Annales de l'institut Fourier

Alano Ancona

Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 4 (1978), p. 169-213

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_4_169_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 4 (1978), 169-213.

PRINCIPE DE HARNACK A LA FRONTIÈRE ET THÉORÈME DE FATOU POUR UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE DANS UN DOMAINE LIPSCHITZIEN

par Alano ANCONA

Introduction.

Le premier objet de ce travail est d'étendre aux opérateurs uniformément elliptiques et à coefficients höldériens le théorème de R. A. Hunt et R. L. Wheeden [10] [11] sur la frontière de Martin ordinaire d'un domaine lipschitzien. Cette question a été récemment étudiée par J. Taylor qui a remarqué qu'une partie de la méthode de R. A. Hunt et R. L. Wheeden ne semble pas pouvoir s'étendre au cas des opérateurs elliptiques [15]. L'idée de la méthode proposée ici est d'établir d'abord une propriété appelée « propriété de Harnack à la frontière »: deux fonctions harmoniques strictement positives sur le domaine et nulles au bord au voisinage d'un point frontière ont un rapport compris entre deux constantes > 0 au voisinage de ce point; cette propriété intéressante par elle-même est établie pour les opérateurs elliptiques du second ordre et à coefficients höldériens. J. T.

([1]) A la fin de la rédaction de ce travail, M. Brelot nous a communiqué un manuscrit de J. M. Wu où est établi, pour les fonctions harmoniques ordinaires l'analogue du lemme 5.2, on obtient ainsi pour le cas classique une autre démonstration du principe de Harnack à la frontière.

([2]) Une partie de ce travail s'est effectuée lors d'une invitation à Montréal (Mac-Gill) (Grant A-3108).

Kemper [9] avait eu l'idée d'établir cette propriété pour les fonctions harmoniques ordinaires, mais sa démonstration était incomplète. La méthode que nous utilisons repose sur une ancienne remarque de M. Brelot [1] sur l'action à distance; on étend le contenu de cette remarque aux opérateurs différentiels, en montrant que pour les faisceaux harmoniques associés et les faisceaux adjoints il n'y a pas d'action à distance entre deux points frontière distincts; plus précisément, on étend à ces faisceaux une estimation de L. Carleson (voir [3], [10], [11] pour les fonctions harmoniques ordinaires, et [15] pour un faisceau associé à un opérateur elliptique).

Comme application de la propriété de Harnack à la frontière, on obtient le principe de Bouligand et l'identification de la frontière euclidienne et de la frontière de Martin, pour un domaine lipschitzien borné et une grande classe d'opérateurs elliptiques; on obtient aussi une extension à ce cadre du théorème de Fatou en utilisant cette propriété et le théorème abstrait de K. Gowrisankaran [6]; une autre application découle d'un travail de H. Hueber [8] : une fonction surharmonique sur un domaine lipschitzien borné admet une minorante harmonique si elle a cette propriété sur la trace dans le domaine d'un voisinage ouvert de chaque point frontière.

Nous concluons ce travail en donnant des contre-exemples à deux conjectures naturelles : un domaine U peut contenir un cône de révolution ouvert et non vide sans que la trace sur l'axe du cône, du filtre des voisinages du sommet ne soit un filtre convergeant dans le compactifié de Martin de U. D'autre part, un domaine euclidien peut admettre, relativement à deux opérateurs elliptiques du second ordre et à coefficients constants, deux frontières de Martin non homéomorphes entre elles.

1. Notations.

On fixe une fois pour toute un entier $n \geqslant 2$, et on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle; on pose $\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\| = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$ pour $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$, et $d(x,y) = \|x - y\|$ pour x, $y \in \mathbf{R}^n$. On utilisera les ensembles géométriques suivants :

a) Cylindre $T(O,A,r)$:

Soient 0 et A deux points de $\mathbf{R}^n$ et r un réel strictement positif. $T(O,A,r)$ désigne la portion du cylindre de révolution d'axe OA et rayon r délimitée par les hyperplans $\{M;\ M \in \mathbf{R}^n,\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = \pm\ \overrightarrow{OA}^2\}$

$$T(O,A,r) = \left\{ M;\ |\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}| \leqslant OA^2,\ \overrightarrow{OM}^2 - \left(\frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} \right)^2 \leqslant r^2 \right\}$$

Le disque de « base » du cylindre est noté $\Delta(O,A\,;r)$

$$\Delta(O,A,r) = \{M;\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}^2\} \cap T(O,A,r).$$

b) Domaine lipschitzien canonique :

Considérons un cylindre $T(O,A,r)$; un domaine lipschitzien canonique adapté à ce cylindre est un domaine de la forme :

$$\omega_f = \left\{ M \in \mathring{T}(O,A,r);\ \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}}{\|OA\|} < f(M') \right\}$$

où f est une fonction numérique lipschitzienne sur $\Delta(O,A,r)$, et où M' désigne la projection de M sur $\Delta(O,A,r)$. On impose de plus à la constante de Lipschitz de f d'être majorée par $\frac{OA}{5r}$, et $f(A) = \|OA\|$.

Un domaine Ω est dit lipschitzien si on peut recouvrir $\partial\Omega$ par une famille de cylindres ouverts $\{\mathring{T}(O_i,A_i,r_i)\}$, $\mathring{T}(O_i,A_i,r) \cap \Omega$ étant lipschitzien canonique adapté à $T(O_i,A_i,r_i)$.

c) Domaine conique standard :

Soient $O \in \mathbf{R}^n$, $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$, $\theta \in]0, \pi[$ et $\rho > 0$. On note :

$$\Phi(O,\vec{u},\rho,\theta) = \{M \in \mathbf{R}^n;\quad \overrightarrow{OM}^2 < \rho^2;\quad \overrightarrow{OM}.\vec{u} < \|OM\| \cos\theta\}$$

$\Sigma(O,\vec{u},\rho,\theta)$ désigne la partie sphérique de $\partial\Phi(O,u,\rho,\theta)$

$$\Sigma(O,\vec{u},\rho,\theta) = \overline{\Phi}(O,\vec{u},\rho,\theta) \cap \{M;\quad d(O,M) = \rho\}.$$

2. Faisceau harmonique uniforme et estimation de Carleson.

Soit $\mathscr{H}$ un faisceau harmonique de Brelot sur $\mathbf{R}^n$ [7]. On dira que $\mathscr{H}$ est uniforme s'il possède les trois propriétés suivantes pour un certain $r_0 > 0$:

(U_1) Sur toute boule ouverte $B(x,2r_0)$ de rayon $2r_0$, il existe un potentiel > 0.

(U_2) (Propriété de Harnack uniforme.) Il existe une constante c_0 telle que pour tout $\alpha \in]0,1]$, toute boule ouverte $B(x_0,\alpha r_0)$ de rayon αr_0, et toute fonction u, $\mathscr{H}$-harmonique > 0 sur $B(x_0,\alpha r_0)$ on a :

$$u(x) \leqslant c_0 u(y); \qquad \forall x\,,\, y \in B\left(x_0\,,\, \alpha\frac{r_0}{2}\right).$$

(U_3) (Propriété de barrière uniforme.) Pour chaque $\theta \in]0,\pi[$ il existe une fonction $\eta_\theta :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}^+$ décroissante, avec $\lim\limits_{\rho=0} \eta(\rho) = 0$, telle que

$$\forall \mathrm{O} \in \mathbf{R}^n;\quad \vec{u} \in \mathbf{R}^n \quad \text{avec} \quad \|\vec{u}\| = 1\,,\quad \forall \alpha \in]0,1] :$$
$$u_\Sigma(\mathrm{M}) \leqslant \eta_\theta\left(\frac{\mathrm{OM}}{\alpha r_0}\right), \qquad \mathrm{M} \in \Phi(\mathrm{O},\vec{u},\alpha r_0,\theta)\,.$$

Ici, u_Σ désigne la mesure harmonique de $\Sigma(\mathrm{O},\vec{u},\alpha r_0,\theta)$ dans $\Phi(\mathrm{O},\vec{u},\alpha r_0,\theta)$.

Remarque 2.1 — L'existence d'une fonction harmonique > 0 sur toute boule de rayon $3\frac{r_0}{2}$ et la propriété de Harnack (U_2) entraînent que la mesure harmonique de $\partial B(x,r_0)$ dans $B(x,r_0)$ est comprise entre deux constantes > 0, indépendantes de x.

L'estimation de Carleson [3] s'étend naturellement aux faisceaux uniformes; la forme suivante paraît la plus commode dans les applications :

THÉORÈME 2.2. — *Soient $\mathscr{H}$ un faisceau uniforme sur $\mathbf{R}^n$, $T(\mathrm{O},\mathrm{A},r)$ un cylindre avec $r + \mathrm{OA} < r_0$, A' le milieu de OA et ω_f un domaine lipschitzien canonique adapté à ce cylin-*

dre. Il existe une constante $c > 0$, *ne dépendant que de* c_0, $\frac{r}{\mathrm{OA}}$ *et des fonctions* η_θ *donnant lieu à l'estimation suivante :*

Pour toute fonction u $\mathcal{H}$*-harmonique sur* ω_f, *positive et tendant vers* 0 *en chaque point de*

$$\partial\omega_f \cap \mathring{\mathrm{T}}(\mathrm{O},\mathrm{A},r) \cap \left\{\mathrm{M}; \frac{r}{4} < d(\mathrm{M},\mathrm{OA}) < r\right\}$$

on a :

$$u(x) \leqslant cu(\mathrm{A}') \qquad \forall x \in \omega_f \cap \partial\mathrm{T}\left(\mathrm{O},\mathrm{A}', \frac{r}{2}\right)$$

($d(\mathrm{M},\mathrm{OA})$ désigne la distance de M à la droite OA).

Remarques. — 1) De là, on passe facilement à un énoncé analogue pour les fonctions $\mathcal{H}$-harmoniques nulles sur $\partial\omega_f \cap \mathring{\mathrm{T}}(\mathrm{O},\mathrm{A},r) \cap \{\mathrm{M};\ d(\mathrm{M},\mathrm{OA}) \in]\beta r, r[\}$ avec $\beta < 1$, la constante c dépendra alors de β.

2) On peut aussi supprimer la restriction $r + \mathrm{OA} \leqslant r_0$, mais la constante c dépendra alors du diamètre de ω_f.

Démonstration. — C'est une extension facile d'une méthode de L. Carleson (voir [8], ainsi que [10], [11]). On commence par faire une série de réductions pour se ramener à la démonstration de Carleson.

En utilisant les cylindres $\mathrm{T}\left(\mathrm{P},\mathrm{A_P}, \frac{r}{4}\right)$, où P parcourt $\partial\omega_f \cap \left\{\mathrm{M};\ d(\mathrm{M},\mathrm{OA}) = \frac{r}{2}\right\}$ et où $\mathrm{A_P}$ est le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{PA_P}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}$, les domaines lipschitziens canoniques

$$\omega_f \cap \mathring{\mathrm{T}}\left(\mathrm{P},\mathrm{A_P}, \frac{r}{4}\right)$$

et les inégalités de Harnack uniformes $(\mathrm{U_2})$, on se ramène d'abord au cas où u est nulle partout sur $\partial\omega_f \cap \mathring{\mathrm{T}}(\mathrm{O},\mathrm{A},r)$ et à établir l'estimation sur le segment OA'.

Puis en remplaçant $\mathrm{T}(\mathrm{O},\mathrm{A},r)$ par le cylindre homothétique $\mathrm{T}\left(\mathrm{O},\mathrm{A}', \frac{r}{2}\right)$ et en considérant le domaine $\omega_f \cap \mathring{\mathrm{T}}\left(\mathrm{O},\mathrm{A}', \frac{r}{2}\right)$, on se ramène au cas où u est continue sur $\overline{\omega}_f$ et nulle sur

$\partial\omega_f \cap \mathring{T}(O,A,r)$. De plus, quitte à remplacer ω_f par $\omega_f \cap \mathring{T}(O,A,\inf(OA,r))$, on peut supposer $r \leqslant OA$.

Considérons alors les cylindres

$$T(P,A',\alpha r)\,, \quad P \in \overline{\omega}_f \cap \partial T(O,A,r)\,, \quad \alpha > 0\,.$$

Pour α assez petit, $\omega_f \cap \mathring{T}(P,A',\alpha r)$ est lipschitzien adapté à $T(P,A',\alpha r)$; on peut même prendre α indépendant des paramètres $c, \frac{r}{OA}, n$... Décomposons u en une somme finie Σu_i de fonctions $\mathcal{H}$-harmoniques sur ω_f, continues sur $\overline{\omega}_f$, avec $u_i = 0$ sur $\partial\omega_f - \mathring{T}\left(P_i,A',\alpha\frac{r}{4}\right)$, $P_i \in \overline{\omega}_f \cap \partial T(O,A,r)$; en utilisant encore les inégalités de Harnack uniformes, et en considérant chacune des fonctions u_i on est ramené à établir l'estimation lorsque u est $\mathcal{H}$-harmonique positive sur un domaine Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, avec

$$\Omega \cap \mathring{T}(O,A,r) = \omega_f\,,$$

et u nulle sur $\partial\Omega - T\left(O,A,\frac{r}{4}\right)$; le diamètre de Ω étant de plus inférieur à r_0 (c'est ce cas qui est envisagé par Carleson) (*).

