GILLES GODEFROY

# Espaces de Banach : existence et unicité de certains préduaux

*Annales de l'institut Fourier*, tome 28, nº 3 (1978), p. 87-105

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_87_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 87-105

# ESPACES DE BANACH : EXISTENCE ET UNICITÉ DE CERTAINS PRÉDUAUX

par Gilles GODEFROY

Soit E un espace de Banach. On dira dans ce travail qu'un espace de Banach X est un *prédual normique* de E si le dual $X'$ de X, muni de la norme duale de celle de X, est isométrique à E.

Le but de ce travail est de donner pour certains espaces, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un prédual normique ; puis de montrer, pour de vastes catégories d'espaces duaux, l'unicité du prédual normique ; enfin, de tirer de ces résultats certaines conséquences sur la géométrie des espaces de Banach et des convexes compacts.

Il faut remarquer que l'on n'a pas, en toute généralité, de critère d'existence – ou de critère d'unicité – du prédual normique. Le théorème 4 donne un critère d'existence dans un cas particulier, où on a d'ailleurs unicité. Le lemme 7 est une condition suffisante d'unicité du prédual, qui joue un rôle essentiel dans ce travail.

Dans tout le travail, le terme "isométrie de E sur F" signifie : *bijection* linéaire isométrique entre E et F. De même, le terme "isométrie de E" signifie *bijection* linéaire isométrique de E sur E.

## 1. Existence d'un prédual normique.

Si E est un espace de Banach, on notera $E'$ son dual et $E''$ son bidual ; ces espaces seront supposés munis des normes duales de celle de E. On notera $i_E$ l'injection canonique d'un espace E dans son bidual $E''$. On a la

PROPOSITION 1. – *Soit* E *un espace de Banach. Soit*

$\mathcal{S}_E = \{F$ s.e.v. de $E'' \mid F$ *est* $\sigma(E'',E')$-*fermé* ; $i_E(E) \oplus F = E''\}$.

*On a l'équivalence :*

1) *Il existe un Banach* X *tel que* X' *soit isomorphe à* E.

2) $\mathcal{S}_E \neq \phi$.

*Démonstration.*

1) $\Longrightarrow$ 2)

Soit $\varphi$ un isomorphisme entre E et X'. L'espace $X_0 = {}^t\varphi(i_X(X))$ est un sous-espace fortement fermé et $\sigma(E',E)$-dense de E'. On vérifie aisément que $E'' = i_E(E) \oplus X_0^\perp$, d'où $X_0^\perp \in \mathcal{S}_E$ ; par conséquent $\mathcal{S}_E \neq \phi$.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Soit $F \in \mathcal{S}_E$. Soit G le s.e.v. de E' tel que $G^\perp = F$. L'espace G' est isomorphe à $E''/G^\perp = E''/F$, donc à E. C.Q.F.D.

Nous allons à présent donner une estimation "géométrique" de la distance qui sépare un espace de Banach E donné de l'ensemble des espaces de Banach duaux – en précisant le sens à donner à cette expression –. Si X et Y sont deux espaces de Banach, on appelle "distance de X à Y" le nombre

$$d(X,Y) = \inf \{\|\varphi\| \cdot \|\varphi^{-1}\| \mid \varphi \text{ isomorphisme entre } X \text{ et } Y\}.$$

Si les deux espaces ne sont pas isomorphes, la distance est $+\infty$.

Si E est un Banach, soit

$$\mathcal{P}_E = \{X \text{ Banach} \mid \exists\, Y \subseteq E' \text{ tel que } Y \text{ soit isomorphe à } X\}.$$

On pose

$$d(E,\mathcal{D}) = \inf_{X \in \mathcal{P}_E} d(E,X').$$

Le nombre $d(E,\mathcal{D})$ exprime la distance de E à l'ensemble des duaux ; en effet tout espace X tel que $d(E,X') < +\infty$ appartient à $\mathcal{P}_E$. On a évidemment

$$E \text{ est isomorphe à un dual} \iff d(E,\mathcal{D}) < +\infty.$$

On peut donner l'estimation suivante de $d(E,\mathcal{D})$.

PROPOSITION 2. – *Soit* E *un Banach. Si* $S \in \mathcal{S}_E$ , *soit* $S_\perp$ *l'orthogonal de* S *dans* E'.

*Soit* $$\alpha(S) = \inf \left\{ \frac{1}{\epsilon} \mid B_\epsilon(E') \subseteq \overline{S_\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)} \right\}.$$

*On a* $$d(E,\mathcal{D}) = \inf \{\alpha(S) \mid S \in \mathcal{S}_E\}$$

(ci-dessus comme par la suite, $B_\alpha(X)$ désigne la boule fermée de rayon $\alpha$ et de centre 0 dans l'espace de Banach X).

*Démonstration.* – Montrons tout d'abord que pour tout $S \in \mathcal{S}_E$ , on a $k = d(E,\mathcal{D}) \leqslant \alpha(S)$.

Soit donc $S \in \mathcal{S}_E$ . On considère l'application

$$\psi : E \longrightarrow (S_\perp)'$$
$$x \longrightarrow x_{|S_\perp} .$$

L'application $\psi$ est un isomorphisme entre E et $(S_\perp)'$ . On a immédiatement $\|\psi\| = 1$ ; et le théorème de Hahn-Banach permet de voir aisément que

$$\|\psi^{-1}\| = \inf \left\{ \frac{1}{\epsilon} \mid B_\epsilon(E') \subseteq \overline{S_\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)} \right\}$$

soit $\|\psi^{-1}\| = \alpha(S)$.

Par conséquent $d(E,\mathcal{D}) \leqslant \|\psi\| \cdot \|\psi^{-1}\| \leqslant \alpha(S)$ ·

D'où $d(E,\mathcal{D}) \leqslant \inf \{\alpha(S) \mid S \in \mathcal{S}_E\}$ ·

Inversement, soit $\epsilon > 0$ . Il existe un Banach X tel que $d(E,X') < k + \epsilon$ ; soit $\varphi : E \longrightarrow X'$ un isomorphisme tel que $\|\varphi\| \cdot \|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon$. On peut supposer que $\|\varphi\| = 1$ et $\|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon$.

