Annales de l'institut Fourier

I. S. Gal

Sur les moyennes arithmétiques des suites de fonctions orthogonales

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 53-59
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__53_0>

SUR LES MOYENNES ARITHMETIQUES DES SUITES DE FONCTIONS ORTHOGONALES

par **I. S. GAL** (Paris).

---

1. Nous supposerons, dans ce qui suit, que la suite de fonctions $\varphi_\nu(x)$ est orthonormale dans un intervalle (a, b), c'est-à-dire que

$$\int_a^b \varphi_N(x)^2\, dx = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \varphi_M(x)\varphi_N(x)\, dx = 0$$

pour $M \neq N = 1, 2, \ldots$.

M. H. Rademacher(¹) a démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$(1) \qquad \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_N(x) = o\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$$

presque partout dans (a, b). Maintenant je me propose d'examiner la moyenne arithmétique des fonctions $\varphi_\nu(x)$ et de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si la suite de fonctions $\varphi_\nu(x)$ est orthonormale dans l'intervalle (a, b), alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{N}\left(1 - \frac{\nu - 1}{N}\right)\varphi_\nu(x) = o\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

presque partout dans $a \leqslant x \leqslant b$.

Avant de commencer la démonstration je voudrais noter qu'on peut démontrer un résultat un peu plus fort que le théorème que je viens d'énoncer. D'une part, pour avoir les relations (1) et (2) il suffit de supposer que les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont *presque-orthogonales* dans l'intervalle (a, b). D'autre part on peut remplacer le facteur $(\log N)^\varepsilon$ par

$$(\log_2 N)^{\frac{1}{2}} \ldots (\log_k N)^{\frac{1}{2}}(\log_{k+1} N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

(¹) H. RADEMACHER, *Math. Annalen*, Bd. 87 (1922), p. 122.

où $\log_{k+1} N = \log(\log_k N)$ pour $k = 1, 2, \ldots$. Cependant je laisserai de côté de telles précisions.

2. Le théorème 1 est une simple conséquence d'un résultat général, qui a été démontré par M. J. F. Koksma et moi-même(²). Un cas particulier de ce dernier s'énonce comme suit :

THÉORÈME AUXILIAIRE. — *Supposons que les fonctions $f_\nu(x)$ appartiennent à la classe $L^2(a, b)$ et que*

$$\int_a^b \left(f_{M+1}(x) + f_{M+2}(x) + \cdots + f_{M+N}(x)\right)^2 dx \leqslant N^2(M+N)^\alpha$$

pour tout $M, N \geqslant 0$, *alors*

$$(3) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x) = o\left(N^{2+\alpha}(\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

presque partout dans (a, b).

Posons maintenant

$$f_\nu(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_\nu(x),$$

par conséquent nous avons

$$f_{M+1} + \cdots + f_{M+N} = N\sum\nolimits_{\nu=1}^{M} \varphi_\nu + \sum\nolimits_{\nu=1}^{N} (N - \nu + 1)\varphi_{M+\nu}.$$

Donc, puisque la suite φ est orthonormale, nous obtenons

$$\int_a^b (f_{M+1} + f_{M+2} + \cdots f_{M+N})^2 dx =$$
$$= N^2 M + \sum\nolimits_{\nu=1}^{N} (N - \nu + 1)^2 \leqslant N^2(M+N)$$

pour tout $M, N \geqslant 0$. Ainsi on peut utiliser le théorème auxiliaire et l'on a

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_N = \sum\nolimits_{\nu=1}^{N} (N - \nu + 1)\varphi_\nu = o\left(N^3(\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire

$$\sum\nolimits_{\nu=1}^{N} \left(1 - \frac{\nu - 1}{N}\right)\varphi_\nu(x) = o\left(N(\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour presque tout x, $a \leqslant x \leqslant b$.

Remarquons encore une autre conséquence du théorème auxiliaire :

(²) I. S. GÁL et J. F. KOKSMA, Comptes rendus 227 (1948), p. 1321 et I. S. GÁL, Comptes Rendus 228 (1949), p. 638.

THÉORÈME 2. — *Si les fonctions $f_\nu(x)$ sont telles que*

$$\int_a^b f_\nu(x)^2\,dx \leqslant 1$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots,$ *alors*

$$(4) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x) = o\left(N(\log N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

presque partout (a, b).

