Annales de l'institut Fourier

Pierre De La Harpe
Max Karoubi

Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert. II

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 1 (1978), p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 1 (1978), 1-25

PERTURBATIONS COMPACTES DES REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE DANS UN ESPACE DE HILBERT. II

par P. de la HARPE et M. KAROUBI

1. Rappels et définitions.

Nous abordons ici le "problème relatif" associé au problème principal de la première partie de ce travail [5], dont nous conservons les notations. Rappelons toutefois que H désigne un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, $\mathrm{Cal}(H) = L(H)/C(H)$ son algèbre de Calkin, $\pi : U(H) \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)^u$ l'homomorphisme canonique du groupe unitaire de H dans celui de l'algèbre de Calkin (les deux groupes étant munis de leurs topologies normiques), $\mathrm{Cal}(H)^u_0$ l'image de π et $U(H, C)$ son noyau. Sauf mention expresse du contraire, les homomorphismes de groupes topologiques seront toujours supposés continus.

Si K est un espace de Hilbert (de dimension finie ou non), l'injection canonique de $L(H)$ dans $L(H \oplus K)$ passe au quotient et définit une injection de $\mathrm{Cal}(H)$ dans $\mathrm{Cal}(H \oplus K)$; cette dernière est un isomorphisme si et seulement si K est de dimension finie. Si K est de dimension infinie, on a de même une injection de $\mathrm{Cal}(H) \oplus \mathrm{Cal}(K)$ dans $\mathrm{Cal}(H \oplus K)$.

Soient G un groupe topologique et $\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)^u$ un homomorphisme. Alors σ est dit *relevable* s'il existe un homomorphisme S rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & U(H) \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{Cal}(H)^u_0 \end{tikzcd}$$

Nous dirons que σ est *stablement relevable* s'il existe un espace de Hilbert K, un homomorphisme relevable σ' et un homomorphisme R rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{U}(\mathrm{H} \oplus \mathrm{K}) \arrow[d] \\ \mathrm{G} \arrow[ur, "\mathrm{R}"] \arrow[r, "\sigma \oplus \sigma'"'] & \mathrm{Cal}(\mathrm{H} \oplus \mathrm{K})_0^u \end{tikzcd}$$

commutatif. Le groupe G lui-même est dit relevable [resp. stablement relevable] si tous ses homomorphismes dans $\mathrm{Cal}(\mathrm{H})_0^u$ sont relevables [resp. stablement relevables].

On sait que les groupes compacts séparables sont relevables. (C'est le théorème I de [5] ; il faut observer que le quotient de G par le noyau d'un homomorphisme $\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Cal}(\mathrm{H})_0^u$ est un groupe de Lie [9, section II.1] de sorte que l'homomorphisme est forcément "bon" au sens de [5, § I.2]). Le groupe abélien libre à deux générateurs est stablement relevable, mais non relevable [3]. Un groupe produit direct non trivial d'un groupe abélien localement compact séparable et d'un groupe compact séparable n'est pas stablement relevable. (C'est le théorème III de [5], généralisé comme dans la section 7 de [2]).

Soient G un groupe topologique, F un sous-groupe de G, $j : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ l'inclusion canonique, et

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r, "\mathrm{S}"] \arrow[d, "j"] & \mathrm{U}(\mathrm{H}) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(\mathrm{H})_0^u \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de groupes et homomorphismes. Nous dirons que la paire (S, τ) est *relevable* s'il existe un homomorphisme R rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r, "\mathrm{S}"] \arrow[d, "j"] & \mathrm{U}(\mathrm{H}) \arrow[d] \\ \mathrm{G} \arrow[ur, "\mathrm{R}"] \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(\mathrm{H})_0^u \end{tikzcd}$$

commutatif. Nous dirons que la paire (S, τ) est *stablement relevable* s'il existe un espace de Hilbert K, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "S'"] \arrow[d, "j"] & & U(K) \arrow[d] \\
G \arrow[urr, "T'"] \arrow[rr, "\tau'"'] & & \mathrm{Cal}(K)_0^u
\end{tikzcd}$$

et un homomorphisme R rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "S \oplus S'"] \arrow[d, "j"] & & U(H \oplus K) \arrow[d] \\
G \arrow[urr, "R"] \arrow[rr, "\tau \oplus \tau'"'] & & \mathrm{Cal}(H \oplus K)_0^u
\end{tikzcd}$$

commutatif. La paire (F, G) elle-même est dite relevable [resp. stablement relevable] si toutes les paires (S, τ) comme ci-dessus sont relevables [resp. stablement relevables].

Par exemple, si G est abélien compact séparable, il est facile de vérifier que toute paire (F, G) est relevable. (La proposition 5 de [6] le montre lorsque G est de plus fini, et la même preuve passe au cas topologique). L'objet du présent travail est essentiellement l'étude des cas où G est compact séparable, non nécessairement abélien.

La section 2 est consacrée au problème relatif lui-même. Comme corollaires de ceci, les sections 3 et 4 sont respectivement consacrées au problème absolu pour les amalgames de groupes finis et pour les extensions de Z par des groupes finis.

Le premier auteur a été partiellement soutenu par le "Fonds national suisse de la recherche scientifique" auquel il exprime sa reconnaissance.

Nous remercions aussi Michel Kervaire et Jean-Louis Loday pour l'intérêt qu'ils nous ont témoigné à diverses étapes de notre travail.

2. Indices associés à une paire de groupes compacts.

Soient G un groupe compact séparable, F un sous-groupe *fermé* de G et $j : F \longrightarrow G$ l'inclusion canonique. L'anneau des représentations de G est noté $\mathcal{R}(G)$, son idéal d'augmentation $\widetilde{\mathcal{R}}(G)$, et j^* désigne selon les cas le morphisme de restriction $\mathcal{R}(G) \longrightarrow \mathcal{R}(F)$ ou le morphisme $\widetilde{\mathcal{R}}(G) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{R}}(F)$.

Soit
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(H)^u_0 \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de groupes et homomorphismes. Si T est un relèvement de τ, nous écrirons T_F sa restriction à F. Alors S et T_F sont deux relèvements de τj, de sorte qu'on sait leur associer un indice $\mathrm{Ind}_F(S, T_F)$ dans $\widetilde{\mathcal{R}}(F)$; voir [5], section 4.

LEMME 1. – *L'image canonique de* $\mathrm{Ind}_F(S, T_F)$ *dans le conoyau de* j^* *ne dépend que de* S *et de* τ, *pas de* T.

Preuve. – Si T_1 et T_2 sont deux relèvements de τ, alors

$$\mathrm{Ind}_F(S, T_{2F}) = \mathrm{Ind}_F(S, T_{1F}) + j^* \mathrm{Ind}_G(T_1, T_2)$$

par la proposition 5(ii) et le lemme 11(iv) de [5].

DEFINITION. – *Nous appellerons indice de* S *et* τ, *et nous noterons* $\mathrm{ind}(S, \tau)$, *l'image de* $\mathrm{Ind}_F(S, T_F)$ *dans le conoyau de* j^*.

LEMME 2. – *Si la paire* (S, τ) *est stablement relevable, alors* $\mathrm{ind}(S, \tau) = 0$.

Preuve. – Par hypothèse, il existe deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "j"'] & U(K) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau'"'] \arrow[ur, "T'"] & \mathrm{Cal}(K)^u_0 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "S \oplus S'"] \arrow[d, "j"'] & U(H \oplus K) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau \oplus \tau'"'] \arrow[ur, "R"] & \mathrm{Cal}(H \oplus K)^u_0 \end{tikzcd}$$

Soit $T : G \longrightarrow U(H)$ un relèvement arbitraire de τ. Alors

$$\mathrm{Ind}_F(S, T_F) = \mathrm{Ind}_F(S \oplus S', T_F \oplus S') = \mathrm{Ind}_F(S \oplus S', R_F) + \mathrm{Ind}_F(R_F, T_F \oplus S') = 0 + j^* \mathrm{Ind}_G(R, T \oplus T') \in j^* \widetilde{\mathcal{R}}(G).$$

SOUS-LEMME. – *Soient* F *un groupe compact,* $P : F \longrightarrow U(H)$ *un homomorphisme, et* V_1, V_2 *deux sous-espaces de* H *de dimensions* *finies invariants par* F. *Si les représentations définies par* P *sur* V_1 *et* V_2 *sont équivalentes, alors il existe sur* H *un opérateur* $X \in U(H, C) \cap \phi_F(P, P)$ *tel que* $X(V_1) = V_2$.

Preuve. – Pour la définition de $\phi_F(P, P)$, voir [5], section IV. L'espace $V_1 + V_2$ est invariant par F. On pose $Xv = v$ si v est dans l'orthogonal de $V_1 + V_2$, et il reste à vérifier le sous-lemme lorsque H est de dimension finie – ce qui est bien classique.

