de la forme $\sigma(v; u)$. Fixons d'abord une notation. Une forme différentielle μ de type $(0, q)$ est de la forme

$$\mu = \sum_{j_1 < \cdots < j_q} \mu_{j_1 \cdots j_q} d\bar{s}_{j_1} \ldots d\bar{s}_{j_q} = \sum_{J_q} \mu_{J_q} d\bar{s}_{J_q}.$$

Lemme 11. — *Si* $u, v \in {}_2E^1(a; \delta)$, *si* $N = 5(n-1)$ *et si* Σ *est un voisinage compact de* $\delta^{-1}(0)$, *les ensembles*

$$\{\delta^{N-1}(s)\sigma_{J_{n-2}}(v(s); u(s)) \mid s \in \Sigma \setminus \delta^{-1}(0)\}$$

et

$$\{\delta^{N}(s)\,(\bar{\partial}\sigma)_{J_{n-1}}(v(s); u(s)) \mid s \in \Sigma \setminus \delta^{-1}(0)\}$$

sont bornés dans A.

Preuve. — Comme $u, v \in {}_2E^1(a; \delta)$, $\delta^2(s)u_j(s)$, $\delta^2(s)v_j(s)$ et les coefficients des formes $\delta^3(s)\,\bar{\partial}u_j(s)$, $\delta^3(s)\,\bar{\partial}v_j(s)$ sont bornés sur $\Sigma\setminus\delta^{-1}(0)$, $j = 1, \ldots, n$. D'autre part $\sigma(v; u)$ est la somme de $n(n-1)/2$ formes différentielles $\sigma_{jk}(U)$:

$$\sigma_{jk}(U) = \pm\, \alpha_{jk}\, \bar{\partial}U_1 \ldots \bar{\partial}\hat{U}_j \ldots \bar{\partial}\hat{U}_k \ldots \bar{\partial}U_n$$

où $U_m(s)$, pour $m = 1, \ldots, n$, a la forme

$$U_m(s) = u_m(s) + \sum_{i \in I_m} (a_i - s_i)\alpha_{im}(s)$$

où I_m est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ et où les α_{jk}, α_{im} sont les coefficients des égalités spectrales (7). De sorte que $\delta^4(s)U_m(s)$, $\delta^4(s)\alpha_{im}(s)$ et les coefficients des formes $\delta^5(s)\ \bar{\partial}U_m(s)$, $\delta^5(s)\ \bar{\partial}\alpha_{im}(s)$, pour $i \in I_m$, et $m = 1, \ldots, n$, soient bornés sur $\Sigma\setminus\delta^{-1}(0)$. D'où le lemme, avec $N = 5 + 5(n-2) = 5(n-1)$. □

12. *Preuve de la proposition* 9. — L'intégrale $f[a; u]$ converge car $\delta^{-N}\,\bar{\partial}f$ est bornée et à support dans Σ et $\delta^{3n-1}\bar{\omega}(u)$ est bornée dans $\Sigma\setminus\delta^{-1}(0)$. Il en est de même de

$f[a; v]$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$$\delta^{-1}(0)_\varepsilon = \{s \mid \operatorname{dist}(s, \delta^{-1}(0)) < \varepsilon\} \subset \Sigma$$

et soit

$$(8) \begin{cases} \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{C}^n), \ 0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1 \\ \varphi_\varepsilon = 1 \ \text{au voisinage de} \ \delta^{-1}(0) \\ \operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset \delta^{-1}(0)_\varepsilon \ \text{et} \\ \| \, |\bar\partial \varphi_\varepsilon| \, \|_\infty = \sup\limits_{s \in \mathbf{C}^n} \sum\limits_{j=1}^n |\partial \varphi_\varepsilon(s)/\partial \bar s_j| \leqslant C\varepsilon^{-1} \ \text{pour un} \ C > 0 \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, nous posons

$$K_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(2\pi i)^{-n}.$$

Nous avons

$$f[a; u] = K_n \int \bar\partial(f\varphi_\varepsilon)\bar\omega(u)\, ds + K_n \int \bar\partial(f(1-\varphi_\varepsilon))\bar\omega(u)\, ds.$$

D'après le lemme 10 (i), $\bar\omega(u)$ est $\bar\partial$-fermée, donc

$$\bar\partial(f(1-\varphi_\varepsilon))\bar\omega(u)\, ds = d[f(1-\varphi_\varepsilon)\bar\omega(u)\, ds].$$

La dernière forme est continue et à support compact, d'après la formule de Stokes, son intégrale est nulle et

$$f[a; u] = K_n \int \bar\partial(f\varphi_\varepsilon)\bar\omega(u)\, ds,$$

par suite

$$\begin{aligned} f[a; v] - f[a; u] &= K_n \int \bar\partial(f\varphi_\varepsilon)\, \bar\partial\sigma(v; u)\, ds \\ &= K_n \int \varphi_\varepsilon\, \bar\partial f\, \bar\partial\sigma(v; u)\, ds + K_n \int f \bar\partial\varphi_\varepsilon\, \bar\partial\sigma(v; u)\, ds \end{aligned}$$

où $\sigma(v; u)$ est donnée dans le lemme 10 (iii). La forme $f\bar\partial\varphi_\varepsilon\,\bar\partial\sigma$ est continue et à support compact, la forme $\bar\partial f\,\bar\partial\sigma$ est bornée d'après le lemme 11 et le choix de N. Comme

$$\operatorname{mes}(\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \setminus \delta^{-1}(0))$$

converge vers zéro avec ε, il en est de même de $\int \varphi_\varepsilon \bar\partial f\, \bar\partial\sigma\, ds$. D'autre part, par Stokes,

$$\begin{aligned} \int f\bar\partial\varphi_\varepsilon\, \bar\partial\sigma\, ds &= (-1)^{n-2} \int d[f\bar\partial\varphi_\varepsilon \sigma\, ds] + (-1)^{n-1} \int \bar\partial f \bar\partial\varphi_\varepsilon\sigma\, ds \\ &= (-1)^{n-1} \int \bar\partial f\, \bar\partial\varphi_\varepsilon\sigma\, ds. \end{aligned}$$

Comme δ est lipschitzienne et que $\| \, |\bar\partial\varphi_\varepsilon| \, \|_\infty \leqslant C\varepsilon^{-1}$, nous voyons que $\int \bar{\partial} f \, \bar{\partial} \varphi_\varepsilon \sigma \, ds$ tend vers zéro avec ε, car $\bar{\partial} f \, \bar{\partial} \varphi_\varepsilon \sigma$ est bornée indépendamment de ε et que $\operatorname{supp} \bar{\partial} \varphi_\varepsilon \subseteq \operatorname{supp} \varphi_\varepsilon$. Par suite $f[a; u] = f[a; v]$. □

Produit direct.

13. Le théorème suivant formule des conditions pour lesquelles l'application $f \longmapsto f[a; u]$ se comporte bien pour les produits directs.

