ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES PISIER

Une nouvelle classe d'espaces de Banach vérifiant le théorème de Grothendieck

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 1 (1978), p. 69-90

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_1_69_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 1 (1978), 69-90

UNE NOUVELLE CLASSE D'ESPACES DE BANACH VÉRIFIANT LE THÉORÈME DE GROTHENDIECK

par Gilles PISIER

Introduction.

Le "théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels" (cf. Grothendieck [3] théorème 1 p. 59) assure que, si X est un espace L^1, tout opérateur de X dans un espace hilbertien est 1-absolument sommant (cf. définition 1). Ce résultat est repris dans [7] sous l'hypothèse que X est un espace $\mathcal{L}_1$. La question est alors posée de savoir si une telle propriété caractérise les espaces $\mathcal{L}_1$ (cf. [7] problem 2).

D'après un théorème de Dvoretzky [1], une réponse affirmative aurait permis de résoudre un problème important posé par Grothendieck et qui reste ouvert : soient X, Y deux espaces de Banach, si tout opérateur compact de X dans Y est nucléaire, est-ce que X ou Y est de dimension finie ?

Dans [3] (p. 73, n° 5), Grothendieck soulève une question voisine de celle de Lindenstrauss-Pełczyński : soit j l'injection $l^2 \longrightarrow c_0$ et soit X un espace de Banach ; supposons que pour tout opérateur borné $u : c_0 \longrightarrow X$ le composé $u \circ j$ est nucléaire, est-ce que le bidual X'' de X est isomorphe à un sous espace complémenté d'un espace L^1 ?

On notera que d'après [9] cette question équivaut à : est-ce que X est un espace $\mathcal{L}_1$?

Là encore, la motivation se trouve être le problème des compacts non-nucléaires cité plus haut ; mais, à l'époque où il écrit, Grothendieck ne dispose pas du théorème de Dvoretzky, mais seulement du lemme de Dvoretzky – Rogers [2], et cela explique pourquoi l'injection $l^2 \longrightarrow c_0$ intervient dans sa question.

L'objet de cet article est de produire un exemple répondant négativement à la question de Lindenstrauss – Pełczyński et aussi (a fortiori) à celle de Grothendieck.

Dans des cas particuliers, des réponses positives ont été données dans [7] et [10].

Nous verrons au théorème 2 que, pour tout sous-espace réflexif R d'un espace $\mathcal{L}_1$ noté W, le quotient W/R vérifie le théorème de Grothendieck. Cela équivaut (cf. corollaire 1) à une propriété de relèvement des séries sommables dans W/R. Sauf dans le cas trivial où R est de dimension finie, W/R n'est pas un espace $\mathcal{L}_1$; on obtient donc l'exemple promis.

Dans les "compléments", nous donnons des variantes et plusieurs conséquences du théorème 2.

La principale est peut-être la suivante :

Soit $Y = (W/R)'$ le dual de l'exemple décrit ci-dessus ; si Y possède une propriété d'approximation convenable, alors tout opérateur de Y dans Y' est 2-sommant ; par conséquent (cf. [21] et [20]) toute structure d'algèbre de Banach sur Y est une algèbre d'opérateurs (voir corollaire 3). Les seuls exemples précédemment connus ayant une telle propriété sont les espaces de Hilbert (trivialement) et les espaces $\mathcal{L}_\infty$ (d'après Varopoulos [21]).

Je tiens à remercier Bernard Maurey pour une suggestion qui m'a permis de généraliser les énoncés d'une version préliminaire de ce travail où seul le cas de sous-espaces invariants par translation (voir remarque 10) était traité.

Enfin, après avoir complété le présent manuscrit, j'ai appris par A. Pełczyński que S.V. Kisliakov avait démontré indépendamment les résultats principaux de cet article (théorèmes 1 et 2) par une méthode différente.

Rappels.

Nous commencons par des notations et quelques rappels. Soient X, Y deux espaces de Banach. Nous notons B(X, Y) l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y et X' le dual de X.

DEFINITION 1. – *Soit* p *tel que* $0 < p < \infty$. *On dit qu'un opérateur* $u : X \longrightarrow Y$ *est p-absolument sommant, ou p-sommant, s'il existe une constante* λ *telle que :*

$$\Sigma \|u(x_i)\|^p \leqslant \lambda^p \max \{\Sigma |\xi(x_i)|^p \ ; \ \xi \in X', \|\xi\| \leqslant 1\}$$

pour toute suite finie (x_i) *d'éléments de* X. *La plus petite de ces constantes* λ *est notée* $\pi_p(u)$; *l'espace des opérateurs p-sommants de* X *dans* Y *est noté* $\pi_p(X, Y)$.

Rappelons que, si $0 < p < q < \infty$, on a : $\|u\| \leqslant \pi_q(u) \leqslant \pi_p(u)$.

Nous aurons besoin de la forme suivante de la factorisation de Pietsch (cf. [16] et [7] prop. 2.1) :

Supposons que X est un sous espace fermé de l'espace – noté C(K) – des fonctions continues sur un compact K. Si $p \geqslant 1$, pour tout opérateur p-sommant $u : X \longrightarrow Y$, il existe une mesure de probabilité ν sur K telle que :

$$\forall x \in X, \quad \|u(x)\| \leqslant \pi_p(u) \ \left(\int |x(k)|^p \ \nu(dk)\right)^{1/p}.$$

Tout au long de cet article, nous dirons que X vérifie le théorème de Grothendieck si :

$$B(X, l^2) = \pi_1(X, l^2).$$

Cette propriété a de nombreuses formulations équivalentes, nous en donnons plusieurs ci-dessous :

PROPOSITION 1. – *Soient* X, Y *deux espaces de Banach.*

Les propriétés suivantes de X *sont équivalentes :*

i) X *vérifie le théorème de Grothendieck i.e. :*

$$B(X, l^2) = \pi_1(X, l^2).$$

ii) X'' *vérifie le théorème de Grothendieck.*

iii) *Quels que soient les opérateurs bornés* $u : c_0 \longrightarrow X$ *et* $v : l^2 \longrightarrow c_0$, *le composé* $u \circ v$ *est nucléaire.*

Les propriétés suivantes de Y *sont équivalentes :*

iv) *Tout opérateur de* Y *dans un espace* L^1 *est 2-sommant, ce qui équivaut à* $B(Y, l^1) = \pi_2(Y, l^1)$.

v) $B(Y'', l^1) = \pi_2(Y'', l^1)$.

