

ALAIN HARAUX

## **Équations d'évolution non linéaires : solutions bornées et périodiques**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 28, n° 2 (1978), p. 201-220

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1978\\_\\_28\\_2\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_2_201_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRES : SOLUTIONS BORNÉES ET PÉRIODIQUES

par Alain HARAUX

---

Dans toute la suite,  $H$  désigne un espace de Hilbert réel. Si  $u, v$  sont deux vecteurs de  $H$ , on notera  $(u, v)$  le produit scalaire de  $u$  et de  $v$ , et  $|u|$  la norme du vecteur  $u$ . On considère un opérateur maximal monotone  $A$  de  $H$ , et  $f \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[, H)$ . Alors l'équation

$$(1) \quad \begin{cases} f(t) \in \frac{du}{dt}(t) + Au(t) & \text{pour } t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

a pour tout  $u_0 \in \overline{D(A)}$  une solution faible unique, et si  $A$  est un sous-différentiel, on sait (cf. [3]) que la solution est forte lorsque  $f \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty[, H)$ .

• Au § I, on établit quelques propriétés de bornitude de la solution de (1), en particulier dans le cas où  $A$  est un sous-différentiel.

• Au § II, on s'intéresse à l'existence de solutions périodiques de période  $T$  pour (1), lorsque  $f$  est elle-même  $T$ -périodique. On étudie la structure de l'ensemble des solutions périodiques dans le cas où  $A = \partial\varphi$ .

• Au § III, dans le cas  $A = \partial\varphi$ ,  $f$  étant  $T$ -périodique et  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty$ , sous l'hypothèse d'existence d'une solution  $T$ -périodique pour (1), on étudie le comportement à l'infini d'une solution quelconque de (1).

# I. PROPRIÉTÉS DE BORNITUDE DES SOLUTIONS DE (1)

## 1. Cas de croissance sous-linéaire.

D'abord une proposition très simple de caractère général.

PROPOSITION 1. — Si

$$(2) \quad \int_0^t |f(\theta)| d\theta \leq Ct + C',$$

alors  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leq C < +\infty$ .

(Exemples :  $f \in L^\infty$ ,  $f$  périodique).

Preuve. — Si  $\eta \in A\xi$ , on a pour tout  $t \geq 0$ ,

$$|u(t) - \xi| - |u(0) - \xi| \leq \int_0^t |f(\theta) - \eta| d\theta.$$

Bien sûr, aucun résultat de ce type n'est possible pour  $f$  quelconque, comme le montre l'exemple  $H = \mathbb{R}$ ,  $A = 0$ ,  $f(t) = t$ . Remarquons que si (1) a une solution telle que  $\frac{u(t)}{t} \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , toutes les valeurs d'adhérence faible de la fonction  $\frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta$  pour  $t \rightarrow +\infty$  sont dans  $\overline{R(A)}$ . Plus généralement,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{dist} \left( \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta, \overline{R(A)} \right) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t}.$$

Lorsque  $A$  est un sous-différentiel, on a un résultat plus précis :

THÉORÈME 1. —  $A = \partial\varphi$ , on suppose

$$(3) \quad \int_0^t |f(\theta)|^2 d\theta \leq Ct + C'$$

$$(4) \quad \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta \rightarrow y \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Alors  $\frac{u(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (y - \overline{R(A)})^\circ$ , si on note  $K^\circ$  l'élément de norme minimale d'un convexe fermé  $K \subset H$ .

LEMME 1. — Soit  $u \in C([0, +\infty[, H)$ , absolument continue sur tout compact, et  $g \in L^1_{loc}([0, +\infty[, H)$  telles que

$$\int_0^t \left| \frac{du}{ds} \right|^2 ds \leq C_1 t + C_2$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(s) ds \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors  $\frac{1}{t^2} \int_0^t (g(s), u(s)) ds \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .

*Preuve.* — Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$|u(t)| \leq \alpha t + \beta.$$

Posons  $h(t) = \int_0^t g(s) ds$ . Alors

$$\int_0^t (g(s), u(s)) ds = \int_0^t (h'(s), u(s)) ds$$

$$= (h(t), u(t)) - \int_0^t (h(s), u'(s)) ds.$$

Bien sûr,  $\frac{1}{t^2} (h(t), u(t)) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . D'autre part

$$\left| \int_0^t (h(s), u'(s)) ds \right| \leq (C_1 t + C_2)^{1/2} \left( \int_0^t |h(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Or puisque  $\frac{h(s)}{s} \rightarrow 0$  pour  $s \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{1}{t^3} \int_0^t |h(s)|^2 ds \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

*Déduction du théorème.* — Par intégration de l'inégalité  $\forall z \in D(A)$ ,  $\left( f(t) - \frac{du}{dt} - Az, u(t) - z \right) \geq 0$ , on obtient

$$\frac{1}{2} |u(t) - z|^2 \leq \frac{1}{2} |u(0) - z|^2 + \int_0^t (f(s) - y, u(s)) ds$$

$$+ \int_0^t (y - Az, u(s)) ds + \left| \int_0^t (f(s) - Az, z) ds \right|$$

$$\leq C_3 + C_4 t + \int_0^t (f(s) - y, u(s)) ds + |y - Az| \int_0^t |u(s)| ds$$