Théorème 12 (du produit direct). — *Soient*

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{A}^n, \qquad b = (b_1, \ldots, b_{n'}) \in \mathrm{A}^{n'},$$

$c = (a, b)$, $\delta \in \Delta_{\mathrm{L}}(a)$ *et* $\delta' \in \Delta_{\mathrm{L}}(b)$. *Soient d'autre part*

$$u \in {}_2\mathrm{E}^1(a; \delta), \qquad v \in {}_2\mathrm{E}^1(b; \delta'),$$

N *un entier* $\geqslant 3n - 1$, N' *un entier* $\geqslant 3n' - 1$, λ *la fonction définie par* $\lambda(s, s') = \delta^\alpha(s)(\delta^\alpha(s) + \delta'^\beta(s'))^{-1}$ *et* $w(u, (1 - \lambda)v)$ *avec* $n\alpha \geqslant \mathrm{N} + 1$, $\alpha \geqslant 2$, $n'\beta \geqslant \mathrm{N}' + 1$, $\beta \geqslant 2$. *Soient enfin*

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathrm{M} & \textit{un entier} \quad \geqslant \mathrm{N} + (\mathrm{N}' + 1)^{\alpha\beta - 1} \\ \mathrm{M}' & \textit{un entier} \quad \geqslant \mathrm{N}' + (\mathrm{N} + 1)^{\beta\alpha - 1} \end{cases}$$

Σ *un voisinage compact de* $\delta^{-1}(0)$, Σ' *un voisinage compact de* $\delta'^{-1}(0)$, $f \in \mathrm{X}(\delta; \mathrm{M}; \Sigma)$, $g \in \mathrm{X}(\delta'; \mathrm{M}'; \Sigma')$ *et*

$$h(s, s') = f \otimes g(s, s') = f(s)g(s'),$$

alors

$$(10) \quad f \otimes g[c; w] = (-1)^{n+n'-1} \frac{(n + n' - 1)\,!}{(2\pi i)^{n+n'}} \int \bar{\partial} h \bar{\omega}(w) \, ds \, ds'$$

existe et est égale à

$$(11) \quad f[a; u]g[b; v] = (-1)^{n+n'} \frac{(n - 1)\,!(n' - 1)\,!}{(2\pi i)^{n+n'}} \int \bar{\partial} f \bar{\omega}(u) \, ds \int \bar{\partial} g \bar{\omega}(v) \, ds'$$

le domaine d'intégration de (10) *étant* $\Sigma \times \Sigma' \setminus \delta^{-1}(0) \times \delta'^{-1}(0)$ *et les domaines d'intégration de* (11) *étant respectivement* $\Sigma \setminus \delta^{-1}(0)$ *et* $\Sigma' \setminus \delta'^{-1}(0)$.

14. Les sections 15, 16 et 17 sont consacrées à la démonstration de ce théorème. Expliquons d'abord quelques notations. Nous pouvons supposer δ et δ' de classe C^∞ sur P_δ et $P_{\delta'}$ respectivement, δ^{p+1} et δ'^{p+1} de classe C^p sur $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^{n'}$ respectivement, pour $p \in \mathbf{N}$. Ces restrictions ne nuisent pas à la généralité car si $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$ est lipschitzienne, alors il existe $\gamma \sim \delta$ (c'est-à-dire tel que $\varepsilon\delta \leqslant \gamma \leqslant M\delta$) de classe C^∞ sur P_δ tel que γ^{p+1} soit de classe C^p sur $\mathbf{C}^n$ (cf [19, p. 47], [7, p. 14] ou [8, p. 6] qui exprime ce résultat pour δ bornée, mais le cas général est facile à démontrer). La fonction λ est alors de classe C^1 sur

$$\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'} \setminus \delta^{-1}(0) \times \delta'^{-1}(0), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad \lambda(s, s') = 0$$

si et seulement si $s \in \delta^{-1}(0)$ et $\lambda(s, s') = 1$ si et seulement si $s' \in \delta'^{-1}(0)$. D'autre part w est un $(n + n')$-tuple de fonctions :

$$\begin{aligned} w_j(z) &= \lambda(z)u_j(s), & j &= 1, \ldots, n \\ w_{n+k}(z) &= (1 - \lambda(z))v_k(s'), & k &= 1, \ldots, n'. \end{aligned}$$

Nous avons $\langle c - z, w(z)\rangle = 1$ sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'} \setminus \delta^{-1}(0) \times \delta'^{-1}(0)$ avec $z = (s, s')$.

15. Calcul de $\bar\omega(w)$. — Nous avons

$$\begin{aligned} \bar\omega(w) &= \bar\omega(\lambda u, (1 - \lambda)v) \\ &= \bar\omega(\lambda u)\, \bar{\boldsymbol\delta}((1 - \lambda)v) + (-1)^n\, \bar{\boldsymbol\delta}(\lambda u)\bar\omega((1 - \lambda)v) \end{aligned}$$

où $\bar{\boldsymbol\delta}(u) = \bar\delta u_1 \ldots \bar\delta u_n$ et où $\lambda u = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$, d'autre part

$$\begin{aligned} &\bar\omega(\lambda u) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\lambda u_j(\lambda\, \bar\delta u_1 + u_1\, \bar\delta\lambda) \ldots \bar\delta(\widehat{\lambda u_j}) \ldots (\lambda\bar\delta u_n + u_n\, \bar\delta\lambda) \\ &= \lambda^n\bar\omega(u) + \lambda^{n-1}\, \bar\delta\lambda\sigma(u) = \lambda^n\bar\omega(u) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}u_j\Bigg[\sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k-1}u_k\, \bar\delta u_1 \ldots \bar\delta\hat u_k \ldots \bar\delta\hat u_j \ldots \bar\delta u_n \\ &\qquad + \sum_{m=j+1}^{n} (-1)^m u_m\, \bar\delta u_1 \ldots \bar\delta\hat u_j \ldots \bar\delta\hat u_m \ldots \bar\delta u_n\Bigg] \\ &= \sum_{\substack{j<k \\ 1\leqslant j\leqslant n-1 \\ 2\leqslant k\leqslant n}} [(-1)^{j+k} + (-1)^{j+k+1}]u_j u_k\, \bar\delta u_1 \\ &\qquad \ldots \bar\delta\hat u_j \ldots \bar\delta\hat u_k \ldots \bar\delta u_n] = 0 \end{aligned}$$

et

$$\bar{\partial}(\lambda u) = \lambda_n \bar{\partial}(u) + \lambda^{n-1}\, \bar{\partial}\lambda \bar{\omega}(u) = \lambda^{n-1}\, \bar{\partial}\lambda \bar{\omega}(u),$$

car $\bar{\partial}(u) = 0$ d'après le lemme 10 (i). Par suite

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(w) &= \lambda^n \bar{\omega}(u)(1-\lambda)^{n'-1}\, \bar{\partial}(1-\lambda)\bar{\omega}(v) \\ &\qquad + (-1)^n \lambda^{n-1}\, \bar{\partial}\lambda \bar{\omega}(u)(1-\lambda)^{n'} \bar{\omega}(v) \\ &= (-1)^n \lambda^{n-1}(1-\lambda)^{n'-1}\, \bar{\partial}\lambda \bar{\omega}(u)\bar{\omega}(v).\end{aligned}$$