Il faut effectuer une dernière réduction : on peut approcher uniformément u par des combinaisons linéaires à coefficients positifs de mesures harmoniques dans Ω d'ensembles boréliens $B \subset \partial\omega_f \cap T\left(O,A,\frac{r}{4}\right)$ se projettant sur le « fond » du cylindre $\Delta(O,A,r)$, suivant un B' compris entre l'intérieur et l'adhérence d'un cube $(n-1)$-dimensionnel. Il suffit donc d'établir le théorème lorsque u est la mesure harmonique, notée u_B, d'un tel B; en utilisant encore les inégalités de Harnack on voit qu'on peut aussi supposer que la projection B' est centrée en A.

Suivant la méthode de Carleson, on établit l'inégalité par récurrence sur $p \geqslant 0$, lorsque le cube a un côté de longueur $l_p = 2^{-p}\frac{r}{4}\frac{2}{\sqrt{n}}$;

(*) D'après 2.1, si $u \leqslant cu(A')$ sur $\Omega \cap \partial T\left(O,A',\frac{r}{2}\right)$, on a $u \leqslant cu(A')$ sur $\Omega \mathbin{\overset{\circ}{-}} T\left(O,A',\frac{r}{2}\right)$ avec une nouvelle constante c.

A) *Cas* $p = 0$: voyons d'abord que $u_B(A') \geqslant c$, c étant une constante qui ne dépend que de $c_0, \frac{r}{OA}$, ... (c'est l'analogue du lemme 1 de Hunt et Wheeden [10]).

Introduisons pour cela un domaine conique standard $\Phi(O,\vec{n},\rho,\theta)$ avec $\vec{n}$ parallèle à $\overrightarrow{AO}$, θ suffisamment petit pour que le cône $\{M; \overrightarrow{OM}.\vec{n} \geqslant \|OM\|.\cos(\theta)\}$ soit extérieur à ω_f $\left(\text{par exemple, tel que } \operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{OA}{5r}\right)$ et $\rho = \frac{r}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}$; considérons dans Φ la mesure harmonique v_1 de la portion de $\partial\Phi$ contenue dans le cône $\{M; \overrightarrow{OM}.\vec{n} = OM \cos\theta\}$; D'après la remarque 2.1 v_1 est majorée par une constante uniforme sur $\omega_f \cap \Phi$. Il s'ensuit qu'on a $v_1 \leqslant cu_B$ dans l'ouvert $\omega_f \cap \Phi$ pour une certaine constante c.

D'autre part, si v_2 est la mesure harmonique dans Φ de la partie de $\partial\Phi$ portée par la sphère $\partial B(O,\rho)$, on a $v_1 + v_2 \geqslant c'$, avec une nouvelle constante $c' > 0$. Comme $v_1 \geqslant c' - v_2$, on voit en utilisant (U_3) que v_1 est supérieur à $\frac{c'}{2}$ dans un voisinage uniforme $B(O,\alpha\rho) \cap \Phi$ de O dans Φ, avec $\alpha \in]0,1]$.

Il suffit alors d'utiliser le principe de Harnack uniforme pour obtenir la minoration cherchée :

$$u_B(A') \geqslant c .$$

On complète la démonstration de l'estimation de Carleson dans le cas $p = 0$ en remarquant que d'après la remarque 2.1, u_B est uniformément majoré dans Ω.

B) Supposons alors le résultat établi, avec une constante c_p, lorsque B a un côté de longueur $l_p = 2^{-p}\frac{2r}{4\sqrt{n}}$, et considérons le cas où ce côté est de longueur $l_{p+1} = \frac{l_p}{2}$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à

$$\omega_f' = \mathring{T}\left(O, A', \frac{r}{2}\right) \cap \omega_f ,$$

on aura :

$$u_B(x) \leqslant c_p u_B(A'')$$

pour $x \in \Omega \cap \partial T\left(O,A'', \frac{r}{4}\right)$, A'' désignant le milieu de OA'.

Soit P un point de $\partial\omega_f \cap \partial T\left(O,A', \frac{r}{2}\right)$, et soient $\Phi\left(P,\vec{n}, \frac{r}{4}, \theta\right)$ (θ et $\vec{n}$ choisis comme ci-dessus) un domaine conique standard de sommet P, et u_Σ la mesure harmonique dans Φ de la partie sphérique de Φ. En utilisant (U_3) et 2.1, on voit qu'avec une constante uniforme $c > 0$:

$$u_B(x) \leqslant c_p . c . u_B(A'') . \eta_\theta\left(\frac{4d(x,P)}{r}\right), \quad \text{pour} \quad x \in \Phi \cap \Omega .$$

En utilisant encore (U_2) et avec une nouvelle constante uniforme c :

$$u_B(x) \leqslant c_p . c . u_B(A') . \eta_\theta\left(\frac{4d(x,P)}{r}\right), \quad x \in \Phi \cap \Omega ,$$

ce qui montre qu'il existe une constante $\alpha \in]0,1]$ telle que :

$$u_B(x) \leqslant c_p u_B(A')$$

pour tout $x \in \partial T\left(O,A', \frac{r}{2}\right)$ et tel que $d\left(x, \complement\omega_f\right) \leqslant \alpha r$. α est de plus indépendant de c_p.

D'après les inégalités de Harnack (U_2), il existe une constance c indépendante de c_p telle que :

$$u_B(x) \leqslant c u_B(A') ,$$

pour

$$x \in \partial T\left(O,A', \frac{r}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad d\left(x, \complement\omega_f\right) \geqslant \alpha r .$$

On voit que si c_p est choisi supérieur à c, on pourra prendre une constante c_{p+1} égale à c_p. De sorte que si on pose $c_1 = \sup(c_0,c)$, la constante c_1 convient pour tous les $p \geqslant 0$.

C) Considérons alors le cas général d'un B se projettant sur un B' compris entre l'intérieur et l'adhérence d'un cube $n-1$ dimensionnel de centre A et de côté $l \leqslant l_1$; il existe un $p \geqslant 1$ tel que : $B_{p+1} \subset B \subset B_p$, avec B_p (resp. B_{p+1}) se projettant sur $\Delta(O,A,r)$ suivant un cube de côté $2^{-p}\frac{(2r)}{4\sqrt{n}}$ $\left(\text{resp. } 2^{-(p+1)}\frac{2r}{4\sqrt{n}}\right)$.

D'après ce qui a déjà été démontré, on a :

$$u_B(x) \leqslant c_1 u(A_0)$$

pour $x \in \Omega - T\left(O,A_0,r \cdot \frac{OA_0}{OA}\right)$, A_0 désignant le point de OA tel que $OA_0 = OA' \frac{l}{l_p}$; les inégalités de Harnack montrent alors que :

$$u(x) \leqslant c'_1 . c_1 u(A')$$

pour $x \in \Omega - T\left(O,A',\frac{r}{2}\right)$, c'_1 désignant une nouvelle constante, et ceci achève la démonstration du théorème.

3. Rappels sur les opérateurs uniformément elliptiques.

Pour $\alpha \in]0,1[$, $\lambda \geqslant 1$, et $M > 0$, $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ désigne la classe des opérateurs uniformément elliptiques L, définis sur $\mathbf{R}^n$, de la forme :

$$L(u)(x) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x) . u(x)$$

vérifiant d'une part, la condition d'ellipticité uniforme :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n, \qquad \frac{\|\xi\|^2}{\lambda} \leqslant \Sigma a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda\|\xi\|^2$$

et, d'autre part la condition de continuité höldérienne :

$$\sum_{i,j} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x')| + \sum_i |b_i(x) - b_i(x')| + |c(x) - c(x')| \leqslant M\|x - x'\|^\alpha$$

et

$$\Sigma b_i^2(x) \leqslant M, \qquad |c(x)| \leqslant M.$$

On sait associer à un tel opérateur un faisceau harmonique de Brelot $\mathscr{H}_L$; de façon précise $\mathscr{H}_L$ est le faisceau des fonctions numériques de classe C^2 vérifiant $L(u) = 0$ (voir [7] et [2]).

Nous rappelons d'abord les résultats connus sur les opérateurs elliptiques qui jouent un rôle essentiel dans la suite.

a) Principe de Harnack uniforme.

Les deux théorèmes suivants sont dus à Serrin [16]; le premier dit exactement que pour $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ le faisceau $\mathscr{H}_L$ vérifie la condition de Harnack uniforme (U_2); le deuxième énoncé est extrait de la démonstration de Serrin du premier théorème.

THÉORÈME 3.1. — *A tout triplet* (λ,α,M), *on peut associer un nombre* $r_0 > 0$, *et une constante* $c > 0$ *tels que pour tout* $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ *les boules de rayon* $2r_0$ *sont de Green pour* L, *et que pour toute boule* $B(x_0,r)$ *de rayon* $r \leqslant r_0$, *toute fonction* u L-*harmonique positive sur cette boule on a :*

$$\forall y\,,\, z \in B\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \qquad u(y) \leqslant cu(z)\,.$$

Serrin suppose que le coefficient de L d'ordre zéro est négatif, mais on se ramène facilement à son énoncé, en considérant au voisinage de chaque point x_0 de $\mathbf{R}^n$ le faisceau des quotients $\dfrac{u}{v_0}$ sur une boule de centre x_0 et de rayon assez petit, la fonction v_0 étant prise de la forme

$$v_0(x) = 1 - A\|x - x_0\|^2\,.$$

Notons d'ailleurs que l'énoncé de Serrin est en fait plus général que celui donné ici.

La démonstration de Serrin, dans l'hypothèse où le coefficient $c(x)$ de L est négatif, consiste à se ramener à la boule unité $B(0,1)$ et à encadrer toute fonction L-harmonique u sur $B(0,1)$ continue sur $\overline{B}(0,1)$, à l'aide de deux noyaux K_+ et K_- :

$$\forall y \in \mathring{B}(0,1)$$
$$\int_{\partial B} K_-(y,x)u(x)\,d\sigma(x) \leqslant u(y) \leqslant \int_{\partial B} K_+(y,x)u(x)\,d\sigma(x)$$

avec :

$$K_\pm = f_\pm\left(\frac{1 - \|y\|^2}{(\Sigma A_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j))^{n/2}}\right), \qquad y \in B(0,1)\ x \in \partial B(0,1)$$

$A_{ij}(x)$ désigne la matrice des cofacteurs de la matrice $\{a_{ij}(x)\}$ f_+ et f_- sont des fonctions de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ qui ne dépendent que du triplet (λ,α,M), sont croissantes, nulles à l'origine, et pourvues d'une dérivée strictement positive en zéro; de là, on déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Pour tout triplet* (λ,α,M) *et tout nombre* $\beta \in]0,1[$, *il existe une constante* $c > 0$, *et un nombre* $r_0 > 0$ *indépendant de* β *ayant la propriété suivante : Si* $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$, *et si* u *et* v *sont deux fonctions* L-*harmoniques positives sur une boule* $B(x_0,r)$ *de rayon* $r < r_0$, *continues sur* $\overline{B}(x_0,r)$, *et nulles à la frontière sur le voisinage* $B(z_0,\beta r) \cap \partial B(x_0,r)$ *de* $z_0 \in \partial B(x_0,r)$, *on a :*

$$\frac{u(x)}{u(x_0)} \leqslant c\,\frac{v(x)}{v(x_0)}$$

lorsque x *parcourt le segment* $[x_0\,,\,z_0]$ (*).

Remarques. — 1) Cet énoncé est pour le cas d'une boule le principe de Harnack à la frontière qu'on étendra plus loin aux domaines lipschitziens.

2) Les travaux de De La Vallée Poussin [7] conduisent à un principe analogue pour les fonctions harmoniques ordinaires dans un domaine à courbure bornée (voir le lemme 5.1 de Martin dans [12]).

Du théorème 3.2 nous retiendrons le corollaire suivant qui servira dans la suite :

COROLLAIRE 3.3. — *Considérons un domaine cylindrique* $\mathring{T}(O,A,r)$ *avec* $r + OA \leqslant r_0$, r_0 *assez petit, et un opérateur* $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. *Il existe une constante* $c > 0$ *ne dépendant que de* λ, α, M, $\frac{r}{OA}$, r_0 *telle que :*

Pour tout couple (u,v) *de fonctions* L-*harmoniques* > 0 *sur* $\mathring{T}(O,A,r)$ *continues sur* $\overline{T}(O,A,r)$ *et nulles sur*

$$\partial T(O,A,r) \cap \{M;\ |\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}| < OA^2\}$$

on a :

$$\frac{u(x)}{u(O)} \leqslant c\,\frac{v(x)}{v(O)}, \qquad \forall x \in T(O,A,r) \cap \{M;\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = 0\}.$$

(*) Si $L1 \leqslant 0$ on peut prendre $r_0 = 1$ dans cet énoncé.

On se ramène comme plus haut au cas des opérateurs L vérifiant $L1 \leqslant 0$. De plus, par des homothéties et des rotations, on voit qu'on peut supposer que 0 est l'origine de $\mathbf{R}^n$, que $r = 1$ et que A est placé sur le dernier axe de coordonnées : $A = (0,0,\ldots,-l)$, $l > 0$. Enfin, avec une affinité, on se ramène au cas où $l = r = 1$.

