ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES-LOUIS LIONS

Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans les ouverts non cylindriques

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 143-182

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__143_0>

SUR LES PROBLÈMES MIXTES POUR CERTAINS SYSTÈMES PARABOLIQUES DANS DES OUVERTS NON CYLINDRIQUES

par **J. L. LIONS** (Nancy).

INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert de l'espace $R_x^n \times R_t$ contenu dans $t > 0$. On donne dans Ω un opérateur différentiel linéaire, d'ordre $2m$, de la forme

$$A = A_x = \Sigma\,(-1)^{|p|} D_x^p (a_{pq}(x, t) D_x^q),$$

elliptique dans un sens convenable (plus généralement, on considèrera un système); on appelle problème mixte relatif à l'opérateur $A_x + \partial/\partial t$ la recherche d'une fonction u dans Ω, solution de

$$Au + \partial u/\partial t = f, \quad f \text{ fonction donnée dans } \Omega,$$

avec

$$u(x, 0) \text{ donné},$$

et u étant nulle ainsi que ses dérivées en x d'ordre $\leqslant m - 1$ sur la partie de la frontière de Ω non située dans $t = 0$. Ce problème [1] est résolu au chapitre II de ce travail, qui donne en outre quelques propriétés supplémentaires, notamment relatives à la stabilité de la solution de ce problème mixte. Le chapitre I rassemble les propriétés de certains espaces fonctionnels utiles pour le chapitre II.

Dans le cas où l'ouvert Ω est cylindrique, les problèmes mixtes ont fait l'objet de nombreux travaux :

[1] Posé de façon plus précise, et avec des hypothèses convenables sur Ω.

1) Si A est à coefficients dépendants de x mais non de t, cf. Hille [1], Lax-Milgram [1], Lions [1].

2) Si A est à coefficients dépendants de x et de t, cf. Kato [1], Ladyzenskaya [1], [2], Magenes [1], Visik [1], [2] Yosida [1] et Lions [2], [4].

Dans le cas où Ω n'est pas cylindrique, cf. Gevrey [1], et Fichera [1], pour des opérateurs du 2e ordre. Nous reviendrons ultérieurement sur des problèmes mixtes relatifs aux mêmes opérateurs et dans des ouverts non cylindriques, mais avec d'autres conditions aux limites.

Un résumé a été donné dans Lions [3].

Une autre méthode de démonstration de l'unicité est esquissée dans Browder [1], cet article contenant également une élégante démonstration du caractère hypo-elliptique de $A + \frac{\partial}{\partial t}$.

La régularité à la frontière peut être étudiée en transformant localement Ω en ouvert cylindrique (cf. Lions [4]).

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CERTAINS ESPACES FONCTIONNELS

1. Notation. — Dans un espace Euclidien $R_x^n \times R_t$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on donne un ouvert Ω quelconque; $L^2(\Omega)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω; si $f \in L^2(\Omega)$, on pose

$$|f|_0^2 = \int_\Omega |f(x, t)|^2 \, dx \, dt.$$

Espace $\tilde{H}^{m,0}(\Omega)$: c'est l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $D_x^p u \in L^2(\Omega)$, pour tout p, avec $|p| \leqslant m$ (notations de Schwartz [1] : $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $|p| = p_1 + \cdots + p_n$). On ne fait aucune hypothèse sur les dérivées en t. Pour $u \in \tilde{H}^{m,0}(\Omega)$, on pose

$$|D^{m,0}u|^2 = \Sigma |D_x^p u|_0^2, \qquad |p| \leqslant m;$$

muni de la norme $|D^{m,0}u|$, l'espace $\tilde{H}^{m,0}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Espace $H^{m,0}(\Omega)$. On désigne par $C^m(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $\tilde{H}^{m,0}(\Omega)$ formé des fonctions de cet espace qui sont indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega}$. On désigne alors par $H^{m,0}(\Omega)$ l'adhérence de $C^m(\overline{\Omega})$ dans $\tilde{H}^{m,0}(\Omega)$; cet espace peut être strictement plus petit que $\tilde{H}^{m,0}(\Omega)$; toutefois, on peut montrer que sous les hypothèses de régularité (R) çi-après, $C^m(\overline{\Omega})$ est dense dans $\tilde{H}^{m,0}(\Omega)$; ce résultat n'est pas utile pour la suite : il suffit de considérer *a priori* $H^{m,0}(\Omega)$, au lieu de $\tilde{H}^{m,0}(\Omega)$.

Espace $H_0^{m,0}(\Omega)$: c'est l'adhérence dans $H^{m,0}(\Omega)$ de l'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω et à support compact.

Pour m fixé, on simplifie l'écriture en posant

$$H_0^{m,0}(\Omega) = F(\Omega).$$

Espace $F'(\Omega)$: c'est le dual de $F(\Omega)$; c'est l'espace des distributions sur Ω qui sont de la forme

$$T = \Sigma D_x^p g_p, \qquad |p| \leqslant m, \qquad g_p \in L^2(\Omega).$$

Espace $\mathcal{A}(\Omega)$: c'est l'espace des $u \in H^{m,0}(\Omega)$ tels que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in F'(\Omega)$, muni de sa structure naturelle d'espace de Hulbert.

Espace $\mathcal{B}(\Omega)$: c'est l'espace des $u \in F(\Omega)$ tels que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in F'(\Omega)$, muni de la topologie induite par $\mathcal{A}(\Omega)$.

2. Propriétés de $H^{m,0}(\Omega)$.

On dira *que* Ω *vérifie les hypothèses* (R) lorsque les propriétés suivantes ont lieu (on ne cherche pas les hypothèses minimum; on peut remplacer partout « indéfiniment différentiable » par « suffisamment différentiable ») :

On suppose que Ω est contenu dans le demi espace $t > 0$. Soit Γ la frontière de Ω; on suppose que Γ est une variété de dimension n, indéfiniment différentiable par morceaux, Ω étant d'un seul côté de Γ. On pose

$$\Gamma_s = \Omega \cap \{r = s\}, \qquad s > 0;$$

on suppose que Γ_s n'est pas vide pour tout $s > 0$. Soit Γ_0 l'intérieur de l'ensemble $\Gamma \cap \{t = 0\}$; on suppose que Γ_0 n'est pas vide. On pose

$$\Gamma' = \Gamma - \Gamma_0.$$

On suppose qu'il existe une suite localement finie O_i d'ensembles ouverts ou fermés de $R_x^n \times R_t$, avec

1) les O_i recouvrent un voisinage de Γ'

2) chaque O_i est contenu dans une bande $\alpha_i < t < \beta_i$ (ou $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$) ($\alpha_i \geqslant 0$) ; soit $Q(\alpha_i, \beta_i)$ l'ensemble des points de $R_\xi^n \times R_\tau$ avec $-1 < \xi_i < 1$, $\alpha_i < \tau < \beta_i$; on suppose qu'il existe

un homéomorphisme h_i indéfiniment différentiable de $\overline{O_i}$ sur $\overline{Q(\alpha_i, \beta_i)}$; soit

$$h_i(x, t) = (\xi_1(x, t), \ldots, \xi_n(x, t), \tau(x, t));$$

on suppose que $\tau(x, t) = t$, que $\Omega \cap O_i$ est appliqué biunivoquement sur la partie « $\xi > 0$ » de $Q(\alpha_i, \beta_i)$ et que $\Gamma' \cap O_i$ est appliqué biunivoquement sur $\overline{Q(\alpha_i, \beta_i)} \cap \{\xi_n = 0\}$.

Sur un ouvert G de l'espace $R^n_\xi \times R_\tau$, $H^{m,0}(G)$ est défini de façon analogue à $H^{m,0}(\Omega)$.

Lemme 2.1. — *L'homéomorphisme h_i définit un isomorphisme h_i^* de $H^{m,0}(O_i)$ sur $H^{m,0}(Q(\alpha_i, \beta_i))$; h_i^* est également un isomorphisme de $F(O_i)$ sur $F(Q(\alpha_i, \beta_i))$. Si O_i est fermé, remplacer O_i par son intérieur.*

Démonstration. — On supprime l'indice i dans cette démonstration. Si f est dans $C^m(\overline{O})$, posons

$$h^*f(\xi, \tau) = f(h^{-1}(\xi, \tau)).$$

On a

$$h^{-1}(\xi, \tau) = (g_1(\xi, \tau), \ldots, g_n(\xi, \tau), \tau),$$

donc les dérivées de h^*f en ξ d'ordre $\leqslant m$ sont des combinaisons de dérivées de f en x d'ordre $\leqslant m$ et de dérivées des fonctions g_j en ξ; ces dernières fonctions sont bornées, donc l'application $f \to h^*f$ est continue de $C^m(\overline{O})$ muni de la topologie induite par $H^{m,0}(O)$ dans $H^{m,0}(Q(\alpha, \beta))$, et se prolonge donc en une application linéaire continue, encore notée $f \to h^*f$, de $H^{m,0}(O)$ dans $H^{m,0}(Q(\alpha, \beta))$. On définit de la même façon $(h^*)^{-1}$.

Comme par ailleurs h^* et $(h^*)^{-1}$ appliquent $\mathfrak{D}(O)$ dans $\mathfrak{D}(Q(\alpha, \beta))$, on voit que h^* est un isomorphisme de $F(O)$ sur $F(Q(\alpha, \beta))$, ce qui achève la démonstration du Lemme.

Désignons par $\mathfrak{L}^2(\Gamma')$ l'espace des fonctions localement de carré sommable sur Γ', pour la mesure superficielle sur Γ', muni de la topologie (d'espace de Fréchet) de la convergence dans L^2 sur tout compact.

Théorème 2. 1. — *On suppose que Ω vérifie* (R). *Il existe une application linéaire continue et une seule, $u \to \gamma' u$, de $H^{1,0}(\Omega)$ dans $\mathfrak{L}^2(\Gamma')$, telle que $\gamma' u$ coïncide* (presque partout) *avec la restriction de u à Γ' lorsque $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

DÉMONSTRATION. — Il y a unicité parce que, par définition, $C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^{1,0}(\Omega)$.

Soit maintenant $u \in H^{1,0}(\Omega)$, et indéfiniment différentiable dans $\bar{\Omega}$; soit $\gamma' u$ la restriction de u à Γ'; $\gamma' u$ est dans $\mathcal{L}^2(\Gamma')$; il faut démontrer que l'application ainsi définie est continue de $C^1(\bar{\Omega})$ muni de la topologie induite par $H^{1,0}(\Omega)$ dans $\mathcal{L}^2(\Gamma')$. Soit u_i la restriction de u à un ouvert O_i (on peut toujours supposer que O_i est ouvert). On utilise pour u_i l'isomorphisme h_i^* du Lemme 2. 1. On est alors ramené à ceci : soit Q le cube $]0, 1[^{n+1}$; soit $u \in H^{1,0}(Q)$, indéfiniment différentiable dans $\bar{Q}$; soit $X = \bar{Q} \cap \{x_n = 0\}$; soit χu la restriction de u à X; il faut montrer que l'application $u \to \chi u$ est continue dans $L^2(X)$. Or on a :

$$|u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, t)|^2 = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_n}(u\bar{u}a)\, dx_n,$$

où a est une fonction de x_n, une fois continûment différentiable, avec $a(0) = 1$, $a(1) = 0$. On en tire

$$|\chi u|^2_{L^2(X)} = -\int_Q \frac{\partial}{\partial x_n}(\bar{u}a)\, dx\, dt,$$

ce qui donne le résultat.

COROLLAIRE 2. 1. — *Pour tout* $u \in H^{m,0}(\Omega)$, *on peut définir* $\gamma'(D_x^p u)$ *pour* $|p| \leqslant m-1$, *élément de* $\mathcal{L}^2(\Gamma')$.