16. Existence de $f \otimes g[c;\ w]$. — Dans le reste de cet article, la notation $\lesssim$ se lit « est majoré par un multiple scalaire de ». Nous avons

$$\begin{aligned}|\partial\lambda(s, s')/\partial\bar{s}_j| &\lesssim \delta^{\alpha-1}(s)\, \delta'^{\beta}(s')(\delta^{\alpha}(s) + \delta'^{\beta}(s'))^{-2} \quad j = 1, \ldots, n \\ |\partial\lambda(s, s')/\partial\bar{s}_k| &\lesssim \delta^{\alpha}(s)\, \delta'^{\beta-1}(s')(\delta^{\alpha}(s) + \delta'^{\beta}(s'))^{-2} \quad k = 1, \ldots, n'.\end{aligned}$$

Posons $\bar{\partial}h(s, s')\bar{\omega}(w(s, s')) = \mu(s, s')\, d\bar{s}\, d\bar{s}'$, alors

$$\mu(s, s') = 0\left(\left[\left(\sum_j |\partial f(s)/\partial\bar{s}_j|\right) \delta(s) + \left(\sum_k |\partial g(s')/\partial\bar{s}'_k|\right) \delta'(s')\right] \times \frac{\delta^{\alpha(n-1)+\alpha-1-N}(s)\ \delta'^{\beta(n'-1)+\beta-1-N'}(s')}{(\delta^{\alpha}(s) + \delta'^{\beta}(s'))^{n+n'}}\right)$$

où N et N′ vérifient les conditions d'existence de $f[a;\ u]$ et $g[b;\ v]$ respectivement, à savoir $N \geqslant 3n - 1$ et $N' \geqslant 3n' - 1$. Nous avons utilisé la notation suivante : si $\mu : X \to A$, $\nu : X \to \mathbf{R}_+$ nous posons $\mu = 0(\nu)$ s'il existe un borné B de A et $\rho : X \to B$ tels que $\mu(x) = \nu(x)\rho(x)$ pour $x \in X$. De l'inégalité

$$(12) \qquad x^{\xi} y^{\eta} \lesssim (x + y)^{\xi+\eta}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad \xi \geqslant 0, \quad \eta \geqslant 0$$

et du fait que $\delta^{-M}\, \bar{\partial} f$ et $\delta'^{-M'}\, \bar{\partial} g$ sont bornés, nous tirons

$$\delta^{\alpha n - N + M}(s)\ \delta'^{\beta n' - N' - 1}(s') \lesssim (\delta^{\alpha}(s) + \delta'^{\beta}(s'))^{n+n'}$$

et

$$\delta^{\alpha n - N - 1}(s)\ \delta'^{\beta n' - N' + M'}(s') \lesssim (\delta^{\alpha}(s) + \delta'^{\beta}(s'))^{n+n'},$$

ce qui montre que $\mu(s, s')$ est borné et $h[c;\ w]$ existe.

17. Démonstration de l'égalité

$$f \otimes g[c;\ w] = f[a;\ u]g[b;\ v].$$

Nous avons, par Fubini

$$h[c;w] - f[a;u]g[b;v] = \mathrm{K}\int(\bar\partial h\,\bar\partial \mathrm{P} - \bar\partial f\,\bar\partial g)\bar\omega(u)\bar\omega(v)\,ds\,ds'$$

où $\mathrm{K} = (-1)^{n-1}\mathrm{K}_n\mathrm{K}_{n'}$, où $\mathrm{K}_m = (-1)^{m-1}(m-1)!\,(2\pi i)^{-m}$ pour m entier positif et où P est un polynôme en λ, $\mathrm{P} = \lambda^n \mathrm{Q}(\lambda)$, $\mathrm{Q}(\lambda)$ étant un polynôme en λ :

$$\mathrm{P} = \frac{(n+n'-1)!}{(n-1)!\,(n'-1)!}\lambda^n \left[\sum_{j=0}^{n'-1}(-1)^j \frac{(n'-1)!}{(n'-j-1)!\,j!\,(n+j)}\lambda^j\right],$$

P est une primitive de

$$\bar\partial \mathrm{P} = (n+n'-1)!\,((n-1)!\,(n'-1)!)^{-1}\lambda^{n-1}(1-\lambda)^{n'-1}\,\bar\partial\lambda.$$

Soient $\varphi_\varepsilon(s)$ définie par (8) et $\psi_\varepsilon(s')$ définie sur $\mathbf{C}^{n'}$ de la même manière, c'est-à-dire ψ_ε est une fonction plateau de classe C^∞ qui décroît vers la fonction caractéristique de $\delta'^{-1}(0)$, pour $\varepsilon \to 0$. Posons

$$\Phi_\varepsilon(s, s') = \varphi_\varepsilon(s) + \psi_\varepsilon(s') - \varphi_\varepsilon(s)\psi_\varepsilon(s')$$

et

$$\Theta_\varepsilon(s, s') = (1-\varphi_\varepsilon(s))(1-\psi_\varepsilon(s')),$$

alors

$$\Phi_\varepsilon + \Theta_\varepsilon = 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp}\Phi_\varepsilon \subset \delta^{-1}(0)_\varepsilon \times \delta'^{-1}(0)_\varepsilon.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(\bar\partial h\,\bar\partial \mathrm{P} - \bar\partial f\,\bar\partial g)\bar\omega(u)\bar\omega(v) &= \bar\partial(g\,\bar\partial f - \mathrm{P}\,\bar\partial h)\bar\omega(u)\bar\omega(v)\\ &= \bar\partial\{(\Phi_\varepsilon + \Theta_\varepsilon)(g\,\bar\partial f - \mathrm{P}\,\bar\partial h)\bar\omega(u)\bar\omega(v)\}\end{aligned}$$

car $\bar\omega(u)$ et $\bar\omega(v)$ sont $\bar\partial$-fermées. Comme

$$d[\Theta_\varepsilon(g\,\bar\partial f - \mathrm{P}\,\bar\partial h)\bar\omega(u)\bar\omega(v)\,ds\,ds']$$

est continue et à support compact, son intégrale est nulle, d'après Stokes. Ainsi

$$\begin{aligned}h[c;w] - f[a;u]g[b;v] &= \mathrm{K}\int\bar\partial(\Phi_\varepsilon(g\,\bar\partial f - \mathrm{P}\,\bar\partial h))\,\bar\omega(u)\bar\omega(v)\,ds\,ds'\\ &= \mathrm{K}\int\Phi_\varepsilon(\bar\partial g\,\bar\partial f - \bar\partial \mathrm{P}\,\bar\partial h)\,\bar\omega(u)\bar\omega(v)\,ds\,ds'\\ &\quad + \mathrm{K}\int\bar\partial\Phi_\varepsilon(g\,\bar\partial f - \mathrm{P}\,\bar\partial h)\,\bar\omega(u)\bar\omega(v)\,ds\,ds'\end{aligned}$$

Comme $\Phi_\varepsilon(\bar\partial g\, \bar\partial f - \bar\partial P\, \bar\partial h)\, \bar\omega(u)\bar\omega(v)\, ds\, ds'$ est bornée et que la mesure de son support tend vers zéro avec ε, la première intégrale du dernier membre tend vers zéro avec ε. Nous avons à évaluer

$$\int \bar\partial\Phi_\varepsilon(g\, \bar\partial f - P\bar\partial\, (fg))\bar\omega(u)\bar\omega(v)\, ds\, ds'$$
$$= \int (1 - \varphi_\varepsilon)(1 - P)g\, \bar\partial\psi_\varepsilon\, \bar\partial f\, \bar\omega(u)\bar\omega(v)\, ds\, ds'$$
$$- \int (1 - \psi_\varepsilon)Pf\, \bar\partial\varphi_\varepsilon\, \bar\partial g\, \bar\omega(u)\bar\omega(v)\, ds\, ds'.$$

Les intégrales du dernier membre tendent vers zéro avec ε si les intégrandes sont bornées indépendamment de ε, car les mesures de leurs supports tendent vers zéro avec ε.