On peut supposer  $u_0 \in D(A)$  et  $\varphi \geq 0$ . Dans ce cas :

$$\int_0^t \left| \frac{du}{ds} \right|^2 ds \leq 2 \left( \varphi(u_0) + \int_0^t |f(s)|^2 ds \right).$$

Posant alors  $g(s) = f(s) - y$ ,  $L = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t}$ , le lemme 1 fournit :

$$\forall z \in D(A), \quad \frac{1}{2} L^2 \leq |y - Az| \frac{1}{2} L.$$

Donc  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leq \text{dist}(y, \overline{R(A)}) = |(y - \overline{R(A)})^o|$ .

De plus si  $\omega_n = \frac{u(t_n)}{t_n} \rightarrow \omega$ ,  $t_n$  étant une suite de nombres tendant vers  $+\infty$  avec  $n$ , on peut écrire

$$\frac{u(t_n) - u_0}{t_n} + \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} Au(\theta) d\theta = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(\theta) d\theta,$$

d'où faisant  $n \rightarrow +\infty$  :  $\omega \in y - \overline{R(A)}$ .

Donc  $\omega = (y - \overline{R(A)})^o$ , et  $\frac{u(t)}{t} \rightarrow (y - \overline{R(A)})^o$ .

Enfin puisque  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leq |(y - \overline{R(A)})^o|$ , la convergence est forte et ceci achève la démonstration.

*Remarque 1.* — Plus généralement, si on remplace (4) par  $\frac{1}{t} \int_0^t (f(s) - y(s)) ds \rightarrow 0$ ,  $y$  mesurable sur  $[0, +\infty[$ , alors  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(y(t), \overline{R(A)})$ .

Par exemple si  $f(t) \in \overline{R(A)}$ ,  $\forall t \geq 0$ , on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} = 0.$$

Mais, il est *faux* en général que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \text{dist} \left( \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta, \overline{R(A)} \right).$$

On peut même trouver  $f$  analytique bornée :

$$[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{H} \quad \text{et} \quad \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

maximal monotone, avec  $\frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta \in \text{Int}(R(\beta))$  pour  $t \geq t_0$  et  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} > 0$ .

Exemple. —  $\beta(u) = \text{sgn}(u)$ ,

$$f(t) = \rho \sin \left[ \text{Log} (1 + t) + \frac{\Pi}{4} \right], \quad \frac{2}{\sqrt{3}} < \rho < \sqrt{2}.$$

Alors  $\frac{1}{t+1} \int_0^t f(\theta) d\theta = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin (\text{Log} (1 + t))$ , et donc

$\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta \right| < 1$  pour  $t$  assez grand. De plus,  $\forall t \geq 0$ ,  $h \geq 0$ :

$$u(t+h) - u(t) \geq -h + \int_t^{t+h} \rho \sin \left( \text{Log} (1 + \theta) + \frac{\Pi}{4} \right) d\theta.$$

Définissons  $t_n$  et  $h_n$  par  $\text{Log} (1 + t_n) = 2n\Pi + \frac{\Pi}{12}$ ,

$$\text{Log} (1 + t_n + h_n) = 2n\Pi + \frac{\Pi}{12} + \frac{\Pi}{3},$$

c'est-à-dire  $t_n = e^{2n\Pi + \Pi/12} - 1$ ,  $h_n = (e^{\Pi/3} - 1)(1 + t_n)$ .

Alors  $u(t_n + h_n) - u(t_n) \geq h_n \left( \frac{\rho\sqrt{3}}{2} - 1 \right)$  et comme

$$\frac{h_n}{t_n} \longrightarrow e^{\Pi/3} - 1 > 0, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t)|}{t} > 0.$$

Remarque 2. — a) Même si  $y \in \text{Int}(\text{R}(A))$ , on ne peut espérer sous les hypothèses du théorème 1 ni la bornitude de  $u$ , ni même aucune majoration en  $t^\beta$ . En effet toujours avec  $H = \mathbb{R}$ ,  $\beta = \text{sgn}$ , prenons  $f(t) = 2 \sin(t^\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,

Alors  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta \right) = 0$ , et  $\int_0^t |f(\theta)|^2 d\theta \leq 4t$ .

Mais

$$\begin{aligned} u \left( \left( 2n\Pi + \frac{3\Pi}{4} \right)^{1/\alpha} \right) - u \left( \left( 2n\Pi + \frac{\Pi}{4} \right)^{1/\alpha} \right) \\ \geq \int_{\left( 2n\Pi + \frac{\Pi}{4} \right)^{1/\alpha}}^{\left( 2n\Pi + \frac{3\Pi}{4} \right)^{1/\alpha}} (2 \sin t^\alpha - 1) dt \geq c(\alpha) n^{1/\alpha-1}, \end{aligned}$$

pour  $n$  assez grand, avec  $c(\alpha) > 0$ .

