

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES DUPAIN

Discrépance de la suite $(\{n\alpha\})$, $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 1 (1979), p. 81-106

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_81_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISCRÉPANCE DE LA SUITE

$$\left(\left\{ n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \right) \quad (1)$$

par Yves DUPAIN

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

Introduction.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points du tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} et I un intervalle du tore. Pour N entier naturel, posons :

$$\varphi(I, N) = \text{card} \{n, 0 \leq n < N, u_n \in I\} - N \mu(I),$$

μ désignant la mesure de Haar normalisée du tore.

Soit \mathcal{J} (respectivement \mathcal{J}^*) l'ensemble des intervalles du tore (respectivement des intervalles de la forme $[0, \beta[$). Posons :

$$D(N) = \sup_{I \in \mathcal{J}} \varphi(I, N) \quad \text{et} \quad D^*(N) = \sup_{I \in \mathcal{J}^*} |\varphi(I, N)|.$$

Le nombre réel $D(N)$ (respectivement $D^*(N)$) est la $N^{\text{ième}}$ discrédance (respectivement discrédance à l'origine) de la suite u .

Remarquons que $D^*(N) \leq D(N) \leq 2D^*(N)$.

Pour une suite u donnée, posons :

$$S(u) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{D(N)}{\text{Log } N} \quad \text{et} \quad S^*(u) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{D^*(N)}{\text{Log } N}$$

(on a donc $S^*(u) \leq S(u) \leq 2S^*(u)$). Nous nous intéressons aux suites à "petite discrédance". W.M. Schmidt a démontré que pour toute suite u , on a l'inégalité $S(u) \geq (66 \text{ Log } 4)^{-1}$. La suite à plus "petite discrédance" connue est actuellement la suite de Van der Corput, pour laquelle S. Haber a prouvé l'égalité :

(¹) $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel x .

$S^*(u) = (3 \operatorname{Log} 2)^{-1} \approx 0,48$. Considérons maintenant les suites $(\{n\alpha\})$. Si les quotients partiels de α sont majorés par K , H. Niederreiter a prouvé l'inégalité :

$$S(\{n\alpha\}) \leq \left(\operatorname{Log} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right)^{-1} + K (\operatorname{Log} (K + 1))^{-1}.$$

Pour la suite particulière $u = \left(\left\{ n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \right)$, A. Gillet et V.T. Sos ont respectivement démontré les résultats suivants :

$$0,15 \left(\operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-1} \leq S(u) \leq (\sqrt{5} + 1) \left(3 \sqrt{5} \operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-1} \\ \text{et } S(u) \leq 1.$$

Pour tous ces résultats, ainsi que certains approfondissements, on peut consulter L. Kuipers et H. Niederreiter [3].

Nous allons étudier la suite $\left(\left\{ n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \right)$ et démontrer le résultat suivant :

$$\text{THEOREME.} - S^*\left(\left(\left\{ n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}\right)\right) = 0,15 \operatorname{Log} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-1}.$$

Remarque. — Soit f une fonction à variation bornée sur $[0, 1]$, et soit $(x_n)_{n \in \{1, 2, \dots, N\}}$ une suite finie de points de $[0, 1[$. On a l'inégalité suivante (Kòksma) :

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \right| \leq V(f) \frac{D^*(N)}{N}.$$

On voit donc que les suites à petite discrèpançe, comme la suite $\left(\left\{ n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \right)$, pourraient être utilisées avec profit en intégration numérique.

0. Notations et rappels.

Considérons un nombre irrationnel α et la suite $(\{n\alpha\})$. Soit γ un nombre réel, $0 \leq \gamma < 1$ que nous identifions à son image sur le tore. Pour N entier naturel posons :

$$\varphi^-(\gamma, N) = \text{card} \{n, 0 \leq n < N, \{n\alpha\} \in [0, \gamma[] - N\gamma$$

$$\varphi^+(\gamma, N) = \text{card} \{n, 0 < n \leq N, \{n\alpha\} \in]0, \gamma] \} - N\gamma.$$

Remarquons que $\varphi^-(\gamma, N) = \varphi([0, \gamma[, N)$.

Développons α en fraction continue. Les suites des quotients partiels de α et des dénominateurs des réduites de α seront notées respectivement $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ avec la convention $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$. Posons enfin $\lambda_n = \|q_n \alpha\|$ ($\|x\|$ désigne la distance du nombre réel x à l'entier le plus proche).