LEMME 3. – *Soit*
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{tikzcd}$$
un carré commutatif comme plus haut. Alors il existe un sous-espace H_0 *de* H *de codimension finie et un relèvement* $T : G \longrightarrow U(H)$ *de* τ *tels que* H_0 *soit stable par* S *et* T *et tels que les restrictions à* H_0 *de* S *et de* T_F *coïncident.*

Preuve. – Soit $Q : G \longrightarrow U(H)$ un relèvement quelconque de τ. Soit $\alpha' = \int_F Q_F(f) S(f^{-1})\, df$, et soit α l'isométrie partielle entrant dans la décomposition polaire de α'. On a $\alpha \in \phi_F(S, Q_F)$ et $\mathrm{Ind}_F(S, Q_F) = [\mathrm{Ker}\,\alpha]_F^S - [(\mathrm{Im}\,\alpha)^\perp]_F^{Q_F}$. (Voir [5], § IV.1 ; $[\mathrm{Ker}\,\alpha]_F^S$ désigne la classe d'équivalence dans $\mathcal{R}(F)$ de la représentation $F \longrightarrow U(\mathrm{Ker}\,\alpha)$ définie par S.)

Il existe deux sous-espaces V, W de H de dimensions finies tels que V soit invariant par Q_F, W invariant par Q, $V \subset W$ et $[V]_F^{Q_F} = [(\mathrm{Im}\,\alpha)^\perp]_F^{Q_F}$. Soit $X \in U(H, C) \cap \phi_F(Q_F, Q_F)$ tel que $X((\mathrm{Im}\,\alpha)^\perp) = V$ (voir sous-lemme), et soit $\beta = X\alpha$ (c'est une isométrie partielle). Alors $\beta \in \phi_F(S, Q_F)$ et $\mathrm{Ind}_F(S, Q_F) = [\mathrm{Ker}\,\beta]_F^S - [V]_F^{Q_F}$.

Soit $M = \{v \in (\mathrm{Ker}\,\beta)^\perp \mid \beta v \in W\}$; l'opérateur β induit un F-isomorphisme de M sur l'orthogonal de V dans W. Soit γ l'isométrie partielle de $(\mathrm{Ker}\,\beta \oplus M)^\perp$ sur $W^\perp$ définie par

$$\gamma v = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in \mathrm{Ker}\,\beta \oplus M \\ \beta v & \text{si } v \in (\mathrm{Ker}\,\beta \oplus M)^\perp. \end{cases}$$

Alors $\gamma \in \phi_F(S, Q_F)$

et $\quad \mathrm{Ind}_F(S, Q_F) = [\mathrm{Ker}\,\gamma]_F^S - [W]_F^{Q_F} = [\mathrm{Ker}\,\gamma]_F^S - j^* [W]_G^Q$.

Pour tout $g \in G$, définissons enfin un opérateur $T(g)$ par $T(g)v = \begin{cases} \gamma^* Q(g) \gamma v & \text{si } v \in (\operatorname{Ker} \gamma)^\perp \\ v & \text{si } v \in \operatorname{Ker} \gamma \end{cases}$. Alors $H_0 = (\operatorname{Ker}\gamma)^\perp$ et T ont les propriétés désirées.

Remarque. – Si H_0 est de codimension m, on a alors $\operatorname{Ind}_F(S, T_F) = [H_0^\perp]_F^S - [H_0^\perp]_F^{T_F} = [H_0^\perp]_F^S - [m]$; nous noterons $T_0 : G \longrightarrow U(H_0)$ l'homomorphisme défini par T.

LEMME 4. – *Soit*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"'] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \operatorname{Cal}(H)_0^u \end{tikzcd}$$

comme au lemme 3. Si $\operatorname{ind}(S, \tau) = 0$, *alors la paire* (S, τ) *est stablement relevable.*

Preuve. – Soient H_0 un sous-espace de H et T un relèvement de τ satisfaisant les conditions du lemme 3. Comme $\operatorname{ind}(S,\tau) = 0$, on a $[H_0]_F^S \in j^*(\mathcal{R}(G))$. Il existe donc un entier $n \geqslant 0$ et deux représentations $T^1 : G \longrightarrow U(H_0^\perp \oplus C^n)$, $T^2 : G \longrightarrow U(C^n)$ tels que $[H_0]_F^S = j^*[H_0^\perp \oplus C^n]_G^{T^1} - j^*[C^n]_G^{T^2}$.

Soient S' la restriction de T^2 à F et $\widetilde{R}$ l'homomorphisme $T_0 \oplus T^1 : G \longrightarrow U(H_0 \oplus H_0^\perp \oplus C^n)$. Soit δ l'opérateur défini sur $H \oplus C^n$ par $\delta(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in H_0 \\ 0 & \text{si } v \in H_0^\perp \oplus C^n \end{cases}$. Alors $\delta \in \phi_F(S \oplus S', \widetilde{R}_F)$; par suite

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_F(S \oplus S', \widetilde{R}_F) &= [\operatorname{Ker} \delta]^{S \oplus S'} - j^*[(\operatorname{Im}\delta)^\perp]_G^{\widetilde{R}} \\ &= [H_0^\perp]_F^S + j^*[C^n]_G^{T^2} - j^*[H_0^\perp \oplus C^n]_G^{T^1} = 0. \end{aligned}$$

Par la proposition 5(i) de [5], il existe $X \in U(H, C)$ tel que $(\widetilde{R}_F)^X = S \oplus S'$. Posons donc $R = (\widetilde{R})^X$, de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S \oplus S'"] \arrow[d, "j"'] & U(H \oplus C^n) \arrow[d] \\ G \arrow[ur, "R"] \arrow[r, "\tau"] & \operatorname{Cal}(H \oplus C^n)_0^u \end{tikzcd}$$

commute, d'où le lemme. (Nous n'écrivons pas ici $\tau \oplus \tau'$ comme dans la définition puisque C^n est de dimension finie ; la preuve du lemme montre donc un peu plus que l'énoncé ne le dit.)

LEMME 5. – *Soient* G *un groupe compact séparable,* F *un sous-groupe fermé de* G, *et* γ *un élément du conoyau de* $j^* : \widetilde{\mathfrak{R}}(G) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{R}}(F)$. *Alors il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{tikzcd}$$

avec $\mathrm{ind}(S,\tau) = \gamma$.

Preuve. – Soit $\gamma' \in \widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ un élément représentant γ. Il existe un sous-espace H^0 de H de dimension finie et deux homomorphismes $s_i : F \longrightarrow U(H^0)$ $(i=1,2)$ tels que $\gamma' = [H^0]_F^{s_1} - [H^0]_F^{s_2}$. Il existe aussi un sous-espace H^1 de H de dimension finie, orthogonal à H^0, et une extension $t : G \longrightarrow U(H^0 \oplus H^1)$ de s_2 [8, th. 27.46].

Posons alors $S(f)v = \begin{cases} s_1(f)v & \text{si } v \in H^0 \\ t(f)v & \text{si } v \in H^1 \\ v & \text{si } v \in (H^0 \oplus H^1)^\perp \end{cases}$ pour tout $f \in F$ et $T(g)v = \begin{cases} t(g)v & \text{si } v \in H^0 \oplus H^1 \\ v & \text{si } v \in (H^0 \oplus H^1)^\perp \end{cases}$ pour tout $g \in G$.

Alors $S : F \longrightarrow U(H)$ est un homomorphisme, $\tau = \pi T$ est l'homomorphisme trivial et

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{tikzcd}$$

commute. Il est évident que $\mathrm{Ind}_F(S, T_F) = \gamma'$, donc que $\mathrm{ind}(S,\tau) = \gamma$.

Les lemmes 2 à 5 se résument comme suit.

THEOREME 1. – *Soient* G *un groupe compact séparable,* F *un sous-groupe fermé de* G *et* $j : F \longrightarrow G$ *l'inclusion canonique. Tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{tikzcd}$$

définit un élément $\mathrm{ind}(S,\tau) \in \mathrm{Coker}\ (j^* : \widetilde{\mathfrak{R}}(G) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{R}}(F))$, *et la paire* (S,τ) *est stablement relevable si et seulement si* $\mathrm{ind}(S,\tau) = 0$. *De plus, tout élément de* $\mathrm{Coker}(j^*)$ *peut être réalisé par un tel indice.*

Remarques et exemples.

1) Par exemple, si $F = \sigma_m$ et $G = \sigma_n$ sont les groupes des permutations de $\{1,2,\ldots,m\}$ et $\{1,2,\ldots,n\}$ respectivement, avec

$m \leqslant n$, et si $j : F \longrightarrow G$ est l'inclusion standard, alors la paire (F, G) est stablement relevable ; il est en effet "bien connu" que j^* est surjectif dans ce cas (cela résulte facilement de [1, Satz 5.4, chap. IV]).

2) Il existe des paires non stablement relevables. Par exemple, si F [resp. G] est le groupe alterné [resp symétrique] de trois objets, on vérifie facilement que le conoyau de $\widetilde{\mathcal{R}}(G) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{R}}(F)$ est un groupe abélien isomorphe à Z.