Soit g une fonction paire, indéfiniment dérivable, vérifiant $g(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, +\dfrac{1}{2}\right]$, comprise sur $\mathbf{R}$ entre 1 et $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et ayant toutes ses dérivées bornées sur $\mathbf{R}$. Posons :

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (g(x_n)x_1 , \ g(x_n)x_2 , \ \ldots , \ g(x_n)x_{n-1} , \ x_n) .$$

φ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même qui transforme la boule unité ouverte en un domaine ω tel que :

$$T(O,A',r) \leqslant \omega \subset T(O,A,r)$$

A$'$ désignant le milieu de OA . En composant u et v avec φ on obtient deux fonctions harmoniques par rapport à un opérateur uniformément elliptique $L(\varphi)$ sur la boule unité, et nulles à la frontière sur $\partial B \cap \left\{x;\ |x_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$. De plus $L(\varphi)$ est dans une classe $\mathscr{L}(\lambda',\alpha',M')$, λ' , α' et M' ne dépendant que de λ , α , M . On obtient alors le résultat en appliquant le théorème 3.2 à ce couple et aux rayons OP , P parcourant $\partial B \cap \{x ; x_n = 0\}$, pour $\beta = \dfrac{1}{2}$ ·

b) Estimation de Schauder.

L'estimation suivante suffira ici; on utilise les notations habituelles pour les normes höldériennes.

THÉORÈME 3.4 (voir [2], [14]). — *Fixons un triplet* (λ,α,M) , *un réel* $r > 0$ *et* $\beta \in]0,1[$; *il existe alors une constante* $c > 0$ *telle que pour tout opérateur* $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ *et toute fonction* u *de classe* $C^{2,\alpha}$ *sur une boule* $B(x,r)$, *on a :*

$$\|u\|_{2,\alpha}^{B(x,\beta,r)} \leqslant c \, \{\|Lu\|_{\alpha}^{B(x,r)} + \sup_{B(x,r)} |u|\}.$$

c) Une estimation sur la fonction de Green.

Soit s_n la surface $n-1$-dimensionnelle de la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. Soit L un opérateur elliptique de la classe $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. $\Delta(y)$ désignera la valeur au point y du déterminant de la matrice $\{a_{ij}\}$ des coefficients du second ordre de L, et $\{A_{ij}\}$ la matrice des cofacteurs de $\{a_{ij}\}$.

On dit [14] qu'une fonction H_L positive de deux variables (x,y) est une solution fondamentale pour L sur Ω si pour chaque $y \in \Omega$, la fonction $x \longrightarrow H_L(x,y)$ vérifie les deux conditions suivantes :

a) $x \longrightarrow H_L(x,y)$ est C^2 et L-harmonique sur $\Omega - \{y\}$

b) Quand x tend vers y, $H_L(x,y)$ est équivalent à la quantité

$$\frac{1}{(n-2)s_n\sqrt{\Delta(y)}}\Big[\sum_{i,j} A_{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\Big]^{-\frac{n-2}{2}}$$

pour $n \geqslant 3$, et pour $n = 2$, à

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta(y)}}\operatorname{Log}\left(\Sigma A_{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On a alors le théorème suivant en utilisant les méthodes de [14] :

THÉORÈME 3.5. — *Soit* $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$; *il existe un* $r_0 > 0$ *et une constante* $c > 1$ *ne dépendant que de* λ, α *et* M, *tels que sur chaque boule* $B(x_0,r_0)$, *il existe une solution fondamentale* H_L *pour* L, *qui vérifie :*

Si $n \geqslant 3$,

$$\forall x,\ y \in B(x_0,r_0)\quad \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)^{n-2} \leqslant H_L(x,y) \leqslant c\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)^{n-2}$$

et si $n = 2$,

$$\forall x,\ y \in B(x,r_0)\quad \frac{1}{c}\operatorname{Log}(\|x-y\|)^{-1} \leqslant H_L(x,y) \leqslant c\operatorname{Log}((\|x-y\|)^{-1}.$$

Raisonnons dans le seul cas $n \geqslant 3$; on forme le noyau N_L :

$$N_L(x,y) = \frac{1}{(n-2).s_n.\sqrt{\Delta(y)}}\{\Sigma A_{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\}^{-\frac{n-2}{2}}$$

et le noyau K_L :

$$K_L(x,y) = \Sigma a_{ij}(x) \frac{\partial^2 N_L}{\partial x_i \partial x_j}(x,y) + \Sigma b_i(x) \frac{\partial N_L}{\partial x_i}(x,y) + c(x) N_L(x,y) .$$

Comme N_L est en tant que fonction de x solution sur $\mathbf{R}^n - \{y\}$ de l'équation à coefficients constants obtenue en fixant ceux de L en leur valeur en y , et en ne conservant que les termes du $2^{\text{ième}}$ ordre, on a :

$$K_L(x,y) \leqslant \frac{c}{\|x-y\|^{n-\alpha}}$$

c ne dépendant que de α et M . On en déduit un nombre r_0 tel que pour toute boule $B(x_0,r_0)$ de rayon r_0 on a $\int_B K_L(x,y)\, dy \leqslant \frac{1}{2}$.

On obtient alors ([14], p. 63) le noyau H_L sur une telle boule en posant :

$$H_L = \sum_{p=0}^{+\infty} N_L . (K_L)^p .$$

Les produits de composition apparaissant dans cette formule sont pris au sens des noyaux sur la boule $B(x_0,r_0)$. Notons que de plus, si φ est höldérienne de classe α sur la boule fermée $B(x_0,r_0)$ la fonction $H_L(\varphi)$ donnée par

$$H_L(\varphi)(x) = \int_B H_L(x,y)\varphi(y)\, du$$

est de classe $C^{2,\alpha}$ sur la boule et vérifie $LH_L(\varphi) = -\varphi$ (1) .

Fixons toujours L , $B(x_0,r_0)$ et H_L en convenant que $H_L(x,x) = +\infty$. Pour chaque $y \in B(x_0,r_0)$, $x \longrightarrow H_L(x,y)$ est une fonction L-surharmonique non harmonique, et d'après un résultat de Gildbarg et Serrin [5] toute fonction u positive sur $B(x,r_0)$, L-harmonique sur $B(x,r_0) - \{y\}$ est, à une fonction L-harmonique près, proportionnelle à cette fonction au voisinage de y .

Cela suffit pour voir que pour chaque $r < r_0$, il existe sur chaque boule $B(x_0,r)$ un L-potentiel > 0 , et une fonction L-harmonique > 0; il y a de plus unicité des potentiels à support ponctuel dans une telle boule. Pour tout domaine ω contenu dans une boule $B(x,r)$, on définit la fonction de Green $G_L^\omega(x,y)$ par les conditions :

1° $\forall y \in \omega$, $x \longmapsto G_L^\omega(x,y)$ est un L-potentiel à support $\{y\}$.

2° $\forall y \in \omega$, $x \longmapsto G_L^\omega(x,y)$ est équivalent à $N_L(x,y)$ quand x tend vers y.

Remarquons que d'après les inégalités de Harnack uniformes de Serrin la L-mesure harmonique de la frontière $\partial\omega$ d'un domaine de diamètre assez petit reste comprise dans le domaine entre deux constantes strictement positives sur ω ; ces constantes ne dépendant que de λ, α, M. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.6. — *Il existe un nombre $r_1 > 0$, $r_1 < r_0$, et une constante $c > 0$ tels que pour chaque boule $B = B(x,r_1)$ on a :*

$$\frac{1}{c}\, G_L^B(x,y) \leqslant N_L(x,y) \leqslant c\,G_L^B(x,y) \quad \forall x\,,\, y \in B\left(x\,,\, 2\frac{r_1}{3}\right).$$

On peut choisir un unique couple (c,r_1) pour tous les opérateurs $L \in \mathcal{L}(\lambda,\alpha,M)$.

Remarque. — C'est cette estimation qui permet de voir que le faisceau $\mathcal{H}_L$ vérifie l'axiome D de Brelot et que le L-effilement équivaut au Δ-effilement et à l'effilement pour le faisceau adjoint [7].

d) La barrière uniforme de Miller.

Nous rappelons une construction de K. Miller [13].

Théorème 3.7. — *Etant donnés λ, α, M et un domaine conique standard $\Phi(O,\vec{n},\rho,\theta)$, il existe pour ρ assez petit une fonction u strictement positive et de classe C^2 sur $\Phi(O,\vec{n},\rho,\theta)$, tendant vers zéro au point O, et telle que, pour tout $L \in \mathcal{L}(\lambda,\xi,M)$, on a $L(u) \leqslant 0$.*

K. Miller suppose en fait le coefficient $c(x)$ du terme d'ordre zéro de L négatif, et alors n'impose aucune majoration sur ρ . On déduit facilement le théorème 3.7 des résultats de Miller de la façon suivante : d'après [13], il existe une u de classe C^2 sur $\Phi(O,\vec{n},1,\theta)$, strictement positive, et telle que $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$, avec :

$$L(u)(x) \leqslant -\frac{1}{d(O,x)} \qquad x \in \Phi(O,\vec{n},1,\theta)$$

pour tout $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ à coefficient $c(x) \leqslant 0$.

Il est alors clair que pour ρ assez petit l'inégalité cherchée a lieu sur $\Phi(O,\vec{n},\rho,\theta)$, pour tout $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$.

4. Caractère uniforme des faisceaux associés.

On va maintenant établir le théorème suivant :

Théorème 4.1. — *Soient* (λ,α,M) *un triplet de nombres* > 0 , *et* L *un opérateur elliptique de la classe* $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. *Le faisceau harmonique* $\mathscr{H}_L$ *et le faisceau harmonique adjoint* $\mathscr{H}_L^*$ *sont uniformes sur* $\mathbf{R}^n$. *De plus dans les propriétés* (U_1) , (U_2) *et* (U_3) *pour* $\mathscr{H}_L$ *et pour* $\mathscr{H}_L^*$, *on peut trouver un* $r_0 > 0$, *un* $c > 0$ *et des fonctions* η_θ *ne dépendant que de* λ , α *et* M .

La définition du faisceau harmonique adjoint dans une axiomatique de Brelot est due à R. M. Hervé [7]. Le faisceau de l'énoncé est celui qui est défini localement par les fonctions de Green G_L^ω (ω Greenien). Lorsque L a des coefficients de classe $C^{2,\alpha}$, le faisceau adjoint est le faisceau associé à l'opérateur elliptique ajoint L^* [7] .

L'assertion du théorème, pour le faisceau $\mathscr{H}_L$ se déduit facilement du théorème de Serrin, de celui de Miller et de la remarque classique suivante :

Soit T une homothétie $T(x) = \mu x$ sur $\mathbf{R}^n$ de rapport μ compris strictement entre 0 et 1 . On définit par transport un faisceau $\mathscr{H}_L^T$, en posant

$$\mathscr{H}_L^T(U) = \{v, v_0 T^{-1} \in \mathscr{H}_L(T^{-1}(U))\} ;$$

le faisceau $\mathscr{H}_L^T$ est associé à un opérateur $L_T \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$

défini par $L_T(\varphi) = L(\varphi_0 T^{-1})_0 T$. On définit de même un faisceau $(\mathcal{H}_L^*)^T$ et on a : $(\mathcal{H}_L^*)^T = (\mathcal{H}_L^T)^* = \mathcal{H}_{L_T}^*$.

Montrons alors que $\mathcal{H}_L^*$ est uniforme. Prenons r_1 comme dans le théorème 3.6 et son corollaire, et posons $r_0 = \frac{r_1}{2}$; si $B(x,r_0) = B$ est une boule de rayon r_0, $y \longrightarrow G_L^B(x,y)$ est un potentiel adjoint sur cette boule, de sorte que $\mathcal{H}_L^*$ vérifie bien (U_1).

Pour (U_2), on remarque qu'en utilisant des homothéties on est ramené à vérifier cette propriété pour $\alpha = 1$. Soit u une fonction L-harmonique adjointe sur $B(x_0,r_0) = B$; on peut la représenter comme G_L^{*B} potentiel, dans la boule $B\left(x_0, 2\frac{r_0}{3}\right)$, d'une mesure μ positive sur $\partial B\left(x_0, 2\frac{r_0}{3}\right)$, parce que $\mathcal{H}_L^*$ a la propriété d'unicité des potentiels à support ponctuel [7] :

$$u(y) = \int G_L^B(x,y)\, d\mu(x) \quad \forall y \in \mathring{B}\left(x_0, 2\frac{r_0}{3}\right).$$

(U_2) se déduit alors de la conséquence immédiate suivante de la proposition 3.6 :

$$\forall x \in \partial B\left(x_0, 2\frac{r_0}{3}\right),\quad y_1\,,\ y_2 \in B\left(x, 2\frac{r_0}{2}\right) \quad G_L^B(x,y_1) \leqslant c\, G_L^B(x,y_2)$$

avec une constante c ne dépendant que de λ, α, M.

Pour vérifier (U_3) il suffit d'examiner le seul cas d'un domaine conique standard fixe $\Phi(O,\vec{n},r_{0/2},\theta)\left(\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$; désignons par A le point de ce domaine tel que $OA = -\frac{r_0}{4}\vec{n}$, et posons

$$\Phi' = \Phi\left(O,\vec{n},r_0', \frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{avec} \qquad r_0' = \frac{2}{3} r_0 .$$

Commençons par montrer, en raisonnant par l'absurde, que :

$$\lim_{y \to 0} G_L^{\Phi'}(A,y) = 0$$

uniformément par rapport à l'opérateur L, lorsque celui-ci parcourt la classe $\mathcal{L}(\lambda,\alpha,M)$.