De plus, si $X = Y'$ *ou si* $X' = Y$ *alors les 5 propriétés précédentes sont équivalentes.*

La démonstration (standard) est omise.

Remarque 1. – L'équivalence i) $\Longleftrightarrow$ iii) ci-dessus montre clairement que, dans la question de Grothendieck mentionnée dans l'introduction, l'hypothèse faite sur X est plus faible que $B(X, l^2) = \pi_1(X, l^2)$. Une réponse négative à la question de Lindenstrauss – Pełczyński répondra donc a fortiori à celle de Grothendieck.

Soit p avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et n un entier. Nous notons l_n^p l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme

$$x \in \mathbf{R}^n \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\text{et} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \text{ si } p = \infty\right).$$

Rappelons que la "distance" notée $d(X, Y)$ entre deux espaces de Banach X, Y est la borne inférieure des nombres $\|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ quand T décrit les isomorphismes de X dans Y ; si X et Y ne sont pas isomorphes on pose $d(X, Y) = \infty$.

Rappelons la définition des espaces $\mathcal{L}_p$ (cf. [9]) :

DEFINITION 2. – *On dit qu'un espace de Banach* X *est un espace* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \lambda < \infty$, *si pour tout sous-espace de dimension finie* E *de* X *il existe un sous-espace de dimension finie* F *de* X *contenant* E *et tel que* $d(F, l_n^p) \leqslant \lambda$ *(avec* $n = \dim F$). *On dit que* X *est un espace* $\mathcal{L}_p$, *s'il est un espace* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *pour un* $\lambda \geqslant 1$.

Rappelons aussi la caractérisation des espaces $\mathcal{L}_p$ obtenue par Lindenstrauss et Rosenthal [9] : si X n'est pas un espace $\mathcal{L}_2$, alors X est un espace $\mathcal{L}_p$ si et seulement si son bidual X'' est isomorphe à un sous-espace complémenté (c'est-à-dire admettant un supplémentaire topologique) d'un espace L^p.

Pour finir, rappelons la

DEFINITION 3. – *Notons* (r_n) *la suite des fonctions de Rademacher sur* $[0,1]$. *Un espace de Banach* X *est dit de cotype 2 s'il existe une constante* λ *telle que*

$$\Sigma \|x_i\|^2 \leqslant \lambda \int \|\Sigma\, r_i(t)\, x_i\|^2 \, dt$$

pour toute suite finie (x_i) *d'éléments de* X.

Par exemple, tout sous-espace d'un espace L^1 est de cotype 2 ; nous renvoyons à [13] (chap. VI) et à [14] pour une étude de cette classe d'espaces de Banach.

Préliminaires.

Nous démontrons le théorème annoncé en suivant une approche – due à Maurey – qui est basée sur l'idée d'extrapolation. Dans [12] (théorème 1.bis) cette technique permet de retrouver le théorème de Grothendieck sous une forme généralisée : tout opérateur d'un espace $\mathcal{L}_\infty$ dans un espace de cotype 2 est 2-sommant.

Pour une application dans le cadre des treillis de Banach, voir J.L. Krivine [5].

On peut schématiser l'idée de Maurey de la manière suivante :

PROPOSITION 2. – *Soient* Y, Z *deux espaces de Banach. On suppose qu'il existe des nombres* q, r, C, θ *avec* $2 \leqslant q < r < \infty$, $0 < C < \infty$ *et* $0 < \theta < 1$ *tels que tout opérateur de rang fini* u *de* Y *dans* Z *vérifie :*

$$\pi_r(u) \leqslant C\, \pi_q(u)^\theta\, \|u\|^{1-\theta}. \tag{1}$$

Alors, si Z *est de cotype 2, on peut trouver une constante* K *telle que tout opérateur de rang fini* u *de* Y *dans* Z *vérifie :*

$$\pi_2(u) \leqslant K\, \|u\|.$$

Démonstration. – Dans [13] (Prop. 74, p. 90) Maurey a démontré que tout espace Z de cotype 2 a la propriété suivante :

> Pour tout α, $2 < \alpha < \infty$, tout opérateur α-sommant u d'un espace quelconque à valeurs dans Z est en fait 2-sommant et l'on a :
>
> $$\pi_2(u) \leqslant K_\alpha\, \pi_\alpha(u) \tag{2}$$
>
> où K_α est une constante ne dépendant que de Z et de α.

C'est l'hypothèse (1) faite sur Y qui va permettre d'extrapoler l'inégalité (2) au cas $\alpha = \infty$.

En effet, on peut écrire :

$$\pi_2(u) \leqslant K_r\, \pi_r(u) \leqslant K_r C\, \pi_q(u)^\theta\, \|u\|^{1-\theta}$$

d'où, puisque $\pi_q(u) \leqslant \pi_2(u)$: $\pi_2(u) \leqslant K_r C\, \pi_2(u)^\theta\, \|u\|^{1-\theta}$ et, puisque $\pi_2(u) < \infty$, on trouve en divisant par $\pi_2(u)^\theta$:

$$\pi_2(u) \leqslant (K_r C)^{\frac{1}{1-\theta}}\, \|u\|\ ;$$

ce qui démontre la proposition avec $K = (K_r C)^{\frac{1}{1-\theta}}$.

Remarque 2. – L'hypothèse "Z de cotype 2" n'intervient dans la démonstration précédente (comme dans tout le reste de cet article) que par l'intermédiaire de (2) ; ce qui est une hypothèse a priori plus faible sur Z. En fait on ignore si cette propriété est équivalente au cotype 2.

Remarque 3. – Supposons que le couple (Y, Z) ait la propriété d'approximation comme suit :

Tout opérateur borné $u : Y \longrightarrow Z$ est "approximable" au sens suivant : il existe un filtre $(u_i)_{i\in I}$ d'opérateurs de rang fini de Y dans Z tel que :

$$\sup_{i\in I} \|u_i\| < \infty \quad \text{et} \quad \forall y \in Y \quad \liminf_{\substack{i\to\infty \\ i\in I}} \|u_i(y)\| \geqslant \|u(y)\|.$$

Les hypothèses de la proposition 2 entraînent alors immédiatement que $B(Y, Z) = \pi_2(Y, Z)$.

Cela est toujours le cas si Y ou Z est isomorphe à un espace possédant la propriété d'approximation métrique (i.e. métriquement accessible au sens de [3]), en particulier si Z est un espace L^1.

Le résultat principal.