Comme $\gamma'(D_x^p u)$ est nul si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, et que l'application $u \to (D_x^p u)$ est continue de $H^{m,0}(\Omega)$ dans $\mathcal{L}^2(\Gamma')$, $|p| \leqslant m-1$, il résulte du corollaire 2. 1 que

$$\gamma'(D_x^p u) = 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in F(\Omega), \qquad |p| \leqslant m-1.$$

On va voir que la réciproque est vraie. Pour démontrer cette réciproque, on utilisera la suite de fonctions suivantes : soit $X_{2\varepsilon}$ l'ensemble des points de Ω situés à distance $\geqslant 2\varepsilon$ de Γ'; soit χ_ε la fonction caractéristique de $X_{2\varepsilon}$; soit ρ une fonction de $\mathcal{D}(R^{n+1})$, avec

$$\rho(y) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad y = (x, t) \in R^{n+1},$$
$$\rho(y) = 0 \quad \text{si} \quad |y| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \int \rho(y)\, dy = 1.$$

On pose $$\rho_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n-1}\rho(y/\varepsilon)$$

et on appelle θ_ε la restriction à Ω de $\chi_\varepsilon * \rho_\varepsilon$. La fonction θ_ε est indéfiniment différentiable dans $\overline{\Omega}$; elle vaut 1 si la distance de y à Γ' est $\geqslant 3\varepsilon$, et 0 si la distance est $\leqslant \varepsilon$. Montrons d'abord la

Proposition 2. 1. — *Soit* $u \in H^{m,0}(\Omega)$, *à support compact dans* $\overline{\Omega}$, *et vérifiant*

$$(1) \qquad \gamma'(D_x^p u) = 0, \qquad |p| \leqslant m-1.$$

Alors $\theta_\varepsilon u \to u$ *dans* $H^{m,0}(\Omega)$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. — Soit $p = (p_1, \ldots, p_n)$ fixé avec $|p| \leqslant m$; $D_x^p(\theta_\varepsilon u)$ est somme de $\theta_\varepsilon D_x^p u$ (qui, lorsque $\varepsilon \to 0$, tend vers $D_x^p u$ dans $L^2(\Omega)$) et de termes de la forme (à des constantes multiplicatives près)

$$(2) \qquad D_x^r \theta_\varepsilon D_x^s u, \qquad |r| > 0, \qquad |r| + |s| \leqslant m,$$

On aura la proposition si l'on montre que le terme (2) tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Comme u est à support compact dans $\overline{\Omega}$, il suffit de montrer que la restriction de (2) à $O_i \cap \Omega$ tend vers 0 dans $L^2(O_i \cap \Omega)$. Mais $D_x^r \theta_\varepsilon(y) = 0$ sauf si la distance de y à Γ' est comprise entre ε et 2ε, et l'on a, vu la définition de θ_ε :

$$(3) \qquad |D_x^r \theta_\varepsilon(y)| \leqslant A\varepsilon^{-|r|}, \qquad A = \text{constante}.$$

Soit h_i^* l'isomorphisme du Lemme 2.1; on peut toujours se ramener à ceci : h_i^* est un isomorphisme de $H^{m,0}(O_i \cap \Omega)$ sur $H^{m,0}(Q)$, où $Q =]0,1[^{n+1}$; dans h_i, l'image de $\Gamma' \cap O_i$ est $X = \overline{Q} \cap \{\xi_n = 0\}$.

Soit $v = h_i^*(u) \in H^{m,0}(Q)$. Soit χ l'opération de prolongement en moyenne sur X; h_i définit un isomorphisme, encore noté h_i^*, de $L^2(O_i \cap \Gamma')$ sur $L^2(X)$; par prolongement par continuité à partir des relations triviales dans le cas où $u \in C^1(\overline{O_i \cap \Omega})$, on a :

$$h_i^*(\gamma' u) = \chi(h_i^* u) = \chi v \qquad \text{pour tout} \qquad u \in H^{1,0}(O_i \cap \Omega).$$

Par conséquent, dans le cas actuel, on a

$$\chi(D_\xi^p v) = 0, \qquad |p| \leqslant m-1.$$

La fonction θ_ε (restreinte à $O_i \cap \Omega$) a encore une image vérifiant des majorations analogues à (3), la fonction $h_i^*(\theta_\varepsilon)$

étant cette fois nulle (au moins) dans une bande de Q définie par $0 \leqslant \xi_n \leqslant B\varepsilon$, B étant une constante convenable.

La proposition résulte alors du lemme suivant (où l'on a écrit (x, t) au lieu de (ξ, τ)) :

Lemme 2.2. — *Soit* $u \in H^{m,0}(Q)$ *vérifiant,*

$$\chi(D_x^p u) = 0, \qquad |p| \leqslant m - 1. \tag{4}$$

L'intégrale

$$J_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-2|r|} \int dx_1 \dots dx_{n-1}\, dt \int_0^{B\varepsilon} |D_x^s u|^2\, dx_n \tag{5}$$

tend vers 0 *lorsque* $\varepsilon \to 0$, $|r| > 0$, $|s| = m - |r|$.

Démonstration. — On a presque partout, en posant $|r| = \mu$,

$$D_x^s u(x, t) = \frac{1}{(\mu - 1)!} \int_0^{x_n} (x_n - \lambda)^{\mu - 1} D_{x_n}^{\mu} (D_x^s u(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda, t))\, d\lambda.$$

grâce à (4), d'où (les c_i désignant des constantes diverses)

$$|D_x^s u(x, t)|^2 \leqslant c_1 \int_0^{x_n} (x_n - \lambda)^{2\mu - 2}\, d\lambda \int_0^{x_n} |D_{x_n}^{\mu} D_x^s u(x_1, \dots, \lambda, t)|^2\, d\lambda$$

$$\leqslant c_2 x_n^{2\mu - 1} \int_0^{B\varepsilon} |D_x^p u(x_1, \dots, \lambda, t)|^2\, d\lambda, \qquad |p| = m,$$

donc $$\int_0^{B\varepsilon} |D_x^s u(x, t)|^2\, dx_n \leqslant c_3 \varepsilon^{2\mu} \int_0^{B\varepsilon} |D_x^p u(x, t)|^2\, dx_n$$

d'où $$J_\varepsilon(u) \leqslant c_3 \int dx_1 \dots dx_{n-1}\, dt \int_0^{B\varepsilon} |D_x^p u(x, t)|^2\, dx_n,$$

ce qui montre le lemme.

On peut maintenant démontrer le

Théorème 2. 2. — *On suppose que* Ω *vérifie* (R). *La condition nécessaire et suffisante pour que* u, *élément de* $H^{m,0}(\Omega)$, *soit dans* $F(\Omega)$ *est que l'on ait* (1).

Démonstration. — On a seulement à montrer que la condition (1) est suffisante.

1) Soit $a \in \mathcal{D}(R^{n+1})$, $= 1$ au voisinage de l'origine; soit a_N définie par $a_N(y) = a(y/N)$, $y = (x, t)$.

Si u est dans $H^{m,0}(\Omega)$, il est immédiat de vérifier que $a_N u$ est dans $H^{m,0}(\Omega)$ et tend vers u dans cet espace lorsque $N \to \infty$. Quel que soit N, on a

$$\gamma'(D_x^p(a_N u)) = 0, \qquad |p| \leqslant m - 1.$$

Il suffit donc de démontrer le théorème lorsque u est à support compact dans $\bar{\Omega}$.

2) Soit donc $u \in H^{m,0}(\Omega)$, à support compact dans $\bar{\Omega}$, et vérifiant (1). On sait alors (proposition 2. 1) que $\theta_\varepsilon u \to u$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Il suffit donc de montrer que la fonction $v = \theta_\varepsilon u$ (ε fixé) est dans $F(\Omega)$. Soit $b_j(t)$ la suite de fonctions continues, avec $b_j(t) = 1$ si $t \geqslant 2/j$, $= 0$ si $t \leqslant 1/j$, linéaire entre $1/j$ et $2/j$. Il est évident (puisqu'on ne dérive jamais en t) que

$$b_j v \to v \qquad \text{dans} \qquad H^{m,0}(\Omega)$$

lorsque $j \to \infty$. On aura donc le théorème si l'on montre que $b_j v = w$ (j fixé) est dans $F(\Omega)$; or w est maintenant nulle au voisinage de la frontière de Ω; on peut régulariser: w est limite dans $H^{m,0}(\Omega)$ de ses régularisées qui finissent par être dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Donc w est dans $F(\Omega)$.

c. q. f. d.

3. Espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur des ouverts Ω cylindriques.

Soit ω un ouvert quelconque de R^n_x. On désigne par $H^m(\omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(\omega)$ telles que $D^p u \in L^2(\omega)$ pour tout p avec $|p| \leqslant m$. On pose

$$|u|^2_\omega = \Sigma \int_\omega |D^p u(x)|^2\, dx, \qquad |p| \leqslant m.$$

Muni de la norme $|u|_m$, $H^m(\omega)$ est un espace de Hilbert. On désigne par $H^m_0(\omega)$ l'adhérence dans $H^m(\omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables dans ω à support compact.

LEMME 3. 1. — *Soit $\Omega = \omega \times]0, s[$, $s > 0$. Le sous-espace de $\mathcal{A}(\Omega)$ formé des fonctions à support compact dans $\bar{\Omega}$ et indéfiniment différentiables en t à valeurs dans $H^m(\omega)$ est dense dans $\mathcal{A}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. — Avec les notations de la démonstration du Théorème 2. 2, 1), $a_N u \to u$ dans $\mathcal{A}(\Omega)$; on peut donc supposer que u est à support compact dans $\bar{\Omega}$. Par ailleurs on peut toujours supposer que $\Omega = \omega \times]-a, a[$. Soit λ avec $0 < \lambda < 1$. Définissons $H_\lambda u$ par

$$H_\lambda u(x, t) = u(x, \lambda t).$$

Cela définit $H_\lambda u$ presque partout dans

$$\Omega_\lambda = \omega \times]-a/\lambda, \quad a/\lambda[.$$

On a

$$D_x^p H_\lambda u = H_\lambda D_x^p u,$$

donc $H_\lambda u$ est dans $H^{m,0}(\Omega_\lambda)$. L'application $u \to H_\lambda u$ est continue de $H^{m,0}(\Omega)$ dans $H^{m,0}(\Omega_\lambda)$. Si v_λ est la restriction de $H_\lambda u$ à Ω, on a

(1) $v_\lambda \to u$ dans $H^{m,0}(\Omega)$ lorsque $\lambda \to 1$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\lambda)$; on définit $H_{1/\lambda}\varphi$ par

$$H_{1/\lambda}\varphi(x, t) = \varphi(x, t/\lambda); \qquad H_{1/\lambda}\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} H_\lambda u, \varphi \right\rangle = -\int_\omega dx \int u(x, \lambda t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t)\, dt = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, H_{1/\lambda}\varphi \right\rangle,$$

les crochets désignant la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega_\lambda)$ et $\mathcal{D}(\Omega_\lambda)$, et $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega_\lambda)$ muni de la topologie induite par $F(\Omega_\lambda)$, alors $H_{1/\lambda}\varphi \to 0$ dans $F(\Omega)$, donc $\left(\text{puisque } \frac{\partial u}{\partial t}\right.$ est dans $\left.F'(\Omega)\right)$, $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, H_{1/\lambda}\varphi \right\rangle \to 0$, donc $\frac{\partial}{\partial t} H_\lambda u$ est dans $F'(\Omega_\lambda)$ et par conséquent $H_\lambda u$ est dans $\mathcal{A}(\Omega_\lambda)$.

Par restriction à Ω on voit que v_λ est dans $\mathcal{A}(\Omega)$. Si φ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} v_\lambda, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, H_{1/\lambda}\varphi \right\rangle;$$

par prolongement par continuité, cette relation vaut pour tout $\varphi \in F(\Omega)$; on en déduit que si $\lambda \to 1$, $\frac{\partial}{\partial t} v_\lambda \to \frac{\partial}{\partial t} u$ dans $F'(\Omega)$ faible. Finalement on voit qu'il suffit d'approcher dans $\mathcal{A}(\Omega)$ une fonction u, à support compact dans $\overline{\Omega}$, et qui est restriction à Ω d'un élément $u' \in \mathcal{A}(\Omega')$, $\Omega' = \omega \times]-a', a'[$, $a' > a$. Si $b(t)$ est une fonction indéfiniment différentiable de t, $= 1$ si $|t| \leqslant a$, $= 0$ si $|t| \geqslant (a + a')/2$, la fonction $v = bu'$ est dans $\mathcal{A}(\omega \times R_t)$ (en la prolongeant par 0 pour $|t| > a'$) et sa restriction à Ω vaut u.