Sinon, il existerait une suite L_k et une suite $y_k (k \geqslant 1)$ avec :

$$L_k \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M) , \quad y_k \in \Phi' , \lim_{k\to\infty} y_k = 0 \quad \text{et} \quad G_{L_k}^{\Phi'}(A,y_k) > \varepsilon > 0 .$$

Considérons la suite de fonctions $x \longrightarrow G_{L_k}^{\Phi'}(x,y_k)$: la majoration de chaque terme de cette suite par $c . N_{L_k}(x,y_k)$ et l'estimation de Schauder montrent qu'on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente, ainsi que les deux premières dérivées des termes de cette sous-suite, uniformément sur tout compact de Φ'. Soit u la limite de cette sous-suite.

Remarquons que la suite de fonctions considérée est uniformément bornée au voisinage de chaque point de $\partial\Phi'$ distinct de O; l'estimation de Carleson 2.2, et la propriété de barrière uniforme (U_3) pour les faisceaux $\mathscr{H}_{L_k}$ montrent que les éléments de la suite tendent uniformément vers zéro en tout point de $\partial\Phi'$ distinct de O. Il s'ensuit que u tend vers zéro à la frontière de Φ' sauf peut-être en O.

Comme les opérateurs L_k varient dans $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$, une nouvelle extraction montre que u est L-harmonique pour un $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ et les relations 3.6 entraînent :

$$\forall x \in B(O,r_0) , \qquad u(x) \leqslant c G_L^B(x,O) ,$$

avec $B = B(O,r_0)$, et c une constante > 0.

Un raisonnement classique permet alors de voir que $u = O$: en effet, si on prolonge u par zéro sur $\mathbf{R}^n - \Phi'$, u est L-harmonique sur Φ', et L-sous-harmonique sur $\mathbf{R}^n - \{O\}$. $G_L^B(.,O) - \dfrac{u}{2c}$ est L-surharmonique sur $B(O,r_0) - \{O\}$ et tend vers l'infini en O; cette fonction est donc L-surharmonique $\geqslant 0$ sur $B(O,r_0)$ tout entier et majore $G_L^B(.,O)$ sur $B - \Phi'$. Or, $\complement \Phi'$ n'est pas effilé, par rapport au faisceau adjoint, au point O, puisque, d'après [7] l'effilement adjoint équivaut à l'effilement par rapport au laplacien; cela entraîne que $G_L^B(.,O)$ est identique à sa réduite dans B sur $\complement \Phi'$ par rapport au faisceau $\mathscr{H}_L$. On a donc :

$$G_L^B(x,0) - \frac{u(x)}{2 . c} \geqslant G_L^B(x,0)$$

pour $x \in \Phi'$; par suite $u = 0$, ce qui contredit $u(A) \geqslant \varepsilon$, et achève de prouver que $\lim_{y \to 0} G_L^{\Phi'}(A,y) = 0$ uniformément par rapport à l'opérateur $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$.

Revenons alors au domaine $\Phi\left(O,\vec{n},\frac{r_0}{2},\theta\right)$; avec les inégalités de Harnack uniformes pour $\mathscr{H}_L$ et les encadrements uniformes de 3.6, on vérifie facilement que :

$$G_L^{\Phi'}(A,y) \geqslant c \quad \text{sur} \quad \Sigma\left(O,n,\frac{r_0}{2},\theta\right) \quad (c = \text{constante} > 0)$$

et par suite

$$G_L^{\Phi'}(A,y) \geqslant c u_\Sigma(y) \qquad \forall y \in \Phi(O,n,r,\theta)$$

u_Σ désignant la mesure harmonique pour $\mathscr{H}_L^*$ de Σ dans Φ.

D'après ce qui vient d'être démontré, u_Σ tend uniformément vers zéro, quand L parcoure $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$, au point O.

Ce qui achève de prouver (U_3) pour le faisceau adjoint $\mathscr{H}_L^*$.

Corollaire 4.2. — *Pour* $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$, $\mathscr{H}_L$ *et* $\mathscr{H}_L^*$ *vérifient les estimations de Carleson* 2.2 *avec des constantes ne dépendant que de* λ, α *et* M.

L'extension de l'estimation de Carleson pour le faisceau direct est due à J. Taylor [15].

Dans la suite on désignera par $r(\lambda,\alpha,M)$ un nombre > 0 tel que lorsque L parcourt $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$, $\mathscr{H}_L$ et $\mathscr{H}_L^*$ vérifient (U_1), (U_2) et (U_3) avec le nombre $r_0 = r(\lambda,\alpha,M)$. On prendra de plus ce nombre inférieur à $\frac{r_1}{2}$, r_1 étant le nombre défini par 3.7 majorant le rayon des domaines coniques standards dans lesquels on construit une barrière uniforme pour la classe $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. Enfin, $r(\lambda,\alpha,M)$ est pris assez petit pour que sur la boule $B(O,2r_0)$ il existe une fonction w de classe C^2, strictement positive et vérifiant $Lw \geqslant 0$, pour tout $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ (on peut prendre w de la forme $\|x\|^2 + \varepsilon$).

5. L'inégalité de Harnack à la frontière.

Dans cette partie on établit un principe de Harnack à la frontière; dans le cas du Laplacien, ce principe avait été conçu par J. Kemper dans [9]. On en déduira le principe de Bouligand ce qui, dans le cas du Laplacien, donne une nouvelle démonstration du théorème de Hunt et Wheeden.

Théorème 5.1. — *Soient* (λ,α,M) *un triplet de nombres réels* > 0, *et* L *un opérateur de la classe* $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. *Considérons un domaine cylindrique* $(\mathring{T}O,A,r)$ *avec*

$$r + OA < \frac{1}{2}\, r(\lambda,\alpha,M)\,,$$

et un domaine lipschitzien standard ω_f *adapté à* $T(O,A,r)$; *soit enfin* A' *le milieu de* OA.

Il existe une constante $C > 0$ *ne dépendant que de* (λ,α,M) *et* $\frac{r}{OA}$ *telle que pour tout couple* (u,v) *de fonctions* L-*harmoniques positives sur* ω_f, *nulles sur*

$$\partial\omega_f \cap \left\{x;\frac{r}{4} < d(x,OA) < r\right\} \cap \mathring{T}(O,A,r)$$

on a :

$$\frac{u(x)}{u(A')} \leqslant C\,\frac{v(x)}{v(A')} \qquad \forall x \in \partial T\left(O,A',\frac{r}{2}\right) \cap \omega_f\,.$$

Remarquons d'abord, qu'en utilisant les domaines $T\left(P,A_P,\frac{r}{2}\right)$ où $P \in \partial\omega_f \cap \left\{x,d(x,OA) = \frac{r}{4}\right\} \cap \mathring{T}(O,A,r)$ et $\overrightarrow{PA_P} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA'}$, et les inégalités de Harnack uniformes, on est ramené à ne considérer que le cas où u et v sont nulles sur $\partial\omega_f \cap \mathring{T}(O,A,r)$, et continues sur $\overline{\omega_f}$.

On établit ensuite le lemme suivant en supposant les coefficients de L de classe C^∞ bien que cette hypothèse ne soit pas indispensable.

LEMME 5.2. — *Supposons l'opérateur* L *à coefficients* C^∞, *et désignons par* μ (resp. ν) *la* L-*mesure harmonique de* $\overline{\omega}_f \cap \partial T(O,A,r)$ (*resp.* $\Delta(O,A,r)$) *dans* ω_f. *Il existe une constante* $C > 0$ *ne dépendant que de* (λ,α,M) *et* $\frac{r}{OA}$ *telle que :*

$$\mu(x) \leqslant C\nu(x) \qquad \forall x \in \mathring{T}\left(O,A',2\frac{r}{3}\right) \cap \omega_f .$$

Rappelons que $\Delta(O,A,r)$ est le « fond » du cylindre $T(O,A,r)$.

Démonstration du lemme. — On désignera par A'' le milieu de AA'.

Remarquons qu'en utilisant des homothéties on se ramène facilement à supposer r et OA fixes; on peut donc supposer le cylindre $T(O,A,r)$ fixe. La démonstration va consister, en généralisant la remarque déjà mentionnée de Brelot [1], à majorer $\mu(x)$ par $G_L^{\omega_f}(x,A')$ au voisinage de O, puis à utiliser le principe de Harnack jusqu'au bord du corollaire 3.3; on pose $\omega = \omega_f$.

a) Commençons par rappeler une formule sur la mesure harmonique; soit B la boule $B(O,r(\lambda,\alpha,M))$. On sait que la L-mesure harmonique ρ_x^ω d'un point $x \in \omega$ dans ω est la balayée au sens adjoint de la mesure de Dirac δ_x sur $B - \omega$ (voir [7]). Au sens des distributions $L(G_L^B(.,y)) = -\delta_y$ et $L^*(G_L^B(x,.)) = -\delta_x$; la première de ces formules se déduit de la formule (1) de 3 ci-dessus, et la deuxième de ce que la fonction de Green de L^* s'obtient par transposition de G_L^B.

On voit alors que si on convient de prolonger $G_L^\omega(x,.)$ par zéro sur $B - \omega$ on a :

$$\rho_x^\omega = L^*(G_L^\omega(x,.)) + \delta_x \quad \text{sur} \quad \mathring{B} .$$

Soit h une fonction C^∞ positive, à support compact contenu dans $B - T\left(O,A'',3\frac{r}{4}\right)$, avec $h = 1$ sur l'ensemble $\left\{x;\ d(x,\partial T(O,A,r)) \leqslant \frac{r}{8}\right\}$; on a, pour $x \in T\left(O,A',\frac{2r}{3}\right)$, d'après la formule précédente :

$$\rho_x^\omega(h) = \int G_L^\omega(x,y)L(h)(y)\,dy .$$

b) D'après les estimations de Carleson pour les fonctions L*-harmoniques $\left[\text{sur } \omega - T\left(O,A', \frac{r}{2}\right)\right] y \longrightarrow G_L^{\omega}(x,y)$, on a avec une constante c :

$$\rho_x^{\omega}(h) \leqslant c \,.\, G_L^{\omega}(x,A'') \int |L(h)(y)| \, dy \,.$$

Comme B, $T(O,A,r)$ et h sont maintenus fixes, on a avec une nouvelle constante c :

$$\mu(x) \leqslant c G_L^{\omega}(x,A''), \qquad x \in T\left(O,A', \frac{2r}{3}\right).$$

c) Il reste maintenant à obtenir une majoration de $G_L^{\omega}(x,A'')$ par $\nu(x)$; pour cela on remarque que d'après 3.3 appliqué au cylindre $T(A',A'',r)$, on a avec une constante c :

$$\frac{G_L^{\omega}(P,A'')}{G_L^{\omega}(A',A'')} \leqslant C \frac{\nu(P)}{\nu(A')}, \qquad P \in T(O,A,r) \cap \{P, \overrightarrow{A'P} . \overrightarrow{OA} = 0\} \,.$$

Or $\nu(A')$ est minoré par une constante > 0 et $G_L^{\omega}(A',A'')$ majoré par une autre constante; on a donc

$$G_L^{\omega}(P,A'') \leqslant c\nu(P) \qquad P \in T(O,A,r) \cap \{P ; \overrightarrow{A'P} . \overrightarrow{OA} = 0\}$$

et d'après le principe du maximum :

$$G_L^{\omega}(P,A'') \leqslant c\nu(P) \qquad P \in \omega \cap T(O,A',r)$$

et le lemme découle des points *b*) et *c*) de la démonstration.

Démonstration du théorème. — Supposons d'abord L à coefficients C^{∞} et soient u et v deux fonctions L-harmoniques positives sur ω_f continues sur $\overline{\omega}_f$, nulles sur $\partial\omega_f \cap \mathring{T}(O,A,r)$; d'après les estimations de Carleson :

$$u(x) \leqslant c u(A')\mu(x)$$

et

$$v(x) \geqslant c v(A')\nu(x)$$

pour $x \in T\left(O,A', \frac{r}{2}\right)$, μ et ν désignant respectivement la mesure harmonique dans $T\left(O,A'',3\frac{r}{4}\right) \cap \overline{\omega}_f$ de

$$\partial T\left(O,A'',3\frac{r}{4}\right) \cap \overline{\omega}_f \qquad \text{et} \qquad \Delta\left(O,A'',3\frac{r}{4}\right).$$

Appliquant le lemme précédent au domaine

$$\omega_f \cap T\left(O,A'',3\frac{r}{4}\right):$$

$$\frac{u(x)}{u(A')} \leqslant c'' \frac{v(x)}{v(A')} \qquad x \in \mathring{T}\left(O,A',\frac{r}{2}\right) \cap \omega_f$$

(on utilise aussi les inégalités de Harnack).

La constante c'' ne dépend que de (λ,α,M) et $\frac{r}{OA}$. Ce qui prouve le théorème lorsque l'opérateur L est à coefficients C^∞; pour obtenir le cas général il suffit d'établir le lemme suivant, et d'approcher l'opérateur L par les opérateurs à coefficients C^∞.

LEMME 5.3. — *Soit* μ_x^L *la* L-*mesure harmonique de* x *dans* ω_f *et soit* $g \in C(\partial\omega)$. *Le point* x *étant fixé dans* ω_f, *la quantité* $\mu_x^L(g)$ *est une fonction continue de* L *lorsqu'on munit* $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ *de la topologie de la convergence des coefficients en norme höldérienne d'ordre* α *sur* $\mathbf{R}^n$.