b) Si  $A$  n'est pas un sous-différentiel, le résultat du théorème 1 peut tomber en défaut même si  $\text{R}(A) = \mathbb{H}$ , comme

le montre l'exemple

$$H = \mathbb{R}^2, \quad A(x, y) = (y, -x), \quad f(t) = (-\sin t, 0)$$

$$\left( \text{car } u(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \frac{t}{2} \cos t \right).$$

## 2. Cas de bornitude uniforme.

Des résultats de bornitude uniforme sont bien connus dans le cas coercif. Le cas des sous-différentiels est élucidé par le

**THÉORÈME 2.** — *On suppose  $A = \partial\varphi$ ,  $y \in \text{Int}(R(A))$ , et  $\sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t (f(\theta) - y) d\theta \right| < +\infty$ ,  $\sup_{t \geq 0} \left( \int_t^{t+1} |f(\theta)|^2 d\theta \right) < +\infty$ . Alors les solutions de (1) sont bornées uniformément sur  $[0, +\infty[$  et si  $u_0 \in D(\varphi)$ ,  $\varphi(u(t))$  est borné également.*

Pour la démonstration nous aurons besoin du

**LEMME 2.** — *Soit  $V \in C([0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$  une fonction absolument continue sur tout compact, telle qu'il existe  $\zeta \geq 0$ , avec*

$$\int_t^{t+1} \zeta(\theta) d\theta \leq C, \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$(5) \quad \frac{dV}{dt} + \lambda(V(t)) \leq \zeta(t), \quad p.p. \text{ sur } [0, +\infty[.$$

On suppose que  $\lambda$  est croissante  $\geq 0$ . On a :

$$\forall t \geq 0, \quad V(t) \leq \alpha + C,$$

si  $\alpha$  désigne un réel tel que  $\alpha \geq V(0)$  et  $\lambda(\alpha) \geq C$ .

*Preuve.* — Remarquons d'abord que si  $t \leq s \leq t+1$ ,

$$V(t+1) - V(s) \leq \int_s^{t+1} \zeta(\theta) d\theta \leq \int_t^{t+1} \zeta(\theta) d\theta \leq C.$$

Donc  $V(t+1) \leq C + \inf_{s \in [t, t+1]} V(s)$ .

Or si  $\inf_{s \in [t, t+1]} V(s) \geq \alpha$ , comme  $\lambda(\alpha) \geq C$  il vient

$$V(t+1) \leq V(t).$$

Dans tous les cas :

$$V(t+1) \leq \sup \{V(t), \alpha + C\}.$$

Posons  $U(t) = \sup \{V(t), \alpha + C\}$ ,  $\forall t \in [0, +\infty[$ .

Alors  $U(t+1) \leq U(t)$ , donc finalement

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad V(t) \leq \sup_{\theta \in [0,1]} U(\theta) \leq \sup \{V(0) + C, \alpha + C\}.$$

Comme par hypothèse  $\alpha \geq V(0)$ , la démonstration est achevée.

Avant de démontrer le théorème 2, remarquons que notre lemme 2 s'applique immédiatement au cas simple d'un opérateur coercif.

**COROLLAIRE 1.** — Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur tel que  $\frac{(Ax, x)}{|x|} \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . Si on a :

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{t+1} |f(\theta)| d\theta \leq C,$$

les solutions de (1) sont uniformément bornées sur  $[0, +\infty[$  par une constante ne dépendant que de  $C$  et de  $|u_0|$ .

En effet, on se ramène immédiatement au cas où la solution est forte et  $0 \in A(0)$ .

Posant alors

$$\lambda(u) = \begin{cases} \inf_{|x| \geq u} \frac{(Ax, x)}{|x|} & \text{pour } u > 0 \\ 0 & \text{pour } u = 0 \end{cases}$$

et prenant  $V(t) = |u(t)|$ , il est facile de voir que (4) est vérifié avec  $\zeta(t) = |f(t)|$ .

**COROLLAIRE 2** (Amério-Prouse). — Soit  $V$  un espace de Banach, muni de la norme  $\| \cdot \|$ , et notons  $\| \cdot \|_*$  la norme dans l'espace dual  $V'$ .

On suppose :  $V \subset H \subset V'$ ,  $H$  étant un espace de Hilbert.

Soit  $A : V \rightarrow V'$  borné héli-continu et monotone tel que

$$\begin{cases} \langle A\nu, \nu \rangle_{V', V} \geq \alpha \|\nu\|^p, & \alpha > 0, \quad 1 < p < \infty \\ \|A\nu\|_* \leq C \|\nu\|^{p-1}. \end{cases}$$



Alors, si  $\sup_{t \geq 0} \left( \int_t^{t+1} \|f(\tau)\|_*^{p'} d\tau \right) < +\infty$ , la solution  $u(t)$  de l'équation

$$u \in L_{\text{loc}}^p([0, +\infty[; V), \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

vérifie

$$\begin{cases} |u(t)| \leq M, \quad \forall t \geq 0 \\ \int_t^{t+1} \|u(\tau)\|^p d\tau \leq M', \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

*Preuve.* — En vertu de l'inégalité

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u|^2) + \alpha \|u\|^p \leq \|f\|_* \|u\|$$

qui implique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|u(t+1)|^2 - |u(t)|^2) + \alpha \int_0^{t+1} \|u(\tau)\|^p d\tau \\ \leq \left( \int_t^{t+1} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p} \left( \int_t^{t+1} \|f(\tau)\|_*^{p'} d\tau \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

il suffit de montrer que  $u(t)$  est borné.