3) Montrons qu'il existe des paires (S, τ) non relevables qui sont stablement relevables. Soient G le groupe des permutations de $\{1,2,3,4\}$, e la permutation identique dans G et $F = \{e, (1,2)(3,4)\}$. Notons $1, s, d, t, st$ les (classes d'équivalence de) représentations irréductibles de G, avec 1 l'identité, s la signature, d de dimension 2, et t la "self-représentation" de dimension 3. Notons $1, \sigma$ les représentations irréductibles de F et $1, \epsilon$ celles de $Z_2 = \{1, -1\}$. Soit j l'inclusion du produit direct $F_+ = F \times Z_2$ dans $G_+ = G \times Z_2$; alors $\mathrm{Coker}(j^*)$ est canoniquement isomorphe au conoyau de l'homomorphisme $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(Z_2) \longrightarrow \mathcal{R}(F) \otimes \mathcal{R}(Z_2)$ (voir par exemple Serre [11], chap. I, th. 10).

Des calculs élémentaires (voir par exemple Hewitt-Ross [8], § 27 n° 61c) montrent que j^* est donné par le tableau suivant :

$$j^*(1) = 1 \quad j^*(s) = 1 \quad j^*(d) = 1 + 1$$
$$j^*(t) = 1 + \sigma + \sigma \qquad j^*(st) = 1 + 1 + \sigma$$
$$j^*(\rho\epsilon) = j^*(\rho)\epsilon \quad \text{si } \rho \text{ est une représentation de } G.$$

Soient alors H^0 un sous-espace de H de dimension 2 et P la projection orthogonale de H sur H^0. Soit S la représentation de F_+ définie par $\begin{cases} S(e, 1) = S((1,2)(3,4), -1) = 1 \\ S(e, -1) = S((1,2)(3,4), 1) = 1 - 2P \end{cases}$ et soit $\tau : G_+ \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$ l'homomorphisme trivial. Alors

$$\begin{array}{ccc} F_+ & \xrightarrow{\ S\ } & U(H) \\ \downarrow j & & \downarrow \\ G_+ & \xrightarrow{\ \tau\ } & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{array}$$

commute et $\mathrm{Ind}(S, \tau) = \sigma\epsilon + \sigma\epsilon - 1 - 1 \in \mathrm{Im}\, j^*$, donc (S, τ) est stablement relevable (la vérification constructive est par ailleurs immédiate).

Par contre, supposons qu'il existe un relèvement $T : G_+ \longrightarrow U(H)$ de τ avec $Tj = S$. Alors $T(g)S(e,-1) = S(e,-1)T(g)$, donc $T(g)P = PT(g)$ pour tout $g \in G$, et T définit un homomorphisme $T^0 : G \longrightarrow U(H^0)$ avec H^0 de dimension 2. Donc $j^* [H^0]_F^{T^0} = 1 + 1 \in \mathcal{R}(F)$ (on a aussi désigné par j l'inclusion de F dans G). D'autre part, S se restreint à F en une représentation de classe $\sigma + \sigma$. Comme $1 + 1 \neq \sigma + \sigma$, la paire (S, τ) n'est pas relevable.

Il faut donc ajouter le mot "stable" ici et là dans la section 4 de [4], incorrecte telle quelle.

4) Soient $j : F \longrightarrow G$ comme dans le théorème 1, $\mathcal{R}_+(F)$ [resp. $\mathcal{R}_+(G)$] le sous semi-groupe de $\mathcal{R}(F)$ [resp. $\mathcal{R}(G)$] formé des classes de vraies représentations, et $j_+^* : \mathcal{R}_+(G) \longrightarrow \mathcal{R}_+(F)$ le morphisme défini par j. Si $(\operatorname{Im} j^*) \cap \mathcal{R}_+(F) = \operatorname{Im} j_+^*$, alors le théorème est vrai avec "relevable" au lieu de "stablement relevable". C'est par exemple le cas lorsque G est abélien (voir [6], prop. 5), car j_+^* est toujours surjectif dans ce cas [7, lemma 24.4] ; ou si $F = \{e, (1,2)\}$ et G sont comme dans la remarque 3 (se vérifie à la main). Dans le cas abélien, on déduit alors facilement du théorème 1 le corollaire suivant (voir [2], n° 2.2).

COROLLAIRE. – *Soit* G *un groupe de torsion abélien dénombrable. Alors* G *est relevable.*

5) L'énoncé et la preuve du théorème 1 s'étendent sans modification au cas d'un homomorphisme j à image fermée dans G, mais non nécessairement injectif.

6) Les problèmes de relèvement pour les groupes localement finis peuvent être abordés avec des méthodes proches de celles utilisées par Thayer [15]. Nous n'envisagerons ici qu'un exemple à obstructions triviales.

Soient G un groupe discret dénombrable localement fini, et $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ une suite croissante de sous-groupes finis de G dont la réunion est G tout entier. Soient $\widetilde{K}_0 = L^2_C(G)$ et $\widetilde{L}_0 : G \longrightarrow U(\widetilde{K}_0)$ la représentation régulière gauche de G. Pour tout $n \in N$, la représentation définie par la restriction de $\widetilde{L}_0$ à G_n dans l'espace des fonctions de $\widetilde{K}_0$ s'annulant en dehors de G_n est la représentation régulière de G_n. Soient K_0 la somme orthogonale d'une infinité de copies de $\widetilde{K}_0$ et $L_0 : G \longrightarrow U(K_0)$ la somme de copies de $\widetilde{L}_0$. Pour tout $n \in N$, la restriction de L_0 à G_n contient une infinité de copies de chaque représentation irréductible de G_n.

Soient $K = \oplus K_n$ la somme orthogonale sur $n \in N$ d'une infinité de copies de K_0 et $\Lambda = \oplus L_n : G \longrightarrow U(K)$ la somme de copies de L_0. Nous écrirons Λ_n au lieu $\bigoplus\limits_{j=0}^{n} L_n$. Les restrictions à G_k de L_n, Λ_n seront respectivement notées L_n^k, Λ_n^k. Les projections de $\Lambda, L_n, \Lambda_n, L_n^k, \Lambda_n^k$ seront respectivement notées λ, l_n, λ_n, l_n^k, λ_n^k. En particulier, les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
G_k \arrow[rr, "L_n^k"] \arrow[d, hook] & & U(K_n) \arrow[d] \\
G \arrow[urr, "L_n"] \arrow[rr, "l_n"'] & & \mathrm{Cal}(K_n)_0^u
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
G_k \arrow[rr, "L_n^k"] \arrow[d, hook] & & U(K_n) \arrow[d] \\
G_{k+1} \arrow[urr, "L_n^{k+1}"] \arrow[rr, "l_n^{k+1}"'] & & \mathrm{Cal}(K_n)_0^u
\end{tikzcd}$$

commutent pour tous $k, n \in N$.

Hypothèse de trivialité : supposons désormais que les morphismes $\mathcal{R}(G_{k+1}) \longrightarrow \mathcal{R}(G_k)$ sont tous surjectifs. Montrons que $\tau \oplus \lambda$ est relevable, donc que τ est stablement relevable pour tout $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$.

Fixons $n \in N$, $n > 0$. Supposons qu'on a trouvé un morphisme S_{n-1} tel que

$$\begin{tikzcd}
G_{n-1} \arrow[r, "S_{n-1}"] \arrow[d, hook] & U(H \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{n-1}) \arrow[d] \\
G \arrow[r, "\tau \oplus \lambda_{n-1}"] & \mathrm{Cal}(H \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{n-1})_0^u
\end{tikzcd}$$

commute (c'est possible pour $n - 1 = 0$ puisque G_0 est fini). Par hypothèse sur $\mathcal{R}(G_n) \longrightarrow \mathcal{R}(G_{n-1})$ et par une modification mineure de la preuve du lemme 4, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_{n-1} \arrow[rr, "S_{n-1} \oplus L_n^{n-1}"] \arrow[d, hook] & & U((H \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{n-1}) \oplus K_n) \arrow[d] \\
G_n \arrow[urr, "S_n"] \arrow[rr, "(\tau \oplus \lambda_{n-1}^n) \oplus l_n^n"'] & & \mathrm{Cal}((H \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{n-1}) \oplus K_n)_0^u
\end{tikzcd}$$

de sorte que

$$\begin{tikzcd}
G_n \arrow[r, "S_n"] \arrow[d, hook] & U(H \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{n-1} \oplus K_n) \arrow[d] \\
G \arrow[r, "\tau \oplus \lambda_n"] & \mathrm{Cal}(H \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_{n-1} \oplus K_n)_0^u
\end{tikzcd}$$

commute. On construit ainsi par induction une suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, soit alors $S^n : G_n \longrightarrow U(H \oplus K)$ la représentation définie comme suit. Si $g \in G_n$, alors $S^n(g)$ a $H \oplus K_0 \oplus \ldots \oplus K_n$ et $\bigoplus_{j=n+1}^{\infty} K_j$ comme sous-espaces invariants, coïncide avec $S_n(g)$ sur le premier et avec $\bigoplus_{j=n+1}^{\infty} L_j^n$ sur le second. Alors

$$\begin{tikzcd}
G_{n-1} \arrow[r, "S^{n-1}"] \arrow[d, hook] & U(H \oplus K) \arrow[d] \\
G_n \arrow[r, "S^n"] & U(H \oplus K)
\end{tikzcd}$$

commute. Il en résulte que la suite $(S^n)_{n \in \mathbf{N}}$ définit un homorphisme $S : G \longrightarrow U(H \oplus K)$ et il est évident que S relève $\tau \oplus \lambda$.