Une suite d'entiers $(b_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ sera dite normale (pour α) si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$0 \leq b_1 \leq a_1 - 1$$

$$0 \leq b_k \leq a_k \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots$$

$$b_k = a_k \implies b_{k-1} = 0 \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots$$

Il n'existe pas d'entier impair l tel que $b_k = a_k$ pour $k = l, l+2, l+4, \dots$

De même, nous dirons qu'une suite finie $(b_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K\}}$ est normale (pour α) si elle vérifie les trois premières propriétés précédentes.

Soit β un nombre réel, $0 < \beta < 1$. Développer β par rapport à α , c'est associer à β une suite normale (b_k) et une suite (r_k) telles que : $r_k = \sum_{i=1}^k b_i q_i$ et $\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \{r_k \alpha\}$.

Un tel développement existe et est unique, et réciproquement, toute suite normale définit un nombre β (cf. [4]).

Notons les propriétés suivantes (que l'on peut trouver dans [4] et [5] ou qui s'en déduisent aisément) :

(i) tout nombre entier $x < q_{n+1}$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{k=1}^n d_k q_k$ où la suite $(d_k)_{k \in \{1, 2, \dots, n\}}$ est normale, et réciproquement toute suite normale $(d_k)_{k \in \{1, 2, \dots, n\}}$ définit un nombre entier $x < q_{n+1}$

(ii) pour tout entier $n > 0$: $\lambda_n q_{n+1} + \lambda_{n+1} q_n = 1$.

Soit $(d_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ une suite normale définissant le nombre β .

Posons $r_k = \sum_{i=1}^k d_i q_i$. Alors :

(iii) pour tout entier $n > 0$, $\left| \beta - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} d_k \lambda_k \right| \leq \lambda_n$

(iv) pour tous entiers $n > 0$ et $p > 0$,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} (-1)^{k+1} d_k \lambda_k \right| \leq \lambda_{n-1} - \lambda_{n+p+1}$$

(v) pour tous entiers $N > 0$ et $k > 0$ tels que $N < q_{k+1}$

$$|\varphi^-(\beta, N) - \varphi^-({r_k \alpha}, N)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\varphi^+(\beta, N) - \varphi^+({r_k \alpha}, N)| \leq 1$$

(vi) pour tous entiers $u > 0$ et $v > 0$, $\varphi^+({u \alpha}, v) = \varphi^-({v \alpha}, u)$

(vii) pour tout élément du tore γ et tout entier $u > 0$,

$$|\varphi^+(\gamma, u) - \varphi^-(\gamma, u)| \leq 1$$

(viii) si $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, pour tout entier $k > 0$, $\lambda_k = \alpha \lambda_{k+1}$.

Dans [2], nous avons démontré le lemme suivant :

LEMME 0. — Soient $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite normale et $r_k = \sum_{i=1}^k b_i q_i$.

Soient m et x deux entiers, $m > 0$ et $0 \leq x < q_{m+1}$; x s'écrit $x = x_{m-1} + d_m q_m$ (où $0 \leq x_{m-1} < q_m$ et $0 \leq d_m \leq a_m$). Alors :

(1) Si m est impair :

$$\varphi^-({r_m \alpha}, x) = \varphi^-({r_{m-1} \alpha}, x_{m-1}) - \lambda_m (d_m r_{m-1} + b_m x) + A_m(x)$$

$$\text{où} \quad A_m(x) = \begin{cases} \text{Min}(d_m + 1, b_m) & \text{si } x_{m-1} > r_{m-1} \\ \text{Min}(d_m, b_m) & \text{si } x_{m-1} \leq r_{m-1}. \end{cases}$$

(2) Si m est pair :

$$\varphi^-({r_m \alpha}, x) = \varphi^-({r_{m-1} \alpha}, x_{m-1}) + \lambda_m (d_m r_{m-1} + b_m x) - B_m(x)$$

$$\text{où :} \quad B_m(x) = \begin{cases} \text{Min}(d_m, b_m) & \text{si } x_{m-1} > r_{m-1} \\ \text{Min}(d_m, b_m + 1) & \text{si } 0 < x_{m-1} \leq r_{m-1} \\ \text{Min}(\text{Max}(d_m - 1, 0), b_m) & \text{si } x_{m-1} = 0. \end{cases}$$

COROLLAIRE 0. — Soient $(b_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K\}}$, $(b'_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K\}}$, $(d_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K\}}$, $(d'_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K\}}$ quatre suites normales et n un entier, $n \in \{1, 2, \dots, K\}$ tels que pour $k \neq n$, $b_k = b'_k$ et $d_k = d'_k$.
Posons :

$$r = \sum_{k=1}^K b_k q_k, \quad r' = \sum_{k=1}^K b'_k q_k, \quad x = \sum_{k=1}^K d_k q_k, \quad x' = \sum_{k=1}^K d'_k q_k.$$

Alors : $|\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r'\alpha}, x')| \leq a_n.$

Ce corollaire est une conséquence immédiate du lemme 0, de (ii) et de (iv).