En effet, en vertu de l'inégalité de Schwarz nous avons

$$(f_{M+1} + f_{M+2} + \cdots + f_{M+N})^2 \leqslant N(f_{M+1}^2 + f_{M+2}^2 + \cdots + f_{M+N}^2)$$

donc d'après l'hypothèse

$$\int_a^b (f_{M+1} + f_{M+2} + \cdots + f_{M+N})^2\,dx \leqslant N\sum_{\nu=1}^{N} \int_a^b f_{M+\nu}(x)^2\,dx \leqslant N^2.$$

Ainsi, en utilisant le théorème auxiliaire pour le cas $\alpha = 0$, il résulte (5) pour presque tout x, $a \leqslant x \leqslant b$.

3. Pour compléter nos démonstrations, il nous faut prouver la validité du théorème auxiliaire. La démonstration suivante est une forme simplifiée de notre démonstration avec M. J. F. Koksma. Je communiquerai ultérieurement une autre démonstration pour la cas général.

Soit donné le nombre $\varepsilon > 0$ à l'avance. Pour obtenir le résultat du théorème auxiliaire il suffit de démontrer que la relation (3) est valable partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure δ, où $\delta > 0$ est arbitrairement petit. Prenons un entier quelconque $N \geqslant 2$ et choisissons l'entier n de telle sorte que $2^n \leqslant N < 2^{n+1}$. Nous avons donc

$$(5) \qquad f_1 + f_2 + \cdots + f_N = \\ = (f_1 + f_1 + \cdots + f_{2^n}) + (f_{2^n+1} + f_{2^n+2} + \cdots + f_N)$$

pour tout N satisfaisant à : $2^n < N < 2^{n+1}$. Ainsi notre théorème est établi si nous démontrons les propositions suivantes :

$$1^\circ \qquad f_1 + f_2 + \cdots + f_{2n} = o\left(2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$.

$$2^\circ \qquad f_{2^n+1} + f_{2^n+2} + \cdots + f_N = o\left(2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

uniformément en N ; $2^n < N < 2^{n+1}$ et partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$.

En effet, d'après $2^n < N < 2^{n+1}$ nous avons

$$2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\varepsilon} = o\left(N^{2+\alpha} (\log N)^{1+\varepsilon}\right)$$

donc en utilisant 1° et 2° nous obtenons selon (5) que

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_N = o\left(N^{2+\alpha} (\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$.

La démonstration de 1° est simple. D'après l'hypothèse nous avons

$$\int_a^b (f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2 \, dx \leqslant 2^{(2+\alpha)n},$$

d'où

$$\int_a^b \frac{(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2}{2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \, dx \leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \tag{6}$$

pour tout $n = 1, 2, \ldots$. Considérons maintenant l'ensemble des points pour lesquels

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2 \geqslant 2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

et désignons la mesure de cet ensemble par M_n.

En utilisant l'inégalité (6) nous obtenons que

$$M_n = \int_{M_n} dx \leqslant \int_{M_n} \frac{(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2}{2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \, dx \leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Mais la série $\sum_1^\infty n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$ converge, ainsi nous pouvons choisir un entier $n_0 = n_0(\delta, \varepsilon)$ de telle façon que $\sum_{n_0}^\infty M_n < \frac{\delta}{2}$. Il résulte donc immédiatement de la définition de l'ensemble que

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2 < 2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

pour tout $n \geqslant n_0(\delta, \varepsilon)$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$. Finalement $n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} = o(n^{1+\varepsilon})$, donc la proposition 1° est valable.

Nous allons examiner maintenant la proposition 2°. Tout d'abord nous allons montrer qu'il existe une limite supérieure de la somme $|f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N|$, qui est suffisamment petite et indépendante de N. De cette façon nous pouvons parvenir à l'uniformité dans la relation 2°. Plus précisément nous montrerons que

$$(7)\qquad (f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N)^2 < 4K(n, x)$$

pour tout $2^n < N < 2^{n+1}$, où

$$K(n, x) = \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Big(\sum_{\nu=2^n+\mu_\lambda 2^\lambda+1}^{2^n+\mu_\lambda 2^\lambda+2^{\lambda-1}} f_\nu(x)\Big)^2$$

ne dépend que de n et des fonctions $f_\nu(x)$.