A titre d'exemple, soit σ_∞ le groupe des permutations finies de l'ensemble des entiers strictement positifs. Avec les notations de l'exemple 1, σ_∞ est la réunion des σ_n ; il en résulte que σ_∞ est stablement relevable. Remarquons que σ_∞ est un groupe de type II_1 (voir Sakaï [10], 4.2.18), d'où sans doute un lien supplémentaire avec [15].

*

* *

Le corollaire qui suit est l'analogue relatif de la section II.1 de [5].

COROLLAIRE. – *Soient* F *et* G *deux groupes compacts et* $j : F \longrightarrow G$ *un homomorphisme à image fermée. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout carré commutatif*
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"'] & GL(H) \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(H)_0^{inv} \end{tikzcd}$$
il existe un entier n *et des homomorphismes* $T' : G \longrightarrow GL(C^n)$ *et* $R : G \longrightarrow GL(H \oplus C^n)$ *tels que, si* $S' = T'j$, *alors*
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S \oplus S'"] \arrow[d, "j"'] & GL(H \oplus C^n) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] \arrow[ur, "R"] & \mathrm{Cal}(H \oplus C^n)_0^{inv} \end{tikzcd}$$
commute.

(ii) *La paire* (F, G) *est stablement relevable.*

(iii) *Le morphisme* $j^* : \widetilde{\mathcal{R}}(G) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{R}}(F)$ *est surjectif.*

Preuve. – Supposons (iii) vrai et soient S, τ des homomorphismes constituant avec j et π un carré comme dans (i). Soit $x \in \mathrm{Cal}(H)$, comme dans la preuve de la proposition 3 de [5], tel que $x^{-1}\tau(g)x \in \mathrm{Cal}(H)_0^u$ pour tout $g \in G$ et soit $X \in GL(H)$ tel que $\pi(X) = x$. Soit V la racine carrée positive de
$$W = \int_F S^X(f)\,(S^X(f))^*\,df \ ;$$
il est facile de vérifier que $W - 1$ est compact, donc $V - 1$ aussi, de sorte que le carré
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S^{XV}"] \arrow[d, "j"'] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau^x"] & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{tikzcd}$$
est encore commutatif. Il existe donc par (iii) et la preuve du lemme 4 un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S^{XV} \oplus S'"] \arrow[d, "j"'] & U(H \oplus C^n) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau^x"] \arrow[ur, "\widetilde{R}"] & \mathrm{Cal}(H \oplus C^n)_0^u \end{tikzcd}$$
. Soit enfin $R = \widetilde{R}^Y$ avec $Y = (V^{-1}X^{-1}) \oplus \mathrm{id}_{C^n}$; alors le diagramme
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S \oplus S'"] \arrow[d, "j"'] & GL(H \oplus C^n) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] \arrow[ur, "R"] & \mathrm{Cal}(H \oplus C^n)_0^{inv} \end{tikzcd}$$
commute, donc (i) est aussi vrai.

Supposons maintenant que (i) est vrai et soit

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] \arrow[d] & U(H) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Cal}(H)_0^u \end{tikzcd}$$

un carré commutatif. Par hypothèse, il existe $\widetilde{R}$ tel que

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "S \oplus S'"] \arrow[d] & & GL(H \oplus C^n) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] \arrow[urr, "\widetilde{R}"] & \mathrm{Cal}(H)_0^u \arrow[r, hook] & \mathrm{Cal}(H \oplus C^n)_0^{\mathrm{inv}} \end{tikzcd}$$

commute.

On peut supposer S' unitaire. Soit V la racine carré positive de $W = \int_F \widetilde{R}(g)(\widetilde{R}(g))^* dg$. Alors $R = \widetilde{R}^V$ est une représentation unitaire de G dans $H \oplus C^n$, l'opérateur $V - 1$ est compact et

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "(S \oplus S')^V"] \arrow[d] & U(H \oplus C^n) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\tau"] \arrow[ur, "R"] & \mathrm{Cal}(H \oplus C^n)_0^u \end{tikzcd}$$

commute. Mais $\widetilde{R}(g)W = W(\widetilde{R}(g^{-1}))^*$ pour tout $g \in G$; donc $\widetilde{R}(g)W = W\widetilde{R}(g)$ et aussi $\widetilde{R}(g)V = V\widetilde{R}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{Im}\, j$. Par suite $(S \oplus S')^V = S \oplus S'$ et (ii) est vrai.

Enfin (ii) implique (iii) par le théorème 1.

3. Amalgames de groupes finis.

Soient G_1 et G_2 deux groupes *finis*, et $\Gamma = G_1 *_F G_2$ un produit amalgamé de G_1 et G_2 sur un groupe fini F et des homomorphismes $\varphi_j : F \longrightarrow G_j$ $(j=1,2)$. Soit $\tau : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$ un homomorphisme ; nous noterons τ_j sa restriction à G_j. Soient $T_j : G_j \longrightarrow U(H)$ des relèvements des τ_j et soient T_{jF} leurs restrictions à F $(j=1,2)$. Alors $\mathrm{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F}) \in \widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ est bien défini.

LEMME 6. — *L'image canonique de* $\mathrm{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F})$ *dans le co-noyau du morphisme naturel* $\varphi_1^* \oplus \varphi_2^* : \widetilde{\mathfrak{R}}(G_1) \oplus \widetilde{\mathfrak{R}}(G_2) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ *ne dépend que de* τ, *pas de* T_1 *et* T_2.

Preuve. — Pour d'autres choix $T'_j : G_j \longrightarrow U(H)$ des relèvements, on obtient $\mathrm{Ind}_F(T'_{1F}, T'_{2F}) = \mathrm{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F}) + \varphi_1^* (\mathrm{Ind}_{G_1}(T'_1, T_1)) + \varphi_2^* (\mathrm{Ind}_{G_2}(T_2, T'_2))$.

DEFINITION. – *Nous appellerons indice de* τ, *et nous noterons* $\mathrm{ind}(\tau)$, *l'image de* $\mathrm{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F})$ *dans le conoyau de* $\varphi_1^* \oplus \varphi_2^*$.

LEMME 7. – *Si* τ *est stablement relevable, alors* $\mathrm{ind}(\tau) = 0$.

Preuve. – Par hypothèse, il existe deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} & U(K) \arrow[d] \\ \Gamma \arrow[ur, "S'"] \arrow[r, "\tau'"'] & \mathrm{Cal}(K)_0^u \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} & U(H \oplus K) \arrow[d] \\ \Gamma \arrow[ur, "R"] \arrow[r, "\tau \oplus \tau'"'] & \mathrm{Cal}(H \oplus K)_0^u \end{tikzcd}$$

Soient $T_j : G_j \longrightarrow U(H)$ des relèvements des τ_j, et soient T'_j les restrictions de S' aux G_j $(j=1,2)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F}) &= \mathrm{Ind}_F(T_{1F} \oplus S'_F, T_{2F} \oplus S'_F) \\ &= \mathrm{Ind}_F(T_{1F} \oplus T'_{1F}, R_F) + \mathrm{Ind}_F(R_F, T_{2F} \oplus T'_{2F}) \\ &= \varphi_1^* (\mathrm{Ind}_{G_1}(T_1 \oplus T'_1, R)) + \varphi_2^* (\mathrm{Ind}_{G_2}(R, T_2 \oplus T'_2)). \end{aligned}$$

Construction. – Soit $\Gamma = G_1 *_F G_2$ comme ci-dessus, avec φ_1 et φ_2 désormais *injectifs*. Etant un groupe fini, G_j a un nombre fini de représentations irréductibles inéquivalentes ; soient $\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}, \ldots, \gamma_{j,k_j}$ leurs classes dans $\mathcal{R}(G_j)$ $(j=1,2)$. Si K est un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, nous noterons $T_j^{un} : G_j \longrightarrow U(K)$ une représentation somme directe d'une infinité de copies de $\bigoplus_{n=1}^{k_j} \gamma_{j,n}$; la représentation T_j^{un} est "universelle" au sens où toute représentation de G_j dans un Hilbert séparable en est une sous-représentation $(j=1,2)$.