Or il existe une constante  $C$  telle que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ,

$$ab \leq \frac{\alpha a^p}{2} + C b^{p'}.$$

Posant  $V(t) = \sqrt{1 + |u(t)|^2}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq \frac{\|f\|_* \|u\| - \alpha \|u\|^p}{\sqrt{1 + |u|^2}} \\ &\leq C \|f\|_*^{p'} + \frac{\alpha}{2} \frac{\|u\|^p}{(\sqrt{1 + |u|^2})^p} - \alpha \frac{\|u\|^p}{\sqrt{1 + |u|^2}} \\ &\leq C \|f\|_*^{p'} - \frac{\alpha}{2} \frac{\|u\|^p}{\sqrt{1 + |u|^2}} \leq C \|f\|_*^{p'} - \beta V^{p-1} + C', \end{aligned}$$

avec  $\beta > 0$  et  $C' < +\infty$  (car l'injection  $V \rightarrow H$  est continue).

Donc  $\frac{dV}{dt} + \beta V^{p-1} \leq C \|f\|_*^{p'} + C'$ , il suffit d'appliquer le lemme avec  $\lambda(u) = \beta u^{p-1}$ ,  $\zeta(t) = C \|f(t)\|_*^{p'} + C'$ .

*Démonstration du théorème.* — On se ramène sans difficulté au cas où  $y = 0$ ,  $\text{Inf}_H \varphi = \varphi(0) = 0$ .

Il existe alors  $r > 0$ ,  $M < +\infty$  tels que  $\forall u \in H$ ,  $r|u| \leq \varphi(u) + M$ . Soit  $g(t) = \int_0^t f(\theta) d\theta$ . Supposant

$$u_0 \in D(\varphi),$$

posons

$$V(t) = |u(t) - g(t)|^2 + 2\varphi(u(t)), \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2\left(f(t) - \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right) + 2\left(u(t) - g(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right) \\ &= 2\left(f(t), \frac{du}{dt}\right) + 2\left(-g(t), \frac{du}{dt}\right) - 2\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + 2(f(t), g(t)) \\ &\quad + 2\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right) \\ &\leq |f(t)|^2 + |g(t)|^2 + 2|f(t)| |g(t)| + 2\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right). \end{aligned}$$

Pour presque tout  $t \geq 0$ ,

$$\varphi(0) - \varphi(u(t)) \geq \left(f(t) - \frac{du}{dt}, -u(t)\right).$$

Donc

$$r|u(t)| - M \leq \varphi(u(t)) \leq \left(u(t), f(t) - \frac{du}{dt}\right) \quad \text{p.p.}$$

De l'inégalité

$$\begin{aligned} \sqrt{V(t)} &= (|u(t) - g(t)|^2 + 2\varphi(u(t)))^{1/2} \\ &\leq |u(t)| + |g(t)| + 1 + \varphi(u(t)), \end{aligned}$$

on tire donc

$$\begin{aligned} \rho \sqrt{V(t)} + 2\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right) \\ \leq C(\rho) + \rho|u(t)| + (2 - \rho)\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right). \end{aligned}$$

Cette dernière expression est bornée indépendamment de  $t$  dès que

$$\frac{\rho}{2 - \rho} \leq r, \quad \text{ou} \quad 0 \leq \rho \leq \frac{2r}{1 + r}.$$

Posant  $\rho_0 = \frac{2r}{1+r} > 0$ , il vient finalement

$$\frac{dV}{dt} + \rho_0 \sqrt{V(t)} \leq |f(t)|^2 + C_1|f(t)| + C_2, \quad \text{p.p.}$$

On conclut en appliquant le lemme 2 avec  $\lambda(x) = \rho_0 \sqrt{x}$  qui croît vers  $+\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

## II. ÉQUATIONS PÉRIODIQUES

### 1. Existence de solutions périodiques.

Supposons maintenant  $f$  périodique de période  $T$ , c'est-à-dire  $f(t+T) = f(t)$  p.p. sur  $[0, +\infty[$ . On considère la question de l'existence de solutions périodiques de période  $T$  pour (1). En raison de l'unicité de la solution du problème d'évolution avec donnée initiale, une solution  $u$  de (1) sera  $T$ -périodique si et seulement si  $u(0) = u(T)$ .

Intégrant (1) entre 0 et  $T$ , on trouve alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Au(t) dt \in \overline{R(A)},$$

condition nécessaire d'existence de solutions  $T$ -périodiques.

Lorsque  $A$  est *coercif*, il est surjectif et la condition précédente est vide. Il est bien connu que dans ce cas (cf. [2]) le problème périodique a effectivement des solutions. On peut retrouver ce résultat comme conséquence du corollaire 1, mais nous nous limitons ici à énoncer le résultat analogue pour les sous-différentiels.