1. Préliminaires – Présentation des calculs.

Dans tout ce qui suit, α désigne le nombre $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (dont les quotients partiels a_n sont tous égaux à 1) et q_n le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de α . Nous avons donc les relations suivantes $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$ et $\lambda_{n+1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n$. Les fonctions D^*, φ, φ^- et φ^+ sont celles correspondant à la suite $\left(\left\{n \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}\right)$.

Notre but est de calculer :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{D^*(N)}{\text{Log } N} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{\beta \in [0, 1[} \left| \frac{\varphi^-(\beta, N)}{\text{Log } N} \right|.$$

Pour cela, il suffit d'évaluer pour tout entier K , $\sup_{\substack{r < q_K \\ x < q_K}} \varphi^-({r\alpha}, x)$.

En effet :

$$S^* = \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{q_{K-1} < N < q_K} \sup_{\beta \in [0, 1[} \left| \frac{\varphi^-(\beta, N)}{\text{Log } N} \right|.$$

Or $\text{Log } q_K \sim K \text{Log } \alpha$, d'où :

$$S^* = \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K \text{Log } \alpha} \sup_{q_{K-1} < N < q_K} \sup_{\beta \in [0, 1[} |\varphi^-(\beta, N)|.$$

D'après le corollaire 0 la condition sur N peut être remplacée par $N < q_K$, et :

$$S^* = \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K \text{Log } \alpha} \sup_{N < q_K} \sup_{\beta \in [0, 1[} |\varphi^-(\beta, N)|.$$

Considérons maintenant le développement de β par rapport à α ; $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \{r_n \alpha\}$ (cf. § 0); d'après (v)

$$|\varphi^-(\beta, N) - \varphi^-({r_{K-1}}\alpha, N)| < 1 \quad \text{pour } N < q_K.$$

Donc : $S^* = \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K \text{Log } \alpha} \sup_{x < q_K} \sup_{r < q_K} |\varphi^-({r\alpha}, x)|.$

Montrons que l'on peut supprimer la valeur absolue dans l'expression ci-dessus. Soient r et x deux entiers, $r = \sum_{i=1}^K b_i q_i$ et $x = \sum_{i=1}^K d_i q_i$. Posons $R = \sum_{i=1}^K b_i q_{i+1}$ et $X = \sum_{i=1}^K d_i q_{i+1}$ et comparons $\varphi^-({r\alpha}, x)$ et $\varphi^-({R\alpha}, X)$. Pour cela introduisons la suite $(\{n(-\alpha)\})$ et la fonction $\varphi_{-\alpha}^-$:

$$\varphi_{-\alpha}^-(\beta, N) = \text{card} \{n, 0 \leq n < N, \{-n\alpha\} \in [0, \beta[] - N\beta.$$

$$\text{Posons } I = [0, R[. \text{ Alors } \varphi(I, X) = -\varphi^-({R\alpha}, X).$$

De plus

$$\begin{aligned} \text{card} \{n, 0 \leq n < X, \{-n\alpha\} \in [0, \{-R\alpha\}[] \\ = \text{card} \{n, 0 \leq n < X, \{n\alpha\} \in I\} + \epsilon \end{aligned}$$

(où $\epsilon = 0$ ou 1), d'où: $-\varphi^-({R\alpha}, X) = \varphi_{-\alpha}^-({-R\alpha}, X) - \epsilon$.

Désignons par Q_i le dénominateur de la $i^{\text{ème}}$ réduite de $-\alpha$ et posons $\Lambda_i = \|Q_i(-\alpha)\|$, nous avons alors: $Q_i = q_{i+1}$ et $\Lambda_i = \lambda_{i+1}$.