Si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ sont les (classes de) représentations irréductibles de F, nous noterons de même $S^{un} : F \longrightarrow U(K)$ une représentation somme directe d'une infinité de copies de $\bigoplus_{n=1}^{l} \delta_n$. On peut de plus supposer que la restriction de T_j^{un} à F est égale à S^{un} [8, th. 27.46] $(j=1,2)$.

Par propriété universelle des sommes amalgamées, il existe donc un homomorphisme $R^{un} : \Gamma \longrightarrow U(K)$ qui coïncide avec T_j^{un} sur G_j $(j=1,2)$. Nous noterons τ^{un} sa projection. Schématiquement :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "S^{un}"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & & U(K) \arrow[d, "(j=1,2)"] \\
G_j \arrow[r] \arrow[urr, "T_j^{un}"] & \Gamma \arrow[r, "\tau^{un}"] \arrow[ur, "R^{un}"] & \mathrm{Cal}(K)_0^u
\end{tikzcd}$$

LEMME 8. – *Soit* $\tau : \Gamma \longrightarrow U(H)$ *un homomorphisme comme plus haut. Si* $\mathrm{ind}(\tau) = 0$, *alors* τ *est stablement relevable.*

Preuve. – Soient $\widetilde{T} : G_j \longrightarrow U(H)$ des relèvements des τ_j $(j=1,2)$. Par hypothèse, il existe des espaces de Hilbert V_1, V_2, W_1, W_2 de dimensions finies et des homomorphismes

$$\rho_1 : G_1 \longrightarrow U(V_1) \qquad \sigma_1 : G_1 \longrightarrow U(W_1)$$
$$\rho_2 : G_2 \longrightarrow U(V_2) \qquad \sigma_2 : G_2 \longrightarrow U(W_2)$$

tels que

$$\mathrm{Ind}_F(\widetilde{T}_{1F}, \widetilde{T}_{2F}) = \varphi_1^* [V_1]_{G_1}^{\rho_1} - \varphi_1^* [W_1]_{G_1}^{\sigma_1} + \varphi_2^* [V_2]_{G_2}^{\rho_2} - \varphi_2^* [W_2]_{G_2}^{\sigma_2}.$$

On ne restreint pas la généralité en supposant les dimensions de W_1 et de V_2 égales (car on peut toujours additionner à σ_1 ou à ρ_2 une représentation triviale). Soit donc $W_1 = V_2 = C^n$. Posons $T_1 = \widetilde{T}_1 \oplus \sigma_1 : G_1 \longrightarrow U(H \oplus C^n)$ et $T_2 = \widetilde{T}_2 \oplus \rho_2 : G_2 \longrightarrow U(H \oplus C^n)$. Alors les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & U(H \oplus C^n) \arrow[d] \\
G_j \arrow[ur, "T_j"] \arrow[r, "\tau_j"] & \mathrm{Cal}(H \oplus C^n)_0^u
\end{tikzcd} \qquad (j=1,2)$$

commutent et $\mathrm{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F}) = \varphi_1^* [V_1]_{G_1}^{\rho_1} - \varphi_2^* [W_2]_{G_2}^{\sigma_2}$.

Soient $\widetilde{Q}_j = T_j \oplus T_j^{un} : G_j \longrightarrow U(H \oplus C^n \oplus K)$. Comme les restrictions de T_1^{un} et T_2^{un} à F coïncident, $\mathrm{Ind}_F(\widetilde{Q}_{1F}, \widetilde{Q}_{2F})$ est encore bien défini, et vaut de nouveau $\varphi_1^* [V_1]_{G_1}^{\rho_1} - \varphi_2^* [W_2]_{G_2}^{\sigma_2}$. Nous allons montrer que $\tau \oplus \tau^{un} : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H \oplus C^n \oplus K)_0^u$ est relevable.

Par "universalité" de T_1^{un}, il existe un sous-espace V de K de dimension finie tel que $[V]_{G_1}^{T_1^{un}} = [V_1]_{G_1}^{\rho_1}$. De même, il existe un sous-espace W de K de dimension finie, avec $W \subset V^\perp$, et tel que $[W]_{G_2}^{T_2^{un}} = [W_2]_{G_2}^{\sigma_2}$. Définissons $T_j' : G_j \longrightarrow U(K)$ par

$$T'_1(g)v = \begin{cases} T_1^{un}(g)v & \text{si} \quad v \in V^\perp \\ v & \text{si} \quad v \in V \end{cases} \qquad \text{pour tout} \quad g \in G_1$$

$$T'_2(g)v = \begin{cases} T_2^{un}(g)v & \text{si} \quad v \in W^\perp \\ v & \text{si} \quad v \in W \end{cases} \qquad \text{pour tout} \quad g \in G_2$$

et $Q_j = T_j \oplus T'_j : G_j \longrightarrow U(H \oplus C^n \oplus K)$ $(j=1,2)$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_F(Q_{1F}, Q_{2F}) &= \operatorname{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F}) + \operatorname{Ind}_F(T'_{1F}, T'_{2F}) \\ &= \varphi_1^* [V_1]_{G_1}^{\rho_1} - \varphi_2^* [W_2]_{G_2}^{\sigma_2} + [V]_F^{T'_{1F}} + [W]_F^{T'_{1F}} - [V]_F^{T'_{2F}} - [W]_F^{T'_{2F}}. \end{aligned}$$

Par définition de V et de W : $[W]_F^{T'_{1F}} = [W]_F^{T^{un}_{2F}} = \varphi_2^* [W_2]_{G_2}^{\sigma_2}$ et $[V]_F^{T'_{2F}} = [V]_F^{T^{un}_{1F}} = \varphi_1^* [V_1]_{G_1}^{\rho_1}$. Donc $\operatorname{Ind}_F(Q_{1F}, Q_{2F}) = 0$.

Par [5, prop. 5], il existe donc $X \in U(H \oplus C^n \oplus K)$ avec $X-1$ compact et $Q_{1F} = (Q_{2F})^X$. Posons $R_1 = Q_1$ et $R_2 = Q_2^X$. Alors $R_{1F} = R_{2F}$, et R_1, R_2 définissent un homomorphisme $R : \Gamma \longrightarrow U(H \oplus C^n \oplus K)$ qui est manifestement un relèvement de $\tau \oplus \tau^{un}$.

LEMME 9. – *Soient* $\Gamma = G_1 *_F G_2$ *un produit amalgamé de groupes finis et* γ *un élément du conoyau de* $\varphi_1^* \oplus \varphi_2^*$. *Alors il existe un homomorphisme* $\tau : \Gamma \longrightarrow \operatorname{Cal}(H)_0^u$ *avec* $\operatorname{ind}(\tau) = \gamma$.

Preuve. – Soit $\gamma' \in \mathcal{R}(F)$ un élément représentant γ, soit m un entier positif et soient $\rho_j : F \longrightarrow U(C^m)$ $(j=1,2)$ des homomorphismes tels que $\gamma' = [C^m]_F^{\rho_1} - [C^m]_F^{\rho_2}$. De nouveau par [8, th. 27.46], il existe des entiers positifs n_1, n_2 et des homomorphismes $R_j : G_j \longrightarrow U(C^m \oplus C^{n_j})$ tels que la restriction de R_j à F définisse sur C^m la représentation ρ_j pour $j=1,2$.

Soient $Q_j = R_j \oplus T_j^{un} : G_j \longrightarrow U(C^m \oplus C^{n_j} \oplus K)$ $(j=1,2)$. Par restriction (sur le groupe et sur l'espace), Q_1 et Q_2 définissent des représentations $S_1 : F \longrightarrow U(C^{n_1} \oplus K)$ et $S_2 : F \longrightarrow U(C^{n_2} \oplus K)$ qui sont équivalentes, car elles contiennent toutes deux S^{un}. Par suite, il existe un opérateur unitaire $X_0 : C^{n_1} \oplus K \longrightarrow C^{n_2} \oplus K$ tel que $S_1(f) = X_0 S_2(f) X_0^{-1}$ pour tout $f \in F$.

Considérons désormais $C^{n_1} \oplus K$ et $C^{n_2} \oplus K$ égaux à un même espace de Hilbert H_0. Soient $H = C^m \oplus H_0$ et X l'opérateur unitaire sur H qui induit l'identité sur C^m et l'opérateur X_0 sur H_0. Soient $T_1 = Q_1 = R_1 \oplus T_1^{un}$ et $T_2 : G_2 \longrightarrow U(C^m \oplus H_0)$ l'homomorphisme défini par $T_2(g) = XQ_2(g)X^{-1} = X(R_2(g) \oplus T_2^{un}(g))X^{-1}$ pour tout $g \in G_2$. Si $\tau_j = \pi T_j : G_j \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$ $(j=1,2)$, il est immédiat de vérifier que les restrictions de τ_1 et τ_2 à F coïncident ; par suite τ_1 et τ_2 définissent $\tau : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$. Par ailleurs

$$\mathrm{Ind}_F(T_{1F}, T_{2F}) = [C^m]_F^{T_{1F}} - [C^m]_F^{T_{2F}} = \gamma' \quad \text{et} \quad \mathrm{ind}(\tau) = \gamma .$$

Les lemmes 7 à 9 se résument comme suit.