Mais v est imite dans $\mathcal{A}(\omega \times R_t)$ de ses régularisées en t qui sont des fonctions indéfiniment différentiables de t à valeurs dans $H^m(\omega)$. Par restriction à Ω, on en déduit le Lemme.

LEMME 3. 2. — *Soit $\Omega = \omega \times]0, s[$. Le sous-espace de $\mathcal{B}(\Omega)$ des fonctions à support compact dans $\overline{\Omega}$ et indéfiniment différentiables en t à valeurs dans $H_0^m(\omega)$ est dense dans $\mathcal{B}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. — La méthode est la même qu'au lemme 3.1. Si u est dans $\mathcal{B}(\Omega)$ alors $H_\lambda u$ est dans $\mathcal{B}(\Omega_\lambda)$. On arrive, comme au Lemme 3. 1, à un élément v de $\mathcal{B}(\omega \times R_t)$; on en déduit le résultat par régularisation en t.

PROPOSITION 3. 1. — *Soit $\Omega = \omega \times]0, s[$. Tout élément u de $\mathcal{B}(\Omega)$ définit une fonction $t \to u(., t)$ continue de $[0, s]$ dans $L^2(\omega)$.*

DÉMONSTRATION. — Soit u indéfiniment différentiable en t à valeurs dans $H_0^m(\omega)$. Désignons par $u(., t)$ la fonction $x \to u(x, t)$; $u(., t)$ est en particulier dans $L^2(\omega)$ et $t \to u(., t)$ est continue de $[0, s]$ à valeurs dans $L^2(\omega)$. On va montrer que si $u \to 0$ dans $\mathcal{B}(\Omega)$, alors $u(., t) \to 0$ dans $L^2(\omega)$, uniformément pour $t \in [0, s]$, ce qui démontrera la proposition, en utilisant le Lemme 3. 2.

On va montrer que $u(., t) \to 0$ dans $L^2(\omega)$ uniformément pour $t \in [0, s/2]$; la méthode est analogue pour $t \in [s/2, s]$.

Soit τ avec $0 \leqslant \tau \leqslant s/2$; soit $a_\tau(t)$ la fonction continue sur R, $= 1$ si $t \leqslant \tau$, $= 0$ si $t \geqslant s$, linéaire entre τ et s. On a

$$|u(x, \tau)|^2 = -\int \frac{\partial}{\partial t}(a_\tau(t)\, u(x, t)\, \bar{u}(x, t))\, dt,$$

donc

$$(2) \qquad \int_\omega |u(x, \tau)|^2\, dx = -\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, a_\tau \bar{u} \right\rangle - \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t}(a_\tau \bar{u}) \right\rangle,$$

les crochets désignant la dualité entre $F(\Omega)$ et $F'(\Omega)$.

Lorsque $\tau \in [0, s/2]$, $a_\tau u$ demeure dans un ensemble borné de $F(\Omega)$ lorsque $u \to 0$ dans $\mathcal{B}(\Omega)$ et $\frac{\partial}{\partial t}(a_\tau u)$ demeure dans un ensemble borné de $F'(\Omega)$; donc lorsque $u \to 0$ dans $\mathcal{B}(\Omega)$, (2) montre que $u(., \tau) \to 0$ dans $L^2(\omega)$ uniformément pour $\tau \in [0, s/2]$.

c.q.f.d.

PROPOSITION 3. 2. — *Soit $\Omega = \omega \times]0, s[$. Pour tout $u, v \in \mathcal{B}(\Omega)$, on a*

$$(3) \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, \bar{v} \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} \bar{v} \right\rangle = (u(., s), v(., s))_{L^2(\omega)} - (u(., 0), v(., 0))_{L^2(\omega)}.$$

DÉMONSTRATION. — La relation (3) est vraie si u et v sont des fonctions indéfiniment différentiables en t à valeurs dans $H_0^m(\omega)$. On passe de là au cas général par prolongement par continuité.

PROPOSITION 3. 3. — *Soit* $\Omega = \omega \times]0, s[$. *Pour tout* $f \in L^2(\omega)$, *il existe* $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ *avec*

$$(4) \qquad u(.,0) = f.$$

DÉMONSTRATION. — Soit u, distribution en t à support limité à gauche à valeurs dans $H_0^m(\omega)$ ([2]), solution de

$$((-1)^m\Delta^m + 1)u + \frac{\partial}{\partial t}u = f \otimes \delta,$$

où δ est la masse de Dirac à l'origine sur R_t. On montre ([3]) que u est dans l'espace $L^2(R_t, H_0^m(\omega))$; soit encore u la restriction de u à Ω; donc u est dans $F(\Omega)$, et comme sur Ω, $((-1^m)\Delta^m + 1)u + \frac{\partial}{\partial t}u = 0$, u est dans $\mathcal{B}(\Omega)$; on a nécessairement $u(.,0) = f$, ce qui démontre la proposition.

Soit toujours $\Omega = \omega \times]0, s[$; on désigne par $B_0(\Omega)$ (resp. $B^s(\Omega)$) l'adhérence dans $\mathcal{B}(\Omega)$ des fonctions identiquement nulles au voisinage de $t = 0$ (resp. $t = s$).

PROPOSITION 3. 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* u, *élément de* $\mathcal{B}(\Omega)$, $\Omega = \omega \times]0, s[$, *soit dans* $B_0(\Omega)$ (*resp.* $B^s(\Omega)$) *est que*

$$(5) \qquad u(.,0) = 0$$

(*resp. que*

$$(6) \qquad u(.,s) = 0).$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit de raisonner sur $B_0(\Omega)$ et avec (5). Il est évident que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. De façon générale, si $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) =$ es-

([2]) Cf. par exemple Lions [1]: Δ désigne le Laplacien en x.

([3]) C'est immédiat si ω est borné, en utilisant par exemple le système complet dans $H_0^m(\omega)$ des fonctions propres de Δ^m. On passe de là au cas général en considérant $\omega_R = \omega \cap \{|x| < R\}$ et faisant tendre R vers l'infini.

pace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans $\overline{\Omega}$, alors $\mathrm{A}u$ est dans $\mathcal{B}(\Omega)$ et

$$(\mathrm{A}u)(.,\ 0) = \mathrm{A}(.,\ 0)u(.,\ 0).$$

Dans le cas actuel, on a donc $(\mathrm{A}u)(.,\ 0) = 0$. Avec les notations de la démonstration du Théorème 2. 2, 1), $a_{\mathrm{N}}u \to u$ dans $\mathcal{B}(\Omega)$ faible; on peut donc supposer que u vérifie (5) et est à support compact dans $\overline{\Omega}$. Soit ensuite $b(t)$ une fonction continûment dérivable sur R_t, $= 1$ si $t \leqslant s/3$, $= 0$ si $t \geqslant 2s/3$; bu est dans $\mathcal{B}(\Omega)$, vérifie $(bu)(.,\ 0) = 0$; $u = bu + (1 - b)u$; comme $(1 - b)u$ est dans $\mathrm{B}_0(\Omega)$, tout revient à montrer que (bu) est dans $\mathrm{B}_0(\Omega)$. Il suffit donc de montrer ceci : soit u dans $\mathcal{B}(\Omega)$, vérifiant (5), à support compact dans $\overline{\Omega}$, nulle pour $t \geqslant 2s/3$; alors u est dans $\mathrm{B}_0(\Omega)$.

Pour $h \leqslant s/3$, définissons u_h presque partout dans Ω par

$$(7) \qquad u_h(x,\ t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < t < h. \\ u(x,\ t - h) & \text{si} \quad h < t < s. \end{cases}$$

La fonction u_h est dans $\mathrm{F}(\Omega)$ et $u_h \to u$ dans $\mathrm{F}(\Omega)$ lorsque $h \to 0$.

Cherchons $\dfrac{\partial}{\partial t} u_h$.

Si φ est donnée dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_h,\ \overline{\varphi} \right\rangle = -\left\langle u_h,\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi} \right\rangle.$$

Posons

$$\varphi_h(x,\ t) = \begin{cases} \varphi(x,\ t + h) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant s - h \\ 0 & \text{pour} \quad s - h \leqslant t \leqslant s. \end{cases}$$

La fonction φ_h est dans $\mathrm{F}(\Omega)$, $\dfrac{\partial}{\partial t} \varphi_h$ est également dans $\mathrm{F}(\Omega)$ et l'on a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_h,\ \overline{\varphi} \right\rangle = -\left\langle u,\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_h \right\rangle.$$

Mais, d'après la proposition 3.2 et comme on a (5), et également $u(.,\ s) = 0$, on a

$$\left\langle u,\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u,\ \overline{\varphi}_h \right\rangle = 0$$

et finalement

$$(8) \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_h,\ \bar{v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u,\ \bar{v}_h \right\rangle.$$

Si maintenant $v \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de $F(\Omega)$, $v_h \to 0$ dans $F(\Omega)$, donc $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u,\ \bar{v}_h \right\rangle \to 0$, donc par (8), $\frac{\partial}{\partial t} u_h$ est dans $F'(\Omega)$, donc u_h est dans $\mathcal{B}(\Omega)$ et est identiquement nulle au voisinage de $t = 0$; on aura donc la proposition si l'on montre que

$$(9) \qquad u_h \to u \text{ dans } \mathcal{B}(\Omega) \text{ faible lorsque } h \to 0.$$

On a déjà vu que $u_h \to u$ dans $F(\Omega)$. Par prolongement par continuité en v la relation (8) est valable pour tout $v \in F(\Omega)$. Si $h \to 0$, $v_h \to v$ dans $F(\Omega)$, donc $\frac{\partial}{\partial t} u_h \to \frac{\partial}{\partial t} u$ dans $F'(\Omega)$ faible, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Proposition 3. 5. — *Soit* $\Omega = \omega \times]0, s[$. *La condition nécessaire et suffisante pour que u, élément de* $\mathcal{B}(\Omega)$ *soit dans* $B_0(\Omega)$ *est que l'on ait*

$$(10) \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u,\ \bar{v} \right\rangle + \left\langle u,\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{v} \right\rangle = 0$$

pour tout $v \in B^s(\Omega)$. *Résultat analogue en échangeant* 0 *et s.*

Démonstration. — D'après la proposition 3. 2, et en tenant compte du fait que $v(., s) = 0$, (10) équivaut à

$$(u(., 0),\quad v(., 0))_{L^2(\omega)} = 0$$

pour tout $v \in B^s(\Omega)$. Grâce à la proposition 3. 3, cela entraîne $u(., 0) = 0$ [4] donc $u \in B_0(\Omega)$ grâce à la proposition 3. 4.

4. Espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur les ouverts Ω_s.

On considère maintenant un ouvert Ω de $R^n_x \times R_t$ qui vérifie (R). On désigne par Ω_s l'ouvert

$$\Omega_s = \Omega \cap \{0 < t < s\}.$$

[4] En effet, on peut dans la proposition 3, 3 choisir un élément v de $B^s(\Omega)$ avec $v(., 0) = f$. Mais on peut se passer de la proposition 3, 3; en effet si $f \in \mathcal{D}(\omega)$, il est évident qu'il existe $v \in B^s(\Omega)$ avec $v(., 0) = f$; donc $(u(., 0), f)_{L^2(\omega)} = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\omega)$, donc $u(., 0) = 0$.

Proposition 4. 1. — *Soit $\mathcal{B}_c(\Omega_s)$ le sous-espace de $\mathcal{B}(\Omega_s)$ formé des fonctions qui sont dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega_s})$ (*[5]*), nulles au voisinage de $\Gamma' \cap \Omega_s$. Cet espace est dense dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$.*

Démonstration. — 1) Soit a_N comme dans le Théorème 2. 2, 1); $a_N u \to u$ dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$.

Il suffit donc d'approcher par des éléments de $\mathcal{B}_c(\Omega_s)$ un élément u de $\mathcal{B}(\Omega_s)$ à support compact dans $\overline{\Omega_s}$. Soit θ_ε les fonctions introduites au n^o 2. Soit encore θ_ε la restriction de θ_ε à Ω_s. Puisque u est dans $F(\Omega_s)$ et est à support compact dans $\overline{\Omega_s}$, on sait, d'après la proposition 2. 1 que $\theta_\varepsilon u \to u$ dans $F(\Omega_s)$; ensuite

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_\varepsilon u) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\theta_\varepsilon\right)u + \theta_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} u \to \frac{\partial}{\partial t} u \qquad \text{dans } F'(\Omega_s) \text{ faible;}$$

en effet, pour tout $v \in F(\Omega_s)$, on a

$$\left\langle \theta_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} u, v \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, \theta_\varepsilon v \right\rangle \to \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle$$

puis $\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta_\varepsilon\right)u \to 0$ dans $L^2(\Omega_s)$ (d'après la démonstration de la proposition 2. 1), d'où le résultat.