Comparons $\varphi^-({r\alpha}, x)$ et $\varphi_{-\alpha}^-({R(-\alpha)}, X)$. (Remarquons que $R = \sum_{i=1}^K b_i Q_i$ et $X = \sum_{i=1}^K d_i Q_i$.) Ces deux quantités peuvent se calculer en appliquant K fois le lemme 0.

$$\begin{aligned} \text{Pour } m \leq K, \text{ posons } r_m = \sum_{i=1}^m b_i q_i, x_m = \sum_{i=1}^m d_i q_i, \\ R_m = \sum_{i=1}^m b_i Q_i \text{ et } X_m = \sum_{i=1}^m d_i Q_i. \end{aligned}$$

Nous avons à comparer $\varphi^-({r_m\alpha}, x_m) - \varphi^-({r_{m-1}\alpha}, x_{m-1})$ à $\varphi_{-\alpha}^-({R_m(-\alpha)}, X_m) - \varphi_{-\alpha}^-({R_{m-1}(-\alpha)}, X_{m-1})$ c'est-à-dire $\lambda_m(d_m r_{m-1} + b_m x_m)$ à $\Lambda_m(d_m R_{m-1} + b_m X_{m-1})$.

Or $\lambda_m = \alpha \Lambda_m$ et $\frac{Q_i}{q_i}$ tend vers α quand i tend vers l'infini, donc: $\lambda_m(d_m r_{m-1} + b_m x_m) - \Lambda_m(d_m R_{m-1} + b_m X_{m-1})$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Nous avons donc:

$$\varphi^-({r\alpha}, x) = \varphi_{-\alpha}^-({R(-\alpha)}, X) + o(K)$$

et

$$\varphi^-({r\alpha}, x) = -\varphi^-({R\alpha}, X) + o(K);$$

nous pouvons donc supprimer la valeur absolue et obtenir finalement:

$$S^* = \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K \text{ Log } \alpha} \sup_{\substack{r < q_K \\ x < d_K}} (\varphi^-({r\alpha}, x)).$$

Nous nous proposons d'évaluer $\sup_{\substack{r < q_K \\ x < q_K}} \varphi^-({r\alpha}, x)$. Pour cela

nous montrerons que l'on peut se restreindre à des couples (r, x) appartenant à des ensembles de plus en plus petits. Nous considérerons les suites normales $(b_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ et $(d_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ associées à un couple (r, x) , et, en changeant certaines composantes de ces suites, nous construirons un couple (r', x') vérifiant les propriétés requises. Nous minorerons alors $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$ en utilisant le lemme 0 à partir du premier indice où certaines composantes changent.

Nous schématisons le changement de composantes $(b_l, b_{l+1}, \dots, b_{l+s})$ et $(d_l, d_{l+1}, \dots, d_{l+s})$ respectivement en $(b'_l, b'_{l+1}, \dots, b'_{l+s})$ et $(d'_l, d'_{l+1}, \dots, d'_{l+s})$ par le tableau :

$$\begin{array}{ccc} & l & l+s & & l & l+s \\ (b_k) & b_l & \dots & b_{l+s} & \longrightarrow & b'_l & \dots & b'_{l+s} \\ (d_k) & d_l & \dots & d_{l+s} & & d'_l & \dots & d'_{l+s} \end{array}$$

Il est sous-entendu que les autres composantes des suites (b_k) et (d_k) ne changent pas. Généralement seule la suite (d_k) sera modifiée, mais nous reproduirons le tableau ci-dessus en entier pour faciliter l'utilisation du lemme 0.

Les suites $(b_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ (respectivement (b'_k) , (B_k)) et $(d_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ (respectivement (d'_k) , (D_k)) désignent partout dans la suite de cet article les suites normales associées à r (respectivement r' , R) et x (respectivement x' , X). Nous utilisons les notations suivantes pour $n \leq K - 1$: $r_n = \sum_{k=1}^n b_k q_k$ et $x_n = \sum_{k=1}^n d_k q_k$ (notations analogues pour r' , R , x' , X). Remarquons que $r_{K-1} = r$ et $x_{K-1} = x$.

Pour $K > 5$, soit \mathcal{O}_K^0 l'ensemble des couples (r, x) , $r < q_K$, $x < q_K$ dont les suites normales associées vérifient : $b_2 = d_2 = 0$; $b_3 = 1$, $d_3 = 0$; $b_5 = 0$, $d_5 = 1$. Il est clair, d'après le corollaire 0 que : $\sup_{\substack{r < q_K \\ x < q_K}} \varphi^-({r\alpha}, x) \leq \sup_{(r,x) \in \mathcal{O}_K^0} \varphi^-({r\alpha}, x) + 5$.