THEOREME 2. – *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes finis,* F *un sous-groupe de* G_1 *et de* G_2, *et* Γ *la somme amalgamée* $G_1 *_F G_2$. *Tout homomorphisme* $\tau : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$ *définit un élément* $\mathrm{ind}(\tau) \in \mathrm{Coker}\ (\varphi_1^* \oplus \varphi_2^* : \widetilde{\mathcal{R}}(G_1) \oplus \widetilde{\mathcal{R}}(G_2) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{R}}(F))$, *et* τ *est stablement relevable si et seulement si* $\mathrm{ind}(\tau) = 0$. *De plus, tout élément de* $\mathrm{Coker}(\varphi_1^* \oplus \varphi_2^*)$ *peut être réalisé par un tel indice.*

Remarques et exemples

1) Si G_1 est abélien, alors $G_1 *_F G_2$ est stablement relevable (même relevable). En particulier $SL_2(Z) = Z_4 *_{Z_2} Z_6$ est relevable [12, n° 4.2.c]. Il est par contre a priori exclu de traiter $SL_3(Z)$ de la même manière [13].

2) Il existe des Γ non stablement relevables ; par exemple $\Gamma = G *_F G$ avec F et G comme dans la remarque 2 de la section 2.

3) De même que dans la section 2, il serait facile d'énoncer un corollaire sur l'existence de relèvements (stricts ou stables) $\Gamma \longrightarrow GL(H)$ d'un homomorphisme $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}}$.

4) Un autre corollaire facile du théorème 2 est le suivant : Soient Γ comme plus haut et F' un groupe fini. Si Γ est stablement relevable, alors le produit direct $\Gamma \times F'$ l'est aussi (voir aussi [6], section III).

4. Produits semi-directs par Z.

Soient G un groupe fini, *e* son élément neutre, et $\{1\} \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow Z \longrightarrow \{1\}$ une extension de Z par G. On sait que Γ est le produit ensembliste de G et Z, et qu'il existe un automorphisme φ de G tel que la loi de groupe sur Γ soit donnée par $(g, m)(h, n) = (g\varphi^m(h), m+n)$ pour tous $g, h \in G$ et $m, n \in Z$; en particulier $(\varphi(g^{-1}), 0)(e, 1)(g, 0) = (e, 1)$ pour tout $g \in G$. Soit $\tau : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$ un homomorphisme ; nous noterons σ sa restriction à G et x_τ (ou x s'il n'y a pas de confusion possible) l'élément $\tau(e, 1)$.

Soit S un relèvement quelconque de σ, soit $X \in U(H)$ avec $\pi(X) = x$, et soit $Y = \int_G S(\varphi(g^{-1}))XS(g)dg$. Alors Y est de Fredholm d'indice zéro, car $\pi(Y) = x$, et Y entrelace S et $S \circ \varphi$: $YS(h) = S(\varphi(h))Y$ pour tout $h \in G$. On peut donc définir $\mathrm{Ind}_G(S, Y) = [\mathrm{Ker}\, Y]_G^S - [(\mathrm{Im}\, Y)^\perp]_G^{S\circ\varphi} \in \widetilde{\mathcal{R}}(G)$. Si $Y' \in L(H)$ est un autre opérateur d'entrelacement de S et $S \circ \varphi$ et si $\pi(Y') = x$, il résulte de [5, lemme 11(ii)] que $\mathrm{Ind}_G(S, Y') = \mathrm{Ind}_G(S, Y)$; nous écrirons donc $\mathrm{Ind}_G(S, x)$ au lieu de $\mathrm{Ind}_G(S, Y)$.

Soit $\rho : G \longrightarrow U(V)$ une représentation de G de dimension finie ; nous noterons $\varphi^*[V]^\rho$ la classe dans $\mathcal{R}(G)$ de la représentation $\rho \circ \varphi : G \longrightarrow U(V)$. Les éléments de la forme $\varphi^*[V]^\rho - [V]^\rho$ engendrent dans $\mathcal{R}(G)$ un sous-groupe additif noté $\mathcal{R}_\varphi(G)$.

LEMME 10. — *L'image canonique de* $\mathrm{Ind}_G(S,x)$ *dans* $\widetilde{\mathcal{R}}(G)/\widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$ *ne dépend que de* τ, *pas de* S.

Preuve. — Soient S_1 et S_2 deux relèvements de σ.

Premier cas particulier. — Il existe $\alpha \in U(H, C)$ tel que $S_2 = S_1^\alpha$; alors $\mathrm{Ind}_G(S_1, x) = \mathrm{Ind}_G(S_2, x)$ comme au lemme 12 de [5].

Deuxième cas particulier. — Il existe un sous-espace H^0 de H de dimension finie stable par S_1 et par S_2, et tel que les restrictions de S_1 et S_2 à $(H^0)^\perp$ coïncident ; on montre alors comme au lemme 12 de [5] que

$$\mathrm{Ind}_G(S_1, x) - \mathrm{Ind}_G(S_2, x) = [H^0]_G^{S_1} - [H^0]_G^{S_1\circ\varphi} - [H^0]_G^{S_2} + [H^0]_G^{S_2\circ\varphi}.$$

Cas général. — La preuve est encore semblable à celle du lemme 12 de [5].

DEFINITION. — *Nous appellerons indice de* τ, *et nous noterons* $\mathrm{ind}(\tau)$, *l'image de* $\mathrm{Ind}_G(S, x)$ *dans le quotient* $\widetilde{\mathcal{R}}(G)/\widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$.

Remarque. – Si φ est l'identité, Γ est un produit direct et $\operatorname{ind}(\tau)$ est la quantité notée $\operatorname{Ind}_G(\tau)$ dans [5].

LEMME 11. – *Si* τ *est stablement relevable, alors* $\operatorname{ind}(\tau) = 0$.

Preuve. – Par hypothèse, il existe deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} & U(K) \arrow[d] \\ \Gamma \arrow[ur, "R'"] \arrow[r, "\tau'"'] & \mathrm{Cal}(K)_0^u \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & U(H \oplus K) \arrow[d] \\ \Gamma \arrow[ur, "R"] \arrow[r, "\tau \oplus \tau'"'] & \mathrm{Cal}(H \oplus K)_0^u \end{tikzcd}$$

Notons S' la restriction de R' à G, $Y' = R'(e,1) \in U(K)$ et $x' = \pi(Y')$. Soient S un relèvement quelconque de σ et $Y \in \phi_G(S, S \circ \varphi)$ tel que $\pi(Y) = \tau(e,1)$. Alors

$$\operatorname{Ind}_G(S, x) = \operatorname{Ind}_G(S \oplus S', Y \oplus Y') = \operatorname{Ind}_G(S \oplus S', x \oplus x') \in \widetilde{\mathcal{R}}(G).$$

Par le lemme 10, cette dernière quantité est congrue modulo $\widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$ à $\operatorname{Ind}_G(R|_G, x \oplus x')$, qui est nul ; donc $\operatorname{ind}(\tau)$ est nul dans $\widetilde{\mathcal{R}}(G)/\widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$.

Construction. – Soit $S^{un} : G \longrightarrow U(K)$ comme après le lemme 7. Comme S^{un} et $S^{un} \circ \varphi$ sont équivalentes, il existe $Y^{un} \in U(K)$ avec $Y^{un} S^{un}(g) = S^{un}(\varphi(g)) Y^{un}$ pour tout $g \in G$. On choisit de plus Y^{un} ayant la propriété suivante : pour toute classe de représentation irréductible $\gamma \in \hat{G}$, il existe une infinité de sous-espaces V_i de K de dimensions finies $(i \in N)$ avec $[V_i]_G^{S^{un}} = \gamma$, $V_i \perp V_j$ si $i \neq j$ et $Y^{un}\left(\bigoplus_{i \in N} V_i\right) \perp \bigoplus_{i \in N} V_i$. L'application $R^{un} : \Gamma \longrightarrow U(K)$ définie par $R^{un}(g, n) = S^{un}(g)\,(Y^{un})^n$ pour tous $g \in G$, $n \in Z$ est un homomorphisme. Schématiquement :

$$\begin{tikzcd} & & U(K) \arrow[d] \\ G \arrow[r, hook] \arrow[urr, "S^{un}"] & \Gamma \arrow[ur, "R^{un}"] \arrow[r, "\tau^{un}"'] & \mathrm{Cal}(K)_0^u \end{tikzcd}$$

LEMME 12. – *Soit* $\tau : \Gamma \longrightarrow U(H)$ *un homomorphisme comme plus haut. Si* $\operatorname{ind}(\tau) = 0$, *alors* τ *est stablement relevable.*