Posons alors ${}^t\varphi(i_X(X)) = \phi(X)$. On a $\phi(X)^\perp \in \mathcal{S}_E$ . De plus puisque $\|\varphi\| = 1$

$${}^t\varphi(i_X(B_1(X))) \subseteq B_1(\phi(X))$$

et puisque $\|\varphi^{-1}\| < k + \epsilon$ , $\forall x \in E$ , $\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} > \dfrac{1}{k + \epsilon}$ ·

Supposons que

$$\exists\, y_0 \in E' \quad \text{tel que} \quad \| y_0 \| < \frac{1}{k+\epsilon} \quad \text{et} \quad y_0 \notin \overline{{}^t\varphi(i_X(B_1(X)))}^{\sigma(E',E)}.$$

On a alors

$\exists x_0 \in E$ tel que $y_0(x_0) = 1$ et $|y(x_0)| < 1 \ \forall y \in \overline{{}^t\varphi(i_X(B_1(X)))}^{\sigma(E',E)}$,

d'où $\quad \| x_0 \| > k + \epsilon \quad$ et $\quad \| \varphi(x_0) \| < 1$

d'où
$$\frac{\| \varphi(x_0) \|}{\| x_0 \|} < \frac{1}{k+\epsilon}$$

ce qui est absurde. On a donc $\overline{B_1(\Phi(X))}^{\sigma(E',E)} \supseteq \dfrac{B_1(E')}{k+\epsilon}$.

Il existe donc $S_0 = \Phi(X)^{\perp}$ dans $\mathscr{S}_E$ tel que $\alpha(S_0) \leqslant k + \epsilon$.
Donc $\inf \{\alpha(S) \mid S \in \mathscr{S}_E\} \leqslant d(E.\mathscr{D})$ C.Q.F.D.

*Remarques.* – L'énoncé de la proposition 2 se comprend bien "géométriquement". L'espace E sera d'autant plus près d'être un dual qu'il existera des éléments de $\mathscr{S}_E$ dont l'orthogonal "remplira bien" la boule unité de $E'$. Si E est isométrique à un dual $X'$, on a bien sûr $d(E,\mathscr{D}) = 1$. et $\alpha(({}^t\varphi(i_X(X)))^{\perp}) = 1$.

– Si $S \in \mathscr{S}_E$, l'espace $S_{\perp}$ est un sous-espace $\sigma(E',E)$ dense de $E'$, tel que

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad B_\epsilon(E') \subseteq \overline{S_{\perp} \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}$$

Il s'agit là d'un cas particulier ; on peut trouver des sous-espaces X de $E'$, $\sigma(E',E)$ denses dans $E'$, et tel que $\overline{X \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}$ ne contienne aucune boule.

*Exemple.* – Soit $E = C_0(\mathbf{N})$, $E' = \ell^1(N)$. Soit $N = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ une partition de N en ensembles infinis. Soit $\{x_k^n\}_{k \in N}$ dans $\ell^\infty(\mathbf{N})$ définis par

$$\begin{cases} x_k^n = 0 & \text{si} \quad k \notin X_n \\ x_{k_0}^n = n & \text{si} \quad k_0 = \inf(X_n) \\ x_k^n = 1 & \text{si} \quad k \in X_n \,, k \neq k_0 \,. \end{cases}$$

Soit $X = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} f_n$ . On vérifie aisément que $X$ est $\sigma(\ell^1, c_0)$-dense dans $\ell^1(\mathbf{N})$, mais que $\overline{X \cap B_1(\ell^1)}^{\sigma(\ell^1, c_0)}$ ne contient aucune boule. Poursuivons par l'étude d'un type particulier d'espace.

LEMME 3. – *Soit* E *un espace de Banach tel que* E′ *ait la propriété de Radon-Nikodym. Soit*

$$\mathcal{R}_E = \{f \in E'' \mid \ker f \cap B_1(E') \textit{ est } \sigma(E', E)\textit{-dense dans } B_1(E')\} .$$

*Alors* $\mathcal{R}_E$ *est un s.e.v.* $\sigma(E'', E')$ *fermé de* $E''$ .

*Démonstration.* – Rappelons qu'un point $g_0$ de $B_1(E')$ est dit "faiblement fortement exposé" dans $B_1(E')$ s'il existe $x_0 \in E$ tel que

$$y_0(x_0) = 1 \text{ , diam}\{y \in B_1(E') \mid y(x_0) > 1 - \eta\} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \eta \longrightarrow 0 .$$

Si un dual $E'$ à la propriété de Radon-Nikodym, alors $B_1(E')$ est l'enveloppe convexe $\sigma(E', E)$-fermée de ses points faiblement fortement exposés. On a alors

(*) $f \in R_E \iff \forall y$ faiblement fortement exposé dans $B_1(E')$, $f(y) = 0$ .

En effet, l'implication $\Longleftarrow$ provient du résultat ci-dessus. Inversement si $f \in R_E$ , il existe, pour tout $y$ , $(x_\alpha)$ dans $B_1(E')$ tels que

$$f(x_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \text{ , } x_\alpha \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} y \quad \text{pour} \quad \sigma(E', E) .$$

Si $y$ est faiblement fortement exposé, on a $\|x_\alpha - y\| \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} 0$ , et donc $f(y) = 0$ puisque $\operatorname{Ker} f$ est fortement fermé. D'où l'équivalence (*).

L'équivalence (*) montre alors que R est un espace vectoriel, et qu'il est de plus $\sigma(E'', E')$ fermé. C.Q.F.D.

On peut à présent énoncer avec les mêmes notations.

THEOREME 4. – *Soit* E *un Banach tel que* E′ *ait la propriété de Radon-Nikodym. On a l'équivalence*

1) E *isométrique au dual d'un espace de Banach*

2) $E'' = i_E(E) \oplus R_E$ .