17.1. — Estimation de $P\, \bar\partial\varphi_\varepsilon\, \bar\partial g\, \bar\omega(u)\bar\omega(v)$.

δ étant lipschitzienne, nous avons $|\bar\partial\varphi_\varepsilon(s)| \lesssim (\delta(s))^{-1}$ et en posant

$$\bar\partial\varphi_\varepsilon\, (s)P(s, s')\, \bar\partial g\, (s')\bar\omega(u(s))\bar\omega(v(s')) = \mu_\varepsilon(s, s')\, d\bar s\, d\bar s'$$

nous avons

$$\mu_\varepsilon(s, s') = 0\Big(\Big(\sum_k |\partial g\, (s')/\partial\bar s'_k|\Big)\, \delta^{\alpha n}(s)$$
$$(\delta^\alpha(s) + \delta'^\beta(s'))^{-n}\, \delta^{-N-1}(s)\, \delta'^{-N'}(s')\Big).$$

Comme $\delta'^{-M'}(s')\, \bar\partial g(s')$ est bornée, pour que $\mu_\varepsilon(s, s')$ soit borné il suffit que $\delta^{\alpha n-N-1}(s)\, \delta'^{M'-N'}(s') \lesssim (\delta^\alpha(s) + \delta'^\beta(s'))^n$ et d'après l'inégalité (12) il suffit que

$$(\alpha n - N - 1)\alpha^{-1} + (M' - N')\beta^{-1} \geqslant n.$$

C'est précisément une des inégalités (9).

17.2. — Estimation de $(1 - P)\, \bar\partial\psi_\varepsilon\, \bar\partial f\, \bar\omega(u)\bar\omega(v)$.

Le polynôme $1 - P$ est de la forme $(1 - \lambda)^{n'}R(\lambda)$ où R est un polynôme en λ. Plus précisément, par un raisonnement de récurrence, on peut montrer que

$$1 - P = (1 - \lambda)^{n'}\left[\sum_{j=0}^{n-1} (n' + j - 1)\,!\, ((n' - 1)\,!\, j\,!)^{-1}\lambda^j\right].$$

En posant

$$(1 - P)\, \bar\partial\psi_\varepsilon\, \bar\partial f\, \bar\omega(u)\bar\omega(v) = \nu_\varepsilon(s, s')\, d\bar s\, d\bar s'$$

nous avons

$$\nu_\varepsilon(s, s') = 0\Big(\Big(\sum_j |\partial f(s)/\partial \bar{s}_j|\Big)\, \delta'^{\beta n'}(s') \\ (\delta^\alpha(s) + \delta'^\beta(s'))^{-n'}\, \delta^{-N}(s)\, \delta'^{-N'-1}(s')\Big).$$

Un raisonnement analogue à celui de 17.1 montre que $\nu_\varepsilon(s, s')$ est borné (indépendamment de ε). □

Invariance par rapport aux applications linéaires.

Dans cette partie, nous étudions l'invariance de $f[a]$ par rapport à certaines applications linéaires.

18. *Invariance par rapport aux automorphismes.*

Soient T un automorphisme de $\mathbf{C}^n$, T^{-1} son inverse, T^* la transposée de T^{-1}, $\delta \in \Delta_L(a)$, Σ un voisinage compact de $\delta^{-1}(0)$, N un entier positif et $f \in X(\delta; N; \Sigma)$. Posons

$$s = (s_1, \ldots, s_n), \qquad Ts = s' = (s'_1, \ldots, s'_n), \\ Ta = a' = (a'_1, \ldots, a'_n)$$

avec

$$s'_j = \sum_{k=1}^n T_{jk} s_k, \qquad a'_j = \sum_{k=1}^n T_{jk} a_k, \qquad j = 1, \ldots, n$$

(T_{jk}) étant la matrice associée à T. Posons ensuite $\delta' = \delta T^{-1}$, $f' = f T^{-1}$ et $\Sigma' = T\Sigma$, alors $\delta'(s') = \delta(s)$, $f'(s') = f(s)$ et $f' \in X(\delta'; N; \Sigma')$ et

Proposition 13. — *Si* $N \geqslant 5(n-1)$, *alors* $f[a] = f'[a']$.

Preuve. — Soit $u \in {}_2E^1(a; \delta)$, posons $u'_j = T^* u_j T^{-1}$, $j = 1, \ldots, n$, alors $u'_j : P_{\delta'} \to A$,

$$\langle a' - s', u'(s')\rangle = \langle T(a - s), T^* u(s)\rangle = \langle a - s, u(s)\rangle$$

et

$$\delta'(s') u'_j(s') = \delta(s) \sum_{k=1}^n T^*_{jk} u_k(s)$$

ce qui montre que $u' \in {}_2E^1(a'; \delta')$. D'après la proposition 9, il suffit de montrer que $f[a; u] = f'[a'; u']$. Pour le démontrer, il suffit d'utiliser les intégrales qui rapprochent $f[a; u]$ et

$f'[a'; u']$ comme dans la preuve de la proposition 9 et de faire un changement de variables. □

19. *Invariance par rapport aux injections.*

Désignons par $s = (s_1, \ldots, s_n)$ l'application identique de $\mathbf{C}^n$, par $s' = (s, t)$ celle de $\mathbf{C}^{n+1}$ et par $\mathrm{J}s = (s, 0)$ l'injection $\mathrm{J} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+1}$. Posons ensuite $a' = \mathrm{J}a = (a, 0) \in \mathrm{A}^{n+1}$.

Proposition 14. — (i) *Si* δ' *est définie sur* $\mathbf{C}^{n+1}$ *par* $\delta'(s') = \delta(s) + |t|$, *avec* $\delta \in \Delta_{\mathrm{L}}(a)$, *alors* $\delta' \in \Delta_{\mathrm{L}}(a')$.

(ii) *Inversement si* $\delta'' \in \Delta_{\mathrm{L}}(a')$ *et si* $\delta = \delta''\mathrm{J}$, *alors* $\delta \in \Delta_{\mathrm{L}}(a)$.