Preuve. – Soit $\widetilde{S} : G \longrightarrow U(H)$ un relèvement de σ et $\widetilde{X} \in L(H)$ avec $\pi(\widetilde{X}) = x_\tau$ et $\widetilde{X}\widetilde{S}(g) = \widetilde{S}(\varphi(g))\widetilde{X}$ pour tout $g \in G$. Par hypothèse, il existe deux espaces de Hilbert de dimensions finies V_1, V_2 et deux homomorphismes $\rho_j : G \longrightarrow U(V_j)$ $(j=1,2)$ avec

$$\mathrm{Ind}_G(\widetilde{S},\widetilde{X}) = [V_1]_G^{\rho_1} - \varphi^*[V_1]_G^{\rho_1} - [V_2]_G^{\rho_2} + \varphi^*[V_2]_G^{\rho_2}.$$

Nous supposerons que $V_1 = V_2 = C^m$, ce qui ne restreint pas la généralité (voir lemme 8). Posons alors $S = \widetilde{S} \oplus \rho_2 : G \longrightarrow U(H \oplus C^m)$ et $X = \widetilde{X} \oplus 0 \in L(H \oplus C^m)$. Alors

$$\mathrm{Ind}_G(S,X) = \mathrm{Ind}_G(\widetilde{S},\widetilde{X}) + [C^m]_G^S - [C^m]_G^{S\circ\varphi} = [C^m]_G^{\rho_1} - \varphi^*[C^m]_G^{\rho_1}.$$

Soient alors $\widetilde{Q} = S \oplus S^{un} : G \longrightarrow U(H \oplus C^m \oplus K)$ et $\widetilde{Y} = X \oplus Y^{un} \in L(H \oplus C^m \oplus K)$. On a

$$\mathrm{Ind}_G(\widetilde{Q},\widetilde{Y}) = \mathrm{Ind}_G(S,X) + \mathrm{Ind}_G(S^{un},Y^{un}) = \mathrm{Ind}_G(S,X).$$

Vu le choix de Y^{un}, il existe un sous-espace W de K de dimension finie avec $[W]_G^{S^{un}} = [C^m]_G^{\rho_1}$ et $Y^{un}(W) \perp W$.

Posons alors $S'(g)v = \begin{cases} S^{un}(g)v & \text{si } v \in W^\perp \\ v & \text{si } v \in W \end{cases}$, $Q = S \oplus S'$,

$Y'v = \begin{cases} Yv & \text{si } v \in (W \oplus (Y^{un})^{-1}(W))^\perp \\ 0 & \text{si } v \in W \oplus (Y^{un})^{-1}(W) \end{cases}$ et $Y = X \oplus Y'$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_G(Q,Y) &= \mathrm{Ind}_G(\widetilde{Q},\widetilde{Y}) + [W]_G^{S'} - [Y^{un}(W)]_G^{S'\circ\varphi} \\ &\qquad + [(Y^{un})^{-1}(W)]_G^{S'} - [W]_G^{S'\circ\varphi} \\ &= \mathrm{Ind}_G(\widetilde{Q},\widetilde{Y}) + \mathbf{1} - [Y^{un}(W)]_G^{S^{un}\circ\varphi} + [(Y^{un})^{-1}(W)]_G^{S} - \mathbf{1} \\ &= \mathrm{Ind}_G(\widetilde{Q},\widetilde{Y}) - [W]_G^{S^{un}} + [W]_G^{S^{un}\circ\varphi} = \mathrm{Ind}_G(\widetilde{Q},\widetilde{Y}) - [C^m]_G^{\rho_1} \\ &\qquad + \varphi^*[C^m]_G^{\rho_1} = 0.\end{aligned}$$

Il existe donc une perturbation $\widetilde{Z}$ de Y par un opérateur de rang fini tel que $\widetilde{Z}$ soit inversible et tel que $\widetilde{Z}Q(g) = Q(\varphi(g))\widetilde{Z}$ pour tout $g \in G$. Si Z est le terme unitaire dans la décomposition polaire de $\widetilde{Z}$, et si $R : \Gamma \longrightarrow U(H \oplus C^m \oplus K)$ est l'application définie par $R(g,n) = Q(g)Z^n$, alors R est un relèvement de $\tau \oplus \tau^{un} : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H \oplus C^m \oplus K)_0^u$.

LEMME 13. – *Soient* $\Gamma = G \times_\varphi Z$ *comme plus haut et* γ *un élément de* $\widetilde{\mathfrak{R}}(G)/\widetilde{\mathfrak{R}}_\varphi(G)$. *Alors il existe un homomorphisme* $\tau : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$ *avec* $\mathrm{ind}(\tau) = \gamma$.

Preuve. – Soit $\gamma' \in \widetilde{\mathcal{R}}(G)$ un élément représentant γ. Soient m un entier positif et $\rho_j : G \longrightarrow U(C^m)$ $(j=1,2)$ des homomorphismes tels que $\gamma' = [C^m]_G^{\rho_1} - [C^m]_G^{\rho_2}$.

Soient $H_I = \bigoplus_{j \in N} H_I^j$ l'espace de Hilbert somme d'une infinité de copies de C^m, et $D_I : H_I \longrightarrow H_I$ une isométrie telle que $D_I(H_I^j) = H_I^{j+1}$ pour tout $j \in N$. Pour tout $g \in G$, soit $S_I(g) = \bigoplus_{j \in N} S_I^j(g)$ l'opérateur unitaire sur H_I, laissant invariant chacun des H_I^j, et défini comme suit :

$$\begin{cases} S_I^0(g) = \rho_1 \\ S_I^j(g) D_I = D_I S_I^{j-1}(\varphi^{-1}(g)) \quad \text{si} \quad j \geqslant 1 \,; \end{cases}$$

alors $S_I : G \longrightarrow U(H_I)$ est un homomorphisme et $D_I S_I(g) = S_I(\varphi(g)) D_I$ pour tout $g \in G$.

On construit de même un espace $H_{II} = \bigoplus_{j \in N} H_{II}^j$, une isométrie D_{II} telle que $D_{II}(H_{II}^j) = H_{II}^{j+1}$ et un homomorphisme $S_{II} : G \longrightarrow U(H_{II})$ tel que $D_{II}{}^* S_{II}(g) = S_{II}(\varphi(g)) D_{II}{}^*$ pour tout $g \in G$ et tel que la restriction de S_{II} à H_{II}^0 soit ρ_2.

Considérons enfin l'espace $H = H_I \oplus H_{II}$, l'homomorphisme $S = S_I \oplus S_{II} : G \longrightarrow U(H)$ et sa projection $\sigma = \pi S : G \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$, et l'opérateur $Y = D_I \oplus D_{II}{}^*$ et sa projection $x = \pi(Y)$. Comme $x\sigma(g) = \sigma(\varphi(g))x$ pour tout $g \in G$, l'application

$$\tau : \begin{cases} G \times_\varphi Z \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u \\ (g, n) \longmapsto \sigma(g) x^n \end{cases}$$

est un homomorphisme. On vérifie que $\mathrm{ind}(\tau) = \gamma$.

Les lemmes 11 à 13 se résument comme suit.

THEOREME 3. – *Soient* G *un groupe fini,* φ *un automorphisme de* G, *et* $\Gamma = G \times_\varphi Z$ *le produit semi-direct correspondant. Tout homomorphisme* $\tau : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)_0^u$ *définit un élément* $\mathrm{ind}(\tau)$ *dans le groupe quotient* $\widetilde{\mathcal{R}}(G)/\widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$, *où* $\widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$ *est engendré par les représentations virtuelles de la forme* $\varphi^*\rho - \rho$, *et* τ *est stablement relevable si et seulement si* $\mathrm{ind}(\tau) = 0$. *De plus, tout élément de* $\widetilde{\mathcal{R}}(G)/\widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$ *peut être réalisé par un tel indice.*

Remarques

1) Si $\varphi = \mathrm{id}$, on retrouve l'énoncé "stabilisé" du théorème IV de [5].

2) Si $G \neq \{1\}$, alors $\widetilde{\mathcal{R}}(G) \neq \widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$; en effet, si γ n'est pas triviale et si δ est une représentation triviale de même dimension que γ, alors $\gamma - \delta \notin \widetilde{\mathcal{R}}_\varphi(G)$.

3) Le théorème 3 et le cas particulier du théorème 2 où F est d'indice deux dans G_1 et dans G_2 traitent complètement le cas des groupes à deux bouts (voir Stallings [14], section 4A). Le théorème 1 de [5] sur les groupes finis traite le cas des groupes à zéro bout. Les groupes avec une infinité de bouts semblent abordables (voir [14], section 5A), et ce sont bien entendu les groupes à un bout qui sont "difficiles". Y a-t-il des relations éclairantes entre la théorie des bouts et les problèmes étudiés ici ?