Cette première réduction, élémentaire, simplifie l'application du lemme 0, car pour tout n , $n > 5$ nous avons $r_n \neq x_n$ et $x_n \neq 0$.

2. Première réduction.

Soit \mathcal{O}_K^1 le sous-ensemble de \mathcal{O}_K^0 défini par la condition relative aux suites normales $(b_i)_{i \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ et $(d_i)_{i \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ associées à r et x : Pour tout entier pair n , $b_n = 1$ implique $d_n = 0$.

PROPOSITION 1. — $\sup_{(r,x) \in \mathcal{O}_K^0} \varphi^-({r\alpha}, x) = \sup_{(r,x) \in \mathcal{O}_K^1} \varphi^-({r\alpha}, x)$.

Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^0$ tel que pour un indice pair n , $b_n = d_n = 1$ (remarquons qu'alors $n \geq 8$). Définissons (r', x') par le changement de composantes :

a) si $x_{n-1} < r_{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 0 \ 1 \ 0 & \longrightarrow \ 0 \ 1 \ 0 \\ (d_k) & 0 \ 1 \ 0 & \longrightarrow \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

b) si $x_{n-1} > r_{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 0 \ 1 \ 0 & \longrightarrow \ 0 \ 0 \ 0 \\ (d_k) & 0 \ 1 \ 0 & \longrightarrow \ 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Minorons $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$. Pour cela, appliquons (iv) et le lemme 0 entre les indices n et $K-1$ en remarquant que, pour tout k , $x_k < r_k \iff x'_k < r'_k$.

Dans le premier cas : $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq$

$$\geq 1 - \lambda_n r_{n-1} - \lambda_n q_n - \lambda_{n+1} q_n \geq 1 - \lambda_n q_{n+1} - \lambda_{n+1} q_n = 0$$

(en utilisant (i), (ii) et le fait que $b_{n-1} = 0$).

Dans le second cas : $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq$

$$\geq 1 - \lambda_n x_n - \lambda_{n+1} q_n \geq 1 - \lambda_n q_{n+1} - \lambda_{n+1} q_n = 0.$$

Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^0$. En effectuant les changements de composantes définis précédemment, autant de fois que nécessaire, on construit un couple (R, X) de \mathcal{O}_K^1 tel que $\varphi^-({R\alpha}, X) \geq \varphi^-({r\alpha}, x)$, ce qui démontre la proposition 1.

3. Seconde réduction.

Soit \mathcal{O}_K^2 le sous-ensemble de \mathcal{O}_K^1 défini par la condition relative aux suites normales $(b_i)_{i \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ et $(d_i)_{i \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ associées à r et x : pour tout entier pair n , $b_n = d_n = 0$.

PROPOSITION 2. — $\sup_{(r,x) \in \omega_K^1} \varphi^-({r\alpha}, x) \leq \sup_{(r,x) \in \omega_K^2} \varphi^-({r\alpha}, x) + 13.$

Soit k_0 le plus grand des indices pairs inférieurs ou égal à $K - 1$. Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^1$ tel que $b_{k_0} = 1$. Ou bien pour tout indice pair k , $d_k = 0$, ou bien il existe des indices pairs k tels que $d_k = 1$. Considérons ce second cas. Les changements de composantes que nous allons définir maintenant vont permettre de se ramener au premier. Soit n le plus grand des indices pairs k tels que $d_k = 1$ (remarquons qu'alors $8 \leq n \leq K - 3$).

a) $x_{n-1} < r_{n-1}$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{ccccc} & n & & n & \\ (b_k) & 0 & b_{n+1} & \longrightarrow & 0 & b_{n+1} \\ (d_k) & 1 & 0 & & 0 & 1 \end{array}$$

la suite (d'_k) obtenue est bien une suite normale car $d_{n+2} = 0$. Appliquons le lemme 0 pour minorer $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$ dans les deux cas suivants :

a₁) $b_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned} \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) &\geq \\ &\geq 1 - \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+1} r_n - (q_{n+1} - q_n) \lambda_{n+2} \quad (\text{d'après (iv)}) \\ &\geq 1 - \lambda_{n-1} q_n - \lambda_{n+2} q_{n-1} > 0 \quad (\text{d'après (i) et (ii)}). \end{aligned}$$

a₂) $b_{n+1} = 1$

$$\begin{aligned} \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) &\geq \\ &\geq 1 - \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+1} r_n - \lambda_{n+1} (q_{n+1} - q_n) - \lambda_{n+2} (q_{n+1} - q_n) \\ &\geq 1 - \lambda_{n-1} q_n - \lambda_n q_{n-1} = 0 \quad (\text{d'après (i) et (ii)}). \end{aligned}$$

b) $x_{n-1} > r_{n-1}$.