*Démonstration.*

1) $\Longrightarrow$ 2)

Soit X un Banach tel que X′ soit isométrique à E. Soit $\varphi : E \longrightarrow X'$ une isométrie. Soit $\mathcal{X} = {}^t\varphi(i_X(X))$. On a

$$\left.\begin{array}{l} E'' = i_E(E) \oplus \mathcal{X}^\perp \\ R_E \supseteq \mathcal{X}^\perp \\ R_E \cap i_E(E) = \{0\} \\ R_E \text{ est un espace vectoriel} \end{array}\right\} \Longrightarrow R_E = \mathcal{X}^\perp$$

2) $\Longrightarrow$ 1)

D'après le lemme 3, on a $R_E \in \mathcal{S}_E$ ; de plus $\alpha(R_E) = 1$ ; en effet $(R_E)_\perp \cap B_1(E')$ contient tous les points faiblement fortement exposés et par conséquent $\overline{(R_E)_\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)} = B_1(E')$. D'après la proposition 2, E est isométrique au dual d'un Banach – on vérifie en fait aisément que E est isométrique au dual de $(R_E)_\perp$. C.Q.F.D.

La démonstration du théorème 4 montre implicitement que le prédual normique de E – à savoir $(R_E)_\perp$ – est, si il existe, unique à une isométrie près. C'est cette propriété que nous allons étudier en détail dans la deuxième partie.

## 2. Unicité du prédual normique.

Commençons par une définition.

DEFINITION 5. – *Soit* E *un espace de Banach. On dira que* E *est unique prédual normique de* E′ *si pour tout Banach* F *tel que* F′ *soit isométrique à* E′, *et toute isométrie* I *de* E′ *sur* F′ *on a*

$${}^t I(i_F(F)) = i_E(E).$$

On a immédiatement

PROPOSITION 6. – *Si* E *est unique prédual normique de* E′, *alors tout Banach* F *tel que* F′ *soit isométrique à* E′ *est isométrique à* E.

En effet l'application $\mathfrak{F} = i_E^{-1} \circ {}^t I \circ i_F$ est une isométrie de F dans E.

*Remarques.* – Je n'ai pas d'exemple de Banach E vérifiant la conclusion de la proposition 6, et qui ne soit pas unique prédual normique de $E'$ au sens de la définition 5.

– Il convient de remarquer qu'on *n'a pas* E unique prédual normique de $E' \Longrightarrow$ si $F'$ est isomorphe à $E'$, alors F est isomorphe à E. Nous verrons des exemples par la suite.

Démontrons à présent une série de lemmes utiles pour la suite.

LEMME 7. – *Soit* E *un espace de Banach. Soit*

$$R'_E = \{f \in E^{(3)} \mid \operatorname{Ker} f \cap B_1(E'') \text{ est } \sigma(E'',E')\text{-dense dans } B_1(E'')\}.$$

*Si* $R'_E$ *est un espace vectoriel,* E *est l'unique prédual normique de* $E'$ ($E^{(3)}$ *désigne le tridual de* E).

*Démonstration.* – On a $i_E(E)^\perp \subseteq R'_E$. De plus, on a $E^{(3)} = i_{E'}(E') \oplus i_E(E)^\perp$ et $i_{E'}(E') \cap R'_E = \{0\}$. Si $R'_E$ est un espace vectoriel, ceci implique que $i_E(E)^\perp = R'_E$, donc que $i_E(E) = (R'_E)_\perp$ (orthogonal de $R'_E$ dans $E''$).

Soit maintenant I une isométrie entre $E'$ et un dual $F'$. On voit aisément que $({}^tI(i_F(F)))^\perp \subseteq R'_E$, et que $E^{(3)} = i_{E'}(E') \oplus ({}^tI(i_F(F)))^\perp$. On a donc $({}^tI(i_F(F)))^\perp = R'_E$, d'où ${}^tI(i_F(F)) = (R'_E)_\perp = i_E(E)$.

C.Q.F.D.

LEMME 8. – *Soit* E *un espace de Banach. Supposons qu'il existe un sous-ensemble* A *de* $B_1(E'')$, $\sigma(E'',E')$ *dense, tel que pour tout sous-ensemble convexe* X *de* $B_1(E'')$ : $X \subset B_1(E'')$ *fortement fermé,* $\sigma(E'',E')$*-dense dans* $B_1(E'') \Longrightarrow X \supseteq A$. *Alors* E *est unique prédual normique de* $E'$.

*Démonstration.* – Soit $f$ et $g$ dans $R'_E$. On a

$$\operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E'') \supseteq \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \cap B_1(E'').$$

Or $\operatorname{Ker} f \cap B_1(E'')$ est fortement fermé et $\sigma(E'',E')$ dense dans $B_1(E'')$ ; d'où $\operatorname{Ker} f \cap B_1(E'') \supseteq A$.

De même $\operatorname{Ker} g \cap B_1(E'') \supseteq A$, donc

$$\operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g) \cap B_1(E'') \supseteq A,$$

et comme A est $\sigma(E'',E')$-dense dans $B_1(E'')$, on a $\lambda f + \mu g \in R'_E$. L'ensemble $R'_E$ est donc un espace vectoriel, et le lemme 7 termine la démonstration. C.Q.F.D.

LEMME 9. – *Soit* E *un espace de Banach. Soit* $\mathcal{C}$ *l'ensemble des points de continuité de l'application identité de* $(B_1(E''), \sigma(E'',E'))$ *dans* $(B_1(E''), \| \ \|)$. *Si* $\operatorname{conv}(\mathcal{C})$ *est* $\sigma(E'',E')$*-dense dans* $B_1(E'')$, *l'espace* E *est unique prédual normique de* $E'$.

*Démonstration.* – Soit $x \in \mathcal{C}$. Soit X un sous-ensemble convexe et $\sigma(E'',E')$ dense de $B_1(E'')$. Il existe $(x_\alpha)$ dans X tels que $x_\alpha \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} x$ pour $\sigma(E'',E')$ ; et puisque $x \in \mathcal{C}$, on a $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$. Si X est fortement fermé, on a donc $x \in X$ ; d'où $X \supseteq \mathcal{C}$. Enfin, $\operatorname{conv}(\mathcal{C}) \subseteq X$ car X est convexe. L'ensemble $A = \operatorname{conv}(\mathcal{C})$ vérifie donc, s'il est dense, les hypothèses du lemme 8 ; d'où le résultat. C.Q.F.D.