(iii) *Soient* Σ *un voisinage compact de* $\delta^{-1}(0)$, V *un voisinage compact de* 0 *dans* $\mathbf{C}$, $\Sigma' = \Sigma \times \mathrm{V}$ *et* N *un entier* $\geqslant 5n$. *Si* $f' \in \mathrm{X}(\delta'; \mathrm{N}; \Sigma')$ *et* $f = f'\mathrm{J}$ *alors* $f \in \mathrm{X}(\delta; \mathrm{N}; \Sigma)$ *et* $f[a] = f'[a']$.

Preuve. — (i) Soient $u_1, \ldots, u_n$ les coefficients spectraux de a sur P_δ tels que l'ensemble

$$\{\delta(s)u_j(s) \mid s \in \mathrm{P}_\delta, j = 1, \ldots, n\}$$

soit borné dans A. Posons

$$(13) \quad \begin{cases} \lambda(s') = \delta^\alpha(s)\,(\delta^\alpha(s) + |t|^\alpha)^{-1}, & \alpha \text{ entier} \geqslant 1 \\ w_j(s') = \lambda(s')u_j(s), & j = 1, \ldots, n \\ w_{n+1}(s') = -(1 - \lambda(s'))t^{-1} & \end{cases}$$

alors $\langle a' - s', w\rangle = \lambda\langle a - s, u\rangle + (1 - \lambda)t.t^{-1} = 1$ sur $\mathrm{P}_{\delta'}$ et on vérifie aisément que l'ensemble

$$\{\delta'(s')w_j(s') \mid s' \in \mathrm{P}_{\delta'}, \quad j = 1, \ldots, n + 1\}$$

est borné dans A, donc $\delta' \in \Delta(a')$ et il est clair que δ' est lipschitzienne.

(ii) est évident.

(iii) Soient $u \in {}_2\mathrm{E}^1(a; \delta)$, λ et w définies par (13) avec $\alpha \geqslant 3$. On peut, comme dans la section 14 supposer que δ soit de classe C^∞ sur P_δ, δ^{p+1} de classe C^p sur $\mathbf{C}^n$, alors λ est de classe C^1 sur $\mathrm{P}_{\delta'}$. On vérifie aisément que l'ensemble $\{\delta'^{2+|q|}(s')\mathrm{D}_q w_k(s')\}$ est borné sur tout sous-ensemble borné de $\mathrm{P}_{\delta'}$, $k = 1, \ldots, n + 1$, $q \in \mathbf{N}^{2(n+1)}$, $0 \leqslant |q| \leqslant 1$. D'après la proposition 9, il suffit de montrer que $f[a; u] = f'[a'; w]$.

Soit $g(t)$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{C}$, $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g = 1$ sur un voisinage de 0 de $\mathbf{C}$ et $\operatorname{supp} g \subseteq V$. Posons $H(s, t) = f'(s, t) - f(s)g(t)$, alors fg et $H \in X(\delta'; N; \Sigma')$. Nous avons, d'après le théorème du produit direct

$$f'[a'; w] = K_{n+1} \int \bar{\partial}(H + fg)\overline{\omega}(w)\, ds\, dt$$
$$= K_{n+1} \int \bar{\partial} H \overline{\omega}(w)\, ds\, dt + f[a; u]g[0].$$

Comme $g[0] = 1$, il suffit de montrer que

$$\int \bar{\partial} H \overline{\omega}(w)\, ds\, dt = 0.$$

Nous avons d'une part $\overline{\omega}(w) = (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\,\bar{\partial}\lambda\overline{\omega}(u)t^{-1}$ et d'autre part $t^{-1}\,\bar{\partial} H = \bar{\partial}(H.t^{-1}) - H\bar{\partial}(t^{-1})$, donc

$$(-1)^{n-1} \int \bar{\partial} H \overline{\omega}(w)\, ds\, dt = \int \bar{\partial}(Ht^{-1})\lambda^{n-1}\,\bar{\partial}\lambda\overline{\omega}(u)\, ds\, dt$$
$$- \int H\lambda^{n-1}\,\bar{\partial}(t^{-1})\,\bar{\partial}\lambda\overline{\omega}(u)\, ds\, dt.$$

Remarquons que $\partial(t^{-1})/\partial \bar{t}$ est égale à un multiple scalaire de la mesure de Dirac (cf. [15] formule (II, 3; 28), p. 49) et que pour $s \notin \delta^{-1}(0)$ fixe, $H\lambda^{n-1}\,\bar{\partial}\lambda\overline{\omega}(u)$ est continue par rapport à t, nulle pour $t = 0$, c'est-à-dire sur le support de la mesure de Dirac, par suite $\int H\bar{\partial}(t^{-1})\lambda^{n-1}\,\bar{\partial}\lambda\overline{\omega}(u)\, ds\, dt = 0$. Nous avons donc à calculer

$$\int \bar{\partial}(Ht^{-1})\,\bar{\partial}\overline{\omega}(\lambda u)\, ds\, dt = \int d[\bar{\partial}(Ht^{-1})\overline{\omega}(\lambda u)\, ds\, dt]$$

au signe près car $\bar{\partial}\overline{\omega}(\lambda u) = \lambda^{n-1}\,\bar{\partial}\lambda\overline{\omega}(u)$. Soient φ_ε la fonction plateau définie par (8) et $\psi_{\varepsilon'}(t)$ définie de la même manière avec $\delta^{-1}(0)$ remplacé par $\{0\} \subset \mathbf{C}$. Nous avons, comme dans la section 17, à évaluer

$$\int \bar{\partial}(\varphi_\varepsilon + \psi_{\varepsilon'} - \varphi_\varepsilon\psi_{\varepsilon'})\lambda^n t^{-1}\,\bar{\partial} H\overline{\omega}(u)\, ds\, dt$$
$$= \int (1 - \psi_{\varepsilon'})\lambda^n t^{-1}\,\bar{\partial}\varphi_\varepsilon\,\bar{\partial} H\overline{\omega}(u)\, ds\, dt$$
$$+ \int (1 - \varphi_\varepsilon)\lambda^n t^{-1}\,\bar{\partial}\psi_{\varepsilon'}\,\bar{\partial} H\overline{\omega}(u)\, ds\, dt.$$

D'après l'inégalité (12) et le fait que δ est lipschitzienne, $\bar{\partial}\varphi_\varepsilon\,\bar{\partial} H\lambda^n\overline{\omega}(u)$ est bornée indépendamment de ε. Comme t^{-1} est localement intégrable dans $\mathbf{C}$ et que $\operatorname{mes}(\operatorname{supp}\bar{\partial}\varphi_\varepsilon) \to 0$ avec ε, la première intégrale du dernier membre tend vers zéro avec ε. D'autre part $\int_{C} |t^{-1}\,\partial\psi_{\varepsilon'}(t)/\partial\bar{t}|\,|d\bar{t}\,dt|$ est bornée indépendamment de ε' et $(1-\varphi_{\varepsilon})\lambda^n\,\bar{\partial}\mathrm{H}\bar{\omega}(u)$ tend vers zéro, pour ε fixe, uniformément sur Σ, lorsque $t \to 0$, la deuxième intégrale du dernier membre tend donc vers zéro avec ε'. □

Corollaire 15. — *Soient* $\delta \in \Delta_{\mathrm{L}}(a)$, $\mathrm{J} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n+n'}$ *l'injection* $\mathrm{J}s = (s, 0)$, Σ *un voisinage compact de* $\delta^{-1}(0)$, V *un voisinage compact de* $0 \in \mathbf{C}^{n'}$ *et* $\Sigma' = \Sigma \times \mathrm{V}$. *Soient d'autre part* $\delta' : \mathbf{C}^{n+n'} \to \mathbf{R}_+$ *définie par* $\delta'(s, t) = \delta(s) + |t|$ *et* N *un entier* $\geqslant 5(n + n' - 1)$. *Si* $f' \in \mathrm{X}(\delta'; \mathrm{N}; \Sigma')$ *et si* $f = f'\mathrm{J}$ *alors* $f[a] = f'[a']$, *où* $a' = (a, 0) \in \mathrm{A}^{n+n'}$.