D'après les estimations de Schauder $x \longrightarrow \mu_x^L(g)$ reste borné dans $C^{2,\alpha}(K)$ pour tout compact $K \subset \omega_f$, $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. Montrons que cette fonction est uniformément continue sur $\overline{\omega}_f$, quand L varie dans $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$:

D'après la construction de Miller il existe pour tout P sur la frontière de ω_f une fonction $u_P \in C(\overline{\omega}_f)$ strictement positive sur $\overline{\omega}_f - \{P\}$, nulle en P, et L-surharmonique dans ω_f, par rapport à tous les opérateurs $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. De plus, il existe deux fonctions v et w continues sur $\overline{\omega}_f$ de classe C^2 sur ω_f et comprises entre deux constantes positives, v étant L-surharmonique et w L-sousharmonique pour tout $L \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$.

Établissons alors l'uniforme continuité des $x \longrightarrow \mu_x^L(g)$.

Soit $x_0 \in \partial\omega_f$; pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$(g(x_0) - \varepsilon)\frac{w(x)}{w(x_0)} - au_{x_0}(x) \leqslant \mu_x^{\mathrm{L}}(g)$$

$$\leqslant (g(x_0) + \varepsilon)\frac{v(x)}{v(x_0)} + bu_{x_0}(x)$$

dès que a et b sont assez grands pour que la double inégalité ait lieu sur $\partial\omega_f$.

Les encadrements sont uniformes en $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,\mathrm{M})$, g et ε étant fixés, et prouvent l'uniforme continuité voulue au point $x_0 \in \partial\omega_f$.

Si maintenant $(\mathrm{L}_p)_{p\geqslant 1}$ est une suite d'opérateurs de $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,\mathrm{M})$ convergeant vers L , les fonctions $x \longrightarrow \mu_x^{\mathrm{L}_i}(g)$ parcourent une partie relativement compacte de $\mathrm{C}(\overline{\omega}_f)$ et $\mathrm{C}^2(\mathrm{K})$ pour tout compact K de ω_f. Toute valeur d'adhérence de cette suite est donc solution du problème de Dirichlet relativement à L , avec g pour donnée frontière; cette solution étant unique, on a bien

$$\lim_{i\to\infty} \mu_x^{\mathrm{L}_i}(g) = \mu_x^{\mathrm{L}}(g) \qquad \text{pour} \qquad x \in \omega_f .$$

Remarque. — Pour un domaine de classe C^2 , on a même un principe de Harnack jusqu'au bord pour des couples (u,v) de fonctions harmoniques par rapport à deux opérateurs distincts; cela ne s'étend pas aux domaines lipschitziens : pour L_1 et $\mathrm{L}_2 \in \mathscr{L}(\lambda,\alpha,\mathrm{M})$ les fonctions L_1-harmoniques positives qui s'annulent au bord au voisinage d'un point frontière P , ne sont pas en général du même ordre au voisinage de P que les fonctions L_2-harmoniques analogues; cela se produit déjà pour un triangle, des opérateurs L_1 et L_2 homogènes à coefficients constants, et P l'un des sommets du triangle.

6. Applications des résultats précédents.

Théorème 6.1 (Principe de Bouligand). — *Soit* L *un opérateur de la classe* $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,\mathrm{M})$, *et soit* Ω *un domaine lipschitzien borné et greenien pour* L . *Pour chaque point* P *de* Ω *il existe une fonction* L-*harmonique* > 0 *sur* Ω, *tendant vers zéro en tout point frontière de* Ω *distinct de* P. *Cette fonction est unique, à la multiplication par un scalaire* > 0 *près. Enfin lorsque* P *parcourt* $\partial\Omega$, *on obtient ainsi toutes les fonctions* L-*harmoniques minimales sur* Ω.

Remarques. — 1) Il suffit évidemment que L soit défini sur Ω.

2) Si Ω est lipschitzien seulement au voisinage du point frontière P, il y aura existence et unicité à une constante multiplicative près, d'une fonction L-harmonique > 0 sur Ω tendant vers zéro en tout point frontière régulier de Ω distinct de P, et bornée au voisinage de tout point irrégulier de $\partial\Omega$.

Démonstration.

A) Fixons un cylindre $T(P,A,r)$ tel que $\mathring{T}(P,A,r) \cap \Omega$ soit un domaine lipschitzien canonique et tel que $r < r(\lambda,\alpha,M)$. Soient A_t le point tel que $\overrightarrow{PA_t} = t.\overrightarrow{PA}$ $(t > 0)$ et G_L^Ω la fonction de Green de Ω associée à L; posons enfin :

$$v_Q(x) = \frac{G_L(x,Q)}{G_L(A,Q)}.$$

Pour $Q \in T\left(P,A_{t/2},\frac{tr}{2}\right)$, les estimations de Carleson, et l'inégalité de Harnack montrent que :

$$v_Q(x) \leqslant c v_Q(A_t) \qquad x \notin T(P,A_t,tr),\ 0 < t < \frac{1}{2}.$$

D'où

$$v_Q(x) \leqslant C_t \qquad \text{sur} \qquad \complement\, T(P,A_t,tr).$$

C_t dépend de t, λ, α et M. On voit alors que pour chaque point P_1 de $\partial\Omega$ distinct de P, on pourra pour Q assez voisin de P, majorer les fonctions v_Q par une homothétique de la mesure harmonique de $\partial B(P_1,\rho) \cap \Omega$ dans $B(P_1,\rho) \cap \Omega$, ρ étant fixé égal à $\dfrac{d(P_1,P)}{2}$ par exemple.

Ceci prouve que les fonctions v_Q tendent uniformément vers zéro en tout $P' \in \partial\Omega$, $P' \neq P$, pour Q assez voisin de P; toute valeur d'adhérence de V_Q lorsque Q tend vers P, est une fonction L-harmonique > 0 nulle en tout $P' \in \partial\Omega$, $P' \neq P$.

B) Montrons l'unicité : soient h_1 et h_2 deux fonctions L-harmoniques > 0 nulles sur $\partial\Omega - \{P\}$. D'après le principe de Harnack à la frontière on a :

$$\frac{1}{c}\,\frac{h_1(x)}{h_1(A_t)} \leqslant \frac{h_2(x)}{h_2(A_t)} \leqslant c\,\frac{h_1(x)}{h_1(A_t)}$$

pour $x \in \Omega \cap \partial T(P,A_t,\mathrm{tr})$ et d'après le principe du maximum la double inégalité se prolonge à $\Omega - \mathring{T}(P,A_t,\mathrm{tr})$; on en déduit immédiatement que sur cet ensemble :

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{h_1(x)}{h_1(A)} \leqslant \frac{h_2(x)}{h_2(A)} \leqslant c^2\,\frac{h_1(x)}{h_1(A)}.$$

Comme t est arbitraire, cette double inégalité a lieu dans Ω tout entier, et cela suffit d'après le lemme élémentaire 6.2 plus bas pour dire que h_1 et h_2 sont proportionnelles.

C) Il est alors clair que les fonctions ainsi associées à un point frontière sont minimales. Pour voir qu'inversement toute minimale est associée à un point frontière, il suffit de remarquer que d'après Martin [12] toute minimale (*) peut s'obtenir comme limite d'une suite $\{v_{Q_i}\}_i$; d'après la partie A) de la démonstration une telle fonction est associée à P, si P est adhérent à la suite Q_i.

Lemme 6.2. — *Soit $\mathscr{C}$ un cône convexe d'un espace vectoriel réel E et l une forme linéaire sur E, strictement positive sur $\mathscr{C} - \{0\}$. On suppose que $\mathscr{C}$ ne contient aucune droite affine et qu'il existe une constante $c > 1$ telle que :*

$$\forall f, g \in \mathscr{C} \qquad \frac{f}{l(f)} \leqslant c\,\frac{g}{l(g)}$$

au sens de l'ordre défini par $\mathscr{C}$. Alors, ou bien $\mathscr{C} = \{0\}$ ou bien $\mathscr{C}$ est réduit à une demi-droite.

(*) normalisée en A.

Prenons f et g telle que $l(f) = l(g) = 1$; pour $\frac{\alpha}{1+\alpha} \leqslant c^{-1}$ on a $f + \alpha(f-g) \in \mathscr{C}$; on voit alors que si

$$\lambda_0 = \frac{1}{c-1},$$
$$f_1 = f + \lambda_0(f-g), f_2 = f + 2\lambda_0(f-g), \ldots, f_p = f + p\lambda_0(f-g), \ldots$$

sont des éléments de $\mathscr{C}$. Il en va de même pour les $g_p = g + p\lambda_0(g-f)$; $\mathscr{C}$ contient donc l'espace affine engendré par f et g et on doit avoir $f = g$; ce qui prouve le lemme.

La théorie de Martin [12] permet de compléter le théorème 6.1 de la manière suivante :

Théorème 6.3. — A *étant un point fixé de* Ω, *et* K_p *désignant la fonction* L-*harmonique minimale* (*) *associée au point frontière* P, *la quantité* $K_P(x)$ *est une fonction continue de* $P \in \partial\Omega$, *et une fonction* L-*harmonique de* $x \in \Omega$. *De plus à chaque fonction* L-*harmonique* $\geqslant 0$ *sur* Ω *on peut associer une mesure de Radon positive* m *sur* $\partial\Omega$ *telle que :*

$$u(x) = \int K_P(x)\, dm(x) .$$

La mesure m *est unique.*

Soit $\{P_n\}$ une suite de points-frontière convergeant vers $P \in \partial\Omega$. Comme dans la partie A) de la démonstration du théorème précédent, on voit que les fonctions $\{K_{P_n}\}$ convergent uniformément vers zéro en tout point frontière Q, distinct de P. On en déduit que toute valeur d'adhérence de $\{K_{P_n}\}$ est une fonction L-harmonique > 0 associée à P et normalisée en A. L'unicité d'une telle fonction montre alors que $\lim_{n\to\infty} K_{P_n}(x) = K_P(x)$ $(x \in \Omega)$. Le reste du théorème découle immédiatement de la théorie de Martin [12].

Remarques. — 1) Évidemment, la correspondance $u \longrightarrow m$ est une homéomorphie linéaire du cône H_L^+ des fonctions L-harmoniques positives, muni de la topologie de la convergence compacte sur Ω, sur le cône des mesures de Radon positives sur $\partial\Omega$ muni de la topologie vague. En particulier, les cônes H_L^+ sont deux à deux isomorphes quand L décrit

$\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$. On verra plus loin que cette propriété n'est pas toujours vérifiée dans un domaine euclidien borné.

2) Les méthodes précédentes peuvent s'étendre à des domaines non lipschitziens; par exemple, un domaine de révolution du type suivant :

$$\Omega = \left\{(x_1,\dots,x_n);\quad \sqrt{\sum_1^{n-1} x_i^2} < f(x_n)\right\}$$

où f est une fonction lipschitzienne sur $\mathbf{R}$, nulle sur $\mathbf{R} - [0,1]$, strictement positive sur $]0,1[$. Ω peut présenter une pointe en $P_0 = (0,\dots,0)$ ou en $P_1 = (0,\dots,0,1)$.

Il suffira de remarquer que pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et pour tout couple (u,v) de fonctions harmoniques positives sur Ω, nulles sur $[\partial\Omega - \{P_0\}] \cap \{x, x_n \leqslant 2t\}$, on a :

$$\frac{u(x)}{u(0,\dots,t)} \leqslant c\,\frac{v(x)}{v(0,\dots,t)} \qquad \forall x \in \{x;\ x_n = t\} \cap \Omega\,.$$

Ces inégalités se déduisent du théorème 5.1, appliqué à Ω au voisinage des points de $\partial\Omega \cap \{x;\ x_n = t\}$. On aura de même des inégalités analogues sur les tranches $\partial\Omega \cap \{x; x_n{=}t\}$ voisines de P_1.

3) Reprenant la méthode de Carleson, et les développements précédents, on peut aussi étendre les théorèmes 6.1 et 6.3 à d'autres domaines tels que : le complémentaire dans $\mathbf{R}^3$ d'un demi-plan, ou encore le domaine $\Omega = \{x;\ x_n \leqslant \sqrt{|x_1|}\}$. Il semble toutefois difficile d'exhiber une classe de domaines de définition assez simple, contenant les domaines lipschitziens et à laquelle on puisse étendre ces théorèmes.

On donne maintenant l'extension aux opérateurs elliptiques du théorème de Fatou sur les limites non-tangentielles du rapport de deux fonctions harmoniques positives; la méthode est essentiellement celle de [10, 11]; il faut néanmoins modifier l'argument de Hunt et Wheeden qui utilise l'invariance par homothétie du Laplacien; on utilise pour cela le principe de Harnack à la frontière. Nous renvoyons à [6] pour la définition de l'effilement d'une partie de Ω relativement à une fonction minimale donnée; le théorème 6.1 permet dans le cas d'un domaine lipschitzien Ω de définir l'effilement minimal en un point frontière d'une partie de Ω.