2) Il reste seulement à approcher par des éléments de $\mathcal{B}_c(\Omega_s)$ une fonction u de $\mathcal{B}(\Omega_c)$, à support compact dans $\overline{\Omega_s}$ et nulle au voisinage de $\Gamma' \cap \Omega_s$. Considérons la bande π_s:

$$\pi_s = \{0 < t < s\};$$

prolongeons u à π_s par 0 hors de Ω_s; soit $\tilde{u}$ la fonction ainsi prolongée. Comme u est nulle au voisinage de $\Gamma' \cap \Omega_s$, $\tilde{u}$ est dans $F(\pi_s)$; vérifions que $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}$ est dans $F'(\pi_s)$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(\pi_s)$; $\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \tilde{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle$; si A est dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega_s})$, $= 1$ sur le support de u, $= 0$ au voisinage de $\Gamma' \cap \Omega_s$ on a :

$$\left\langle \tilde{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \tilde{u}, \frac{\partial}{\partial t}(A\varphi) \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t}(A\varphi) \right\rangle$$

[5] De façon générale, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans $\overline{\Omega}$.

et comme $A\varphi$ est dans $\mathcal{D}(\Omega_s)$, on en déduit

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, A\varphi \right\rangle$$

d'où l'on déduit que $\dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{u}$ est dans $F'(\pi_s)$.

Mais d'après le Lemme 3. 2, $\tilde{u}$ est limite dans $\mathcal{B}(\pi_s)$ de fonctions v_j indéfiniment différentiables en t à valeurs dans $H_0^m(R_x^n) = H^m(R_x^n)$ $(\omega = R_x^n)$. Par régularisation en x, puis troncature, on en déduit que $\tilde{u}$ est limite dans $\mathcal{B}(\pi_s)$ de fonctions $W_j \in \mathcal{D}(\overline{\pi_s})$, nulles en dehors d'un voisinage (choisi arbitrairement) du support de u. Alors les restrictions w_j de W_j à Ω_s sont dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega_s})$, nulles au voisinage de $\Gamma' \cap \Omega_s$ et $w_j \to u$ dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$, d'où la proposition.

THÉORÈME 4. 1. — *On donne Ω vérifiant* (R). *Soit $s \geqslant 0$ fixé quelconque; il existe une application linéaire continue et une seule*

$$u \to u(.,\, s)$$

de $\mathcal{B}(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_s)$ (6) *telle que $u(.,\, s)$ coïncide presque partout avec la restriction de u à Γ_s lorsque u est continue dans $\overline{\Omega}$.*

DÉMONSTRATION. — Soit σ fixé $> s$; il suffit évidemment de raisonner sur $\mathcal{B}(\Omega_\sigma)$. L'unicité résulte de la proposition 4. 1.

Soit A une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\Omega_\sigma})$, nulle au voisinage de Γ'; alors Au est dans $\mathcal{B}(\Omega_\sigma)$ et peut être considérée comme un élément de $\mathcal{B}(\pi_\sigma)$, en désignant par π_σ la bande $0 < t < \sigma$. On sait alors (Proposition 3. 1) que $(Au)(.,\, s)$ est défini, $\in L^2(\{t = s\})$. Il en résulte que $u(.,\, s)$ est défini et est localement de carré sommable sur Γ_s. Plus généralement, le même raisonnement montre que $u(.,\, s)$ est dans $L^2(Y)$ pour tout ensemble fermé Y à distance > 0 de Γ'. L'application $u \to u(.,\, s)$ est continue de $\mathcal{B}(\Omega_0)$ dans $L^2(Y)$.

Soit θ_ε les fonctions introduites au nº 2. Soit $a(t)$ une fonction indéfiniment différentiable de t, $= 1$ si $t \leqslant s$, $= 0$ si $t \geqslant s + 1$

(6) $L^2(\Gamma_s)$ est l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Γ_s pour la mesure dx.

(par exemple; on prend $\sigma > s + 1$). Pour tout u dans $\mathcal{B}(\Omega_\sigma)$, on pose

$$(1) \qquad X_\varepsilon(u) = \left\langle \theta_\varepsilon au, \frac{\partial}{\partial t}(au) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\theta_\varepsilon au), \overline{au} \right\rangle.$$

Supposons d'abord ε fixé et $u \in \mathcal{B}_c(\Omega_\sigma)$; par intégration par parties, on a

$$(2) \qquad X_\varepsilon(u) = -\int_{\Gamma_s} \theta_\varepsilon(x, s)|u(x, s)|^2 \, dx.$$

Si $u \in \mathcal{B}(\Omega_\sigma)$, il existe $u_j \in \mathcal{B}_c(\Omega_\sigma)$ avec $u_j \to u$ dans $\mathcal{B}(\Omega_\sigma)$ (Proposition 4. 1); soit Y le support de $\theta_\varepsilon(., s)$; $u(., s)$ est dans $L^2(Y)$, et

$$\int_{\Gamma_s} \theta_\varepsilon(x, s)|u_j(x, s)|^2 \, dx \to \int_{\Gamma_s} \theta_\varepsilon(x, s)|u(x, s)|^2 \, dx.$$

Comme $X_\varepsilon(u_j) \to X_\varepsilon(u)$, la relation (2) est vraie pour tout u dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$.

Faisons maintenant tendre ε vers 0; $X_\varepsilon(u) \to X(u)$ avec

$$(3) \qquad X(u) = \left\langle au, \frac{\partial}{\partial t}(\overline{au}) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(au), \overline{au} \right\rangle.$$

La relation (2) montre que

$$\int_{\Gamma_s} |u(x, s)|^2 \, dx < \infty$$

et en outre on a

$$(4) \qquad \int_{\Gamma_s} |u(x, s)|^2 \, dx = X(u).$$

Il en résulte que l'application $u \to u(., s)$ est continue de $\mathcal{B}(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_s)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Espace $B_0(\Omega_s)$ (*resp.* $B^s(\Omega_s)$) : c'est l'adhérence dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$ de l'espace des fonctions nulles au voisinage de Γ_0 (resp. Γ_s).

Théorème 4. 2. — *On donne* Ω *vérifiant* (R). *La condition nécessaire et suffisante pour que* u, *élément de* $\mathcal{B}(\Omega_s)$ *soit dans* $B_0(\Omega_s)$ (*resp.* $B^s(\Omega_s)$) *est que*

$$(5) \qquad u(., 0) = 0$$

(*resp. que*

$$(6) \qquad u(., s) = 0).$$

DÉMONSTRATION. — La nécessité est immédiate. Montrons la suffisance. On raisonne sur $B_0(\Omega_s)$ avec la condition (5). On se ramène comme d'ordinaire au cas où u est à support compact dans $\overline{\Omega}_s$. En utilisant les fonctions θ_ε du n° 2, on peut même supposer que u est nulle au voisinage de Γ'. Soit K l'intersection (compacte) de Γ_0 et du support de u. Soit b_i, $i = 1, \ldots, k$, des fonctions indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega_s}$, avec $\sum_{i=1}^{i=k} b_i = 1$ au voisinage de K, b_i étant nulle au voisinage de $\Gamma' \cap \overline{\Omega}_s$. Alors

$$u = \Sigma b_i u + w,$$

w étant nulle au voisinage de Γ_0, donc w étant dans $B_0(\Omega_s)$. Tout revient donc à montrer que $v = b_i u$ est dans $B_0(\Omega_s)$. Or, en prolongeant v par 0 hors de Ω_s dans la bande

$$\pi_s = \{0 < t < s\},$$

(soit $\tilde{v}$ la fonction prolongée), $\tilde{v}$ est dans $\mathcal{B}(\pi_s)$ et vérifie : $\tilde{v}(.,0) = 0$. Donc (Proposition 3. 4) $\tilde{v}$ est dans $B_0(\pi_s)$ et donc il existe une suite G_j de fonctions de $\mathcal{B}(\pi_s)$, nulles au voisinage de $t = 0$ telles que $G_j \to \tilde{v}$. Par troncature, on peut supposer que les G_j ont leur support dans un voisinage arbitraire du support de v, donc que la restriction g_j de G_j à Ω_s est identiquement nulle au voisinage de $\Gamma' \cap \Omega_s$ et de Γ_0. Donc $g_j \in B_0(\Omega_s)$, et $g_j \to v$, donc $v \in B_0(\Omega_s)$. c.q.f.d.

Il résulte de la démonstration que l'on a :

COROLLAIRE 4. 1. — *L'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\Omega_s})$, nulles au voisinage de Γ_0 et de $\Gamma' \cap \Omega_s$ est dense dans $B_0(\Omega_s)$.*

PROPOSITION 4. 2. — *Soit $u, v \in \mathcal{B}(\Omega_s)$. On a :*

$$(7) \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \bar{v} \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right\rangle = (u(.,s), v(.,s))_{L^2(\Gamma_s)} - (u(.,0), v(.,0))_{L^2(\Gamma_0)}.$$

DÉMONSTRATION. — Si u et v sont dans $\mathcal{B}_c(\Omega_s)$, le résultat est immédiat par intégrations par parties. On passe de là au cas général par prolongement par continuité, en utilisant la proposition 4. 1 et le théorème 4. 1.

Par utilisation de (7) et de la partie triviale du Théorème 4. 2, on a :

COROLLAIRE 4. 2. — *Pour tout* $u \in \mathrm{B}^s(\Omega_s)$ (*resp.* $\mathrm{B}_0(\Omega_s)$) *la quantité*

$$-\left\langle u, \frac{\partial}{\partial t}\bar{u}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}u, \bar{u}\right\rangle$$

est positive (*resp. négative*).

COROLLAIRE 4. 3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que u, élément de* $\mathcal{B}(\Omega_s)$ *soit dans* $\mathrm{B}_0(\Omega_s)$ (*resp.* $\mathrm{B}^s(\Omega_s)$) *est que l'on ait*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}u, \bar{v}\right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t}\bar{v}\right\rangle = 0 \tag{8}$$

pour tout $v \in \mathrm{B}^s(\Omega_s)$ (*resp.* $\in \mathrm{B}_0(\Omega_s)$).

DÉMONSTRATION. — Raisonnons sur $\mathrm{B}_0(\Omega_s)$. Comme $v(.,\ s) = 0$, la relation (8), compte tenu de (7), donne

$$(u(.,\ 0),\ v(.,\ 0))_{\mathrm{L}^2(\Gamma_0)} = 0$$

pour tout $v \in \mathrm{B}^s(\Omega_s)$. Il en résulte par le procédé de la note (⁴) que $u(.,0) = 0$, donc $u \in \mathrm{B}_0(\Omega_s)$ grâce au Théorème 4. 2.

Notons maintenant la

PROPOSITION 4. 3. — *On donne* Ω *vérifiant* (R); *pour tout* $u \in \mathcal{B}(\Omega)$, *on a*

$$-\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial t}u, \bar{u}\right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t}\bar{u}\right\rangle\right) = \int_{\Gamma_0} |u(x, 0)|^2\, dx. \tag{9}$$

DÉMONSTRATION. — La démonstration de la Proposition 4. 1 montre que le sous-espace $\mathcal{B}_c(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$, à support compact dans $\bar{\Omega}$ et nulles au voisinage de Γ' est dense dans $\mathcal{B}(\Omega)$. Or pour les fonctions de $\mathcal{B}_c(\Omega)$, (9) est vrai d'où le cas général par passage à la limite.