On peut à présent aborder le résultat essentiel.

THEOREME 10. – *Dans chacun des cas suivants,* E *est unique prédual normique de son dual.*

1) $E'$ *ne contient pas de sous-espace isomorphe à* $\ell^1(\mathbf{N})$.

2) E *a la propriété de Radon-Nikodym.*

3) E *est localement uniformément convexe.*

4) E *est séparable et* $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ *est un espace de Baire.*

*Démonstration.*

1) D'après la caractérisation de Rosenthal des espaces qui ne contiennent pas $\ell^1(\mathbf{N})$, on a (voir [1]) $E' \not\supset \ell^1(N) \Longrightarrow$ Pour toute $f \in E^{(3)}$ l'ensemble des points de continuité de

$$f : B_1(E''), \sigma(E'',E') \longrightarrow \mathbf{R}$$

est un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $B_1(E''), \sigma(E'',E')$.

Soit alors $f \in R'_E$. On a

$$f \in R'_E \Longrightarrow f(x_0) = 0 \text{ en tout point } x_0 \text{ de continuité}$$

$$\Longrightarrow f \text{ est nulle sur un } \mathcal{G}_\delta \text{ dense de } B_1(E''), \sigma(E'',E').$$

Si $f, g \in R'_E$, $\operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g) \supseteq \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

Comme l'intersection de deux $\mathcal{G}_\delta$-denses est dense, on a $\lambda f + \mu g \in R'_E$. Le lemme 7 termine la démonstration.

2) Rappelons qu'un point $x_0$ de $B_1(E)$ est dit "fortement exposé" si :

$$\exists y \in E' \text{ tel que : } y(x_0) = 1 \ ; \ \operatorname{diam}\{x \in B_1(E) \mid y(x) > 1-\eta\} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \eta \longrightarrow 0$$

Soit alors $x_0$ fortement exposé dans $B_1(E)$. Soit $\epsilon > 0$.

$\exists \eta$ tel que $\{x \in B_1(E) \mid y(x) > 1-\eta\} \subseteq (x_0 + B_\epsilon(E)) \cap B_1(E)$.

Soit alors $\Omega = \{x'' \in B_1(E'') \mid x''(y) > 1-\eta\}$

On a : $\Omega \subseteq \overline{i_E(\{x \in B_1(E) \mid y(x) > 1-\eta\})}$

l'adhérence étant prise par la topologie $\sigma(E'',E')$. Et par conséquent

$$\Omega \subseteq \overline{i_E((x_0 + B_\epsilon(E)) \cap B_1(E))}$$

soit $\Omega \subseteq (i_E(x_0) + B_\epsilon(E'')) \cap B_1(E'')$.

Ceci montre que $i_E(x_0)$ est un point de continuité de l'application $Id : (B_1(E''), \sigma(E'',E')) \longrightarrow (B_1(E''), \| \ \|)$.

Si E a la propriété de Radon-Nikodym, la boule unité $B_1(E)$ de E est l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points fortement exposés ; soit $\mathfrak{F}\mathscr{E}(E)$ l'ensemble des points fortement exposés de $B_1(E)$. On a donc $B_1(E) = \overline{\operatorname{conv}}(\mathfrak{F}\mathscr{E}(E))$. Par conséquent l'ensemble $\operatorname{conv}(i_E(\mathfrak{F}\mathscr{E}(E))$ est dense dans $(B_1(E''), \sigma(E'',E'))$. Mais d'après ce qui précède, on a, avec les notations du lemme 9

$$\operatorname{Conv}(i_E(\mathfrak{F}\mathscr{E}(E))) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{C})$$

le lemme 9 termine la démonstration.

3) Si E est localement uniformément convexe, on a

$$\forall x \in E, \|x\| = 1 \ ; \ x_\alpha \in B_1(E), \ x_\alpha \underset{\mathfrak{F}}{\longrightarrow} x \text{ pour } \sigma(E,E') \Longrightarrow \|x_\alpha - x\| \underset{\mathfrak{F}}{\longrightarrow} 0 .$$

Une méthode analogue à la méthode employée dans la démonstration de 2) montre alors que $\forall x \in E$, $\|x\| = 1$ ; $x_\alpha \in B_1(E'')$, $x_\alpha \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} i_E(x)$ pour $\sigma(E'',E') \Longrightarrow \|x_\alpha - x\| \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} 0$ ce qui montre que pour tout $x \in E$ de norme 1, le point $i_E(x)$ appartient à $\mathcal{C}$. On peut donc, là encore, appliquer le lemme 9.

4) Considérons l'application
$Id^* : (B_1(E), \sigma(E,E')) \longrightarrow (B_1(E), \| \ \|)$.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $A_\epsilon$ la réunion des ouverts de la topologie $\sigma(E,E')$ de diamètre inférieur ou égal à $\epsilon$. Soit $S = \left\{ x \mid \|x\| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \right\}$. Puisque E est séparable, il existe $\{x_n\}$ dans $B_1(E)$ tels que

$$B_1(E) = \bigcup_{n\in N} (x_n + S) \cap B_1(E).$$

Les ensembles $(x_n + S) \cap B_1(E)$ sont fermés pour $\sigma(E,E')$. On a, puisque $B_1(E)$ est un espace de Baire pour $\sigma(E,E')$,

$$0_\epsilon = \overbrace{\bigcup_{n\in N} (x_n + S) \cap B_1(E)}^{\circ} \quad \text{dense dans} \quad B_1(E). \quad \text{Or on a}$$

$0_\epsilon \subseteq A_\epsilon$ ; ce qui montre que $A_\epsilon$ est un ouvert $\sigma(E,E')$ dense de $B_1(E)$. Soit $\Omega = \bigcap_{n\in N} A_{\frac{1}{n}}$. L'ensemble $\Omega$ est dense dans $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ ; or $\Omega$ est précisément l'ensemble des points de continuité de l'application $Id^*$. Considérons alors l'application

$$Id : B_1(E''), \sigma(E'',E') \longrightarrow (B_1(E''), \| \ \|).$$

La méthode habituelle – cf. démonstration de 2) – permet de montrer que si $x \in \Omega$, $i_E(x)$ est un point de continuité de $Id$. Or, $i_E(\Omega)$ est $\sigma(E'',E')$ dense dans $B_1(E'')$ ; le lemme 9 termine la démonstration. C.Q.F.D.