Préambule. – Quand Y est un espace C(K) et Z quelconque, il est facile de vérifier l'inégalité (1) de la proposition 2 pour tous q, r tels que $1 \leqslant q < r < \infty$ avec $C = 1$ et $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}$. On peut le montrer ainsi : d'après la factorisation de Pietsch, il existe une probabilité ν sur K telle que l'opérateur $u : C(K) \longrightarrow Z$ se factorise en $C(K) \xrightarrow{J} L^q(\nu) \xrightarrow{\bar{u}} Z$ où J est l'injection naturelle et $\|\bar{u}\| \leqslant \pi_q(u)$. On est réduit à montrer que la norme de $\bar{u}$ considéré comme élément de $B(L^r(\nu), Z)$ se comporte comme une fonction log-convexe de $1/r$, ce qui résulte du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. En fait, si l'on considère le transposé de $\bar{u}$, on voit que la formule élémentaire suivante de Hölder suffit pour nos besoins :

$$\forall \varphi \in L^p(\nu) \quad \|\varphi\|_{L^s(\nu)} \leqslant \|\varphi\|^{\theta}_{L^p(\nu)} \; \|\varphi\|^{1-\theta}_{L^1(\nu)},$$

où
$$\frac{1}{s} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{1}, \quad 1 < s < p\,, \; \frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1.$$

Il est donc naturel de chercher dans quels cas cette inégalité de Hölder reste valable quand on remplace les normes L^p par les normes de quotients d'espaces L^p. C'est le but du

LEMME 1. – *Soit* (Ω, μ) *un espace mesuré fini. On suppose que* $1 < s < p$. *On note simplement* L^p *pour* $L^p(\Omega, \mu)$. *Soit* R *un sous-espace de* L^p *sur lequel les normes* L^p *et* L^1 *sont équivalentes, c'est-à-dire : il existe une constante* β *telle que*

$$\forall r \in R \quad \|r\|_{L^p} \leqslant \beta \; \|r\|_{L^1}.$$

Soit φ *un élément de* L^p *et soit* $\tilde{\varphi}$ *sa classe d'équivalence modulo* R, *on a l'inégalité suivante :*

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^s/R} \leqslant A \; \|\tilde{\varphi}\|^{\theta}_{L^p/R} \; \|\tilde{\varphi}\|^{1-\theta}_{L^1/R} \tag{3}$$

où A *est une constante :* $A = (1 + 2\beta\mu(\Omega)^{1/p'})^{\theta}$, *et* θ *est défini par* $\dfrac{1}{s} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{1}$.

Remarque 4. – Si $R = \{0\}$ alors on peut prendre $\beta = 0$ donc $A = 1$ et on retrouve l'inégalité de Hölder classique.

Démonstration. – Pour alléger l'écriture, on notera simplement $\|\varphi\|_p$ et $\|\tilde{\varphi}\|_p$ au lieu de $\|\varphi\|_{L^p}$ et $\|\tilde{\varphi}\|_{L^p/R}$.

Par définition de la norme quotient, pour tout $\epsilon > 0$, il existe r_1 et r_p dans R tels que :

$$\|\varphi + r_1\|_1 \leqslant \|\tilde{\varphi}\|_1 + \epsilon \quad \text{et} \quad \|\varphi + r_p\|_p \leqslant \|\tilde{\varphi}\|_p + \epsilon.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on peut écrire :

$$\|\varphi + r_1\|_s \leqslant \|\varphi + r_1\|_p^\theta \ \|\varphi + r_1\|_1^{1-\theta} . \tag{4}$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\|\varphi + r_1\|_p \leqslant \|\varphi + r_p\|_p + \|r_1 - r_p\|_p$$

donc

$$\leqslant \|\varphi + r_p\|_p + \beta \|r_1 - r_p\|_1 . \tag{5}$$

Par ailleurs :

$$\|r_1 - r_p\|_1 \leqslant \|r_p + \varphi\|_1 + \|r_1 + \varphi\|_1 \leqslant \|r_p + \varphi\|_1 + \|\widetilde{\varphi}\|_1 + \epsilon$$

$$\leqslant 2\,\|r_p + \varphi\|_1 + \epsilon \quad \text{d'où par Hölder :}$$

$$\leqslant 2\,\mu(\Omega)^{1/p'}\,\|r_p + \varphi\|_p + \epsilon .$$

En conséquence, on déduit de (5) :

$$\|\varphi + r_1\|_p \leqslant A^{1/\theta}\,\|r_p + \varphi\|_p + \beta\epsilon$$

$$\leqslant A^{1/\theta}\,(\|\widetilde{\varphi}\|_p + \epsilon) + \beta\epsilon .$$

En subtituant ce dernier résultat dans (4) (et en faisant $\epsilon = 0$) on trouve :

$$\|\widetilde{\varphi}\|_s \leqslant A\,\|\widetilde{\varphi}\|_p^\theta\ \|\widetilde{\varphi}\|_1^{1-\theta} \quad \text{cqfd.}$$

Remarque 5. – La démonstration du lemme 1 repose sur l'observation que l'on peut trouver un représentant, en l'occurence $\varphi + r_1$, de $\widetilde{\varphi}$ tel que, non seulement $\|\varphi + r_1\|_1$ approche $\|\widetilde{\varphi}\|_1$, mais aussi $\|\varphi + r_1\|_p$ approche $\|\widetilde{\varphi}\|_p$ à une constante près. Comme me l'a fait remarquer B. Maurey, on peut généraliser le lemme 1 dans le cadre des espaces d'interpolation de Lions-Peetre [11] :

Avec les notations usuelles, soient $A_0 \subset A_1$ deux espaces de Banach et soit R un sous-espace de A_0 sur lequel les normes de A_0 et A_1 sont équivalentes ; alors, si $0 < \theta < 1$ et $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$, l'interpolé des quotients $[A_0/R, A_1/R]_{\theta,p_0,p_1}$ est isomorphe (avec équivalence des normes) au quotient des interpolés $[A_0, A_1]_{\theta,p_0,p_1}/R$. L'essentiel de notre travail est le

THEOREME 1. – *Soit* K *un compact et soit* Y *un sous espace fermé de* C(K).