CHAPITRE II

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AUX LIMITES

1. Résolution de certaines équations fonctionnelles.

Soit F un espace de Hilbert; si f, $f' \in \mathrm{F}$, $(f, f')_{\mathrm{F}}$ désigne le produit scalaire de f et f' dans F; on pose

$$|f| = |f|_{\mathrm{F}} = (f, f)_{\mathrm{F}}.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace préhilbertien, $\mathcal{H} \subset \mathrm{F}$; si h, $h' \in \mathcal{H}$, $(h, h')_{\mathcal{H}}$ désigne le produit scalaire de h et h' dans $\mathcal{H}$; on pose

$$\|h\| = \|h\|_{\mathcal{H}} = (h, h)_{\mathcal{H}};$$

on suppose que $\|h\| = 0$ entraîne $h = 0$, et que l'application $h \rightarrow h$ est continue de $\mathcal{H}$ dans F; donc il existe une constante c_1 telle que

$$(1) \qquad |h| \leqslant c_1 \|h\|, \qquad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

On donne sur $\mathrm{F} \times \mathcal{H}$ une forme sesquilinéaire

$$f,\ h \rightarrow \mathrm{E}(f, h)$$

(*i. e.* $f \rightarrow \mathrm{E}(f, h)$ est linéaire, $h \rightarrow \mathrm{E}(f, h)$ est semi-linéaire), cette forme étant séparément continue *ou non.*

On fera les hypothèses suivantes :

$$(\mathrm{H}\ 1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } h \in \mathcal{H}, \text{ la forme } f \rightarrow \mathrm{E}(f, h) \\ \quad \text{est continue sur F;} \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{H}\ 2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un nombre } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \quad \mathrm{Re}\,\mathrm{E}(h, h) \geqslant \alpha \|h\|^2 \text{ pour tout } h \in \mathcal{H} \text{ ([6 bis]).} \end{array} \right.$$

([6 bis]) Plus généralement

$$|\mathrm{E}(h, h)| \geqslant \alpha \|h\|^2 \qquad \text{pour tout} \qquad h \in \mathcal{H}.$$

THÉORÈME 1. 1. — *On suppose que* (H1) *et* (H2) *ont lieu. Soit* $h \to L(h)$ *une forme semi-linéaire continue sur* $\mathcal{H}$. *Il existe un élément* u *dans* F *tel que*

$$E(u, h) = L(h) \qquad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

(Il n'y a pas unicité de u sans hypothèse supplémentaire).

DÉMONSTRATION. — Soit H l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{H}$; $||h||$ désigne encore la norme dans H.

D'après (H 1), on a

$$E(f, h) = (f, Kh)_F, \qquad Kh \in F, \tag{3}$$

ce qui définit une application linéaire $h \to Kh$ de $\mathcal{H}$ dans F. Soit A l'image de $\mathcal{H}$ dans cette application; $A \subset F$.

L'application $h \to Kh$ est *biunivoque* de $\mathcal{H}$ sur A; en effet si $Kh = 0$, alors $(h, Kh)_F = E(h, h) = 0$, donc $\operatorname{Re} E(h, h) = 0$, donc par (H 2), $||h|| = 0$ ce qui entraîne $h = 0$ par hypothèse.

On peut donc considérer $K^{-1} = R_0$ défini par

$$R_0 a = h \quad \text{si} \quad a = Kh, \qquad h \in \mathcal{H}, \qquad a \in A \tag{4}$$

Montrons maintenant que l'application

$$a \to R_0 a$$

est *continue* de A muni de la topologie induite par F dans H. En effet

$$||R_0 a||^2 = ||h||^2 \leqslant \frac{1}{\alpha} \operatorname{Re} E(h, h) \quad (\text{par (H 2)}),$$

donc

$$\alpha ||h||^2 \leqslant |E(h, h)| = |(h, Kh)_F| \leqslant |h||Kh| \leqslant c_1 ||h|| \, |Kh|$$

d'où

$$\alpha ||h|| \leqslant c_1 K|h|$$

soit

$$\alpha ||R_0 a|| \leqslant c_1 |a|,$$

d'où le résultat.

Par conséquent R_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue $\overline{R_0}$ de $\overline{A} = B$ dans H. Soit P_B l'opérateur de projection orthogonale sur B (dans F) et posons

$$R = \overline{R_0} P_B. \tag{5}$$

L'opérateur R est linéaire continu de F dans H; on définit donc R^* linéaire continu de H dans F par

(6) $$(R^*h, f)_F = (h, Rf)_H, \qquad h \in H, \qquad f \in F.$$

Venons en à l'équation (2). Comme $h \to L(h)$ est semi-linéaire continue sur $\mathcal{H}$, on a

(7) $$L(h) = (k, h)_H, \qquad k \in H.$$

Mais

$$(k, h)_H = (k, R_0 a)_H = (k, R_0 P_B a)_H = (k, Ra)_H = (R^*k, a)_F$$

de sorte que (2) équivaut à

$$(u, Kh)_F = (R^*k, a)_F,$$

où $a = Kh$, de sorte qu'*une* solution est $u = R^*k$, ce qui démontre le théorème.

Remarque 1. 1. — Naturellement il y a unicité de la solution si et seulement si

$E(u, h) = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ entraîne $u = 0$ (7).

Si cette condition a lieu, ainsi que (H 1) et (H 2), on peut même supposer que F est un espace de Banach réflexif.

2. Application: existence de solutions de certaines équations aux dérivées partielles.

Soit Ω un ouvert quelconque de R^ν (on peut se placer dans une situation plus générale; cf. Lions-Schwartz [1]); on donne un espace de Hilbert F avec

(1) $$\mathcal{D}(\Omega) \subset F \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

les injections étant continues et $\mathcal{D}(\Omega)$ *étant dense dans* F. On peut alors identifier le dual F' de F à un sous-espace de distributions sur Ω.

On prend $\mathcal{H} = \mathcal{D}(\Omega)$ avec $||h|| = |h| = |h|_F$, de sorte que le complété H de $\mathcal{H}$ est F.

Comme au n° 1, on donne E (f, h), vérifiant (H 1) et (H 2) et on suppose en outre que

(H 3) $\Big\{$ la forme $h \to E(f, h)$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ *muni de sa propre topologie.*

(7) Cette propriété est d'ailleurs en général la plus délicate à vérifier dans les applications.

Il résulte de (H 3) que

$$E(f,\ h) = \langle Df,\ \bar{h}\rangle \tag{2}$$

où $Df \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$; on définit ainsi une application linéaire $f \to Df$ de F dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème 2. 1. — *On suppose que* (H 1), (H 2), (H 3) *ont lieu. Pour toute distribution* T *de* F', *il existe u dans* F *avec*

$$Du = T. \tag{3}$$

Démonstration. — Soit $h \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(\Omega)$; posons

$$L(h) = \langle T,\ \bar{h}\rangle; \tag{4}$$

$h \to L(h)$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{H}$, puisque T est dans F' et que $\mathcal{H}$ a la topologie induite par F. Si u est solution dans F de (3), on a, avec (2) et (4) :

$$(Eu,\ h) = L(h); \tag{5}$$

réciproquement si u est dans F et vérifie (5) pour tout h, alors on a (3). Or on sait (Théorème 1. 1) qu'il existe u solution de (5), d'où le théorème.

Application. — On prend $\nu = n + 1$, $R^\nu = R^n_x \times R_t$ comme au chapitre I. On prend pour Ω un ouvert quelconque de R^ν. On donne sur Ω l'opérateur différentiel

$$A = \sum (-1)^{|p|} D^p_x [a_{pq}(x,\ t) D^q_x], \qquad |p|, \qquad |q| \leqslant m, \tag{6}$$

avec $a_{pq} \in L^\infty(\Omega)$ = espace des fonctions mesurables et bornées sur Ω.

On prend pour espace F

$$F = H^{m,0}_0(\Omega) = F(\Omega)$$

avec les notations du chapitre I, n° 1.

Pour u, v dans $H^{m,0}(\Omega)$ on pose

$$a(u,\ v) = \sum \int_\Omega a_{pq}(x,\ t)\, D^q_x u\, \overline{D^p_x v}\, dx\, dt; \tag{7}$$

si v est dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$a(u,\ v) = \langle Au,\ \bar{v}\rangle; \tag{8}$$

on en déduit par prolongement par continuité que (8) est vrai pour tout $v \in F = F(\Omega)$, le crochet désignant la dualité entre $F'(\Omega)$ et $F(\Omega)$.

On suppose que l'opérateur A est *elliptique* au sens suivant :

$$\text{(K 1)} \quad \begin{cases} \text{il existe un nombre } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \mathrm{Re}\, a(u, u) \geqslant \alpha |D^{m,0}u|^2 = \alpha |u|_F^2 \text{ pour tout } u \in F. \end{cases}$$

Il en résulte que A est un isomorphisme de F sur F'.

Soit maintenant B un opérateur (différentiel ou non) ayant les propriétés suivantes :

$$\text{(K 2)} \quad \begin{cases} B \in \mathcal{L}(F; \mathcal{D}'(\Omega))\text{[8] et} \\ \mathrm{Re}\langle Bh, h\rangle \geqslant 0 \text{ pour tout } h \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

THÉORÈME 2. 2. — *On donne sur un ouvert* Ω *quelconque de* $R_x^n \times R_t$ *des opérateurs* A *et* B *vérifiant* (K1) *et* (K2). *Pour tout* T *donné dans* F', *il existe u dans* F *avec*

$$(A + B)u = T. \tag{9}$$

DÉMONSTRATION. — On applique le Théorème 2. 1 avec :

$$E(f, h) = a(f, h) + \langle Bf, \bar{h}\rangle,$$

$h \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(\Omega)$; la forme $f \to a(f, h)$ est continue sur F; il en est de même de la forme $f \to \langle Bf, \bar{h}\rangle$ grâce à (K 2), donc (H 1) a lieu.

Ensuite

$$\mathrm{Re}\, E(h, h) = \mathrm{Re}\, a(h, h) + \mathrm{Re}\langle Bh, h\rangle \geqslant \alpha |h|_F^2 = \alpha \|h\|^2$$

grâce à (K 1) et (K 2). Donc (H 2) a lieu.

Enfin la forme $h \to E(f, h)$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, donc (H 3) a lieu et $E(f, h) = \langle Df, h\rangle$ avec $D = A + B$.

Le théorème est donc une conséquence du théorème 2. 1.

Remarque 2. 1. — Supposons que la frontière de Ω soit une variété de dimension n suffisamment différentiable. La condition « $u \in F$ » signifie que $D_x^p u$, $|p| \leqslant m - 1$, est nul « en moyenne » sur les parties de la frontière de Ω qui ne sont pas « perpendiculaires » à l'axe des t. Le théorème 2. 2 donne donc *l'existence* de solutions de certains problèmes aux limites.

[8] $\mathcal{L}(X; Y)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

3. Problèmes mixtes pour opérateurs de type parabolique.

On donne un ouvert Ω vérifiant (R) (cf. chapitre I, n° 2).

On donne sur Ω un opérateur A comme au n° 2 :

(1) $$A = \Sigma(-1)^{|p|} D_x^p(a_{pq}(x, t) D_x^q), \qquad |p|, |q| \leqslant m,$$

où *l'on suppose que* a_{pq} *est dans* $L^\infty(\Omega_s)$ *pour tout* $s > 0$ *fini* (9), mais où l'on n'a pas forcément $a_{pq} \in L^\infty(\Omega)$.

Pour $u, v \in H^{m,0}(\Omega_s)$ on pose

(2) $$a(u, v) = \Sigma \int_{\Omega_s} a_{pq}(x, t) D_x^q u \overline{D_x^p v}\, dx\, dt.$$

On suppose l'opérateur A *elliptique* au sens suivant :

(E) pour tout $s > 0$, il existe un nombre $\lambda(s)$ tel que, pour tout $u \in F(\Omega_s)$ on ait

(3) $$\operatorname{Re} a(u, u) + \lambda(s) |u|_0^2 \geqslant \alpha(s) |u|_{F(\Omega_s)}^2, \qquad \alpha(s) > 0 \quad (10).$$

On se propose de résoudre les problèmes qui suivent.

Problème 3. 1. — On donne une distribution T sur Ω dont la restriction à Ω_s est dans $F'(\Omega_s)$ quel que soit $s > 0$. On cherche u solution de

(4) $$Au + \frac{\partial}{\partial t} u = T,$$

telle que la restriction de u à Ω_s soit dans $B_0(\Omega_s)$ (11) quel que soit $s > 0$.