On peut déduire du résultat précédent le

THEOREME 11. – *Soit* E *un espace de Banach qui vérifie l'une des hypothèses suivantes*

1) E *ne contient pas de sous-espace isomorphe à* $\ell^1(\mathbf{N})$

2) E' *a la propriété de Radon-Nikodym*

3) E' *est localement uniformément convexe.*

*Alors si* E *a un prédual normique* X, *l'espace* X *est unique prédual normique de* E.

*Démonstration.* – L'assertion 1) est une ré-écriture de l'assertion 1) du théorème 10. Les assertions 2) et 3) proviennent des assertions 2) et 3) et du fait que les propriétés "Radon-Nikodym" ou "être localement uniformément convexe" sont héréditaires.

Dans le cas "$E'$ a la propriété de Radon-Nikodym", le résultat s'obtient également à partir du lemme 3. C.Q.F.D.

*Exemples.* – Si $E$ est un sous-espace d'un dual WCG, alors $E$ a la propriété de Radon-Nikodym ; donc $E$ est unique prédual normique de $E'$. C'est le cas, par exemple, de tout dual séparable – ou de tout sous-espace d'un dual séparable.

Si $E$ est tel que $E''$ soit WCG, alors $E$ est unique prédual normique de $E'$. Deux méthodes :

a) $E''$ a la propriété de Radon-Nikodym, donc $E$ aussi.

b) Si $E''$ est WCG, alors $E'' \not\supset \ell^1(\Gamma)$ pour $\Gamma$ non dénombrable, et alors $E' \not\supset \ell^1(\mathbf{N})$.

– Si $E$ est séparable et si $i_E(E)$ est un $\mathcal{G}_\delta$ de $(E'', \sigma(E'', E'))$, alors $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ est un espace de Baire ; par conséquent $E$ est unique prédual normique de $E'$. De même, si $E$ est localement uniformément convexe alors $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ est un espace de Baire ; l'assertion 3) du théorème 10, est – dans le cas séparable – une conséquence de l'assertion 4).

– Dans le cas où $E = \ell^1(\Gamma)$, ou bien $E''$ séparable, on peut donner des démonstrations directes très simples du fait que $E$ est unique prédual normique de $E'$ (voir fin du travail).

– Si $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ est un espace polonais, alors $E$ est l'unique prédual normique de $E'$ ; ceci se produira chaque fois que $E''$ sera séparable ; cette condition n'est cependant pas nécessaire.

– Des méthodes tout à fait différentes – algèbres de Von Neumann – permettent de montrer qu'un espace $L^1(\mu)$ est toujours unique prédual de $L^\infty(\mu)$. Les espaces $L^1(\mu)$ n'entrent dans aucune des catégories définies par le théorème 10. On vérifie aisément que si $\mu$ est une mesure diffuse, l'ensemble $R'_{L^1(\mu)}$ n'est pas un espace vectoriel.

– Voilà un exemple simple d'espace qui *n'est pas* unique prédual normique de son dual : Soit $K$ un compact métrisable infini. Pour tout compact métrisable $K'$ de même cardinal, on a $\mathcal{C}(K)'$ isométrique à $\mathcal{C}(K')'$. Cependant, $\mathcal{C}(K)$ et $\mathcal{C}(K')$ ne sont pas isométriques dès que $K$ et $K'$ ne sont pas homéomorphes. Par conséquent, si $K$ est un compact métrisable $\mathcal{C}(K)$ n'est jamais unique prédual normique de son dual.

## 3. Quelques conséquences : isométries – propriétés des convexes compacts.

Exprimons à présent les résultats précédents en termes d'isométries et de "géométrie" des convexes compacts.

THEOREME 12. – *Soit* E *un espace de Banach, unique prédual normique de son dual* $E'$. *Soit* F *un espace de Banach tel qu'il existe une isométrie* I *de* $E'$ *sur* $F'$. *Alors* I *est la transposée d'une isométrie de* F *sur* E.

*Démonstration.* – Soit donc $I : E' \longrightarrow F'$ une isométrie. On a ${}^tI(i_F(F)) = i_E(E)$. L'application $\mathfrak{I} = i_E^{-1} \circ {}^tI \circ i_F$ est donc une isométrie de F sur E. Et on a $\forall y \in E'$, $\forall x \in F$

$$({}^t\mathfrak{I}(y), x) = (y, \mathfrak{I}(x)) = ({}^tI(i_F(x)), y) = (i_F(x), I(y)) = (I(y), x)$$

par conséquent ${}^t\mathfrak{I} = I$. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement le

COROLLAIRE 13. – *Soit* E *un espace de Banach, unique prédual normique de* $E'$. *Alors toute isométrie de* $E'$ *est la transposée d'une isométrie de* E.

Le théorème suivant permet de mieux comprendre ces résultats.

THEOREME 14. – *Soit* E *espace de Banach. Soit* K *la boule unité* $B_1(E')$ *de* $E'$ *munie de la topologie* $\sigma(E', E)$. *On a l'équivalence*

1) E *est unique prédual normique de* $E'$.

2) *Toute bijection affine entre* K *et un convexe compact* $\mathcal{K}$ *d'un e.l.c.* $(X, \tau)$ *est un homéomorphisme.*

*Démonstration.*

1) $\Longrightarrow$ 2)

Soit $\mathcal{K}$ convexe compact dans l'e.l.c. $(X, \tau)$ et $\varphi : K \longrightarrow \mathcal{K}$ une bijection affine. Le convexe K étant équilibré, le convexe $\mathcal{K}$ l'est aussi ; on peut donc supposer que $\mathcal{K}$ est un tonneau de X. Soit

$\mathscr{A}_0(\mathscr{K})$ l'espace des fonctions affines continues sur $\mathscr{K}$ , nulles en $0$ . Si $j_{\mathscr{K}}$ est la jauge de $\mathscr{K}$ , l'espace $(X, j_{\mathscr{K}})$ s'identifie au dual de $(\mathscr{A}_0(K), \| \ \|_\infty)$ – par l'isométrie $\epsilon : X \longrightarrow \mathscr{A}_0(K)'$ définie par $\epsilon(x)(f) = j_{\mathscr{K}}(x) f\left(\frac{x}{j_{\mathscr{K}}(x)}\right)$ – .