On note R *l'orthogonal de* Y *dans* $M(K) = C(K)'$. *On suppose qu'il existe une mesure de probabilité* m *sur* K *et un réel* $p > 1$ *tels que* $R \subset L^1(m)$ *et tels que les normes de* $L^1(m)$ *et* $L^p(m)$ *soient équivalentes sur* R, *c'est-à-dire qu'il existe une constante* β *vérifiant :*

$$\forall r \in R \quad \left(\int |r|^p \, dm\right)^{1/p} \leqslant \beta \int |r| \, dm.$$

Dans ces conditions, tout opérateur "approximable" (au sens de la remarque 3) de Y *dans un espace de cotype 2 est 2-sommant.*

La démonstration est basée sur le lemme suivant, dans lequel nous faisons les mêmes hypothèses qu'au théorème 1 :

LEMME 2. – *Pour toute mesure* μ *sur* K *telle que* $\mu \geqslant m$, *si une fonction* φ *dans* $L^1(\mu)$ *vérifie :*

$$\forall y \in Y \quad \int \varphi y \, d\mu = 0,$$

alors $\varphi \in L^p(\mu)$ *et l'on a :* $\left(\int |\varphi|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \beta \int |\varphi| \, d\mu.$

Démonstration. – Soit $\varphi \in L^1(\mu)$ comme ci-dessus.

La mesure $\varphi . \mu$ est donc orthogonale dans $M(K)$ à Y.

Par conséquent, il existe $f \in R$ telle que

$$\varphi . \mu = f . m$$

On a donc aussi en prenant le module des deux membres de cette égalité

$$|\varphi| . \mu = |f| . m \ ;$$

intégrant, on en déduit

$$\int |\varphi| \, d\mu = \int |f| \, dm \ ;$$

de plus, puisque $\mu \geqslant m$, on a : $|f| . m \geqslant |\varphi| . m$ et donc $|f| \geqslant |\varphi|$ m-presque sûrement.

Par conséquent,

$$\int |f|^p \, dm \geqslant \int |\varphi|^{p-1} \, |f| \, dm = \int |\varphi|^{p-1} \, |\varphi| . \, d\mu = \int |\varphi|^p \, d\mu.$$

d'où :

$$\left(\int |\varphi|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f|^p \, dm\right)^{1/p} \leqslant \beta \int |f| \, dm = \beta \int |\varphi| \, d\mu$$

cqfd.

Démonstration du théorème 1. – Soit q le conjugué de p, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. Soit u un opérateur de rang fini de Y à valeurs dans un espace de Banach arbitraire Z.

D'après le théorème de Pietsch rappelé plus haut, il existe une mesure de probabilité ν sur K telle que :

$$\forall y \in \mathrm{Y} \quad \|u(y)\| \leqslant \pi_q(u) \left(\int |y(k)|^q \, d\nu(k)\right)^{1/q},$$

donc si l'on pose $\mu = \nu + m$, on a aussi

$$\forall y \in \mathrm{Y} \quad \|u(y)\| \leqslant \pi_q(u) \left(\int |y|^q \, d\mu\right)^{1/q}. \tag{6}$$

Nous allons montrer plus bas que si $q<r<\infty$:

$$\forall y \in \mathrm{Y} \quad \|u(y)\| \leqslant \mathrm{A}\, \pi_q(u)^\theta \, \|u\|^{1-\theta} \left(\int |y|^r \, d\mu\right)^{1/r}, \tag{7}$$

avec $\mathrm{A} = (1+2^{1+1/q}\beta)^\theta$, $\theta = \frac{q}{r}$;

ce résultat entraîne immédiatement que

$$\pi_r(u) \leqslant 2^{1/r} \mathrm{A} \pi_q(u)^\theta \, \|u\|^{1-\theta},$$

donc que Y vérifie les hypothèses de la proposition 1. La démonstration du théorème 1 est alors achevée en appliquant la proposition 1 et la remarque 3. Il ne reste donc plus qu'à prouver (7) : Notons $\mathrm{Y}_{r,\mu}$ la fermeture de Y dans $\mathrm{L}^r(\mu)$. Il s'agit d'estimer la norme de u considéré comme opérateur de $\mathrm{Y}_{r,\mu}$ dans Z, ou encore la norme du transposé de u, noté ${}^t u$, comme opérateur de Z' dans $\mathrm{Y}'_{r,\mu}$.

Soit s tel que $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$; soit R_1 le sous espace de $\mathrm{L}^s(\mu)$ formé des éléments ψ de $\mathrm{L}^s(\mu)$ qui –en tant qu'éléments de $\mathrm{L}^r(\mu)'$– s'annulent sur Y, c'est-à-dire tels que :

$$\forall y \in \mathrm{Y} \quad \int y\psi \, d\mu = 0.$$

Il est clair que l'on peut identifier $\mathrm{Y}'_{r,\mu}$ à $\mathrm{L}^s(\mu)/\mathrm{R}_1$.

On notera parfois L^s_μ pour $\mathrm{L}^s(\mu)$ dans la suite.

D'après le lemme 2, on a :

$$\forall r \in \mathrm{R}_1 \quad \left(\int |r|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \beta \int |r| \, d\mu.$$

Soit $\xi \in \mathrm{Z}'$ tel que $\|\xi\| = 1$, on pose $\widetilde{\varphi} = {}^t u(\xi)$.

D'après le lemme 1, on a :

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{L^s_\mu/R_1} \leqslant A\,\|\widetilde{\varphi}\|^\theta_{L^p_\mu/R_1}\ \|\widetilde{\varphi}\|^{1-\theta}_{L^1_\mu/R_1}. \tag{8}$$

D'une part, d'après (6), on a :

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{L^p_\mu/R_1} \leqslant \pi_q(u).$$

D'autre part, si on considère R_1 et $L^1(\mu)$ comme des sous espaces de l'espace M(K) des mesures sur K, on peut remarquer que L^1_μ/R_1 s'identifie isométriquement à un sous espace de $M(K)/R_1$ qui n'est autre que le dual de Y ; par conséquent, on a

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{L^1_\mu/R_1} = \|\widetilde{\varphi}\|_{M(K)/R_1} \leqslant \|{}^t u\| = \|u\|.$$

On tire donc de (8) :

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{L^s_\mu/R_1} \leqslant A\,\pi_q(u)^\theta\ \|u\|^{1-\theta}\ ;$$

on a donc démontré :

$$\forall \xi \in Z',\ \ \|\xi\| = 1,\ \ \forall y \in Y_{r,\mu} :$$
$$|\langle \xi, uy\rangle| = |\langle {}^t u\xi, y\rangle| \leqslant A\,\pi_q(u)^\theta\ \|u\|^{1-\theta}\ \Big(\int |y|^r\, d\mu\Big)^{1/r},$$

ce qui donne bien le résultat annoncé (7).

Remarque 6. — Soit K un compact et $\mathcal{R}$ un sous-espace réflexif de M(K) ; d'après des résultats connus (cf. par exemple [17] lemma 1.3), il existe une probabilité λ sur K telle que $\mathcal{R} \subset L^1(K,\lambda)$.