THÉORÈME 3. —  $A = \partial\varphi$ ,  $f \in L^2(0, T; H)$ . Alors si

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \in \text{Int}(R(A)),$$

il existe  $u_0 \in \overline{D(A)}$  tel que le problème (1) ait une solution  $T$ -périodique sur  $[0, +\infty[$ .

*Démonstration.* — Soit  $y = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ ,  $h(t) = f(t) - y$ .

$\forall t \in [0, +\infty[$ ,  $|\int_0^t h(\theta) d\theta| \leq T|y| + \int_0^T |f(t)| dt$ . De plus :

$$\int_t^{t+1} |f(\theta)|^2 d\theta \leq \left(1 + \frac{1}{T}\right) \int_0^T |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Soit  $\theta$  la contraction qui à  $u_0 \in \overline{D(A)}$ , associe  $u(T)$ , valeur en  $T$  de la solution de (1). D'après le théorème 2,  $\theta^n u_0$  est borné,  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ .

D'après un théorème classique ([3]),  $\theta$  possède un point fixe.

## 2. Étude du cas-limite où

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \in \text{Frontière } \overline{R(A)}.$$

Nous nous bornerons au résultat le plus simple dans cette direction.

**THÉORÈME 4.** — Si  $\omega = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$  est un point extrémal de  $\overline{R(A)}$ , le système

$$\begin{cases} f(t) \in \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

équivalent en fait à :

$$\frac{du}{dt} = f(t) - \omega \quad \text{et} \quad u(t) \in A^{-1}(\omega).$$

En effet, posons  $\mathcal{C} = \overline{R(A)}$ , et  $g(t) = f(t) - \frac{du}{dt}$ .

S'il existe  $t \in [0, T[$  et  $\delta > 0$  tels que

$$\frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} g(\theta) d\theta = \omega' \neq \omega,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta) d\theta = \frac{1}{T} \int_0^T g(\theta) d\theta \\ &= \frac{\delta}{T} \omega' + \left(1 - \frac{\delta}{T}\right) \frac{1}{T - \delta} \int_{[0, T] \setminus [t, t+\delta.]} g(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Par suite  $\omega$  ne peut être point extrémal de  $\mathcal{C}$ .

Donc sous l'hypothèse d'extrémalité de  $\omega$ , on obtient :

$$\forall t \in [0, T[, \quad \forall \delta > 0, \quad \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} g(\theta) d\theta = \omega.$$

Par suite  $g(t) = \omega$  en tout point de Lebesgue de  $g$ , d'où il résulte  $\frac{du}{dt} = f(t) - \omega$ , p.p. sur  $[0, T]$ .

Il s'ensuit que  $u(t) \in A^{-1}(\omega)$  p.p. sur  $[0, T]$ , donc partout par continuité de  $u$  et fermeture de  $A^{-1}(\omega)$ .

*Exemple.* —  $\varphi(u) = |u|$  (cf. [6]).

$\overline{R(A)} = \overline{B(0,1)}$ , donc tout point de la frontière est extrémal.

Si  $\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right| = 1$ ,  $u(t)$  se déplace nécessairement sur une droite passant par 0, et  $f(t)$  reste sur la même droite.

Posons  $f(t) = \alpha(t)\varpi$ , avec  $|\varpi| = 1$ .

Quitte à changer  $\varpi$  en  $-\varpi$ , on peut supposer

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \varpi.$$

Posant alors  $\alpha = 1 + \gamma$ , on trouve comme solutions les fonctions de la forme

$$u(t) = \left( \beta + \int_0^t \gamma(\theta) d\theta \right) \varpi,$$

avec

$$\beta \geq - \inf_{[0, T]} \left( \int_0^t \gamma(\theta) d\theta \right).$$

*Remarque.* — Pour l'existence de solution périodique, il ne suffit pas que  $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$  soit un point intérieur de  $\overline{R(A)}$ , comme on le voit en choisissant  $A$  linéaire continu avec  $R(A) \neq \overline{R(A)}$ .

### 3. Étude de l'ensemble des solutions périodiques.

Le résultat suivant joue un rôle important dans la suite.

**THÉORÈME 5.** —  $0 < T < +\infty$ , soit  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions fortes du problème d'évolution  $f(t) \in \frac{du}{dt}(t) + Au(t)$ ,  $A = \partial\varphi$ .

Alors

- (i)  $|(u_2 - u_1)(T)| \leq |(u_2 - u_1)(0)|$   
 (ii)  $|(u_2 - u_1)(T)| = |(u_2 - u_1)(0)| \Rightarrow u_2 - u_1 = \text{cte}.$

*Démonstration.* — Rappelons d'abord (cf. [2]) que si  $u$  est une solution forte de l'équation  $f(t) \in \frac{du}{dt} + Au(t)$ ,  $\varphi(u(t))$  est dérivable presque partout sur  $[0, T]$ , et

$$\frac{d}{dt}(\varphi(u(t))) = \left( \zeta, \frac{du}{dt} \right) \quad \forall \zeta \in A(u(t)).$$

Comme  $\frac{du_1}{dt} \in f(t) - Au_1(t)$  p.p. sur  $[0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|(u_2 - u_1)(T)|^2 - |(u_2 - u_1)(0)|^2) \\ = \int_0^T \left( u_2 - u_1, \frac{du_2}{dt} - \frac{du_1}{dt} \right) dt \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve i). Si de plus,  $|(u_2 - u_1)(T)| = |(u_2 - u_1)(0)|$ , nécessairement  $\left( \frac{du_2}{dt} - \frac{du_1}{dt}, u_2(t) - u_1(t) \right) = 0$ , p.p. sur  $[0, T]$ .