Pour simplifier l'écriture posons

$$f_{M+1}+f_{M+2}+\cdots+f_{M+N} = F(M, N) \qquad \text{et} \qquad F(M, O) = 0.$$

Considérons maintenant le développement dyadique de l'entier N ; $2^n < N < 2^{n+1}$:

$$N = 2^n + \varepsilon_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + \varepsilon_1 . 2 + \varepsilon_0$$

où $\varepsilon_i = 0, 1$ pour $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$. On voit immédiatement que

$$F(2^n, N) = F(2^n, \varepsilon_{n-1} 2^{n-1}) + F(2^n + \varepsilon_{n-1} 2^{n-1}, \varepsilon_{n-2} 2^{n-2}) + \cdots + F(2^n + \varepsilon_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + \varepsilon_1 . 2, \varepsilon_0).$$

Ainsi, si nous posons

$$(8)\qquad \mu_\lambda = \varepsilon_{n-1} . 2^{n-\lambda-1} + \varepsilon_{n-2} 2^{n-\lambda-2} + \cdots + \varepsilon_\lambda$$

pour $\lambda = 1, 2, \ldots, (n-1)$ et $\mu_n = 0$, alors

$$f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N = \sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1}).$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}(f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N)^2 &= \Big[\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{4}} \Big(2^{\frac{n-\lambda}{4}} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1})\Big)\Big]^2 \\ &\leqslant \Big(\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{2}}\Big)\Big(\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1})^2\Big).\end{aligned}$$

La première somme de cette inégalité est bornée, parce que

$$\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{2}} < \sum_{\lambda=0}^{\infty} 2^{-\frac{\lambda}{2}} = 2 + \sqrt{2} < 4.$$

D'autre part en observant que $F(M, O) = 0$ et $\varepsilon_{\lambda-1} = 0, 1$, on a

$$F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1})^2 \leqslant F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2.$$

En combinant les trois dernières inégalités nous avons

$$(f_{2^n+1} + f_{2^n+2} + \cdots + f_N)^2 < 4\left(\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2\right).$$

Finalement en vertu de la définition des nombres μ_λ (cf. (8)), on voit que $0 \leqslant \mu_\lambda \leqslant 2^{n-\lambda} - 1$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi il vient que

$$(7^{bis}) \qquad (f_{2^n+1} + f_{2^n+2} + \cdots + f_N)^2 < 4K(n, x),$$

où

$$K(n, x) = \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2.$$

Donc, l'inégalité annoncée est démontrée.

Pour obtenir la proposition 2° et pour compléter ainsi la démonstration du théorème auxiliaire, il suffit en vertu de (8) de prouver que

$$(9) \qquad K(n, x) = o(2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\varepsilon})$$

est valable partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$.

Or, considérons l'intégrale $\int_a^b K(n, x)\, dx$, où, comme nous savons, $K(n, x) \geqslant 0$. D'après l'hypothèse du théorème auxiliaire

$$\int_a^b F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2\, dx \leqslant 2^{2\lambda-2} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda + 2^{\lambda-1})^\alpha < 2^{2\lambda+(n+1)\alpha-2},$$

alors

$$\int_a^b K(n, x)\, dx < \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{2\lambda+(n+1)\alpha-2}$$
$$< 2^{(2+\alpha)n+\alpha} \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{2}}$$

Ainsi nous obtenons que

$$\int_a^b \frac{K(n, x)}{2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\, dx < \frac{2^\alpha}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} 2^{-\frac{\lambda}{2}} < \frac{c(\alpha)}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Avec cette inégalité la démonstration est achevée parce qu'un raisonnement pareil à celui de 1° prouve la proposition (9).

En effet, soit M_n la mesure de l'ensemble des points pour lesquels

$$K(n, x) \geqslant 2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

D'après la dernière inégalité on a $M_n < c(\alpha) n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$, donc

$$\sum_{n_0}^{\infty} M_n < c(\alpha) \sum_{n_0}^{\infty} n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\delta}{2}$$

pourvu que $n_0 = n_0(\delta, \varepsilon)$ soit suffisamment grand. Alors pour $n \geqslant n_0$ on a

$$K(n, x) < 2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} = o(2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\varepsilon})$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$. Ainsi le théorème auxiliaire est complètement démontré.

Enfin nous voulons remarquer que le lecteur lui-même peut aisément énoncer des résultats analogues concernant les moyennes arithmétiques d'ordre supérieur. Cependant les résultats qu'on obtient ainsi ne sont pas plus forts que ceux auxquels on arrive en itérant (2),

Paris, Institut Henri Poincaré.

(Manuscrit reçu en novembre 1949.)