Dans [18] (th. 8, 5), Rosenthal a montré qu'il existe $p > 1$, une constante β et une probabilité de la forme $f.\lambda$ (on peut aussi supposer $\{f > 0\} = K$) tels que :

$$\forall r \in \mathcal{R}\ \ \Big(\int \Big|\frac{r}{f}\Big|^p f d\lambda\Big)^{1/p} \leqslant \beta \int |r|\ d\lambda.$$

Posons $m = f.\lambda$ et $R = \{r/f \mid r \in \mathcal{R}\}$.

On voit que $R \subset L^1(m)$ et que R vérifie les hypothèses du théorème 1. Enfin, on peut remarquer que R, considéré comme sous-espace de M(K), est en fait identique à $\mathcal{R}$.

Les résultats de Rosenthal montrent donc que l'hypothèse faite sur R au théorème 1 équivaut à la réflexivité de R.

On peut même généraliser comme suit :

THEOREME 2.

a) *Soit* Y *un sous espace fermé d'un espace* $\mathcal{L}_\infty$ *noté* V. *Si le quotient* V/Y *est réflexif, alors tout opérateur approximable (au sens de la remarque 3) de* Y *dans un espace* Z *de cotype 2 est 2-sommant.*

b) *Soit* R *un sous-espace réflexif d'un espace* $\mathcal{L}_1$ *noté* W ; *l'espace* X = W/R *vérifie le théorème de Grothendieck, c'est-à-dire*

$$B(X, l^2) = \pi_1(X, l^2).$$

c) ([9]) *De plus,* X *ne peut être un espace* $\mathcal{L}_1$ *que si* R *est de dimension finie.*

Remarque 7. – Les assertions b) et c) ci-dessus nous permettent de produire l'exemple annoncé dans l'introduction : il suffit en effet d'exhiber un sous-espace réflexif de dimension infinie de $L^1([0,1])$. L'exemple le plus classique est sans doute celui du sous-espace engendré par les fonctions de Rademacher ; c'est un espace hilbertien d'après les inégalités de Khintchine.

Démonstration.

a) Puisqu'un opérateur de rang fini de Y dans Z s'étend à un opérateur de Y'' dans Z, il suffit de démontrer a) avec Y'' au lieu de Y.

Par hypothèse, V/Y est réflexif ; donc $V''/Y'' \approx (V/Y)''$ est lui aussi réflexif. D'après la caractérisation des espaces $\mathcal{L}_\infty$ rappelée plus haut (cf. [9] corollary p. 335), on peut trouver un compact K et une décomposition de la forme : $V'' \oplus \alpha = C(K)$. Soit Y_1 le sous-espace de C(K) correspondant à $Y'' \oplus \alpha$; $C(K)/Y_1 \approx V''/Y''$ est réflexif, donc l'orthogonal –noté R– de Y_1 dans M(K) est lui aussi réflexif.

D'après la remarque 6, on obtient donc a) avec Y_1 au lieu de Y. Puisque Y'' est un sous-espace complémenté de Y_1, on conclut bien que Y'' vérifie a).

b) Soit Y l'orthogonal de R dans W' ; puisque $R' = W'/Y$, l'espace W'/Y est réflexif. D'après [9] (theorem III.a) ; W' est un espace $\mathcal{L}_\infty$, donc la partie a) précédente implique que

$B(Y, l^1) = \pi_2(Y, l^1)$. D'après la proposition 1, on en déduit que Y' alias $(W/R)''$ et donc W/R lui-même vérifient le théorème de Grothendieck.

c) La proposition 5.2.a de [9] assure que si W et W/R sont tous deux des espaces $\mathcal{L}_1$, alors R est lui aussi un espace $\mathcal{L}_1$; d'après [7] (prop. 7.3), cela n'est possible que si R est de dimension finie.

Dire qu'un espace vérifie le théorème de Grothendieck a de multiples reformulations ; nous en avons sélectionné une :

COROLLAIRE 1. – *Soit* R *un sous-espace réflexif d'un espace* $\mathcal{L}_1$ *noté* W. *Toute série inconditionnellement convergente dans* W/R *peut être relevée en une série inconditionnellement convergente dans* W.

Démonstration. – Notons (e_n) la suite des vecteurs de base de c_0. A toute série inconditionnellement convergente (on dit aussi sommable) (z_n) dans W/R est associé un opérateur compact $v : c_0 \longrightarrow W/R$ défini par $v(e_n) = z_n$.

Posons $Y = (W/R)' \subset W'$; le transposé ${}^tv : Y \longrightarrow l^1$ est 2-sommant d'après le théorème 2, il s'étend donc à l'espace W' tout entier. Par conséquent, le bitransposé de v se factorise sous la forme $l^\infty \xrightarrow{w} W'' \xrightarrow{\sigma} W''/R$ (notant σ la surjection canonique $W'' \longrightarrow W''/R$) ; mais $z_n = \sigma w(e_n) \in W/R$, donc $w(e_n) \in W + R \subset W$. la suite $\bar{z}_n = w(e_n)$ est donc inconditionnellement convergente dans W et relève (z_n). cqfd.

Compléments.

PROPOSITION 3. – *Il existe une famille continue* $(X_t)_{1<t<2}$ *d'espaces de Banach séparables mutuellement non isomorphes vérifiant le théorème de Grothendieck sans être des espaces* $\mathcal{L}_1$.

Pour le montrer, nous utiliserons la

Remarque 8. – Soit $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'espaces compacts. On se donne, pour chaque entier n, un sous-espace Y_n de $C(K_n)$. Soit R_n l'orthogonal de Y_n dans $M(K)$.

i) On suppose que R_n vérifie les hypothèses du théorème 1 pour une probabilité m_n avec des constantes β et $p > 1$ indépendantes de n. On considère l'espace $c_0(\{Y_n\})$ des suites $\{y_n\}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad y_n \in Y_n \quad \text{et} \quad \|y_n\| \longrightarrow 0,$$

muni de la norme usuelle $\{y_n\} \longrightarrow \max \|y_n\|$.

Le lecteur vérifiera aisément que la démonstration du théorème 1 s'applique encore dans cette situation : on établit ainsi que l'espace $c_0(\{Y_n\})$ vérifie la conclusion du théorème 1.

Il en résulte que son dual, l'espace $l^1(\{Y'_n\})$, vérifie le théorème de Grothendieck.

ii) En fait, on peut appliquer les résultats de Rosenthal [18] comme dans la remarque 7 : notons $I_p(R_n)$ la norme q-sommante $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right)$ de l'application quotient $C(K_n) \longrightarrow C(K_n)/Y_n$; supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $\sup I_p(R_n) < \infty$.