La condition « $u \in B_0(\Omega_s)$ » équivaut (chapitre I, Théorèmes 2. 2 et 4. 2) aux conditions

(i) $$\gamma'(D_x^p u) = 0 \qquad \text{pour} \qquad |p| \leqslant m - 1,$$

(ii) $$u(., 0) = 0.$$

Problème 3. 2. — On donne T comme dans le problème 3. 1 et on donne une fonction Φ dont la restriction à Ω_s est dans $\mathcal{A}(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$ (12). On cherche U solution de

(5) $$AU + \frac{\partial}{\partial t} U = T,$$

(9) On rappelle que $\Omega_s = \Omega \cap \{0 < t < s\}$.

(10) $|u|_0^2 = \int_{\Omega_s} |u(x, t)|^2\, dx\, dt$.

(11) On rappelle que $B_0(\Omega_s)$ est l'adhérence dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$ des fonctions nulles au voisinage de Γ_0.

(12) $v \in \mathcal{A}(\Omega_s)$ signifie :

$$v \in H^{m,0}(\Omega_s), \qquad \frac{\partial}{\partial t} v \in F'(\Omega_s).$$

telle que, pour tout $s > 0$, on ait

(6) $$U - \Phi \in B_0(\Omega_s) \quad (^{13}).$$

Vu (i) et (ii), (6) équivaut à

(i') $$\gamma'(D_x^p U) = \gamma'(D_x^p \Phi), \qquad |p| \leqslant m-1,$$

(ii') $$U(.,0) = \Phi(.,0) \quad (^{14}).$$

Ce problème est donc *un problème aux limites de type mixte*; la condition (ii') est la condition initiale de Cauchy; les conditions (i') correspondent aux conditions de Dirichlet.

Le problème 3. 2 conduit naturellement au problème suivant, que nous n'avons pas pu résoudre : on donne une fonction f localement de carré sommable sur Γ_0, et une famille de fonctions g_p, $|p| \leqslant m-1$, g_p localement de carré sommable sur Γ'; trouver la condition nécessaire et suffisante portant sur f et g_p pour qu'il existe une fonction Φ, élément de $\mathcal{A}(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$, telle que

$$\Phi(.,0) = f, \qquad \gamma'(D_x^p \Phi) = g_p, \qquad |p| \leqslant m-1 \, (^{15}).$$

Notons maintenant que *le problème* 3. 2 *se ramène aussitôt au problème* 3. 1; en effet, posons $u = U - \Phi$; on a

(7) $$Au + \frac{\partial}{\partial t} u = S,$$

où $S = T - A\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Phi$, est dans $F'(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$, et où u doit être dans $B_0(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$. Le problème 3. 2 équivaut à la résolution dans ces conditions de (7), *i. e.* équivaut au problème 3. 1.

Le problème 3. 1 est résolu par le

THÉORÈME 3.1. — *On suppose que* Ω *vérifie* (R) *et que* A *est elliptique au sens* (E). *Le problème* 3. 1 *admet alors une solution unique* [16].

[13] Il s'agit bien entendu de la restriction de $U - \Phi$ à Ω_s. On suppose aussi que la restriction de U à Ω_s est dans $\mathcal{A}(\Omega_s)$.

[14] Si v est dans $\mathcal{A}(\Omega_s)$ on peut définir $v(.,\tau)$ (pour $\tau \geqslant 0$ quelconque) fonction localement de carré sommable sur Γ_τ. Nous ignorons si $v(.,\tau)$ est dans $L^2(\Gamma_\tau)$.

[15] Si $m = 1$ et si la dérivée en t est également dans L^2, cf. Aronszajn [1] et Brelot [1] (radiales). Cf. également Nikolsky [1].

[16] On peut résoudre un problème analogue sous des hypothèses plus générales sur Ω. Mais l'interprétation des conditions aux limites nécessite quelques développements sur lesquels nous reviendrons.

On aura besoin du

LEMME 3. 1. — *On se place dans les hypothèses du Théorème* 3. 1. *Soit* $g \in F'(\Omega_s)$, $s > 0$ *fixé quelconque. Il existe* v *unique dans* $B_0(\Omega_s)$ *solution de*

$$A v + \frac{\partial}{\partial t} v = g. \tag{8}$$

DÉMONSTRATION. — 1) Prenons $\lambda(s) = \lambda$ tel que (3) ait lieu et posons $v = \exp(\lambda t)\, w$.

On définit ainsi une fonction w qui est dans $B_0(\Omega_s)$ en même temps que v. Comme A est un opérateur de dérivation en x (les coefficients de A dépendent de t, mais on ne dérive qu'en x) : $Av = \exp(\lambda t)\, Aw$.

On voit donc que si v est solution dans $B_0(\Omega_s)$ de (8), alors w est solution dans $B_0(\Omega_s)$ de

$$(A + \lambda) w + \frac{\partial}{\partial t} w = \exp(-\lambda t)\, g,$$

et réciproquement. On voit donc que, quitte à remplacer A par $A + \lambda$, *il suffit de démontrer le Lemme dans le cas où l'on a*

$$\mathrm{Re}\, a(u, u) \geqslant \alpha |u|^2_{F(\Omega_s)}, \qquad \alpha > 0, \qquad u \in F(\Omega_s). \tag{9}$$

2) On applique alors la théorie générale des n^os 1 et 2 avec : $F = F(\Omega_s)$;

$\mathcal{H} = B^s(\Omega_s)$ (adhérence dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$ des fonctions nulles au voisinage de Γ_s); $\mathcal{H}$ est muni de la topologie induite par F;

$$E(f, h) = a(f, h) - \left\langle f, \frac{\partial}{\partial t} \bar{h} \right\rangle$$

le crochet désignant la dualité entre $F(\Omega_s)$ et $F'(\Omega_s)$.

On a les propriétés suivantes :

a) la forme $f \to E(f, h)$ est continue sur F (évident);

b)

$$\mathrm{Re}\,E(h, h) = \mathrm{Re}\,a(h, h) - 1/2\left(\left\langle h, \frac{\partial}{\partial t}\bar{h}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} h, \bar{h}\right\rangle\right) \geqslant \alpha |h|^2_{F(\Omega_s)}$$

car

$$-\left(\left\langle h, \frac{\partial}{\partial t}\bar{h}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} h, \bar{h}\right\rangle\right) \geqslant 0 \qquad \text{(chap. I, corollaire 4. 2.)};$$

c) $E(f, h) = 0$ pour tout $h \in B^s(\Omega_s)$ entraîne $f = 0$.

En effet, écrivant d'abord que $E(f, h) = 0$ pour tout $h \in \mathfrak{D}(\Omega_s)$, on en déduit

$$Af + \frac{\partial}{\partial t} f = 0;$$

comme Af est dans $F'(\Omega_s)$, il en résulte que $\frac{\partial}{\partial t} f \in F'(\Omega_s)$, donc que $f \in \mathcal{B}(\Omega_s)$. On a toujours (cf. (8), n° 2) :

$$\langle Af, \bar{h} \rangle = a(f, h), \qquad h \in F(\Omega_s)$$

donc

$$(10) \quad a(f, h) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f, \bar{h} \right\rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad h \in F(\Omega_s).$$

On peut en particulier prendre $h = f$, donc

$$(11) \qquad a(f, f) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f, \bar{f} \right\rangle = 0.$$

Si maintenant h est pris dans $B^s(\Omega_s)$, on déduit de $E(f, h) = 0$ et de (10) que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \bar{h} \right\rangle + \left\langle f, \frac{\partial}{\partial t} \bar{h} \right\rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad h \in B^s(\Omega_s).$$

Il en résulte (corollaire 4. 3, chapitre I) que $f \in B_0(\Omega_s)$.
Mais on sait alors (corollaire 4. 2, chapitre I) que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} f, \bar{f} \right\rangle + \left\langle f, \frac{\partial}{\partial t} \bar{f} \right\rangle \geqslant 0$$

de sorte que (11) entraîne

$$0 \geqslant \alpha |f|^2_{F(\Omega_s)} \qquad \text{donc} \qquad f = 0, \quad \text{c.q.f.d.}$$

3) Il résulte de *a*), *b*), *c*) de 2) que l'équation

$$(12) \qquad E(\varphi, h) = \langle g, \bar{h} \rangle, \qquad \text{pour tout} \qquad h \in B^s(\Omega_s),$$

admet une solution unique.

Écrivant (12) pour $h \in \mathfrak{D}(\Omega_s)$, on en déduit que φ vérifie (8); il en résulte que φ est dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$ et que l'on a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \varphi, \bar{h} \right\rangle + \left\langle \varphi, \frac{\partial}{\partial t} \bar{h} \right\rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad h \in B^s(\Omega_s),$$

d'où résulte (corollaire 4. 3, chapitre I) que v est dans $B_0(\Omega_s)$. Donc si v est solution de (12), alors v est dans $B_0(\Omega_s)$ solution de (8).

Réciproquement si v est solution dans $B_0(\Omega_s)$ de (8), alors, par utilisation du corollaire 4. 3, chapitre I, on voit que v est solution de (12) ce qui achève la démonstration du Lemme.

LEMME 3. 2. — *On se place dans les hypothèses du théorème* 3. 1.

Soit $s' > s$; *soit* $g' \in F'(\Omega_{s'})$, *avec* $g' = g$ *dans* Ω_s,

Soit v' *la solution dans* $B_0(\Omega_{s'})$ *de*

$$Av' + \frac{\partial}{\partial t} v' = g'.$$

Alors $v' = v$ *dans* Ω_s.

DÉMONSTRATION. — Soit en effet w la restriction de v' à Ω_s; w est dans $B_0(\Omega_s)$ et vérifie

$$Aw + \frac{\partial}{\partial t} w = g,$$

de sorte que, vu l'unicité dans le lemme 3. 1, on a $w = v$,

c.q.f.d.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. 1. — Soit T_s (resp. u_s) la restriction de T (resp. u) à Ω_s; u_s doit être dans $B_0(\Omega_s)$, solution de

$$Au_s + \frac{\partial}{\partial t} u_s = T_s,$$

ce qui admet (lemme 3. 1) une solution unique; on a donc déjà l'unicité. Mais on définit une fonction u sur Ω par $u = u_s$ dans Ω_s pour tout $s > 0$ (lemme 3. 2); u est la solution du problème 3. 1, ce qui démontre le théorème.

4. Conditions de croissance à l'infini.

On fait dans ce n° les hypothèses suivantes, plus restrictives que celles du N° précédent :

$$(\mathrm{E}') \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{pq} \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \lambda \text{ tel que} \\ \mathrm{Re}\, a(u, u) + \lambda |u|_0^2 \geqslant \alpha |u|^2_{F(\Omega)}, \ \alpha > 0 \ (^{17}), \\ \text{pour tout } u \in F(\Omega). \end{array} \right.$$

([17]) Cette fois $|u|_0^2 = \int_\Omega |u(x, t)|^2 \, dx \, dt.$

PROBLÈME 4. 1. — On donne T dans $F'(\Omega)$. On cherche u dans $F(\Omega)$, solution de

$$(1) \qquad Au + \frac{\partial}{\partial t} u = T,$$

avec

$$(2) \qquad u(., 0) = 0 \text{ [18]}.$$

Ce problème diffère du problème 3. 1 par les conditions de croissance à l'infini, plus restrictives dans le problème actuel.

THÉORÈME 4. 1. — *On suppose que* Ω *vérifie* (R) *et que* (E′) *a lieu. Alors le problème* 4. 1 *admet une solution unique.*

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème 3. 1, on sait que l'équation (1) admet une solution *unique* sous la seule condition « $u \in B_0(\Omega_s)$ » pour tout $s > 0$; *a fortiori* y a-t-il unicité sous la condition « $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ et (2) ».

Il s'agit donc seulement de montrer que, sous l'hypothèse (E′) et T étant dans $F'(\Omega)$, la solution obtenue au n° 3 est dans $F(\Omega)$.

En utilisant (E′) on se ramène, comme au lemme 3. 1, au cas où

$$(3) \qquad \operatorname{Re} a(u, u) \geqslant \alpha |u|^2_{F(\Omega)}, \quad \alpha > 0, \quad \text{pour tout} \quad u \in F(\Omega).$$

On utilise alors le théorème 1. 1 avec

$$F = F(\Omega);$$

$\mathcal{H}$ = espace $\mathcal{B}(\Omega)$, muni de la topologie induite par F;

$$E(f, h) = a(f, h) - \left\langle f, \frac{\partial}{\partial t} \bar{h} \right\rangle,$$

le crochet désignant la dualité entre F et $F'(\Omega)$.