Il suffit en effet de considérer la composition de n' injections de la proposition 14.

Le calcul fonctionnel.

20. Les diverses propriétés de l'application $f \longmapsto f[a]$ étudiées précédemment nous permettent maintenant de construire un calcul fonctionnel.

Théorème 16. — *Si* $\delta \in \Delta_{\mathrm{L}}(a)$ *et si* N *est suffisamment grand* $(\mathrm{N} \geqslant 5(2n - 1))$, *alors l'application* $f \longmapsto f[a]$ *est un homomorphisme de l'algèbre* $\mathrm{X}(\delta; \mathrm{N}; \Sigma)$ *dans* A, *qui applique toute fonction de* $\mathrm{X}(\delta; \mathrm{N}; \Sigma)$ *égale à* 1 *au voisinage de* $\delta^{-1}(0)$ *sur l'unité de* A *et toute fonction de* $\mathrm{X}(\delta; \mathrm{N}; \Sigma)$ *égale à la fonction coordonnée* s_j *au voisinage de* $\delta^{-1}(0)$ *sur* a_j, $j = 1, \ldots, n$.

Preuve. — $f \longmapsto f[a]$ est déjà linéaire et bornée. Montrons qu'elle est multiplicative, c'est-à-dire $fg[a] = f[a]g[a]$ pour tout $f, g \in \mathrm{X}(\delta; \mathrm{N}; \Sigma)$. Posons

$$\mathrm{H}(s) = f(s)g(s), \qquad h(s, t) = f(s)g(t)$$

et considérons l'application linéaire $\mathrm{L} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{2n}$ définie par $\mathrm{L}(s) = (s, s)$. Elle est la composition de l'injection $\mathrm{J} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{2n}$ définie par $\mathrm{J}(s) = (s, 0)$ et de l'automorphisme

T de $\mathbf{C}^{2n}$ défini par $T(s, t) = (s, s + t)$. Nous avons

$$H \in X(\delta; N; \Sigma), \qquad h \in X(\delta'; N; \Sigma \times \Sigma)$$

et

$$hT \in X(\delta''; N; \Sigma \times V) \quad \text{où} \quad \delta'(s, t) = \delta(s) + |\delta(s) - \delta(t)|,$$
$$\delta''(s, t) = \delta(s) + |\delta(s + t) - \delta(s)| \lesssim \delta(s) + |t|$$

car δ est lipschitzienne, et où V est un voisinage compact de 0 de $\mathbf{C}^n$. Le choix de N implique l'existence et l'égalité de $H[a]$, $hT[Ja]$ et $h[(a, a)]$: $fg[a] = h[(a, a)]$. Mais le même choix permet d'écrire $h[(a, a)] = f[a]g[a]$ d'après le théorème du produit direct.

Il reste à montrer la dernière partie du théorème. Soit $\varphi \in X(\delta; N; \Sigma)$ de classe C^∞, $\varphi = 1$ au voisinage de $\delta^{-1}(0)$, nous avons

$$\varphi[a] = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(2\pi i)^{-n}\int \bar{\partial}\varphi\bar{\omega}(u)\,ds,$$
$$u \in {}_2E^1(a; \delta).$$

Supposons pour le moment que $\varphi[a] = 1$. Nous devons montrer que $(s_j\varphi)[a] = a_j$. Nous avons

$$\begin{aligned} a_j\varphi[a] - (s_j\varphi)[a] &\\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,(2\pi i)^{-n}\int \bar{\partial}((a_j - s_j)\varphi)\bar{\omega}(u)\,ds \\ &= (-1)^{n+j}(n-1)!\,(2\pi i)^{-n}\int \bar{\partial}\varphi\,\bar{\partial}u_1\ldots\bar{\partial}\hat{u}_j\ldots\bar{\partial}u_n\,ds \end{aligned}$$

d'après le lemme 10 (ii). Comme $\bar{\partial}\varphi\,\bar{\partial}u_1\ldots\bar{\partial}\hat{u}_j\ldots\bar{\partial}u_n\,ds = d\tau$ est continue et à support compact, le dernier membre est nul.

Montrons maintenant que $\varphi[a] = 1$. Nous pouvons supposer que $\varphi = 1 - (1 - \psi)^n$ où ψ est de classe C^∞ sur $\mathbf{C}^n$, à support compact, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, et $\psi = 1$ au voisinage de $\delta^{-1}(0)$. Nous avons $\bar{\partial}\varphi\bar{\omega}(u) = -n\bar{\partial}((1-\psi)u)$ (cf. sect. 15 pour la notation $\bar{\partial}$), et en posant

$$v_j = (1 - \psi)u_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

nous avons

$$\varphi[a] = (-1)^n n!\,(2\pi i)^{-n}\int \bar{\partial}(v)\,ds.$$

On peut prolonger $v_j(s)$ sur $\mathbf{C}^n$ en posant $v_j(s) = 0$ si $\psi(s) = 1$. On se ramène ainsi au calcul fonctionnel holomorphe de Waelbroeck (cf. [19] ou [8, p. 33-36]) qui exprime le fait que $\varphi[a] = 1$, et ceci est possible en vertu de la condition ($*$) posée dès la partie qui précède la section 10, car cette condition signifie que $(1 + |s|^2)^{-k} v_j(s)$ et les coefficients de $(1 + |s|^2)^{-k+1}\, \bar\partial v_j(s)$, pour $k \in \mathbf{N}$ convenable, sont bornés sur $\mathbf{C}^n$. $\square$

21. Lorsque δ est spectrale régulière pour a, le théorème 4 nous permet de réduire l'entier N du théorème 16.

Théorème 17. — *Si* $\delta \in \Delta_r(a)$ *et* $N \geqslant 3(2n - 1)$ *alors les conclusions du théorème* 16 *sont encore valables.*

Notons que ce théorème, réduit au cas banachique, exprime un résultat analogue à celui de C. Wrobel [25] et [26] avec le même entier N.

22. Dès la partie qui précède la section 10, nous avons supposé que $\Delta(a)$ contienne des fonctions δ vérifiant la condition ($*$) c'est-à-dire ne décroissant pas trop vite vers zéro à l'infini et nous n'avons considéré que ces fonctions. Nous n'utilisons cette condition qu'à la fin de la preuve du théorème 16 pour montrer que $f \longmapsto f[a]$ « applique l'unité sur l'unité ». Nous pouvons en fait démontrer un théorème un peu plus général.