Alors les conditions de i) sont vérifiées.

Rappelons que, d'après [18] (remark p. 355), la quantité $I_p(R)$ définie pour $1 < p \leqslant 2$, pour un sous-espace R d'un espace L^1 ne dépend en fait que de la structure isomorphique de R.

iii) De tels énoncés ont évidemment des analogues continus déduits aisément du cas discret. Par exemple, soit (Ω, μ) un espace mesuré ; si Y et X sont comme au théorème 2 alors $L^\infty(\Omega, \mu ; Y)$ vérifie la conclusion de a) et $L^1(\Omega, \mu ; X)$ vérifie le théorème de Grothendieck. Plus généralement, si V_1 et W_1 sont respectivement des espaces $\mathcal{L}_\infty$ et $\mathcal{L}_1$ alors : d'une part, le produit tensoriel injectif (cf. [3]) $V_1 \check{\otimes} Y$ vérifie le point a) du théorème 2 ; d'autre part, le produit tensoriel projectif (cf. [3]) $W_1 \hat{\otimes} X$ vérifie le théorème de Grothendieck.

Ce dernier point suggère le

Problème 1. – Soit X_1, X_2 deux espaces vérifiant le théorème de Grothendieck, est-ce que $X_1 \hat{\otimes} X_2$ le vérifie aussi ?

Démonstration de la proposition 3. – Comme il est bien connu, si $1 < t < 2$, l'espace l^t est isométrique à un sous-espace R^t de

$L^1([0,1])$ tel que, si $1 < p < t$, $I_p(R^t) < \infty$ (voir par exemple [18] Remark. p. 361). Par un argument standard, on en déduit que, pour tout entier n, il y a un sous-espace R_n^t de l^1 tel que

$$d(R_n^t, l_n^t) \leqslant 2 \text{ et de plus } \forall p \in]1, t[\ \sup_n I_p(R_n^t) < \infty.$$

Par conséquent, on obtient (cf. Remarque 8. ii) que l'espace $X_t = l^1\left(\left\{\dfrac{l^1}{R_n^t}\right\}\right) = \dfrac{l^1(l^1)}{l^1(\{R_n^t\})}$ vérifie le théorème de Grothendieck si $1 < t < 2$.

Montrons que X_t n'est pas un espace $\mathcal{L}_1$: si X_t est un $\mathcal{L}_1$, alors ([9] prop. 5.2.a) l'espace $l^1(\{R_n^t\})$ doit l'être également ; par un argument de compacité, on en déduit que l^t est lui-aussi un espace $\mathcal{L}_1$, ce qui est absurde.

Enfin, on va montrer que, si $1 < s < t < 2$, X_s et X_t ne sont pas isomorphes : Supposons au contraire qu'ils sont isomorphes ; alors, d'après [8] (corollaire du théorème 2) les espaces $l^1(\{R_n^t\})$ et $l^1(\{R_n^s\})$ sont eux aussi isomorphes.

Il existe donc des factorisations :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad l_n^t \xrightarrow{u_n} l^1(l^s) \xrightarrow{v_n} l_n^t$$

où $v_n \circ u_n$ est l'identité de l_n^t et $\sup \|u_n\| . \|v_n\| < \infty$.

D'après la proposition 44 de [13], on peut factoriser u_n sous la forme $l_n^t \xrightarrow{\bar{u}_n} l^s(l^s) \xrightarrow{T_n} l^1(l^s)$ avec $\|\bar{u}_n\| . \|T_n\| \leqslant C(s,t) \|u_n\|$ pour une constante $C(s,t)$ indépendante de n. On conclut donc que l'identité de l_n^t se factorise (uniformément en n) par $l^s(l^s) \approx l^s$, ce qui, d'après un résultat classique, est impossible. cqfd.

Remarque 9. – Il est probable qu'il suffit de prendre $X_t = L^1[0,1]/R^t$ dans la proposition 3 ; pour cela il suffirait de savoir répondre à la question suivante : soient R_1, R_2 deux sous-espaces réflexifs de $L^1[0,1]$, si les quotients $L^1[0,1]/R_1$ et $L^1[0,1]/R_2$ sont isomorphes, est-ce que R_1 et R_2 sont isomorphes ?

Ce problème semble ouvert ; une question plus générale est posée dans [8] (p. 234, remark 2).

COROLLAIRE 2. – *Soit* Y *comme dans le théorème 2.*

i) Y' *est de cotype 2.*

ii) *Tout opérateur "approximable" de* Y *dans* Y' *est 2-sommant.*

Démonstration.

i) D'après le théorème 2, on a $B(Y', l^2) = \pi_1(Y', l^2)$.

A fortiori, on a : $\pi_2(Y', l^2) = \pi_1(Y', l^2)$;

il est facile de voir (cf. par exemple [13] remarque 89) que cette dernière propriété implique que Y' a la propriété d'Orlicz ; c'est-à-dire qu'il existe une constante λ telle que, pour toute suite finie (y'_i) d'éléments de Y', on a :

$$(\Sigma \|y'_i\|^2)^{1/2} \leqslant \lambda \sup_t \|\Sigma r_i(t)\, y'_i\| \tag{9}$$

(où (r_i) est la suite des fonctions de Rademacher sur $[0,1]$).

Or, d'après la remarque 8.iii, on peut remplacer dans (9) l'espace Y' par l'espace $L^1([0,1], dt; Y')$, il est alors facile de voir que Y' est de cotype 2.

ii) résulte trivialement de i) (ou aussi bien de la remarque 2) et du théorème 2.a).

Une méthode de Varopoulos [21] permet, d'après le théorème 1 de [20], de déduire du corollaire 2.ii le

COROLLAIRE 3. – *Soit* Y *comme dans le théorème 2 ; on suppose que le couple* (Y, Y') *a la propriété d'approximation de la remarque 3 ; alors toute algèbre de Banach isomorphe – en tant qu'espace de Banach – à* Y *est isomorphe – en tant qu'algèbre de Banach – à une sous-algèbre de l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert.*

Rappelons la

DEFINITION 4. – *Soit* p *tel que* $0 < p \leqslant \infty$. *Un opérateur* $u : X \longrightarrow Y$ *est dit p-intégral (resp. strictement p-intégral) s'il existe un espace de probabilité* (Ω, μ) *et des opérateurs* $v : X \longrightarrow L^\infty(\mu)$ *et* $w : L^p(\mu) \longrightarrow Y''$ *(resp.* Y*) tels que* $iu = wjv$ *(resp.* $u = wjv$*) où l'on a noté* i *et* j *respectivement les injections* $Y \longrightarrow Y''$ *et* $L^\infty(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$; *on note* $i_p(u)$ *la borne inférieure de* $\|w\| \,.\, \|v\|$ *pour toutes les factorisations de ce type ; on note* $I_p(X,Y)$ *l'idéal des opérateurs p-intégraux de* X *dans* Y.