Le théorème de Fatou sous la forme où il a été étendu par Gowrisankaran à la théorie axiomatique de Brelot [6] se traduit dans la situation considérée ici de la manière suivante :

THÉORÈME 6.4. — *Soient u une fonction* L-*surharmonique positive sur Ω, v une fonction* L-*harmonique positive sur Ω de mesure associée μ; désignons par λ la mesure associée à la plus grande minorante harmonique de u. Pour μ presque-tout $P \in \partial\Omega$, le quotient $\frac{u}{v}$ a une limite fine en P. De plus,* $\lim_{x \to P}$ fine $\frac{u(x)}{v(x)}$ *est une version de la densité de Lebesgue-Nikodym de λ par rapport à μ.*

Pour obtenir un énoncé où la limite fine est remplacée par la limite non-tangentielle, montrons la proposition suivante (on suppose à nouveau que Ω est lipschitzien borné) :

PROPOSITION 6.5. — *Soient u et v deux fonctions* L-*harmoniques > 0 sur Ω. Si $\frac{u}{v}$ admet une limite fine en $P \in \Omega$, $\frac{u}{v}$ admet aussi une limite non-tangentielle en P égale à la limite fine.*

Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 6.6. — *Considérons une couronne*

$$\Psi(x_1,r,r') = \{x;\, r < d(x,x_1) < r'\}$$

avec $r < r' \leqslant r(\lambda,\alpha,M)$. Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de (λ,α,M) et $\frac{r'}{r}$ telle que la L-*mesure harmonique u de $\partial B(x_1,r)$ dans $\Psi(x_1,r,r')$ soit minorée par c sur la sphère $\partial B\left(x_1, \frac{r+r'}{2}\right)$.*

On peut se ramener par des translations et des homothéties à $x_1 = 0$ et $r' = r(\lambda,\alpha,M)$; la mesure harmonique de $\partial\Psi(x_1,r,r')$ est comprise entre deux constantes > 0, et la mesure harmonique de $\partial B(x_1,r')$ dans Ψ tend uniformément vers zéro en tout $Q \in \partial B(x_1,r)$ (d'après 3.7). D'où $u(x) \geqslant \frac{1}{2}$ sur $B(x,\rho)$ avec ρ fixe $r < \rho < r'$, et le lemme découle alors de la propriété de Harnack uniforme.

Démonstration de 6.5. — On raisonne par l'absurde comme dans [11]; si l'assertion de la proposition est en défaut, on trouve un $\varepsilon > 0$ et une suite $\{M_k\}_{k\geqslant 1}$ de points de Ω vérifiant :

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{d(M_k,\partial\Omega)}{PM_k} > 0\,, \qquad \lim_{k\to\infty} M_k = P\,, \qquad \left|\frac{u(M_k)}{\varphi(M_k)} - l\right| \geqslant \varepsilon_2$$

l désignant la limite fine de $\frac{u}{\varphi}$ en P.

En utilisant les inégalités de Harnack et Schauder, on voit que la dernière de ces relations va s'étendre à des boules de centre M_k et de rayon proportionnel à $r_k = d(M_k,P)$ sous la forme :

$$\left|\frac{u(x)}{\varphi(x)} - 1\right| > \varepsilon\,, \qquad \forall x \in B(M_k,cr_k) \quad (c \text{ assez petit})\,.$$

Pour aboutir à une contradiction, il suffit de prouver que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(M_k,cr_k)$ n'est pas effilé en P.

Considérons les cylindres $T(P,A_{t_k},t_k\,.\,r)$, tels que

$$M_k \in \partial T(P,A_{t_k},t_k r)\,.$$

D'après le lemme précédent, la réduite de 1 sur $B(M_k,cr_k)$ dans Ω est minorée par une constante > 0 au point $A_{t_k/2}$; on en déduit que si h désigne la minimale associée à P, $B_k = B(M_k,cr_k)$ et $t'_k = \frac{tk}{2}$, on a :

$$R_h^{B_k}(A_{t'_k}) \geqslant c'h(A_{t_k}) \geqslant c''h(A_{t'_k})\,.$$

En utilisant le principe de Harnack jusqu'au bord :

$$\frac{R_h^{B_k}(x)}{R_h^{B_k}(A_{t'_k})} \geqslant c\,\frac{h(x)}{h(A_{t'_k})} \qquad x \in \partial T(P,A_{t'_k},rt_k) \cap \Omega\,.$$

Soit avec une nouvelle constante c :

$$R_h^{B_k}(x) \geqslant ch(x) \qquad x \in \Omega - T(P, A_{t'_k}, rt'_k)$$

et a fortiori :

$$R_h^A(x) \geqslant ch(x) \qquad \forall x \in \Omega .$$

La réduite R_h^A n'est donc pas un L-potentiel ce qui achève de prouver que A n'est pas effilé en P .

COROLLAIRE 6.7. — *Soient u et v deux fonctions L-harmoniques > 0 sur Ω de mesures associées λ et μ . Le quotient $\frac{u}{v}$ admet une limite non-tangentielle μ-presque partout, et cette limite est une densité de λ par rapport à μ .*

Remarque. — Supposons que Ω ait son adhérence contenue dans un domaine de Green pour L , et désignons par μ_x^L la mesure harmonique de x dans Ω . Pour $P \in \partial\Omega$ et $(B_k)_{k \geqslant 1}$ une suite d'ensembles boréliens de mesures harmoniques > 0 telle que $\lim_{k \to \infty} (\sup_{B_k} d(P,y)) = 0$, le quotient $\frac{\mu_x^L(B_k)}{\mu_A^L(B_k)}$ tend vers $K_P(x)$ quand k tend vers l'infini ; de plus μ_x^L est absolument continue par rapport à μ_A^L . Un raisonnement élémentaire montre alors que $P \longrightarrow K_P(x)$ est une densité de μ_x^L par rapport à μ_A^L . D'où :

$$\forall f \in C(\partial\Omega) \qquad \mu_x^L(f) = \int K_P(x) f(P) d\mu_A^L(x) .$$

On voit ainsi que si une fonction L-harmonique dans Ω est comprise entre deux constantes > 0 sa mesure associée est équivalente à μ_A^L ; B. Dahlberg [4] a montré que dans le cas classique $\Delta = L$ la mesure μ_A^L est équivalente à la mesure de Haussdorf $(n-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

Voici une dernière application du principe de Harnack à la frontière : elle découle immédiatement d'un travail de H. Hueber [8] qui l'a établie en théorie classique pour un domaine à courbure bornée, et mis en évidence le lien entre le principe de Harnack à la frontière et un critère d'existence d'une minorante harmonique :

Théorème 6.8. — *Supposons que les coefficients de* L *soient assez réguliers pour que l'adjoint* L^* *existe et appartienne à une classe* $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ *et soit* Ω *un domaine lipschitzien et greenien pour* L. *Une fonction* s L*-surharmonique sur* Ω *admet une* L*-minorante harmonique si chaque point* $x \in \partial\Omega$ *possède un voisinage ouvert* U *dans* $\mathbf{R}^n$ *tel que* s *possède une minorante harmonique dans* $U \cap \Omega$.

En effet d'après [8] cette propriété est établie si on montre que, pour $P \in \partial\Omega$, et $T(P,A,r)$ cylindre tel que $\Omega \cap T(P,A,r)$ est lipschitzien adapté à $T(P,A,r)$, on a :

« Pour tout L-potentiel p sur $\Omega \cap T(P,A,r)$, il existe un L-potentiel p' sur Ω tel que $p - p'$ est harmonique $T\left(P,A',\frac{r}{2}\right)$ »

Ici A' désigne le milieu de OA.

Soit A'' le milieu de $0A'$ et soit $U = \Omega \cap T(P,A,r)$. La propriété se vérifie immédiatement à partir de la représentation intégrale des potentiels et de ce que, d'après le principe de Harnack à la frontière appliqué au faisceau $\mathscr{H}_L^*$:

$$\frac{G_L^\Omega(A'',y)}{G_L^\Omega(A'',A')} \leqslant c\,\frac{G_L^U(A'',y)}{G_L^U(A'',A')} \quad \forall y \in \Omega \cap T\left(P,A',\frac{r}{2}\right).$$

7. Deux contre-exemples.

Dans cette partie nous construisons une classe de domaines euclidiens dont nous déterminons explicitement la frontière de Martin (pour d'autres exemples voir [12] et [1 bis]); cette construction permet de répondre négativement à deux questions naturelles :

1) Soit Ω un domaine euclidien contenant l'intérieur d'un cône de révolution de sommet S ; est-il vrai que la trace sur l'axe du cône du filtre des voisinages de S est un filtre convergeant dans le compactifié de Martin ordinaire de Ω ? Cette question est due à G. Choquet.

2) Peut-on affirmer que pour tout domaine euclidien borné les compactifiés de Martin de Ω relativement à deux opérateurs elliptiques d'une classe $\mathscr{L}(\lambda,\alpha,M)$ sont naturellement homéomorphes par prolongement de l'identité?

On va voir que la réponse à cette deuxième question peut être négative même pour un couple d'opérateurs elliptiques homogènes et à coefficients constants.

A) *Construction d'une famille de domaines plans.*

Fixons deux nombres α et $\beta > 0$, avec $\alpha + 2\beta < 2\pi$ et considérons le domaine :

$$\Omega_0 = \left\{ z \in \mathrm{C};\quad z = te^{i\theta},\quad 0 < t < 2,\quad |\theta| < \frac{\alpha}{2} + \beta \right\} - \left\{ te^{i\theta};\quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},\quad \theta = \pm \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

On forme Ω à partir de Ω_0, en perçant des trous sur la partie de $\partial\Omega_0$ portée par les segments $\left[0, \frac{1}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}\right]$ et $\left[0, \frac{1}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right]$; plus précisément soit $\{M_n\}$ une suite de points $M_n = t_n e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et soit $\{M'_n\}$ une suite de points $M'_n = t'_n e^{-i\frac{\alpha}{2}}$ avec :

$$\begin{cases} 4t_{n+1} \leqslant t'_n \leqslant \dfrac{1}{4} t_n, & n \geqslant 1 \\ t_1 \leqslant \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

On pose alors

$$\Omega = \Omega_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ te^{i\frac{\alpha}{2}};\ \frac{1}{2} t_n < t < 2t_n \right\} \cup \left\{ te^{-i\frac{\alpha}{2}};\quad \frac{1}{2} t'_n < t < 2t'_n \right\} \right) \right)$$

On a alors les deux théorèmes suivants qui seront établis plus loin (parties B et C); on désigne par A le point d'affixe 1.

THÉORÈME 7.1. — *Si* $\alpha > \beta$ *et si les* $t_1, t'_1, t_2, t'_2, \dots, t_n, t'_n \dots$ *sont successivement choisis assez petits, il existe sur* Ω *une et une seule fonction harmonique ordinaire, positive, associée à* O *et normalisée en* A. *La frontière de Martin de* Ω *s'identifie à la frontière ramifiée de* Ω.

Théorème 7.2. — *Si* $\beta > \alpha$ *et si les* t_1, t'_1, ..., t_n, t'_n... *sont successivement pris assez petits, il existe exactement deux fonctions harmoniques minimales associées à* O *et normalisées en* A; *La suite* $\{M_n\}$ *converge vers l'une de ces minimales* h, *et la suite* M'_n *vers l'autre* h' *et on a :* $\lim\limits_{n\to\infty} h(M'_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} h'(M_n) = 0$. *Toute fonction harmonique* > 0 *associée à* O *est combinaison linéaire de* h *et* h'.

De plus, dans la frontière de Martin de Ω, *ni* h *ni* h' *n'admettent de voisinage connexe.*

Corollaire 7.3. — *Les cas* $\alpha > \beta$ *et* $\beta > \alpha$ *conduisent à des frontières de Martin non homéomorphes entre elles.*

On peut alors répondre négativement aux deux questions :

1) pour la première question, considérons l'exemple fourni par le théorème 2 et désignons par P_n le point d'affixe t_n et par P'_n celui d'affixe t'_n. Les inégalités de Harnack montrent que :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{G_\Omega(P'_n,x)}{G_\Omega(P'_n,A)} \leqslant c\,\dfrac{G_\Omega(M'_n,x)}{G_\Omega(M'_n,A)} \\ \dfrac{G_\Omega(P'_n,x)}{G_\Omega(P'_n,A)} \leqslant c\,\dfrac{G_\Omega(M'_n,x)}{G_\Omega(M'_n,A)} \end{array}\right. \qquad n \geqslant 1, \quad |x| \geqslant 2t_n .$$

On voit que toute valeur d'adhérence de P_n dans le compactifié de Martin de Ω est associée à une harmonique dominée par ch; d'où $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = h$ et de même $\lim\limits_{n\to\infty} P'_n = h'$.

2) Prenons le domaine Ω avec $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$, et $\beta = \dfrac{2\pi}{5}$; (en particulier $\alpha + 2\beta = \pi$). Considérons une transformation linéaire : T : $T(x,y) = (\lambda x, y)$; pour $\lambda > 0$ assez petit, T transforme Ω en un domaine Ω' qui coïncide au voisinage de O avec un domaine de la famille correspondant à des angles α et β tels que $\alpha > \beta$: en choisissant convenablement les t_n et les t'_n, Ω' va vérifier les assertions du théorème 1 et Ω celles du théorème 2; par changement de variables, on voit ques les frontières de Martin de Ω pour l'opérateur $L = \dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ et pour le Laplacien ne sont pas homéomorphes.

B) *Démonstration du théorème* 1.