Théorème 18. — *Soient* $\delta \in \Delta_L(a)$ *(resp.* $\Delta_r(a)$*) ne vérifiant pas nécessairement la condition* ($*$), S *une partie compacte ouverte et fermée de* $\delta^{-1}(0)$, Σ *un voisinage compact de* S *disjoint de* $\delta^{-1}(0)\setminus S$ *et* N *un entier* $\geqslant 5(2n-1)$ (*resp.* $\geqslant 3(2n-1)$). *Soient d'autre part* $X(\delta;\, N;\, S;\, \Sigma)$ *l'algèbre* $X(\delta;\, N;\, \Sigma)$ *lorsqu'on remplace* $\delta^{-1}(0)$ *par* S *et*

$$f[a;\, S] = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(2\pi i)^{-n} \int_{\Sigma\setminus S} \bar\partial f \bar\omega(u)\, ds,$$

$u \in {}_2E^1(a;\, \delta)$ (*resp.* ${}_1E^1(a;\, \delta)$). *Alors* $f \longmapsto f[a;\, S]$ *est un homomorphisme de* $X(\delta;\, N;\, S;\, \Sigma)$ *dans* A, *qui applique toute fonction de* $X(\delta;\, N;\, S;\, \Sigma)$ *égale à* 1 *au voisinage de* S *sur un élément idempotent* e_S *de* A *et toute fonction de* $X(\delta;\, N;\, S;\, \Sigma)$ *égale à la fonction coordonnée* s_j *au voisinage de* S *sur* $e_S a_j$ *et* $e_S a_j$ *est un élément régulier de* A, $j = 1, \ldots, n$.

Applications.

Nous nous proposons de donner ici deux applications de notre calcul fonctionnel. La régularité de certains éléments du corollaire 19 est une conséquence immédiate du théorème 16. La régularité d'une puissance du poids δ provient du théorème principal de la thèse d'I. Cnop [5] ou [6] et d'une notion semblable à la H-convexité uniforme.

23. Corollaire 19. — *Si* $\Delta(a)$ *contient une fonction vérifiant la condition* $(*)$ *alors les éléments* $a_1, \ldots, a_n$ *sont réguliers.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 16 et de la remarque suivante : Si A est une b-algèbre, B une b-algèbre idempotente et u est un morphisme de b-algèbres de B dans A (c'est-à-dire un homomorphisme qui applique tout borné de B sur un borné de A), alors $uB \subseteq A_r$ et $u : B \to A_r$ est un morphisme de b-algèbres idempotentes (cf. la remarque à la fin de la section 12.3 de [23] p. 247). Comme $X(\delta; N; \Sigma)$ est une algèbre de Banach et que les éléments a_j appartiennent à l'image de $X(\delta; N; \Sigma)$ par l'application $f \longmapsto f[a]$, le résultat est établi.

24. Soit maintenant $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ (tel que $\Delta(a)$ contient une fonction vérifiant la condition $(*)$). Dans ce qui suit nous nous proposons de trouver des fonctions δ telles qu'il existe un entier positif M avec $\delta^M \in \Delta_r(a)$ dès que $\delta \in \Delta(a)$. Nous dirons qu'une fonction $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}_+$ vérifie la condition (W) s'il existe un entier m tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit on puisse trouver un ouvert pseudoconvexe U_ε vérifiant les inclusions

$$\delta^{-1}([0, \varepsilon^m[) \subseteq U_\varepsilon \subseteq \delta^{-1}([0, \varepsilon[)$$

où $\delta^{-1}([0, x[) = \{s \mid \delta(s) < x\}$ pour $x > 0$. Cette condition a été utilisée par C. Wrobel [25] et [26] qui dit qu'un compact K de $\mathbf{C}^n$ est quasi-uniformément H-convexe si la distance δ_K à K : $\delta_K(s) = \mathrm{dist}\,(s, K)$ vérifie la condition (W). Nous renvoyons le lecteur à [26] pour des exemples de compacts K

uniformément H-convexes, c'est-à-dire des compacts tels que δ_K vérifie la condition (W) avec des inclusions plus fortes

$$\delta_K^{-1}([0, \theta\varepsilon[) \subseteq U_\varepsilon \subseteq \delta_K^{-1}([0, \varepsilon[) \qquad \text{pour} \qquad 0 < \theta < 1.$$

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, désignons par d la distance au bord de U : $d(s) = \operatorname{dist}\left(s, \complement U\right)$. J. P. Ferrier [8] et P. Pflug [14] ont remarqué que la thèse d'I. Cnop [5] ou [6] permet d'améliorer le résultat du type « théorème de la couronne » de L. Hörmander [12] :

Si U est un ouvert pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$, alors il existe un entier positif k' et une constante $C > 0$ (dépendant seulement de n et non de U, et $k' = (2n+1)/2$ [14] lorsque U est borné) tels que pour tout $s \notin U$, il existe des fonctions ${}^s u_1, \ldots, {}^s u_n$ holomorphes sur U telles que

$$(14) \qquad \begin{cases} \langle z - s, {}^s u(z)\rangle = 1, & z \in U \\ \text{et que} & \\ d^{k'}(z)|{}^s u_j(z)| \leqslant C, & z \in U,\ j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

En utilisant la condition (W) et le résultat (14) nous avons le

Corollaire 20. — *Soit* $\delta \in \Delta_L(a)$, δ *bornée telle que* $\delta(s)$ *soit minorée à l'infini par un multiple scalaire de* $|s|^{-k}$ *pour un* $k \in \mathbf{N}$. *Supposons de plus que* δ *vérifie la condition* (W). *Il existe alors un entier* $M > 0$ *ne dépendant que de* n, *tel que* $\delta^M \in \Delta_r(a)$.

Preuve. — Nous pouvons supposer que la constante lipschitzienne de δ soit égale à 1. Pour $s \in P_\delta$ assez proche de $\delta^{-1}(0)$: $\delta(s) = \varepsilon$, désignons par d_ε la distance au bord de l'ouvert U_ε de la condition (W). D'après (14), il existe des fonctions ${}^s u_1, \ldots, {}^s u_n$ holomorphes sur U_ε telles que (14) soit vraie pour d_ε et U_ε. Posons

$${}^s v_j = {}^s u_j(\chi_{\delta^{-1}([0, \varepsilon^m/2[)} * \varphi_{\varepsilon^m/4}) \qquad j = 1, \ldots, n$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E, φ_η est la fonction définie par $\varphi_\eta(z) = \eta^{-2n}\varphi(z\eta^{-1})$ pour $\eta > 0$ et où φ est une fonction non négative de classe C^∞ sur $\mathbf{C}^n$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \{|z| < 1\}$, $\int \varphi = 1$. Les ${}^s v_j$ sont holomorphes sur