Donnons une autre conséquence du lemme 2 :

THEOREME 3. – *Dans la situation du théorème 1, on suppose que* $p > 2$. *Soit* α *tel que* $q \leqslant \alpha \leqslant p$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors tout opérateur* α*-sommant défini sur* Y *(à valeurs quelconques) est en fait strictement* α*-intégral.*

Remarque. – L'énoncé précédent est l'analogue des résultats de Mitjagin et Pełczyński sur l'algèbre A(D) des fonctions analytiques sur le dique unité D de **C**. (Cf. le second chapitre des "Lectures notes" à paraître : "Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators", par A. Pełczyński.) Par contre, nous ignorons si tout opérateur de A(D) dans un espace de cotype 2 (ou seulement un espace de Hilbert) est 2-sommant.

Démonstration. – Soit u un opérateur α-sommant de Y à valeurs dans un espace de Banach G.

Comme dans la démonstration du théorème 1, on peut trouver une mesure μ sur K telle que $\mu \geqslant m$, $\mu(\mathrm{K}) = 2$, et :

$$\forall y \in \mathrm{Y} \quad \|u(y)\| \leqslant \pi_\alpha(u) \left(\int |y|^\alpha \, d\mu\right)^{1/\alpha}. \tag{10}$$

Soit R l'orthogonal (au sens défini par μ) de Y dans $\mathrm{L}^p(\mu)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{R} = \{r \in \mathrm{L}^p(\mu) \mid \forall y \in \mathrm{Y} \int r\bar{y} \, d\mu = 0\}.$$

D'après le lemme 2, on a : $\forall r \in \mathrm{R} \left(\int |r|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \beta \int |r| \, d\mu$; c'est-à-dire que si $\alpha \leqslant p$, les normes de $\mathrm{L}^\alpha(\mu)$ (notées $\| \ \|_{\alpha,\mu}$) sont équivalentes sur R. Par conséquent (l'argument est classique, cf. [4] corollaire 1) si P est la projection orthogonale $\mathrm{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathrm{R}$, on a dans le cas $2 \leqslant \alpha \leqslant p$:

$$\forall \varphi \in \mathrm{L}^2(\mu) \ \frac{2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}}}{\beta} \|\mathrm{P}\varphi\|_{\alpha,\mu} \leqslant \|\mathrm{P}\varphi\|_{2,\mu} \leqslant \|\varphi\|_{2,\mu} \leqslant 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}} \|\varphi\|_{\alpha,\mu};$$

P est donc bornée de $\mathrm{L}^\alpha(\mu)$ à valeurs dans R. On vérifie aisément que (en notant I l'identité de $\mathrm{L}^\alpha(\mu)$) l'opérateur $\mathrm{I} - \mathrm{P}$ est une projection (orthogonale) bornée de $\mathrm{L}^\alpha(\mu)$ sur $\mathrm{Y}_{\alpha,\mu}$. L'opérateur u admet donc la factorisation suivante :

$$Y \xrightarrow{j_1} L^\infty(\mu) \xrightarrow{j_2} L^\alpha(\mu) \xrightarrow{I-P} Y_{\alpha,\mu} \xrightarrow{\bar{u}} G$$

où l'on a noté j_1 , j_2 les injections naturelles et $\bar{u}$ l'opérateur défini par l'inégalité (10).

On conclut bien que u est strictement α-intégral. Le cas $q \leqslant \alpha < 2$ se déduit de ce qui précède : en effet, nous venons de voir que la projection orthogonale est bornée de $L^{\alpha'}(\mu)$ sur $Y_{\alpha',\mu}$ si $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$; il suffit de transposer pour voir qu'elle l'est aussi de $L^\alpha(\mu)$ dans $Y_{\alpha,\mu}$.

Remarque 10. – L'analyse harmonique fournit des exemples concrets où les théorèmes 2 et 3 s'appliquent :

Soient G un groupe abélien compact et Γ le groupe dual. Soit $E \subset \Gamma$; on note C_E (resp. L^p_E) le sous-espace de C(G) (resp. $L^p(G)$) formé des fonctions dont la transformée de Fourier s'annule hors de E. Si le complémentaire de E (noté $\Gamma \dot{-} E$) est un ensemble $\Lambda(p)$ au sens de [19] pour un $p > 1$, alors l'espace $Y = C_E$ vérifie les hypothèses du théorème 1 avec pour mesure m la mesure de Haar normalisée (cf. [19] th. 5.1). On notera que de tels espaces ont la propriété d'approximation métrique.

De plus, soit E un ensemble $\Lambda(2)$ et soit $\alpha > 2$, si l'injection $C_E \longrightarrow L^\alpha_E$ (qui est trivialement α-sommante) est α-intégrale, alors E est un ensemble $\Lambda(\alpha)$; cela résulte d'un procédé de moyenne classique (cf. [15]).

On en déduit la conséquence suivante du théorème 3 : si $2 \leqslant \alpha < \beta < \infty$, si $\Gamma \dot{-} E$ est un ensemble $\Lambda(\alpha)$ mais n'est pas $\Lambda(\beta)$ et si $\Gamma \dot{-} F$ est un ensemble $\Lambda(\beta)$, alors C_E et C_F ne sont pas isomorphes ; on voit même que C_E n'est pas isomorphe à un sous-espace complémenté de C_F.

Dans le cas où G est le tore T, Rudin a construit dans [19] pour chaque entier $k > 1$ un ensemble $R_k \subset \mathbf{Z}$ qui est $\Lambda(2k)$ mais qui n'est pas $\Lambda(p)$ si $p > 2k$. D'après les remarques qui précèdent, les espaces $C_{\mathbf{Z} \dot{-} R_k}$ forment une suite de sous-espaces mutuellement non isomorphes de C(T) qui ont la propriété a) du théorème 2 et ne sont pas des espaces $\mathcal{L}_\infty$.