Commençons par le lemme simple suivant;

LEMME 7.4. — *Considérons un domaine*

$$\Phi(\gamma,\rho) = \{te^{ia};\ 0 < t < \rho\ ,\ 0 < a < \gamma\}$$

avec $0 < \gamma < 2\pi$ *et* $\rho > 0$; *désignons par* μ_x *la mesure harmonique d'un point* x *de* $\Phi(\gamma,\rho)$. μ_x *admet une densité* f *par rapport à la mesure de longueur* σ *sur* $\partial\Phi(\gamma,\rho)$ *telle que* $f(z) = O\left(|z|^{\frac{\pi}{\gamma}-1}\right)$ *quand* $z \in \partial\Phi(\gamma,\rho)$ *tend vers zéro.*

A l'aide d'une transformation conforme $z \longrightarrow z^{\frac{\pi}{\gamma}}$, on se ramène au domaine $\Phi\left(\pi,\rho^{\frac{\pi}{\gamma}}\right)$, pour lequel on sait (par exemple, en utilisant la formule de Poisson pour le demi-plan) que $f(z) = O(1)$ au voisinage de zéro.

LEMME 7.5. — *Soit* μ_x *la restriction de la mesure harmonique de* x *dans* $\Omega - \overline{B}(O,t_n)$ *à* $\partial B(O,t_n)$ *et soit* $\varepsilon > 0$; *posons* $Q_n = t'_{n-1}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$. *Si* $\alpha > \beta$, *il existe un nombre* $\eta_1(\varepsilon,t_{n-1})$ *et un nombre* $\eta_2(\varepsilon,t'_{n-1})$ *tels que si*

$$\frac{t'_{n-1}}{t_{n-1}} \leqslant \eta_1(\varepsilon,t_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad \frac{t_n}{t'_{n-1}} \leqslant \eta_2(\varepsilon,t'_{n-1}),$$

alors on a :

$$\mu_{Q_n} \leqslant \varepsilon\mu_A .$$

Démonstration. — *a*) $\partial B(O,t_n)$ se décompose en deux arcs de cercles C_n et C'_n situés respectivement au-dessus et au-dessous de la demi-droite $\mathrm{Arg}^t(z) = -\frac{(\alpha+\beta)}{2}$; il suffit d'établir l'assertion du lemme pour chacune des restrictions de μ_x à C_n et C'_n .

D'autre part, le principe de Harnack à la frontière montre qu'avec une constante $c > 0$:

$$\frac{1}{c}\,\frac{\mu_x(f)}{\mu_{A_n}(f)} \leqslant \frac{\mu_x(C_n)}{\mu_{A_n}(C_n)} \leqslant c\,\frac{\mu_x(f)}{\mu_{A_n}(f)}, \qquad \text{où} \qquad A_n = \frac{3}{2}\,t_n\ ,$$

pour $f \in \mathscr{C}^+(C_n)$ et $|x| = \frac{3t_n}{2} e^{i\theta}$, $-\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2} + \beta$. Ces inégalités s'étendent à $\Omega - B\left(0,3\frac{t_n}{2}\right)$.

Cela prouve qu'il suffit, en ce qui concerne la restriction de μ_x à C_n, d'établir $\mu_{Q_n}(C_n) \leqslant \varepsilon\mu_A(C_n)$ pour t'_{n-1} et t_n assez petits. Un raisonnement analogue montre que la majoration relative à la restriction de μ_x à C'_n se réduit à établir $\mu_{Q_n}(C'_n) \leqslant \varepsilon\mu_A(C'_n)$ dans les conditions du lemme.

b) Soit $U = \left\{te^{i\theta};\ 0 < t < \frac{t_{n-1}}{2}, + \frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2} + \beta\right\}$; posons $S = \overline{U} \cap \left\{|z| = \frac{t_{n-1}}{2}\right\}$ et $\delta = \overline{B}(0,2t_n) \cap \partial U$. ν_x^U désignant la mesure harmonique de x relativement à U, on a l'inégalité :

$$\mu_{Q_n}(C_n) \leqslant c_1(\nu_{Q_n}^U(\delta) + \mu_{M_{n-1}}(C_n)\nu_{Q_n}^U(S)) ;$$

on obtient cette inégalité en observant que $\nu_x^U(\delta)$ est minoré par une constante > 0, sur $B(0,t_n) \cap U$, et que d'après le principe de Harnack et l'estimation de Carleson $\mu_x(C_n)$ est majoré sur S par $c\mu_{M_{n-1}}(C_n)$.

t_{n-1} étant fixé, on a avec une nouvelle constante c'_1 :

$$\mu_{Q_n}(C_n) \leqslant c_1\{\nu_{Q_n}^U(\delta) + C'_1\mu_A(C_n)\nu_{Q_n}^U(S)\} .$$

U est fixe, de sorte qu'en choisissant $Q_n = t'_{n-1}$ assez petit :

$$c_1 . c'_1 . \nu_{Q_n}^U(S) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il faut maintenant majorer $\nu_{Q_n}^U(\delta)$, t'_{n-1} étant fixé; pour cela introduisons le domaine $V = \{te^{i\theta}; |\theta| < \frac{\alpha}{2}, 0 < t < 2\}$ et posons $\delta' = \partial V \cap B(0,t_n)$. Alors

$$\mu_A(C_n) \geqslant \nu_A^V(\delta') .$$

Mais t'_{n-1} étant fixe, le lemme 4 permet de comparer $\nu_A^V(\delta')$ et $\nu_{Q_{n-1}}^U(\delta)$ quant t_n tend vers zéro; si t_n est pris assez petit devant t'_{n-1} :

$$\frac{\varepsilon}{2 . C_1} \nu_A^V(\delta') \geqslant \nu_{Q_{n-1}}^U(\delta) ,$$

ce qui achève de prouver la majoration $\mu_{Q_n}(C_n) \leqslant \varepsilon\mu_A(C_n)$ dans les conditions de l'énoncé.

c) Traitons alors l'inégalité $\mu_{Q_n}(C'_n) \leqslant \varepsilon\mu_A(C'_n)$. De même que précédemment :

$$\mu_{Q_n}(C'_n) \leqslant c\{\mu_{A_n}(C'_n).\nu^U_{Q_n}(\delta) + \mu_{M_{n-1}}(C'_n).\nu^U_{Q_n}(S))\}$$

en notant que $\mu_x(C'_n)$ est majoré par $c.\mu_{A_n}(C'_n)$ sur $\left\{te^{i\frac{\alpha}{2}}; t \leqslant 2t_n\right\}$. Pour $\frac{t'_{n-1}}{t_{n-1}}$ assez petit on a comme en *a*) :

$$c.\mu_{M_{n-1}}(C'_n).\nu^U_{Q_n}(S) \leqslant c'\mu_A(C'_n)\nu^U_{Q_n}(S) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mu_A(C'_n).$$

Comme $\mu_x(C'_n)$ est majoré par $c.\mu_{M'_{n-1}}(C'_n)$ sur $\left\{\frac{1}{2}t'_{n-1}e^{i\theta}; -\frac{\alpha}{2} - \beta < \theta < -\frac{\alpha}{2}\right\}$ on voit que

$$\mu_{A_n}(C'_n) \leqslant c\mu_{M'_{n-1}}(C'_n) \leqslant c'.\mu_A(C'_n);$$

(on utilise le principe de Harnack, t'_{n-1} étant maintenant fixé); $\nu^U_{Q_n}(\delta)$ devient aussi petit qu'on veut quand t_n tend vers zéro, d'où l'inégalité cherchée pour $t_n \leqslant \eta_2(\varepsilon,t'_{n-1})$.

Remarque. — on a évidemment un résultat analogue pour la restriction à $B(O,t'_{n-1})$ de la mesure harmonique μ'_x de x dans $\Omega - B(O,t_{n-1})$ quand on compare ses valeurs en $Q'_n = t_{n-1}e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ et en A.

Démonstration du théorème 1. — Choisissons les rapports $\frac{t'_{n-1}}{t_{n-1}}, \frac{t_n}{t'_{n-1}}$ assez petits pour avoir pour chaque $n \geqslant 1$:

$$\mu_{Q_n} \leqslant \varepsilon_n\mu_A, \quad \mu_{Q'_n} \leqslant \varepsilon'_n\mu'_A \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = O$$

(Noter que μ et μ' dépendent en fait de n).

Si h est harmonique positive sur Ω, associée à O, on aura :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(Q_n)}{h(A)} = O \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{h(Q'_n)}{h(A)} = O.$$

Soient h_1 et h_2 deux fonctions harmoniques >0 sur Ω associées à O et normalisées en A. Le principe de Harnack à la frontière montre qu'on a avec une constante $c>0$:

$$\frac{1}{c}\,\frac{h_1(x)}{h_1(\mathrm{M}_n)} \leqslant \frac{h_2(x)}{h_2(\mathrm{M}_n)} \leqslant c\,\frac{h_1(x)}{h_1(\mathrm{M}'_n)} \quad x \in \mathrm{C}_n\,.$$

D'où avec l'inégalité de Carleson sur C'_n et le principe du maximum

$$(1) \qquad h_1(x) \leqslant h_2(x)\cdot\left(c\,\frac{h_1(\mathrm{M}_n)}{h_2(\mathrm{M}_n)}\right) + c'h_1(\mathrm{Q}_n)$$

lorsque x parcourt $\Omega - \mathrm{B}(\mathrm{O},t_n)$. En écrivant cette inégalité pour $x=\mathrm{A}$ on voit que le rapport $h_1(\mathrm{M}_n)/h_2(\mathrm{M}_n)$ reste minoré par $\frac{1}{c}-\frac{c'}{c}\,h_1(\mathrm{Q}'_n)$; revenant à (1) et inversant les rôles de h_1 et h_2:

$$\frac{1}{c}\,h_1 \leqslant h_2 \leqslant c^2h_1 \quad \text{sur} \quad \Omega\,.$$

Il n'y a donc qu'une seule $h>0$ harmonique sur Ω associée à O normalisée en A. Le reste du théorème se démontre sans difficultés en adaptant les raisonnements de 6.1.

C) *Démonstration du théorème* 2.

Nous supposons désormais que $\alpha<\beta$. On a maintenant le lemme suivant, analogue au lemme 5:

Lemme 7.6. — *Avec les notations du lemme* 5, *pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe des nombres* $\eta_1(\varepsilon, t'_{n-1})$ *et* $\eta_2(\varepsilon,\rho)$ *tels que si* $\mathrm{P}\in\mathbf{R}^+$ $\mathrm{OP}\leqslant\eta_1(\varepsilon,t'_{n-1})$ *et si* $t_n\leqslant\eta_2(\varepsilon,\mathrm{OP})$ *on a:* $\mu_{\mathrm{P}}(\mathrm{C}_n)\leqslant\varepsilon\mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}_n)$.

Démonstration. — On introduit les domaines suivants:

$$\mathrm{U}=\left\{te^{i\theta};\quad 0<t<\frac{1}{2}\,t'_{n-1}\,,\quad -\frac{\alpha}{2}<\theta<+\frac{\alpha}{2}\right\}$$

et

$$\mathrm{V}=\left\{te^{i\theta};\quad 0<t<2\,,\quad \frac{\alpha}{2}<\theta<\frac{\alpha}{2}+\beta\right\}.$$

Posons

$$A' = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \delta = \partial U \cap B(0,2t_n),$$
$$\delta' = \partial V \cap B\left(O, \frac{1}{2} t_n\right), \quad F = \partial U \cap \partial B\left(O, \frac{t'_{n-1}}{2}\right).$$

On a alors avec une constante absolue $c > 0$ et une constante $c' > 0$ qui dépend de t'_{n-1} les relations suivantes :

$$\mu_P(C_n) \leqslant c \, \{\nu_P^U(\delta) + \mu_{M'_{n-1}}(C_n)\nu_P^U(F)\}$$
$$\mu_P(C_n) \leqslant c \, \{\nu_P^U(\delta) + c'\mu_A(C_n)\nu_P^U(F)\} .$$

Prenant OP/t'_{n-1} assez petit $cc'\nu_P^U(F) \leqslant \varepsilon/2$.

D'autre part, $\mu_A(C_n) \geqslant c_1\mu_{A'}(C_n) \geqslant c_2\nu_{A'}^V(\delta')$.

En utilisant le lemme 4, P étant maintenant fixé, on voit comme dans le lemme 5, que pour t_n assez petit $c\nu_P^U(\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\nu_A^V(\delta')$.

Posons maintenant

$$\Omega_n = \Omega_0 \cup \left[\bigcup_{p=1}^{n-1} \left\{te^{i\frac{\alpha}{2}}, \frac{t_p}{2} < t < 2t_p\right\}\right] \cup \left[\bigcup_{p=1}^{n-1} \left\{te^{-i\frac{\alpha}{2}}, \frac{t'_p}{2} < t < 2t'_p\right\}\right].$$

La frontière de Martin de Ω_n s'identifie avec sa frontière ramifiée; en particulier il existe trois minimales associées à O , et normalisées en A; désignons par K_1^n , K_2^n et K_3^n ces minimales qui sont distinguées par les conditions

$$\lim_{\substack{\theta \leqslant \frac{\alpha}{2} \\ t \to 0}} K_1^n(te^{i\theta}) = O , \quad \lim_{\substack{|\theta| \geqslant \frac{\alpha}{2} \\ t \to 0}} K_2^n(te^{i\theta}) = O , \quad \lim_{\substack{\theta \geqslant -\frac{\alpha}{2} \\ t \to 0}} K_3^n(te^{i\theta}) = 0 .$$

On considère aussi le domaine

$$\tilde{\Omega}_n = \Omega_n \cup \left\{te^{+i\frac{\alpha}{2}} ; \ \frac{t_n}{2} < t < 2t_n\right\},$$

et on note $\tilde{K}_1^n$, $\tilde{K}_2^n$ et $\tilde{K}_3^n$ les trois minimales analogues aux K_i associées à O .