Pour presque tout  $t \in [0, T]$ , posons  $A_{(t)}u = Au - f(t)$ ,  $\forall u \in D(A)$ .

Si  $\zeta \in D(A_{(t)}) = D(A)$ ,  $\xi \in A_{(t)}\zeta$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \xi + \frac{du_2}{dt}, \zeta - u_1(t) \right) \\ = (\xi, \zeta - u_1(t)) + \left( \frac{du_2}{dt}, \zeta - u_2(t) \right) + \left( \frac{du_2}{dt}, u_2(t) - u_1(t) \right) \\ = (\xi, \zeta - u_1(t)) + \left( -\frac{du_1}{dt}, u_1(t) - u_2(t) \right) + \left( -\frac{du_2}{dt}, u_2 - (t)\zeta \right). \end{aligned}$$

Comme  $A(t)$  est trimonotone, cette quantité est  $\geq 0$ . Mais alors la maximalité de  $A_{(t)}$  donne :

$$-\frac{du_2}{dt} \in A_{(t)}u_1(t).$$

Donc, p.p. sur  $[0, T]$ ,  $f(t) - \frac{du_i}{dt} \in Au_j(t)$ , et par suite

$$\frac{d}{dt}(\varphi(u_1(t))) = \left(f(t) - \frac{du_1}{dt}, \frac{du_1}{dt}\right) = \left(f(t) - \frac{du_2}{dt}, \frac{du_1}{dt}\right),$$

d'où  $\left|\frac{du_1}{dt}\right|^2 = \left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}\right) = \left|\frac{du_2}{dt}\right|^2$  p.p. sur  $[0, T]$ .

Finalement

$$\left|\frac{d}{dt}(u_2 - u_1)\right|^2 = \left|\frac{du_1}{dt}\right|^2 - 2\left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}\right) + \left|\frac{du_2}{dt}\right|^2 = 0, \quad \text{p.p.}$$

**COROLLAIRE 3.** — Pour  $f$  donnée dans  $L^2(0, T; H)$ , les solutions de

$$(1_p) \quad \begin{cases} u \in W^{1,2}(0, T; H), & f(t) \in \frac{du}{dt} + Au(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

forment un ensemble du type  $\gamma(t) + K_f$ , où  $\gamma$  est une fonction déterminée de  $W^{1,2}(0, T; H)$  telle que  $\gamma(0) = \gamma(T) = 0$ , et  $K_f$  un ensemble convexe fermé contenu dans  $H$  (c'est l'ensemble des points fixes de la contraction  $\theta$  définie p. 11).

Quelques précisions sur l'ensemble  $K_f$ .

**LEMME 3.** — Si  $u(t)$  et  $u(t) + \omega$  sont deux solutions de (1<sub>p</sub>),

$$\forall t \in [0, T], \quad \varphi(u(t) + \omega) - \varphi(u(t)) = \left(\omega, \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt\right)$$

et pour presque tout  $t$  ceci vaut aussi  $\left(f(t) - \frac{du}{dt}, \omega\right)$ .

*Démonstration.* — Pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}[\varphi(u(t) + \omega) - \varphi(u(t))] \\ &= \left(f(t) - \frac{d}{dt}(u(t) + \omega), \frac{d}{dt}(u(t) + \omega)\right) - \left(f(t) - \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\varphi(u(t) + \omega) - \varphi(u(t)) = \lambda$ , constante indépendante de  $t$ .

Pour presque tout  $t$ ,  $\varphi(u(t) + \omega) - \varphi(u(t)) \geq \left(f(t) - \frac{du}{dt}, \omega\right)$ .  
Échangeant  $u(t)$  et  $u(t) + \omega$ , il vient en fait

$$\lambda = \varphi(u(t) + \omega) - \varphi(u(t)) = \left(f(t) - \frac{du}{dt}, \omega\right),$$

et prenant la moyenne de 0 à T :

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T (f(t), \omega) dt = \left(\omega, \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt\right).$$

**PROPOSITION 2.** — Si  $u(t)$  et  $u(t) + \omega$  sont deux solutions de  $(1_p)$ , la trace de  $\varphi$  sur le segment  $[u(t), u(t) + \omega]$  est linéaire pour tout  $t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* — Par convexité de  $K_f$  on peut changer  $\omega$  en  $\theta\omega$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  dans le résultat du lemme 3.

Examinons maintenant quelques cas d'unicité.