Similairement, si $G = \{-1, +1\}^{\mathbf{N}}$, soit E_k l'ensemble des caractères sur G qui sont produit d'exactement k coordonnées distinctes ; en explicitant les constantes intervenant dans la démonstration du théorème 3, on peut montrer que les espaces $C_{\Gamma \dot{-} E_k}$ sont mutuellement non isomorphes.

COROLLAIRE 4. – *Soient* Y *et* p *comme au théorème 1 avec* $p \geqslant 2$. *Soit* Z *un espace de Banach tel que*

$$B(l^\infty, Z) = \pi_p(l^\infty, Z). \tag{11}$$

Dans ces conditions, tout opérateur "approximable" de Y *dans* Z *est p-sommant et même strictement p-intégral (d'après le théorème 3).*

Remarque 11. – L'hypothèse ci-dessus concernant Z est vérifiée par L^α si et seulement si $\alpha < p$; pour une étude plus générale, voir [13] chapitre VIII.

Démonstration. – D'après un résultat de Maurey (cf. [13] ou, pour une autre démonstration, [14] th. 1.2.c), on déduit de (11) qu'il existe α avec $2 < \alpha < p$ tel que $B(l^\infty, Z) = \pi_\alpha(l^\infty, Z)$.

On a donc a fortiori

$$I_p(Y, Z) = I_\alpha(Y, Z) ; \tag{12}$$

or, d'après le théorème 3 on a

$$I_p(Y, Z) = \pi_p(Y, Z) \text{ et } I_\alpha(Y, Z) = \pi_\alpha(Y, Z),$$

on tire donc de (12) que :

$$\pi_p(Y, Z) = \pi_\alpha(Y, Z).$$

Par conséquent (théorème du graphe fermé), il existe une constante C telle que pour tout opérateur $u : X \longrightarrow Y$ de rang fini on a : $\pi_\alpha(u) \leqslant C\, \pi_p(u)$.

On conclut alors par extrapolation : d'après la démonstration du théorème 1, on a des constantes $A > 0$ et $\theta, 0 < \theta < 1$, telles que $\pi_p(u) \leqslant A\, \pi_\alpha(u)^\theta\ \|u\|^{1-\theta}$, par conséquent : $\pi_p(u) \leqslant (AC)^{1/1-\theta}\ \|u\|$; le corollaire en découle immédiatement.

Remarque 12. – Soient V un espace de Banach et Y un sous-espace de V. Il est facile de voir que si chacun des espaces Y et V/Y ne contient pas de l_n^∞ uniformément, alors V ne contient pas de l_n^∞ uniformément. On en déduit que, dans la situation du théorème 2, l'espace Y contient des l_n^∞ uniformément à moins que V ne soit de dimension finie (car V/Y ne contient pas de l_n^∞ uniformément puisque, d'après [18], son dual se plonge dans L^p pour un $p > 1$).

On en déduit par dualité que l'espace X du théorème 2.b contient nécessairement des l_n^1 uniformément et uniformément complémentés, ce qui signifie : il existe des opérateurs

$$u_n : l_n^1 \longrightarrow X \quad v_n : X \longrightarrow l_n^1$$

tels que $\sup \|u_n\| . \|v_n\| < \infty$ et $v_n \circ u_n$ est l'identité de l_n^1.

Cela nous suggère le

Problème 2. – Si X vérifie le théorème de Grothendieck et si $\dim X = \infty$, est-ce que X contient des l_n^1 uniformément et uniformément complémentés ?

Une conjecture générale de Lindenstrauss ([6] p. 371) implique une réponse affirmative à la question précédente. Par ailleurs, une solution positive du problème 2 permettrait de résoudre le problème des compacts non nucléaires cité dans l'introduction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Dvoretzky, Some results on convex bodies and Banach spaces, *Proc. Symp. on Linear Spaces,* Jerusalem 1961.

[2] A. Dvoretzky et C.A. Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (U.S.A.), 36 (1950), 192-197.

[3] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Matem.,* Sao Paulo, 8 (1956), 1-79.

[4] M.I. Kadec et A. Pełczynski, Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p, *Studia Math.,* 21 (1962), 161-176.

[5] J.L. KRIVINE, Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés, Séminaire Maurey-Schwartz 73-74, Exposé 22-23.

[6] J. LINDENSTRAUSS, The geometric theory of the classical Banach spaces, *Actes Congrès intern. Math.*, Nice (1970), Gauthiers-Villars, Paris, tome 2 p. 365-372.

[7] J. LINDENSTRAUSS et A. PEŁCZYNSKI, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications, *Studia Math.*, 29 (1968), 275-326.

[8] J. LINDENSTRAUSS et H.P. ROSENTHAL, Automorphisms in c_0, l^1 and m, *Israel J. Math.*, 7 (1969), 227-239.

[9] J. LINDENSTRAUSS et H.P. ROSENTHAL, The $\mathcal{L}_p$ spaces, *Israel J. Math.*, 7 (1969) 325-349.

[10] J. LINDENSTRAUSS et M. ZIPPIN, Banach spaces with sufficiently many Boolean algebras of projections, *Journal Math. Anal. and Appl.*, 25 (1969), 309-320.

[11] J.L. LIONS et J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 19 (1963), 5-68.

[12] B. MAUREY, Une nouvelle démonstration d'un théorème de Grothendieck, Séminaire Maurey-Schwartz 73-74, exposé 22.

[13] B. MAUREY, Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans un espace L^p, *Astérisque*, Soc. Math. France, (1974) n° 11.

[14] B. MAUREY et G. PISIER, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, *Studia Math.*, 58 (1976), 45-90.

[15] A. PEŁCZYNSKI, p-integral operators commuting with group representations and examples of quasi p-integral operators which are not p-integral, *Studia Math.*, 33 (1969), 63-70.

[16] A. PIETSCH, Absolute p-summierende Abbildungen in normierten raümen, *Studia Math.*, 28 (1967), 333-353.

[17] H.P. ROSENTHAL, On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ, *Acta Math.*, 124 (1970), 205-248.

[18] H.P. ROSENTHAL, On subspaces of L^p, *Annals of Math.*, 97 (1973), 344-373.

[19] W. RUDIN, Trigonometric series with gaps, *Journal Math. Mech.*, 9 (1960), 203-227.

[20] A. TONGE, Banach algebras and absolutely summing operators, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 80 (1976), 465-473.

[21] N.Th. VAROPOULOS, A theorem on operator algebras, *Math. Scand.*, 37, (1975), 173-182.

Manuscrit reçu le 19 octobre 1976
Proposé par J.P. Kahane.

Gilles PISIER,
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Route de Saclay
91120 Palaiseau.