On a :

$$\operatorname{Re} E(h, h) = \operatorname{Re} a(h, h) - \frac{1}{2}\left(\left\langle h, \frac{\partial}{\partial t} \bar{h} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} h, \bar{h} \right\rangle\right) \geqslant \alpha |h|^2_{F(\Omega)},$$

grâce à la proposition 4. 3, chapitre I.

[18] Si u est dans $F(\Omega)$ et si (1) a lieu, alors $\frac{\partial}{\partial t} u$ est dans $F'(\Omega)$, de sorte que $u(., 0)$ a un sens.

Par conséquent (théorème 1. 1), il existe $u \in F(\Omega)$ vérifiant

(4) $$E(u\, h) = \langle T, \bar{h} \rangle \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathcal{H}.$$

Il en résulte d'abord (en prenant h dans $\mathcal{D}(\Omega)$) que (1) a lieu; donc u est dans $\mathcal{B}(\Omega)$ et

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, \bar{h} \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} \bar{h} \right\rangle = 0$$

pour tout $h \in \mathcal{B}(\Omega)$; on peut en particulier prendre h dans $B^s(\Omega_s)$; on en déduit, à l'aide du corollaire 4. 3, chapitre I, que (2) a lieu, ce qui démontre le théorème.

5. Cas des ouverts cylindriques.

On suppose dans ce n° que $\Omega = \omega \times]0, +\infty[$, ω étant un ouvert quelconque de R^n_x (19); on donne A comme au n° 3. On peut améliorer quelque peu le théorème 3. 1; on a :

Théorème 5. 1. — *Soit* ω *un ouvert quelconque de* R^n_x, $\Omega = \omega \times]0, +\infty[$; *on donne* A *vérifiant* (E) (n° 3). *On donne* T, *élément de* $F'(\Omega_s)$ *pour tout* s *fini et on donne* $f \in L^2(\omega)$. *Il existe un élément* u *et un seul tel que*

(1) $$Au + \frac{\partial}{\partial t} u = T,$$

avec

(2) $$u \in F(\Omega_s) \quad \text{pour tout} \quad s > 0,$$
(3) $$u(., 0) = f.$$

Démonstration. — On sait (proposition 3. 3, chapitre I) qu'il existe $\Phi \in \mathcal{B}(\Omega)$ avec $\Phi(., 0) = f$; Φ étant choisie, posons $v = u - \Phi$; alors v est dans $B_0(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$ et

(4) $$Av + \frac{\partial}{\partial t} v = S,$$

où $S = T - A\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Phi$ est dans $F'(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$.

Si ω est « régulier » de sorte que (R) a lieu, le théorème 3. 1 montre que v existe et est unique, ce qui démontre le théorème. Mais l'existence et l'unicité de v se démontre dans le

(19) Comme ω est quelconque, (R) n'a pas forcément lieu.

cas « ω quelconque » comme le théorème 3. 1; il suffit d'utiliser la proposition 3. 5 au lieu du corollaire 4. 3, chapitre I, et la proposition 3. 2 (d'où l'on déduit aussitôt le signe de $Re\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, \bar{u} \right\rangle$) au lieu du corollaire 4. 2, chapitre I.

6. Cas des systèmes différentiels.

On désigne par (m) la famille

$$(m) = (m_1, \ldots, m_N)$$

de N nombres entiers > 0. On considère l'espace produit

$$H^{(m), 0}(\Omega) = H^{m_1, 0}(\Omega) \times \cdots \times H^{m_N, 0}(\Omega);$$

si $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_N) \in H^{(m), 0}(\Omega)$ (i.e. $u_i \in H^{m_i, 0}(\Omega)$), on pose

$$\left|D^{(m), 0}\vec{u}\right|^2 = \sum_{i=1}^{i=N} |D^{m_i, 0}u_i|^2;$$

muni de la norme $|D^{(m), 0}u|$, l'espace $H^{(m), 0}(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On désigne par

$$H_0^{(m), 0}(\Omega) = \vec{F}(\Omega)$$

l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)^N$ dans $H^{(m), 0}(\Omega)$; $\vec{u} \in \vec{F}(\Omega)$ équivaut à « $u_i \in H_0^{m_i, 0}(\Omega)$ » pour tout $i = 1, \ldots, N$.

On désigne par $\vec{F'}(\Omega)$ l'espace dual de $\vec{F}(\Omega)$; $\vec{T} \in \vec{F'}(\Omega)$ équivaut à

$$\vec{T} = (T_1, \ldots, T_N), \qquad T_i \in (H_0^{m_i, 0}(\Omega))', \qquad i = 1, \ldots, N.$$

On définit de la même façon:

$$H^{(m), 0}(\Omega_s), \qquad \vec{F}(\Omega_s), \qquad \vec{F'}(\Omega_s)$$

On donne sur Ω une famille de fonctions:

$$a_{pq}^{ij}: x, t \to a_{pq}^{ij}(x, t), \qquad i, j = 1, \ldots, N, \qquad \begin{array}{l} p = (p_1, \ldots, p_n), \\ q = (q_1, \ldots, q_n), \end{array}$$

avec

(*a*) $\qquad a_{pq}^{ij} \in L^\infty(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$;

(*b*) $\qquad a_{pq}^{ij} = 0$ si $|p| > m_i$ *ou* si $|q| > m_j$.

Pour $\vec{u}, \vec{v} \in H^{(m), 0}(\Omega_s)$, on pose

$$(1) \qquad a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum \int_{\Omega_s} a_{pq}^{ij}(x, t) D_x^q u_j \overline{D_x^p v_i}\, dx\, dt.$$

Si $\vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, on a

$$(2) \qquad a(\vec{u}, \vec{v}) = \langle A\vec{u}, \bar{\vec{v}} \rangle$$

où le crochet désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)^N$ et $\mathcal{D}(\Omega)^N$ avec

$$(3) \qquad A\vec{u} = ((A\vec{u})_1, \ldots, (A\vec{u})_N),$$

et

$$(4) \qquad (A\vec{u})_i = \Sigma (-1)^{|p|} D_x^p (a_{pq}^{ij}(x, t) D_x^q u_j).$$

Grâce aux hypothèses faites sur a_{pq}^{ij}, $(A\vec{u})_i$ est dans $(H^{m_i, 0}(\Omega))'$, de sorte que, par prolongement par continuité, (2) est valable pour tout $\vec{v} \in \vec{F}(\Omega)$.

On suppose que A est elliptique au sens suivant [20] :

$$(E'') \qquad \begin{cases} \text{pour tout } s > 0, \text{ il existe } \lambda(s) \text{ tel que} \\ \operatorname{Re} a(\vec{u}, \vec{u}) + \lambda(s) |\vec{u}|_0^2 \geqslant \alpha(s) |D^{(m), 0} \vec{u}|^2 \ [21], \\ \alpha(s) > 0, \text{ pour tout } \vec{u} \in \vec{F}(\Omega_s). \end{cases}$$

On introduit également l'espace $\mathcal{B}(\Omega)$ des $\vec{u} \in \vec{F}(\Omega)$ tels que $\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial t} u_1, \ldots, \frac{\partial}{\partial t} u_N \right) \in \vec{F}'(\Omega)$, muni de sa topologie naturelle; on peut alors définir

$$u(., 0) = (u_1(., 0), \ldots, u_N(., 0)),$$

élément de l'espace $L^2(\Gamma_0)^N$.

Problème 6. 1. — On donne $\vec{T} \in \vec{F}'(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$; trouver $\vec{u}$ sur Ω, dont la restriction à Ω_s est dans $\vec{F}(\Omega_s)$ pour tout $s > 0$, tel que

$$(5) \qquad A\vec{u} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} = \vec{T},$$

avec

$$(6) \qquad \vec{u}(., 0) = 0.$$

Théorème 6. 1. — *On suppose que* Ω *vérifie* (R) *et que le système* A *est elliptique au sens* (E''). *Dans ces conditions le problème* 6. 1 *admet une solution unique.*

[20] Cf. Nirenberg [1].

[21] $|\vec{u}|_0^2 = \Sigma \int_\Omega |u_i|^2 \, dx \, dt.$

DÉMONSTRATION. — Tout revient (par le même procédé qu'au théorème 3. 1) à trouver $\vec{v} \in \vec{F}(\Omega_s)$, avec

$$\text{(7)} \qquad A\vec{v} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} = \vec{g},$$

où $g \in F'(\Omega_s)$, avec la condition

$$\text{(8)} \qquad \vec{v}(., 0) = 0,$$

A vérifiant (E″) avec $\lambda(s) = 0$.

Pour résoudre (7), (8), on utilise le théorème 1, 1 avec $F = \vec{F}(\Omega)$; $\mathcal{H} = \vec{B}^s(\Omega)$, i. e. l'espace des $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_N)$ avec

$$u_i \in H_0^{m_i, 0}(\Omega_s), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u_i \in (H_0^{m_i, 0}(\Omega_s))', \qquad u_i(., s) = 0;$$

$$E(\vec{f}, \vec{h}) = a(\vec{f}, \vec{h}) - \overline{\left\langle \vec{f}, \frac{\partial}{\partial t}\vec{h} \right\rangle}$$

et on termine comme au n° 3.

GÉNÉRALISATION. — Soit R une matrice $\mathcal{L}(C^N; C^N)$.

PROBLÈME 6. 2. — On donne $\vec{T}$ comme dans le problème 6. 1. Trouver $\vec{u}$, vérifiant les mêmes conditions que dans le problème 6. 1, solution de

$$\text{(9)} \qquad A\vec{u} + \frac{\partial}{\partial t} R\vec{u} = \vec{T}.$$

Sous les hypothèses du théorème 6. 1 *et si* R *est strictement positive, le problème* 6. 2 *admet une solution unique.*

7. Étude de la stabilité (I).

Soit Ω fixé vérifiant (R); on donne A comme au n° 3 et une suite d'opérateurs A^i:

$$\text{(1)} \quad A^i = \Sigma(-1)^{|p|} D_x^p(a_{pq}^i(x, t) D_x^q), \qquad |p|, \quad |q| \leqslant m,$$

les fonctions a_{pq}^i étant dans $L^\infty(\Omega_s)$ pour tout s fini; pour $u, v \in H^{m, 0}(\Omega_s)$, on pose

$$\text{(2)} \qquad a^i(u, v) = \Sigma \int_{\Omega_s} a_{pq}^i(x, t) D_x^q u \overline{D_x^p v}\, dx\, dt.$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$\text{(S 1)}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } s>0, \text{ il existe } \lambda(s) \text{ et } \alpha(s)>0 \\ \text{indépendants de } i, \text{ tel que, pour tout} \\ u \in \mathrm{F}(\Omega_s), \text{ on ait} \\ \qquad \mathrm{Re}\, a^i(u, u)+\lambda(s)|u|^2 \geqslant \alpha(s)|\mathrm{D}^{m, 0} u|^2 ;\end{array}\right.$$

$$\text{(S 2)}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{lorsque } i \rightarrow \infty, \text{ on a, pour tout } u, v \in \mathrm{F}(\Omega_s) : \\ |a^i(u, v)-a(u, v)| \leqslant \varepsilon_i|\mathrm{D}^{m, 0} u||\mathrm{D}^{m, 0} v|, \quad \varepsilon_i \rightarrow 0.\end{array}\right.$$

Théorème 7. 1. — *On suppose que* Ω *vérifie* (R) *et que* (S1) *et* (S2) *ont lieu. On donne* T^i (*resp.* T) *dans* $\mathrm{F}'(\Omega_s)$ *pour tout* s *avec* $\mathrm{T}^i \rightarrow \mathrm{T}$ *dans* $\mathrm{F}'(\Omega_s)$ *lorsque* $i \rightarrow \infty$, *quel que soit* s. *Soit* u^i (*resp.* u) *la solution de*

$$(3)\qquad \mathrm{A}^i u^i+\frac{\partial}{\partial t} u^i=\mathrm{T}^i$$

(*resp.*

$$(4)\qquad \mathrm{A} u+\frac{\partial}{\partial t} u=\mathrm{T}),$$

avec u^i (*resp.* u) $\in \mathrm{B}_0(\Omega_s)$ *pour tout* $s>0$. *Dans ces conditions,* $u^i \rightarrow u$ *dans* $\mathrm{B}_0(\Omega_s)$ *pour tout* $s>0$.