Soit alors $\widetilde{\varphi}$ le prolongement de $\varphi$ en une isométrie de E′ sur $(X, j_{\mathscr{K}})$. D'après le théorème 12, $\widetilde{\varphi}$ est la transposée d'une isométrie de $\mathscr{A}_0(K)$ sur E . Or, la topologie $\mathscr{T}_{\mathscr{K}}$ induite sur $\mathscr{K}$ par $\mathscr{T}$ est la topologie $\sigma(X, \mathscr{A}_0(\mathscr{K}))$ ; l'application $\widetilde{\varphi}$ étant continue de $(E', \sigma(E', E))$ dans $(X, \sigma(X, \mathscr{A}_0(\mathscr{K})))$, sa restriction $\varphi$ à K est continue de K sur $\mathscr{K}$.

2) $\Longrightarrow$ 1)

Supposons que K vérifie 2). Soit F un Banach, et I une isométrie de E′ sur F′. Soit $\varphi$ la restriction de l'isométrie I à $B_1(E')$ ; c'est une bijection entre K et le convexe compact $\mathscr{K} = (B_1(F'), \sigma(F', F))$. La restriction de I à $B_1(E')$ est donc continue de $B_1(E'), \sigma(E', E)$ sur $B_1(F'), \sigma(F', F)$. Soit alors $y \in F$. On a

$$\forall x \in E', \ ({}^t I(i_F(y)), x) = (y, I(x)) = (y \circ I)(x)$$

ce qui montre que la restriction de ${}^t I(i_F(y))$ à $B_1(E')$ est continue (pour $\sigma(E', E)$) ; le théorème de Banach-Dieudonné montre alors que ${}^t I(i_F(y)) \in i_E(E)$. On a donc ${}^t I(i_F(F)) \subseteq i_E(E)$. Et si l'inclusion était stricte, il existerait $x_0 \in E' - \{0\}$ tel que

$$y \in F, \ ({}^t I(i_F(y)), x_0) = 0 ,$$

soit $\quad (I(x_0), y) = 0 \quad \forall y \in F$ ,

ce qui est absurde car $I(x_0) \neq 0$. On a donc bien ${}^t I(i_F(F)) = i_E(E)$

C.Q.F.D.

*Remarques.* – L'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) du théorème 14 peut s'exprimer ainsi : soit E un espace unique prédual normique de E′. Alors il n'y a qu'une seule topologie d'espace compact sur $B_1(E')$ qui soit induite par une topologie d'e.l.c. sur E′.

– Sans hypothèses sur E , on peut avoir des résultats tout à fait différents. Soit par exemple $E = \mathscr{C}([0,1])$ ; on a

$$B_1(E') = B_1(\mathscr{M}([0,1])).$$

Pour tout compact K métrisable non dénombrable, il existe une topologie d'el.c. sur $E'$ tel que $B_1(E')$ soit compact, et tel que l'ensemble $\mathrm{Ext}(B_1(E'))$ des points extrémaux de $B_1(E')$ soit homéomorphe à $\{K\} \cup \{K\}$.

– Supposons que $E$ soit unique prédual normique de son dual ainsi que ses sous-espaces – par exemple E.l.u.c, où $E$ a la propriété de Radon-Nikodym – Soit $\mathcal{K}$ un convexe compact dans un e.l.c., et $\varphi : K \longrightarrow \mathcal{K}$ affine. – où $K = (B_1(E'), \sigma(E',E))$ – . On a alors $\varphi$ continue $\Longleftrightarrow$ $\varphi(K)$ est fermé dans $\mathcal{K}$ et $\varphi^{-1}(\varphi(0))$ est fermé dans $K$.

– Il est essentiel que, dans le théorème 14, le convexe $\mathcal{K}$ soit *a priori* supposé compact ; comme on le voit en prenant $E = \ell^1(N)$, soit $K = [-1, +1]^N$, pour $\mathcal{K}$ la boule unité de $\ell^\infty(N)$ muni de sa norme, et pour bijection $\varphi$ l'identité.

L'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) du théorème 14 peut encore s'énoncer sous la forme

THEOREME 15. – *Soit* $K$ *un tonneau compact d'un e.l.c.* $Y$ *qui vérifie l'une des hypothèses suivantes*

1) $(Y, j_{\mathcal{K}})$ *ne contient pas de sous-espace isomorphe à* $\ell^1(N)$.

2) $(\mathcal{A}_0(K), \|\ \|_\infty$ *a la propriété de Radon-Nikodym.*

3) $(\mathcal{A}_0(K), \|\ \|_\infty)$ *est localement uniformément convexe.*

4) $K$ *est métrisable et la boule unité* $B_1(\mathcal{A}_0(K))$ de $\mathcal{A}_0(K)$ *est un espace de Baire – pour la topologie de la convergence simple sur* $K$ – *Alors toute bijection affine entre* $K$ *est un convexe compact* $\mathcal{K}$ *d'un e.l.c. est un homéomorphisme.*

Voyons maintenant ce qu'on obtient en itérant le théorème 12 :

PROPOSITION 16. – *Soit* $E$ *un espace de Banach unique prédual normique de* $E'$, *et tel que* $E'$ *soit unique prédual normique de* $E''$. *Alors toute isométrie* $I$ *de* $E''$ *est la bitransposée d'une isométrie de* $E$, *et on a* $I(i_E(E)) = i_E(E)$.

*Démonstration.* – Il suffit de remarquer que $I$ est la bitransposée d'une isométrie de $E$ – à savoir $i_E^{-1} \circ I \circ i_E$ – si et seulement si $I(i_E(E)) = i_E(E)$. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement

THÉORÈME 17. — *Soit* E *un Banach tel que* E″ *soit séparable — ou tel que* E″ *ne contienne pas de sous-espace isomorphe à* $\ell^1(\mathrm{N})$ — *Alors toute isométrie de* E″ *est la bitransposée d'une isométrie de* E.