**PROPOSITION 3.** — Si  $\varphi$  est strictement convexe,  $K_f$  contient au plus un point.

**PROPOSITION 4.** — On suppose  $\varphi$  positivement homogène de degré 1. Si tout segment du graphe de  $\varphi$  est contenu dans une demi-droite issue de 0, il existe au plus une solution de  $(1_p)$  dès que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \in \partial\varphi(H - \{0\}).$$

*Démonstration.* — Soit  $u(t)$  et  $u(t) + \omega$  deux solutions de  $(1_p)$ ,  $\omega \neq 0$ . Comme  $[u(t), u(t) + \omega]$  est pour tout  $t$  la projection sur  $H$  d'un segment contenu dans le graphe de  $\varphi$ , nécessairement

$$u(t) = \lambda(t)\omega, \quad \forall t \in [0, T].$$

Puisque de plus  $\lambda(t)(\lambda(t) + 1) \geq 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , on a ou bien  $\lambda(t) \geq 0$ , ou bien  $\lambda(t) \leq -1$ , et par raison de connexité l'une de ces deux inégalités est vérifiée pour tout  $t \in [0, T]$ .

Quitte à échanger  $u(t)$  et  $u(t) + \omega$ , on peut supposer  $\lambda(t) \geq 0$ .

Alors,  $\frac{d}{dt}(u(t) + \omega) \in f(t) - \Lambda[(1 + \lambda(t))\omega] = f(t) - \partial\varphi(\omega)$ .



Prenant la moyenne de 0 à T :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \in \partial\varphi(\omega) \subset \partial\varphi(H - \{0\}),$$

puisque  $\partial\varphi(\omega)$  est un convexe fermé de H.

Ce résultat s'applique en particulier aux semi-normes dont la boule unité est strictement convexe.

*Exemple.* —  $\varphi(x) = |x|$ . Il existe une solution de  $(1_p)$  et une seule si  $\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right| < 1$ .

Le cas  $H = \mathbb{R}$  est particulièrement simple.

**PROPOSITION 5.** — Pour  $H = \mathbb{R}$ , l'équation  $(1_p)$  possède deux solutions  $u(t)$  et  $u(t) + \omega$  si et seulement si le graphe de A présente au moins un palier horizontal d'altitude

$$y = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

de largeur supérieure ou égale à  $|\omega| + \omega(g)$ ,  $\omega(g)$  désignant l'oscillation sur  $[0, T]$  de la fonction

$$g(t) = \int_0^t (f(\theta) - y) d\theta.$$

Dans ce cas,  $u(t) = u_0 + \int_0^t (f(\theta) - y) d\theta$ .

*Démonstration.* — Le lemme 3 donne ici que pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,  $y = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = f(t) - \frac{du}{dt} \in Au(t)$ .

D'où, d'une part  $u(t) = u_0 + \int_0^t (f(\theta) - y)$ , d'autre part  $y \in A(u_0 + \alpha\omega + g(t))$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

La réciproque de cette propriété est triviale.

### III. « FORCING PÉRIODIQUE »

On suppose toujours  $f$  T-périodique.  $\varphi$  et  $f$  étant donnés, tels que  $K_f \neq \emptyset$ , comment déterminer les éléments de  $K_f$ ?  $K_f$  étant l'ensemble des points fixes de la contraction  $\theta$ , on peut conjecturer que lorsque  $u_0 \in \overline{D(A)}$ ,  $\theta^n u_0$  « converge » vers un élément de  $K_f$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

Lorsque  $\dim H < +\infty$ , la situation est particulièrement simple, comme le montre le théorème suivant :

**THÉORÈME 6.** — Si  $\dim H < +\infty$ , et  $K_f \neq \emptyset$ , pour tout  $u_0 \in \overline{D(A)}$ ,  $\theta^n u_0$  converge vers un élément de  $K_f$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . De plus, la suite de fonctions  $u(nT + t)$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

**LEMME 4.** — Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\theta = X \rightarrow X$  une contraction possédant un point fixe tel que

$$d(\theta\omega', \omega) = d(\omega', \omega) \implies \theta\omega' = \omega'.$$

Soit  $x_0 \in X$ . Si la suite  $x_n = \theta^n x_0$  a une sous-suite convergente, elle converge tout entière vers un point fixe de  $\theta$ .

*Preuve.* — Soit  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, \omega)$ . Il existe une sous-suite  $x_{n_p}$  et  $\omega' \in X$  tels que  $x_{n_p} \rightarrow \omega'$  dans  $X$ . Alors :

$$x_{n_p+1} = \theta x_{n_p} \rightarrow \theta\omega' \implies d(\theta\omega', \omega) = l = d(\omega', \omega).$$

Par suite  $\theta\omega' = \omega'$ , et il est alors trivial que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \omega'$ .

*Déduction du théorème 6.* — On prend :

$$X = H, \quad d(x, y) = |x - y|.$$

Comme les bornés de  $H$  sont relativement compacts, il suffit de voir que  $|\theta\omega' - \omega| = |\omega' - \omega| \implies \theta\omega' = \omega'$ . Puisque  $\omega$  est point fixe de  $\theta$ , il existe  $u$  solution  $T$ -périodique de (1) telle que  $u(0) = \omega$ . Soit  $u'$  la solution de (1) telle que  $u'(0) = \omega'$ . D'après le théorème 5,  $u' - u = \text{cte}$ , d'où  $\theta\omega' = \omega'$ .