Lemme 7.7. — *Fixons* t_1 , t'_1 , ... t_{n-1} , t'_{n-1}; *lorsque* t_n *tend vers zéro la minimale* $\tilde{K}_1^n$ *tend pour la topologie de la convergence compacte vers* K_1^n .

Démonstration. — D'après le lemme précédent, on a, pour chaque $k > 0$, un point x_k sur le demi-axe réel positif tel que

$$x_k < \frac{1}{k}, \quad \text{et pour } t_n \text{ assez petit,} \quad \tilde{K}_1^n(x_k) \leqslant \frac{1}{k}\,\tilde{K}_1^n(A) = \frac{1}{k}.$$

Toute fonction f adhérente à la suite $\{\tilde{K}_1^n\}$ vérifiera donc : $f(A) = 1$, $\lim f(x_k) = 0$, et, d'après le principe de Harnack à la frontière, $\lim\,[f(x)] = 0$ quand x tend vers un point frontière de Ω_n distinct de O , ou quand x tend vers O en restant dans le secteur $-\beta - \frac{\alpha}{2} < \operatorname{Arg}^t(x) < -\frac{\alpha}{2}$.

Mais les estimations de Carleson montrent qu'avec une constante $c > 0 : f(x) \leqslant cf(x_k)$ pour $x = x_k$ et $|\operatorname{Arg}^t(x)| < \frac{\alpha}{2}$. En appliquant le principe du maximum à la fonction f dans le domaine compris entre deux arcs de cercles

$$\left\{x;\ \ |x| = x_k\,,\ \ |\operatorname{Arg}^t(x)| \leqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$$

on obtient $\lim f(x) = 0$, quand x tend vers O dans le secteur $|\operatorname{Arg}(x)| < \frac{\alpha}{2}$.

D'où $f = K_1^n$ (principe de Bouligand pour la frontière ramifiée) et le lemme est établi.

Remarque. — On majore aisément $\tilde{K}_3^n$ dans le domaine $\left\{te^{i\theta};\ \ 0 < t < \frac{t_{n-1}}{2},\ \ -\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2} + \beta\right\}$ par un homothétique de la mesure harmonique dans ce domaine de l'arc $\left\{\frac{t_{n-1}}{2}\,e^{i\theta}\,,\ -\frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{\alpha}{2} + \beta\right\}$; on en déduit que $\tilde{K}_3^n$ tend, lorsque t_n tend vers zéro, vers K_3^n .

De même, pour t_1 , ... t_n fixés et t'_n tendant vers 0 , K_1^{n+1} tend vers $\tilde{K}_1^n$, et K_3^{n+1} vers $\tilde{K}_3^n$.

Faisons encore la remarque suivante :

LEMME 7.8. — *Fixons* t_1, t'_1, ... t_{n-1}; *pour* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe* $\eta > 0$, *tel que pour* $t'_{n-1} < \eta$, *on a* $K_1^n(M'_{n-1}) \leqslant \varepsilon$.

Il suffit de remarquer que $K_1^n(z)$ est d'après les inégalités de Harnack uniformément majoré sur l'arc de cercle $\Gamma = \left\{z;\ z = \frac{1}{2}t_{n-1}e^{i\theta},\ -\frac{\alpha}{2} - \beta < \theta < \frac{\alpha}{2}\right\}$. On peut donc majorer K_1^n par une fonction proportionnelle à la mesure harmonique de cet arc dans le triangle curviligne

$$\left\{z;\quad z = re^{i\theta},\quad 0 < r < \frac{1}{2}t_{n-1},\quad -\frac{\alpha}{2} - \beta < \theta < \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Démonstration du théorème 2. — Les lemmes 7 et 8 montrent qu'en choisissant les t_i, t'_i successivement assez petits on aura

$$K_3^p(M_n) < \frac{1}{n} \qquad K_1^p(M'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad n \leqslant p.$$

a) Désignons par h (resp. h') une valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence compacte de la suite $\{K_1^p\}$ (resp. de la suite $\{K_3^p\}$). On a :

$$h'(M_n) < \frac{1}{n} \qquad h(M'_n) < \frac{1}{n}.$$

Posons comme dans le lemme 2, $Q_n = t'_{n-1}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ et $Q'_n = t_n e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ et soient C_n, C'_n les deux arcs de cercles composant $\partial B(O,t_n) \cap \Omega$.

Remarquons d'abord, que d'après les inégalités de Harnack à la frontière, les fonctions K_1^p et K_3^p tendent uniformément vers zéro en tout point frontière de Ω distinct de O; h et h' sont donc associées à O.

D'autre part, on a nécessairement $\liminf_{n\to\infty} h'(Q'_n) > 0$: sinon, on déduirait du principe du maximum dans les domaines $\Omega - \mathring{B}(O,t_n)$ que $h' = 0$; de même, $\liminf h(Q_n) > 0$.

Remarquons enfin, qu'on a $\lim_{n\to\infty} h(Q'_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} h'(Q_n) = 0$: il suffit pour la première de ces relations d'appliquer le principe du maximum dans le domaine

$$\Omega \cap \complement B(O,2t'_n) \cap \mathring{B}\left(O, \frac{1}{2} t'_{n-1}\right) \cap \left\{x;\ \mathrm{Arg}^t(x) < -\frac{\alpha}{2}\right\}$$

et de majorer h à la frontière de ce domaine à l'aide des estimations de Carleson par $c(h(M'_n) + h(M'_{n-1}))$.

b) Soient u,v,w trois fonctions harmoniques positives sur Ω, normalisées en A , et associées à O; appliquant les inégalités de Harnack à la frontière aux points d'intersection de $\partial B(O,t_n)$ et $\partial\Omega$, on a :

$$\frac{u(x)}{u(M_n)} \leqslant c\,\frac{v(x)}{v(M_n)} \quad \forall x \in C_n \qquad \text{et} \qquad \frac{u(x)}{u(Q'_n)} \leqslant c\,\frac{w(x)}{w(Q'_n)}, \quad x \in C'_n\,.$$

D'où on déduit, d'après le principe du maximum :

$$(1)\quad \frac{1}{c}\,u(x) \leqslant u(M_n)\,\frac{v(x)}{v(M_n)} + u(Q'_n)\,\frac{w(x)}{w(Q'_n)}, \qquad x \in \left(\complement B(O,t_n)\right) \cap \Omega\,.$$

Désignons par k une fonction harmonique positive sur Ω associée à O et normalisée en A; écrivons la relation (1) au point $x = A$ pour le triplet $(u,v,w) = (h,k,h')$. On obtient :

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{h(M_n)}{k(M_n)} + \frac{h(Q'_n)}{h'(Q'_n)}\,.$$

De ce qui a été établi plus haut sur le comportement de $h(Q'_n)$ et $h'(Q'_n)$, on déduit que $\frac{1}{c} \leqslant \liminf \frac{h(M_n)}{k(M_n)}$. On démontre de la même façon en considérant le triplet $(u,v,w) = (h',h,k)$ que $\frac{1}{c} \leqslant \liminf \frac{h'(Q'_n)}{k(Q'_n)}$.

Reprenons alors l'inégalité (1) pour le triplet (k,h,h') , et faisons tendre n vers l'infini; on obtient :

$$(2)\qquad \frac{1}{c}\,k(x) \leqslant ch(x) + ch'(x) \quad \forall x \in \Omega\,.$$

c) Montrons que h et h' sont minimales distinctes; si k est asociée à O et vérifie $\lim k(Q'_n) = 0$ et $k(A) = 1$, le passage à la limite dans les inégalités (1) pour le triplet (k,h,h') donne :

$$(2') \qquad \frac{1}{c}\, k(x) \leqslant c h(x) \quad \forall x \in \Omega$$

puisqu'ici $\lim \dfrac{k(Q'_n)}{h'(Q'_n)} = 0$, ce qui prouve que h est minimale; on montre de même que h' est minimale. (On peut utiliser le lemme 6.2.).

Si h et h' étaient identiques, le principe du maximum dans $\hat{\Omega} - \mathring{B}(O,t_n)$ et un passage à la limite donneraient $h = 0$, ce qui est absurde.

d) Le cône des fonctions harmoniques positives sur Ω et associées à O est réticulé : le lemme de décomposition de Riesz appliqué à l'inégalité (2), et la minimalité de h et h' montrent que ce cône est le cône engendré par h et h'.

e) Montrons que M_n converge dans le compactifié de Martin $\hat{\Omega}$ de Ω; on désigne par $G(x,y)$ la fonction de Green de Ω.

Soit R_n le point d'affixe $\dfrac{2}{3}\, t_n e^{i\frac{\alpha}{2}}$; posons $k_n(x) = \dfrac{G(R_n,x)}{G(R_n,A)}$, k_n est surharmonique positive sur Ω, harmonique sur $\Omega - \{R_n\}$, et tend vers zéro en tout point frontière de Ω; on a, exactement comme plus haut :

$$\frac{1}{c}\, h(x) \leqslant h(M_n)\, \frac{k_n(x)}{k_n(M_n)} + h(Q'_n)\, \frac{h'(x)}{h'(Q'_n)}, \quad |x| \geqslant t_n .$$

D'où on tire en faisant $x = A$ et en passant à la limite :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{k_n(M_n)}{h(M_n)} \leqslant c . \tag{3}$$

D'autre part, les inégalités de Harnack usuelles au voisinage de la sphère de centre M_n et de rayon $\dfrac{2}{5}\, t_n$, et le principe du maximum montrent que : (avec une constante c')

$$k_n(x) \leqslant c' k_n(M_n)\, \frac{h(x)}{h(M_n)}, \qquad x \in \Omega - B\left(M_n, \frac{2}{5}\, t_n\right).$$

D'où avec la relation (3) :

$$\limsup_{n\to\infty} k_n(x) \leqslant cc'h(x) \quad \forall x \in \Omega \, .$$

De la minimalité de h et de cette relation, on tire aussitôt que la suite $\{R_n\}$ converge vers h dans le compactifié de Martin de Ω ; une nouvelle utilisation des inégalités de Harnack montre qu'il en va de même pour la suite $\{M_n\}$.

De même, la suite $\{M'_n\}$ converge vers h' .

f) Les minimales associées à des points d'un segment S maximum dans $\partial\Omega$ porté par $\left\{z ;\ \arg^t(z) = +\frac{\alpha}{2}\right\}$ forment une partie compacte et ouverte de la frontière de Martin de Ω ; d'autre part, on vérifie facilement que dans $\hat{\Omega}$ $\lim\left(\frac{1}{2}\, t_n e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = h$: il suffit d'utiliser encore les inégalités de Harnack pour se ramener à la convergence de $\{M_n\}$ vers h . Ceci prouve que h n'a pas de voisinage connexe dans $\partial\hat{\Omega}$ et h' a évidemment la même propriété.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Remarques sur la variation des fonctions harmoniques et les masses associées. Application, *Ann. Inst. Fourier*, II (1950), 101-111.

[1bis] M. Brelot, Sur le principe des singularités positives et la topologie de R.S. Martin, *Ann. Univ. Grenoble*, 23, 298-30 (1950), 307.

[2] N. Boboc et P. Mustata, Espaces harmoniques associés aux opérateurs différentiels linéaires du second ordre de type elliptique, *Lecture Notes*, 68, Springer Verlag (1968).

[3] L. Carleson, On the existence of boundary values for harmonic functions of several variables, *Ark. Math.*, 4 (1962).

[4] B. Dahlberg, A note on sets of harmonic measure zero, Preprint.

[5] D. Gildbarg et J. Serrin, On isolated singularities of solutions of second order elliptic equations, *J. d'Anal. Math.*, 4 (1954-1956), 309-340.

[6] K. Gowrisankaran, Fatou-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier*, 16 (1966), 455-467.

[7] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 12 (1962), 415-571.

[8] H. Hueber, Uber die existenz harmonisher minoranten von superharmonishen Funktionen, *Mat. Ann.*, 225 (1977), 99-114.

[9] J. T. KEMPER, A Boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities, *Comm. pure appl. math.*, 25 (1972), 247-255.

[10] R. A. HUNT and R. L. WHEEDEN, On the boundary values of harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 132, n° 2 (1968), 307-322.

[11] R. A. HUNT and R. L. WHEEDEN, Positive harmonic functions on Lipschitz domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 147 (1970), 507-527.

[12] R. S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 (1941), 137-172.

[13] K. MILLER, Barriers on cones for uniformly elliptic operators, *Ann. Math. pura ed. applicata*, IV, vol. 76 (1967), 93-106.

[14] C. MIRANDA, Partial differential equations of elliptic type, Springer Verlag (1970).

[15] J. C. TAYLOR, On the Martin compactification of a bounded Lipschitz domain in a Riemannian manifold, Preprint.

[16] J. SERRIN, On the Harnack inequality for linear elliptic equations, *J. d'Anal. Math.*, 4 (1956), 292-308.

[17] C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine limité par des surfaces à courbure bornée, *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 2, vol 2 (1933), 167-192.

[18] K. O. WIDMANN, Inequalities for the Green function and boundary of the gradient of solutions of elliptic equations, *Math. Scand.*, 21 (1967), 17-37.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1977
Proposé par M. Brelot.

Alano ANCONA,
E.N.S.E.T.
61, avenue du Président Wilson
94230 Cachan.