*Démonstration.* — Si E″ est séparable, alors E′ est séparable, donc E′ a la propriété de Radon-Nikodym ; de plus E est isométrique à un sous-espace de E″, donc E a aussi la propriété de Radon-Nikodym. Le théorème 10 montre qu'on peut appliquer la proposition 16.

Si E″ ne contient pas $\ell^1(\mathrm{N})$, alors E′ ne contient pas $\ell^1(\mathrm{N})$. En effet $\mathrm{E}' \supset \ell^1(\mathrm{N}) \Longrightarrow \ell^\infty(\mathrm{N})$ est quotient de E″

$\Longrightarrow \exists\, \mathrm{X} \subseteq \mathrm{E}''$ tel que $\ell^1(\mathrm{N})$ soit quotient de X

$\Longrightarrow \exists\, \mathrm{X} \subseteq \mathrm{E}''$ tel que $\mathrm{X} \supseteq \ell^1(\mathrm{N})$.

On termine alors par le théorème 10 et la proposition 16. C.Q.F.D.

On pourrait énoncer des résultats analogues au théorème 17 en itérant $n$ fois — avec $n > 2$ — le théorème 12.

Terminons par des corollaires plus "géométriques".

COROLLAIRE 18. — *Soit* E *un espace de Banach tel que* E′ *et* E″ *aient la propriété de Radon-Nikodym. Soit* $\mathrm{Ext}(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}''))$ *l'ensemble des points extrémaux de* $\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')$. *Si les isométries de* E″ *agissent transitivement sur* $\mathrm{Ext}(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}''))$, *alors* E *est réflexif.*

*Démonstration.* — Si I est une isométrie de E″, d'après la proposition 16 on a $\mathrm{I}(i_\mathrm{E}(\mathrm{E})) = i_\mathrm{E}(\mathrm{E})$. On a de plus

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')) \cap i_\mathrm{E}(\mathrm{E}) \neq \emptyset .$$

En effet, E a la propriété de Radon-Nikodym, donc il existe $x_0$ fortement exposé dans $\mathrm{B}_1(\mathrm{E})$; et alors $i_\mathrm{E}(x_0)$ sera fortement exposé, donc extrémal, dans $\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')$. Si les isométries agissent transitivement sur $\mathrm{Ext}(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}''))$, on a alors $\mathrm{Ext}(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')) \subseteq i_\mathrm{E}(\mathrm{E})$ ; et puisque E″ a la propriété de Radon-Nikodym, $\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')$ est l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points extrémaux. Donc $i_\mathrm{E}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}''$. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement

COROLLAIRE 19. — *Soit* E *un espace de Banach tel que* E″ *soit séparable. Soit* $\mathrm{Ext}(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}''))$ *l'ensemble des points extrémaux de* $\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')$. *Si les isométries de* E″ *agissent transitivement sur* $\mathrm{Ext}(\mathrm{B}_1(\mathrm{E}''))$, *alors* E *est réflexif.*

**Exemples et démonstrations annexes.**

1) $\ell^1(\Gamma)$ *est l'unique prédual de* $\ell^\infty(\Gamma)$.

Soit $\beta\Gamma$ le compactifié de Stone-Čech de $\Gamma$. On identifie $\ell^\infty(\Gamma)$ à $\mathcal{C}(\beta\Gamma)$ et $\ell^\infty(\Gamma)'$ à $\mathcal{M}(\beta\Gamma)$. Soit X un sous-espace de $\ell^\infty(\Gamma)'$, tel que $B_1(X)$ soit $\sigma(\ell^\infty(\Gamma)', \ell^\infty(\Gamma))$ dense dans $B_1(\ell^\infty(\Gamma)')$. On a $X \supset i(\ell^1(\Gamma))$ ; en effet si K est compact et $x$ isolé dans K, tout filtre de mesures de norme inférieure ou égale à 1, qui converge vaguement vers $\epsilon_x$, converge en norme vers $\epsilon_x$ ; et $i(\ell^1(\Gamma))$ est l'enveloppe convexe des $\pm\,\epsilon_x$, où $x$ est isolé dans $\beta\Gamma$. Si I est une isométrie entre $\ell^\infty(\Gamma)$ et $F'$, on a donc ${}^t I(i_F(F)) \supseteq i(\ell^1(\Gamma))$, d'où ${}^t I(i_F(F)) = i(\ell^1(\Gamma))$ – voir fin de la démonstration du théorème 14 –.

2) *Si* $E''$ *est séparable, alors* E *est unique prédual normique de* $E'$.

On voit aisément que si $E''$ est séparable, tout sous-espace de $E''$ est un $\mathcal{G}_\delta$ pour la topologie $\sigma(E'',E')$. Soit

$\mathcal{L} = \{X \subseteq E'' \mid B_1(E'') \cap X$ est $\sigma(E'',E')$-dense dans $B_1(E'')\}$.

L'espace $i_E(E)$ est minimal dans $\mathcal{L}$ ; de même si I est une isométrie de $E'$ sur $F'$, l'espace ${}^t I(i_F(F))$ est minimal dans $\mathcal{L}$ ; mais $\mathcal{L}$ a un seul élément minimal – car l'intersection de deux $\mathcal{G}_\delta$-denses est dense – et donc $i_E(E) = {}^t I(i_F(F))$.

3) *Stabilité des tonneaux* $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$*-compacts de* $\ell^\infty(N)$.

Soit T un tonneau $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$-compact de $\ell^\infty(N)$. C'est la boule unité du dual de $\ell^1(N)$ muni d'une norme équivalente à la norme usuelle. L'espace $\ell^1(N)$ ayant la propriété de Radon-Nikodym, on peut en déduire : $\mathcal{K}$ convexe compact, $\varphi : T \longrightarrow \mathcal{K}$-affine.

$\varphi$ continue $\Longleftrightarrow \varphi(K)$ fermé dans $\mathcal{K}$ et $\varphi^{-1}(\varphi(0))$ fermé dans T.

En particulier toute bijection affine de T sur $\mathcal{K}$ est continue.