5. Interprétation des résultats.

Soit G un groupe topologique. Deux homomorphismes $\sigma_j : G \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)^u$ $(j=1,2)$ sont *équivalents* s'ils sont conjugués, i.e. s'il existe $x \in \mathrm{Cal}(H)^u$ avec $\sigma_2(g) = x^* \sigma_1(g) x$ pour tout $g \in G$; on écrit alors $\sigma_1 \sim \sigma_2$. (Il s'agit bien ici de tout $\mathrm{Cal}(H)^u$, pas seulement de sa composante connexe.) Si $\sigma_j : G \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)^u$ $(j=1,2)$ sont des homomorphismes, leur *somme* est naturellement définie par $\sigma_1 \oplus \sigma_2 : G \longrightarrow \mathrm{Cal}(H \oplus H)^u$; les espaces H et $H \oplus H$ étant isomorphes, on définit ainsi une structure de semi-groupe abélien sur l'ensemble des classes d'équivalence d'homomorphismes de G dans $\mathrm{Cal}(H)^u$.

Deux homomorphismes σ_1 et σ_2 de G dans $\mathrm{Cal}(H)^u$ sont *stablement équivalents* s'il existe des homomorphismes relevables τ_1 et τ_2 de G dans $\mathrm{Cal}(H)^u$ avec $\sigma_1 \oplus \tau_1 \sim \sigma_2 \oplus \tau_2$. Nous noterons RepB(G) l'ensemble des classes d'équivalence stable d'homomorphismes de G dans $\mathrm{Cal}(H)^u$; l'opération somme définie ci-dessus en fait un semi-groupe abélien.

LEMME 14. — *Deux homomorphismes stablement relevables σ_1 et σ_2 de* G *dans* $\mathrm{Cal}(H)^u$ *sont stablement équivalents.*

Preuve. – Par hypothèse, il existe des homomorphismes relevables σ_1' et σ_2' avec $\sigma_1 \oplus \sigma_1'$ et $\sigma_2 \oplus \sigma_2'$ relevables. Alors $\tau_1 = \sigma_1' \oplus \sigma_2 \oplus \sigma_2'$ et $\tau_2 = \sigma_2' \oplus \sigma_1 \oplus \sigma_1'$ sont relevables et $\sigma_1 \oplus \tau_1 \sim \sigma_2 \oplus \tau_2$.

LEMME 15. – *Soient* σ *et* τ *des homomorphismes de* G *dans* $\mathrm{Cal(H)}^u$ *avec* τ *stablement relevable. Alors* σ *et* $\sigma \oplus \tau$ *sont stablement équivalents.*

Preuve. – Vu ce qui précède, on peut supposer que τ a un relèvement, disons T. Soit $\mathrm{T}^\infty : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{U}(\mathrm{H}^\infty)$ la somme orthogonale d'une infinité de copies de T, où $\mathrm{H}^\infty = \mathrm{H} \oplus \mathrm{H} \oplus \ldots$, et soit τ^∞ la projection de T^∞. Alors $\sigma \oplus \tau^\infty$ et $(\sigma \oplus \tau) \oplus \tau^\infty$ sont équivalents.

Par suite, le semi-groupe RepB(G) a toujours un élément neutre et RepB(–) est manifestement un foncteur contravariant de la catégorie des groupes topologiques et homomorphismes continus dans celle des semi-groupes abéliens avec éléments neutres et morphismes préservant les éléments neutres.

La section III de [5] montre que RepB(G) est réduit à un élément lorsque G est compact.

Soient G un groupe compact et $\Gamma = \mathrm{G} \times \mathrm{Z}$. Si τ_1 et τ_2 sont des homomorphismes stablement équivalents de Γ dans $\mathrm{Cal(H)}^u$, on peut montrer que $\mathrm{ind}(\tau_1) = \mathrm{ind}(\tau_2) \in \mathcal{R}(\mathrm{G})$. (Il faut modifier à peine la section IV.2 de [5], puisque nous ne supposons *plus* ici que les images des τ_j sont dans la composante connexe de $\mathrm{Cal(H)}^u$; si τ_1 et τ_2 sont conjugués par un élément x de la forme $\pi(\mathrm{X})$ avec $\mathrm{X} \in \mathrm{U(H)}$, il est évident que $\mathrm{ind}(\tau_1) = \mathrm{ind}(\tau_2)$; on généralise à x quelconque comme pour le lemme 1 de [5] ; il est alors évident que $\mathrm{ind}(\tau_1) = \mathrm{ind}(\tau_2)$ pour τ_1 et τ_2 stablement équivalents.) Par suite, ind définit une application de RepB(Γ) dans $\mathcal{R}(\mathrm{G})$. La section IV.2 de [5] implique alors la proposition suivante : RepB(Γ) est un groupe et $\mathrm{ind} : \mathrm{RepB}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{G})$ est un isomorphisme.

De même, avec les notations des sections 3 et 4 ci-dessus, on obtient les propositions suivantes : Si $\Gamma = \mathrm{G}_1 *_{\mathrm{F}} \mathrm{G}_2$, alors RepB($\Gamma$) est un groupe et ind est un isomorphisme de RepB(Γ) sur le conoyau de $\mathcal{R}(\mathrm{G}_1) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{G}_2) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{F})$. Si $\Gamma = \mathrm{G} \times_\varphi \mathrm{Z}$, alors RepB($\Gamma$) est un groupe et $\mathrm{ind} : \mathrm{RepB}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{G})/\mathcal{R}_\varphi(\mathrm{G})$ est un isomorphisme.

Si A est abélien localement compact avec dual de Pontrjagin $\hat{A}$ métrisable, on sait que RepB(A) est un groupe isomorphe à $\varinjlim$ Ext(F), où la limite est prise sur les compacts F de $\hat{A}$. Si de plus G est un groupe compact, alors RepB(G $\times$ A) est isomorphe à $\mathcal{R}(G) \otimes_Z \mathrm{RepB}(A)$; voir Brown [2], section 7.

Deux questions pour terminer.

Soient G un groupe topologique et $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)^u$ un homomorphisme. Alors $B\tau : BG \longrightarrow B\mathrm{Cal}(H)^u \sim U(\infty)$ définit un élément dans la K^1-théorie représentable de BG. On vérifie facilement qu'on obtient ainsi un homomorphisme de semi-groupes $\beta : \mathrm{RepB}(G) \longrightarrow K^1(BG)$. Est-ce-que β est injectif ?

Soit enfin $\mathrm{RepB}_0(G)$ le sous-semi-groupe de $\mathrm{RepB}(G \times Z)$ défini par les homomorphismes $G \times Z \longrightarrow \mathrm{Cal}(H)^u_0$ dont les restrictions à G sont stablement relevables. Via la formule de Künneth en K-théorie topologique, on obtient une application composée β_0 :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RepB}_0(G) \arrow[rr, "\beta_0"] \arrow[d, hook] & & K^0(BG) \\
\mathrm{RepB}(G \times Z) \arrow[r] & K^1(BG \times S^1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dans le cas où G est compact β_0 s'interprète comme l'homomorphisme standard de $\mathcal{R}(G)$ dans $\widetilde{K}^0(BG)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BOERNER, Darstellungen von Gruppen, 2^e éd., Springer 1967.

[2] L.G. BROWN, Extensions and the structure of C*-algebras, conférence "Teoria degli operatori, indice e teoria K" (Rome, octobre 1975), *Symp. Math.*, 20 (1976), 539-566.

[3] L.G. BROWN, communication privée.

[4] P. de la HARPE et M. KAROUBI, Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert, *C.R. Acad. Sc.* Paris, Sér. A, *281* (1975), 901-904.

[5] P. de la HARPE et M. KAROUBI, Pertubations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert I, *Bull. Soc. Math. France,* suppl., Mém. Nr 46 (1976), 41-65.

[6] P. de la HARPE, Lifting matrix algebras from the Calkin algebra, Lausanne, octobre 1975.

[7] E. HEWITT et K.A. ROSS, Abstract harmonic analysis, Springer 1963.

[8] E. HEWITT et K.A. ROSS, Abstract harmonic analysis II, Springer 1970.

[9] I. KAPLANSKY, Lie algebras and locally compact groups, The University of Chicago Press, 1971.

[10] S. SAKAI, C*-algebras and W*-algebras, Springer 1971.

[11] J.P. SERRE, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann 1967.

[12] J.P. SERRE, Arbres, amalgames et SL_2, Collège de France 1968/69 (à paraître dans les *Springer Lecture Notes in Mathematics*).

[13] J.P. SERRE, Amalgames et points fixes, Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups, Camberra 1973, *Springer Lectures Notes,* 372 (1974), 633-640.

[14] J. STALLINGS, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale University Press 1971.

[15] F. THAYER, Obstructions to lifting * morphisms into the Calkin algebra, *Illinois Math. J.,* 20 (1976), 322-328.

Manuscrit reçu le 5 octobre 1976
Proposé par M. Malgrange.

Max KAROUBI,
Université Paris VII
U.E.R. de mathématiques
2, place Jussieu
75005 Paris.

Pierre de la HARPE,
Section de mathématiques
Université de Genève
2-4 rue du Lièvre
1211 Genève (Suisse).