Pour étudier des situations plus générales, le lemme suivant est essentiel.

**LEMME 5.** —  $\varphi : ]-\infty, +\infty[ \rightarrow H$  convexe s.c.i. propre. On considère les couples  $[u, f] \in C(0, T; H) \times L^2(0, T; H)$  tels que  $u$  soit solution (forte) de

$$\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \quad \text{sur} \quad [0, T].$$

Alors l'application  $[u, f] \rightarrow \left[ \varphi(u(t)), \frac{du}{dt} \right]$  est bornée de

$$L^\infty(0, T; H) \times L^2(0, T; H) \rightarrow L^\infty(\varepsilon, T; H) \times L^2(\varepsilon, T; H)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé.

*Démonstration.* — Il suffit d'examiner le cas  $\text{Min}_H(\varphi) = 0$ . Alors, si  $\xi \in \varphi^{-1}(0)$ , on a (cf. [2])

$$\left( \int_\varepsilon^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \int_0^\varepsilon |f(t)| dt + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} |u(0) - \xi|.$$

De plus si  $\zeta \in D(\varphi)$ , on a

$$\varphi(\zeta) - \varphi(u(t)) \geq \left( f(t) - \frac{du}{dt}, \zeta - u(t) \right), \quad \forall t \in [0, T],$$

d'où

$$\int_0^T \varphi(u(t)) dt \leq T\varphi(\zeta) + \frac{1}{2} |u(0) - \zeta|^2 + (|u|_{L^\infty} + |\zeta|) \int_0^T |f(t)| dt.$$

Mais en vertu de  $\frac{d}{dt} \varphi(u(t)) + \left| \frac{du}{dt} \right|^2 = \left( f(t), \frac{du}{dt} \right)$ ,

$$\int_\varepsilon^T \left| \frac{d}{dt} \varphi(u(t)) \right| dt \leq C \left( |f|_{L^2(\varepsilon, T; H)}, \left| \frac{du}{dt} \right|_{L^2(\varepsilon, T; H)} \right).$$

On en conclut facilement que

$$|\varphi(u)|_{L^\infty(\varepsilon, T; H)} \leq C_1 \left( |f|_{L^2(0, T; H)}, \left| \frac{du}{dt} \right|_{L^2(\varepsilon, T; H)} \right).$$

**THÉORÈME 7.** — Si pour tout  $M < +\infty$ , les ensembles  $\{|x| \leq M, \varphi(x) \leq M\}$  sont compacts dans  $H$ , on a la même conclusion que pour  $\dim H < +\infty$  (cf. th. 6).

*Démonstration.* — Si  $K_f \neq \emptyset$ , d'après le lemme 5  $\varphi(u(t))$  est uniformément borné sur  $[\varepsilon, +\infty[$ ,  $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$ . Il suffit alors d'utiliser le lemme 4 avec  $X = H$ .

**COROLLAIRE 4.** — *Sous l'hypothèse du théorème 7, les seules solutions bornées sur  $\mathbb{R}$  de l'équation*

$$\frac{du}{dt} + Au(t) \ni f(t) \quad (A = \partial\varphi, f \text{ T-périodique})$$

sont les solutions périodiques.

*Démonstration.* — La suite  $u(nT)$ ,  $n \geq 0$ , étant bornée, il existe une solution périodique. Donc si  $\xi \in \overline{D(A)}$ ,

$$\theta^n \xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta \in K_f.$$

La suite  $u(-nT)$  étant aussi bornée, et  $\varphi(u(t))$  étant borné sur  $\mathbb{R}$ , il existe  $n_p \rightarrow +\infty$  telle que

$$u(-n_p T) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \xi.$$

Nécessairement,  $\xi \in \overline{D(A)}$ , et alors

$$|u_0 - \theta^{n_p} \xi| = |\theta^{n_p}(u(-n_p T) - \theta^{n_p} \xi)| \leq |u(-n_p T) - \xi| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Par suite  $u_0 \in K_f$ , et la preuve est achevée.

*Remarque.* — Si on ne suppose pas que  $(I + \partial\varphi)^{-1}$  est compact, on peut démontrer que  $u(nT)$  converge faiblement vers la donnée initiale correspondant à une solution périodique. Mais cette étude est beaucoup plus délicate (cf. Baillon-Haraux, [2]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. AMERIO and G. PROUSE, Abstract almost periodic functions and functional analysis, Van Nostrand, New York.
- [2] J. B. BAILLON et A. HARAUX, Comportement à l'infini dans les équations d'évolution paraboliques avec « forcing périodique », à paraître.
- [3] H. BREZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publ. C., Amsterdam, London, (1973).
- [4] F. BROWDER and W. PETRYSHYN, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, 571-575.

- [5] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod & Gauthier-Villars, (1969).
- [6] S. MAURY, Séminaire d'Analyse convexe, 1973, Montpellier, Exposé n° 8.

Manuscrit reçu le 23 février 1977

Proposé par J. Neveu.

Alain HARAUX,

Analyse Numérique  
Université P. et M. Curie  
4 place Jussieu  
75230 Paris Cedex 05.

---