Démonstration. — Vu le lemme 3. 1 et (S1), on peut supposer que l'on est dans Ω_s, s fixé, et que (S1) a lieu avec $\lambda(s)=0$. Si v est quelconque dans $\mathrm{F}(\Omega_s)$, on déduit de (3) et (4) :

$$a^i(u^i, v)+\left\langle\frac{\partial}{\partial t} u^i, \bar{v}\right\rangle=\langle\mathrm{T}^i, \bar{v}\rangle,$$
$$a(u, v)+\left\langle\frac{\partial}{\partial t} u, \bar{v}\right\rangle=\langle\mathrm{T}, \bar{v}\rangle,$$

d'où

$$(5)\qquad a^i(u^i-u, v)+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(u^i-u), \bar{v}\right\rangle = a(u, v)-a^i(u, v)+\langle\mathrm{T}^i-\mathrm{T}, \bar{v}.\rangle$$

On prend dans (5) $v=u^i-u$ (ce qui est loisible) et l'on prend les parties réelles des deux membres ; on sait (corollaire 4. 2, chapitre I) que si $w \in \mathrm{B}_0(\Omega_s)$, $\mathrm{Re}\left\langle\frac{\partial}{\partial t} w, \bar{w}\right\rangle \geqslant 0$; donc

$$\alpha(s)|\mathrm{D}^{m, 0}(u^i-u)| \leqslant \varepsilon_i|\mathrm{D}^{m, 0} u|+|\mathrm{T}^i-\mathrm{T}|_{\mathrm{F}'(\Omega_s)},$$

ce qui démontre le théorème.

8. Étude de la stabilité (II).

Soit Ω^i un ouvert avec $\Omega^i \subset \Omega$; si $u \in \mathcal{D}(\Omega^i)$, on désigne par $\tilde{u}$ la fonction u prolongée à Ω par 0 hors de Ω^i; on a: $|D^{m,0}\tilde{u}| = |D^{m,0}u|$, de sorte que l'application $u \to \tilde{u}$ se prolonge par continuité en une application, encore notée $u \to \tilde{u}$, linéaire continue de $F(\Omega^i)$ dans $F(\Omega)$.

On suppose que Ω et les Ω^i vérifient (R). On donne dans Ω l'opérateur A comme n° 3; donc A est elliptique au sens (E) dans Ω (cf. n° 3); alors A, considéré dans Ω^i, est également elliptique au sens (E) dans Ω^i. Soit T donnée dans Ω avec: $T \in F'(\Omega_s)$ pour tout s fini. Soit u (resp. u^i) la solution de

(1) $$Au + \frac{\partial}{\partial t} u = T,$$

(resp.

(2) $$Au^i + \frac{\partial}{\partial t} u^i = T^i,$$

où T^i est la restriction de T à Ω^i [22]), avec

$$u \in B_0(\Omega_s), \qquad u^i \in B_0(\Omega_s^i),$$

pour tout s,

$$\Omega_s^i = \Omega^i \cap \{0 < t < s\}.$$

THÉORÈME 8. 1. — *On suppose que les* Ω^i *et* Ω *vérifient* (R), *avec* $\Omega^i \subset \Omega^{i+1} \subset \ldots\ldots \subset \Omega$, $\bigcup \Omega^i = \Omega$, *et que* A *est elliptique au sens* (E). *Alors* $\tilde{u}^i \to u$ *dans* $F(\Omega_s)$ *faible pour tout* s *fini, lorsque* $i \to \infty$.

DÉMONSTRATION. — Comme d'ordinaire on se ramène au cas Ω_s, s fini, et $\mathrm{Re}\, a(u, u) \geq \alpha |u|^2_{F(\Omega)}$ pour tout $u \in F(\Omega_s)$.

La même inégalité a lieu pour tout $u \in F(\Omega_s^i)$. On déduit de cela, et de (2) (dans Ω_s^i) que

$$\alpha |u^i|_{F(\Omega_s^i)} \leq |T^i|_{F'(\Omega_s^i)} \leq \text{constante},$$

donc

$$|\tilde{u}^i|_{F(\Omega_s)} \leq \text{constante}.$$

Par conséquent, de toute suite $\tilde{u}^j$ on peut extraire une suite $\tilde{u}^k$ convergente dans $F(\Omega_s)$ faible vers une limite v. Alors

[22]) T^i est dans $F'(\Omega_s^i)$ pour tout s,

$$\Omega_s^i = \Omega^i \cap \{0 < t < s\}.$$

$A\tilde{u}^k \rightarrow Av$ dans $F'(\Omega_s)$ faible; $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}^k \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}v$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_s)$, d'où l'on déduit que

$$Av + \frac{\partial}{\partial t}v = T;$$

ceci entraîne que v est dans $\mathcal{B}(\Omega_s)$. Par ailleurs soit Ω^{i_0} fixé; pour $k > i_0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}u^k \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}v \qquad \text{dans } F'(\Omega_s^{i_0}) \text{ faible.}$$

Comme $u^k(.,0) = 0$ dans $\Gamma_0^{i_0}$, il en résulte que $v(.,0) = 0$ dans $\Gamma_0^{i_0}$, et ceci quel que soit i_0; donc $v \in B_0(\Omega_s)$ et par conséquent $v = u$. Il en résulte que $\tilde{u}^i \rightarrow u$ dans $F(\Omega_s)$ faible.

c. q. f. d.

9. Étude de la stabilité (III).

On donne dans Ω l'opérateur A comme au n° 4, elliptique au sens plus restrictif suivant :

$$(\mathrm{E}''') \qquad \mathrm{R}e\, a(u, u) \geqslant \alpha |u|^2_{F(\Omega)}, \qquad \alpha > 0, \qquad \text{pour tout } u \in F(\Omega).$$

Dans ces conditions, si T est donnée dans $F'(\Omega)$, l'équation

$$(1) \qquad Au = T, \qquad u \in F(\Omega),$$

admet une solution unique.

Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, il résulte aussitôt du théorème 4. 1 que l'équation

$$(2) \qquad Au_\varepsilon + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon = T,$$

sous les conditions : $u_\varepsilon \in F(\Omega)$, $u_\varepsilon(.,0) = 0$, admet une solution unique.

Théorème 9. 1. — *On suppose que* Ω *vérifie* (R) *et que* (E''') *a lieu.*

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ *dans* $F(\Omega)$.

Démonstration. — 1) On déduit de (2) :

$$(3) \qquad a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \varepsilon \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon \right\rangle = \langle T, \bar{u}_\varepsilon \rangle.$$

Mais si $u \in \mathcal{B}(\Omega)$, avec $u(., 0) = 0$, on a :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, \bar{u} \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} \right\rangle = 0 \text{ (}^{23}\text{)}.$$

Alors (3) donne

$$\mathrm{Re}\, a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \mathrm{Re}\,\langle \mathrm{T}, \bar{u}_\varepsilon \rangle,$$

ce qui, avec (E‴) donne

$$|u_\varepsilon|_{\mathrm{F}(\Omega)} \leqslant \text{constante}.$$

Donc de toute suite u_{ε_i}, $\varepsilon_i \to 0$, on peut extraire une suite u_{ε_j} avec

(4) $\qquad u_{\varepsilon j} \to v$ dans $\mathrm{F}(\Omega)$ faible.

Il en résulte que $\mathrm{A}u_{\varepsilon_j} \to \mathrm{A}v$ dans $\mathrm{F}'(\Omega)$ faible,

$$\varepsilon_j \frac{\partial}{\partial t} u_{\varepsilon_j} \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

donc $av = \mathrm{T}$, et comme v est dans $\mathrm{F}(\Omega)$, $v = u$, donc

(5) $\qquad u_\varepsilon \to u$ dans $\mathrm{F}(\Omega)$ faible.

2) Compte tenu de (E‴), on aura démontré le théorème si l'on montre que

(6) $\quad \mathrm{X}_\varepsilon = \mathrm{Re}\, a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Or

$$\mathrm{X}_\varepsilon = \mathrm{Re}\langle \mathrm{T}, \bar{u}_\varepsilon \rangle + \mathrm{Re}\langle \mathrm{T}, \bar{u} \rangle - \mathrm{Re}\langle \mathrm{T}, \bar{u}_\varepsilon \rangle - \mathrm{Re}\, a(u_\varepsilon, u)$$
$$= \mathrm{Re}(\langle \mathrm{T}, \bar{u} \rangle - a(u_\varepsilon, u)).$$

Mais

$$a(u_\varepsilon, u) + \varepsilon \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon, \bar{u} \right\rangle = \langle \mathrm{T}, \bar{u} \rangle$$

donc

$$\mathrm{X}_\varepsilon = \mathrm{Re}\, \varepsilon \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon, \bar{u} \right\rangle.$$

Mais $\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon = \mathrm{T} - \mathrm{A}u_\varepsilon \to \mathrm{T} - \mathrm{A}u = 0$ dans $\mathrm{F}'(\Omega)$ faible, donc

$$\varepsilon \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon, \bar{u} \right\rangle \to 0,$$

donc $\mathrm{X}_\varepsilon \to 0$, c.q.f.d.

([23]) Conséquence de la proposition 4, 3, chap. I.

BIBLIOGRAPHIE

ARONSZAJN [1] Boundary values of functions with finite Dirichlet integral, *Technical Report* 14, University of Kansas, 1954, pp. 77-93.

BRELOT [1] Étude et extension du principe de Dirichlet, *Annales de l'Institut Fourier*, t. V, 1955, p. 371-419.

BROWDER [1], *Proc. Nat. Acad. Sc.*, U.S.A, 42 (1956), pp. 914-917.

FICHERA [1] Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno..., *Convegno Trieste*, 1954, Roma 1955, pp. 174-227.

GEVREY [1] Sur les équations aux dérivés partielles du type parabolique, *journ. Math. pures et appliquése* (6), 9 (1913), 305-471.

KATO [1] Integration of the equation of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. of Japan*, 5, 1953, pp. 208-234.

LADYZENSKAYA [1] Résolution des problèmes aux limites fondamentaux pour des équations de type parabolique et hyperbolique, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S)*, 97, 1954, pp. 395-398.

[2] Sur la solution d'équations opérationnelles non stationnaires, *Mat. Sbornik*, 1956 (81), pp. 491-524.

LAX-MILGRAM [1] Parabolic equations, Contributions to the Theory of partial differential equations, *Annals of Math. Studies*, n° 33, Princeton, 1954, pp. 167-190.

LIONS [1] Problèmes aux limites en théorie des distributions *Acta Math.*, t. 94 (1955), pp. 13-153.

[2] Sur certains problèmes mixtes. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 240 (1955), pp. 390-392.

[3] Problèmes mixtes pour opérateurs paraboliques, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 242 (1956), p. 3028-3030.

[4] Boundary value problems. *Technical report.*, Lawrence, 1957.

LIONS-SCHWARTZ [1] Problèmes aux limites sur des espaces fibrés, *Acta Math.*, t. 94 (1955) pp. 155-159.

MAGENES [1] Problemi al contorno misti per l'equazione del calore. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 1955.

NIKOLSKY [1] Propriétés de certaines classes de fonctions de plusieurs variables *Mat. Sbornik*, 33 (75), pp. 261-326.

NIRENBERG [1] Remarks on strongly elliptic partial differential equations. *Comm. on Pure and Applied Math.*, VIII, (1955), pp. 648-674.

SCHWARTZ [1] *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, t. 1, 1950; t. 2, 1951.

VIŠVIK [1] Problèmes mixtes pour des équations contenant des dérivées du premier ordre par rapport au temps... *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S)*, 99, (1954), 193-196.

[2] Problème de Cauchy pour des équations à coefficients opérateurs... *Mat. Sbornik*, t. 39 (81), 1956, pp. 51-148.

YOSIDA [1] On the integration of the temporally inhomogeneous diffusion equation in a Riemannian space, *Proc. Japan Acad.*, 30, (1954), n° 1, 19-23 et n° 273-275.