$\delta^{-1}([0, \varepsilon^m/4[)$ et $\operatorname{supp} {}^s\varphi_j \subset \delta^{-1}\left(\left[0, \frac{3\varepsilon^m}{4}\right[\right)$. Nous avons d'une part $d_\varepsilon \gtrsim \varepsilon^m$ sur $\delta^{-1}\left(\left[0, \frac{3\varepsilon^m}{4}\right[\right)$, donc d'après (14)

$$|{}^s u_j(z)| \lesssim \varepsilon^{-mk'} \qquad \text{sur} \qquad \delta^{-1}\left(\left[0, \frac{3\varepsilon^m}{4}\right[\right)$$

et d'autre part

$$\left|\frac{\partial\, {}^s\varphi_j(z)}{\partial \bar{z}_k}\right| = |{}^s u_j(z)| \left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\chi_{\delta^{-1}([0,\varepsilon^m/2[)} * \varphi_{\varepsilon^m/4})(z)\right| \lesssim \varepsilon^{-m(1+k')}.$$

Sur $\operatorname{supp} \bar{\partial}\, {}^s\varphi_j \subset \delta^{-1}\left(\left[\frac{\varepsilon^m}{4}, \frac{3\varepsilon^m}{4}\right[\right)$, $\delta \sim \varepsilon^m$, donc

$$\|{}^s\varphi_j\|_{\delta^N} = \|{}^s\varphi_j\|_\infty + \|\, |\bar{\partial}\, {}^s\varphi_j|\, \|_\infty . \delta^{-N} \lesssim \varepsilon^{-m(N+1+k')}$$

et $\delta^M(s)\|{}^s\varphi_j\|_{\delta^N}$ est borné sur $\Sigma\setminus\delta^{-1}(0)$ où $M = N + 1 + k'$ et où Σ est un voisinage compact convenable de $\delta^{-1}(0)$. De ce qui précède, nous tirons le résultat suivant : Si δ vérifie la condition (W) sur un voisinage compact Σ de $\delta^{-1}(0) = S$, alors il existe des fonctions ${}^s\varphi_j \in X(\delta; N; \Sigma)$, pour $s \in \Sigma\setminus S$, telles que

$$\langle z - s, {}^s\varphi(z)\rangle = 1$$

sur un voisinage de S et que l'ensemble

$$\{\delta^M(s)\|{}^s\varphi_j\|_{\delta^N} \mid s \in \Sigma\setminus S,\ j = 1, \dots, n\}$$

soit borné dans $X(\delta; N; \Sigma)$. On étend facilement ce résultat à tout compact Σ' contenant Σ.

D'après notre calcul fonctionnel, $f \longmapsto f[a]$ applique tout borné de $X(\delta; N; \Sigma)$ sur un borné de A_r. Posons ${}^s\varphi_j[a] = \varphi_j(s)$ alors $\langle a - s, \varphi(s)\rangle = 1$ sur $\Sigma\setminus S$ et l'ensemble

$$\{\delta^M(s)\varphi_j(s) \mid s \in \Sigma\setminus S,\ j = 1, \dots, n\}$$

est borné dans A_r. D'après le corollaire 19, les éléments $a_1, \dots, a_n$ sont réguliers, nous pouvons donc trouver des φ_j telles que $\langle a - s, \varphi\rangle = 1$ sur un voisinage V_∞ de l'infini et que $\{\varphi_j(s) \mid s \in V_\infty\}$ soit borné dans A_r. Pour achever la preuve, il suffit de prendre Σ tel que $V_\infty \cup \Sigma = \mathbf{C}^n$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. R. Allan, H. G. Dales and J. P. McClure, Pseudo Banach Algebras, *Studia Math.*, 15 (1971), 55-69.

[2] B. André, Une construction du calcul fonctionnel dans les algèbres complètes, Thèse de troisième cycle, Nancy 1972.

[3] R. Arens and A. P. Calderon, Analytic functions of several Banach algebra elements, *Ann. of Math.*, (2) 62 (1955), 204-216.

[4] H. Buchwalter, Topologies, bornologies et compactologies, Thèse, Lyon 1968.

[5] I. Cnop, A theorem concerning holomorphic functions with bounded growth, Thesis, Vrije Universiteit Brussel 1971.

[6] I. Cnop, Spectral study of holomorphic functions with bounded growth, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, XXII, 2 (1972), 293-309.

[7] J. P. Ferrier, Séminaire sur les algèbres complètes, *Springer Lect. Notes*, 164 (1970).

[8] J. P. Ferrier, Spectral theory and Complex Analysis, *North-Holland Math. Studies*, 4 (1973).

[9] I. M. Gelfand, Normierte Ringe, *Mat. Sb.*, 9 (51) (1941), 3-24.

[10] H. Hogbe-Nlend, Théorie des bornologies et applications, *Springer Lect. Notes*, 213 (1971).

[11] H. Hogbe-Nlend, Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 3 (1) (1972).

[12] L. Hörmander, Generators for some rings of analytic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 943-949.

[13] Nguyen t. H., Croissance des coefficients spectraux et calcul fonctionnel, Thèse, Université Libre de Bruxelles 1976.

[13′] Nguyen t. H. Calcul symbolique dépendant de la croissance des cœfficients spectraux, *C. R. Acad. Sc.* Paris, A 283 (1976), 931-933.

[14] P. Pflug, Eigenschaften der Fortsetzungen von in speziellen Gebieten Holomorphen Polynomialen Funktionen in die Holomorphiehüllen, Thèse, Göttingen 1972.

[15] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann Paris (1966).

[16] G. E. Shilov, On the decomposition of a commutative normed ring into a direct sum of ideals, *Mat. Sb.*, 32 (74) (1953), *Amer. Math. Soc. Transl.*, (II) 1 (1955).

[17] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press (1970).

[18] L. Waelbroeck, Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives, *J. Math. P. et Appl.*, 33 (1954), 147-186.

[19] L. Waelbroeck, Étude spectrale des algèbres complètes, *Acad. Roy. Belg.*, Cl. des Sc., *Mémoires*, (1960).

[20] L. Waelbroeck, Une partition de l'unité dans $\theta(s;\ \mathcal{S})$, *Acad. Roy. Belg.*, Cl. des Sc., *Bull.*, (1962), 17-28.

[21] L. Waelbroeck, Calcul symbolique lié à la croissance de la résolvante, *Rend. Sem. Mat. e fis. di Milano*, XXXIV (1964).

[22] L. Waelbroeck, Topological vector spaces and algebras, *Springer Lect. Notes*, 230 (1971).
[23] L. Waelbroeck, The holomorphic functional calculus and non-Banach algebras, in « *Algebras in Analysis* » (edit. by J. H. Williamson) Academic Press, (1975), 187-254.
[24] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1934), 63-89.
[25] C. Wrobel, Extension du calcul fonctionnel holomorphe et application à l'approximation, *C.R. Acad. Sc. Paris*, A 275 (1972), 175-177.
[26] C. Wrobel, Extension du calcul fonctionnel holomorphe, *Rev. Math.*, n° 1, Inst. E. Cartan, Nancy (1975).

Manuscrit reçu le 23 août 1976
Proposé par B. Malgrange.

Nguyen the Hoc,
Université Nationale de Côte d'Ivoire
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 4322 - Abidjan
Côte d'Ivoire.