On sait de plus que toute forme affine borélienne sur T est continue. Enfin, dans $\ell^1(N)$, les sous-ensembles faiblement et fortement compacts coïncident ; par conséquent les topologies $\mathcal{C}(\ell^\infty, \ell^1)$ et $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ coïncident sur T. On en déduit aisément que, si C est convexe dans un e.l.c.X, toute bijection affine borélienne $\varphi$ de

T sur C est un homéomorphisme. Le théorème de Souslin-Lusin permet alors de montrer que si C est un convexe lusinien – c'est-à-dire borel-isomorphe à $[0,1]$ – et si $\psi$ est une bijection continue affine de C sur T, alors $\psi$ est un homéomorphisme.

Soit alors $\mathcal{T}$ une topologie sur T qui vérifie

α) *l'application* $f : \mathrm{T} \times \mathrm{T} \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{T}$ *est continue*

$$(x,y,\lambda) \longrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y$$

β) *tout point de* T *a une base de voisinages formée d'ouverts convexes.*

On sait qu'alors il existe une topologie $\mathcal{T}_1$ d'e.l.c. sur $\ell^\infty(\mathrm{N})$ telle que la restriction de $\mathcal{T}_1$ à T soit $\mathcal{T}$ (voir [2]).

Si *l'une* des hypothèses suivantes est vérifiée.

1) l'espace $(\mathrm{T},\mathcal{T})$ est compact.

2) la tribu $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ des boréliens de $\mathcal{T}$ est contenue dans la tribu $\mathcal{B}(\sigma(\ell^\infty,\ell^1)_{|\mathrm{T}})$ des boréliens de la topologie induite par $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$ sur T.

3) $\mathcal{T}$ est plus fine que $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)_{|\mathrm{T}}$ et $(\mathrm{T},\mathcal{B}(\mathcal{T}))$ est borel-isomorphe à $[0,1]$.

Alors les topologies $\mathcal{T}$ et $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)_{|\mathrm{T}}$ coïncident.

On voit donc que la topologie $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)_{|\mathrm{T}}$ – c'est-à-dire la topologie induite par la topologie produit – est vraiment "canonique" et a de remarquables propriétés de stabilité. Remarquons enfin qu'on montre aisément que ces propriétés sont vérifiées par toute image affine continue d'un tel tonneau T.

4) *Si* E *a la propriété de Radon-Nikodym toute isométrie de* E′ *est la transposée d'une isométrie de* E.

Remarquons que si E a la propriété de Radon-Nikodym, alors $i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E}) \cap \mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')$ est l'enveloppe convexe fortement fermée des points "faiblement fortement exposés" de $\mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')$. Or, si I est une isométrie de E′, et si $y \in \mathrm{B}_1(\mathrm{E}'')$ est fortement exposé par $x \in \mathrm{E}'$, alors ${}^t\mathrm{I}(y)$ est fortement exposé par $\mathrm{I}^{-1}(x) \in \mathrm{E}'$. Ceci montre que ${}^t\mathrm{I}(i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})) \subseteq i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})$, donc ${}^t\mathrm{I}(i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})) = i_{\mathrm{E}}(\mathrm{E})$.

5) *Un ensemble d'utilisation des topologies faibles.*

Commençons par deux lemmes faciles.

LEMME A. – *Soit* E *un Banach tel que* $E''$ *soit séparable. Alors* $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ *est un espace polonais.*

Il est en effet, aisé, en utilisant $i_E(E)^\perp \subseteq E^{(3)}$, de faire apparaître $B_1(E)$ comme un $\mathcal{G}_\delta$ du compact métrisable $(B_1(E''), \sigma(E'',E'))$.

LEMME B. – *Soit* E *un Banach de dimension infinie. Supposons que* $\mathrm{Card}(\mathrm{Ext}(B_1(E'))) = \aleph_0$. *Alors* $(B_1(E), \sigma(E,E'))$ *est maigre.*

En effet, on a $B_1(E) = \bigcup_{n \in N} B_{1-\frac{1}{n}}(E) \cup S_1(E)$ : : et $S_1(E) = \bigcup_{n \in N} \{x \mid x_n(x) = 1\}$, où $\{x_n\} = \mathrm{Ext}(B_1(E'))$. Il est aisé de voir que $B_{1-\frac{1}{n}}(E)$ et $F_n = \{x \mid x_n(x) = 1\}$ sont des fermés d'intérieur vide de $B_1(E)$.

On en déduit alors

PROPOSITION C. – *Soit* E *un Banach tel que*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Ext}(B_1(E')) = \aleph_0 .$$

*Alors tout sous-espace de dimension infinie de* E *a un bidual non séparable.*

En effet, on voit aisément qu'un tel sous-espace vérifie les hypothèses du lemme B ; et d'après le lemme A, son bidual ne peut être séparable.

COROLLAIRE D. – *Soit* E *un Banach tel que*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Ext}(B_1(E')) = \aleph_0 .$$

*Alors tout sous-espace réflexif de* E *est de dimension finie.*

En effet, on voit aisément que $E'$ est nécessairement séparable – par exemple avec la représentation intégrale des points de $B_1(E')$ – et donc que E est séparable.

Ce corollaire peut d'ailleurs être obtenu directement par des méthodes analogues.

*Exemples d'application.* – $E = c_0(N)$ ou E = un prédual normique quelconque de $\ell^1(N)$.

Remarquons enfin qu'il est aisé de déduire du fait que les topologies $\sigma(\ell^1, c_0)$ et $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ coïncident sur la sphère unité de $\ell^1(N)$ le résultat – bien connu – suivant : l'espace $c_0(N)$ ne contient aucun dual de dimension infinie.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ODELL and H.P. ROSENTHAL, A double dual characterization of separable Banach spaces containing $\ell^1$, *Israel J. of Math.*, 20 (1975), 375-384.

[2] R.E. JAMISON, R.C. O'BRIEN et P.D. TAYLOR, On embedding a compact convex set into a locally convex space, *Queen's Mathematics Preprint* 1974-18, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1977
Proposé par G. Choquet.

Gilles GODEFROY,
18, Villa du Danube
75019 Paris.