Soit s (respectivement t) le plus grand des indices $k < n$ (respectivement le plus petit des indices $k > n$) tel que $b_k = 1$. (D'après les hypothèses faites sur (r, x) , ces deux nombres existent.)

$b_1) d_s = 0$

Il existe donc un indice k , strictement compris entre s et n tel que $d_k = 1$. Soit m le plus petit de ces indices k . Nous avons donc : $x_{m-1} < r_{m-1}$, et dans tout ce qui suit nous ne nous servons plus que de cette propriété.

$b_{11}) t \text{ pair}$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{ccccccc} & m & & n+1 & & m & & n+1 \\ (b_k) & 0 & \dots & 0 & 0 & \longrightarrow & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (d_k) & 1 & d_{m+1} & \dots & d_{n-1} & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(nous avons $d'_k = 0$ pour $m \leq k \leq n$). La suite (d'_k) obtenue est bien une suite normale car $d_{n+2} = 0$. Appliquons (iv) et le lemme 0 pour minorer $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$ dans les deux cas suivants.

$b_{111}) m \text{ pair}$

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq 1 - \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_m$$

(La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K-1$ provient du fait que t est pair et que $x'_{t-1} > x_{t-1}$.)

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq 1 - \lambda_{m-1} q_m > 0 \quad (\text{d'après (i) et (ii)}).$$

$b_{112}) m \text{ impair}$

$$\begin{aligned} \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) &\geq \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_m \\ &\geq (\lambda_m - \lambda_{m+1}) r_{m-1} \geq 0. \end{aligned}$$

$b_{12}) t \text{ impair}$

Considérons les deux cas suivants :

$b_{121}) m \text{ pair}$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{ccccccc} & m & & n & & m & & n \\ (b_k) & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ (d_k) & 1 & d_{m+1} & \dots & d_{n-1} & 1 & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

(nous avons $d'_k = 0$ pour $m + 2 \leq k \leq n$). Remarquons que pour $k > m$, $x_k < r_k \iff x'_k < r'_k$ et appliquons (iv) et le lemme 0 entre les indices m et $K - 1$ pour minorer $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$.

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq 1 - \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_{m-1}$$

(La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K - 1$ provient du fait que t est impair et que $x'_{t-1} < x_{t-1}$.)

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq 1 - q_m(\lambda_{m+1} + \lambda_{m-1}) \text{ (d'après (i)).}$$

Or:
$$q_m(\lambda_{m+1} + \lambda_{m-1}) = q_m \lambda_{m-1} + q_{m-1} \lambda_m \left(\frac{q_m}{q_{m-1}} \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}\right),$$

$$\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} = \frac{1}{\alpha} \text{ (d'après (viii)) et } \frac{q_m}{q_{m-1}} < \alpha$$

car m est pair d'où :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq 1 - q_m \lambda_{m-1} - q_{m-1} \lambda_m = 0 \text{ (d'après (ii)).}$$

b₁₂₂) m impair

Remarquons qu'alors $n \geq m + 3$ et considérons (r', x') défini par le changement de composantes

	m		n		m		n				
(b_k)	0	0	→	0	0				
(d_k)	1	d_{m+1}	d_{m+2}	...	1	0	0	1	0	0

(nous avons $d'_k = 0$ pour $m + 3 \leq k \leq n$). De même que précédemment :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+2} r_{m-1} - \lambda_{m+2} r_{m-1}$$

(La minoration $-2\lambda_{m+2} r_{m-1}$ obtenue pour les indices compris entre $m + 2$ et $t - 1$ provient de (iv) et du fait que m est impair. La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K - 1$ provient du fait que t est impair et que $x'_{t-1} < x_{t-1}$.) D'où :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq r_{m-1}(\lambda_m - 2\lambda_{m+2}) \geq 0.$$

b₂) d_s = 1

Remarquons que cette condition entraîne s impair et $n \geq s + 3$. Distinguons encore les cas $x_{s-1} > r_{s-1}$ et $x_{s-1} < r_{s-1}$.

b₂₁) x_{s-1} > r_{s-1}

b₂₁₁) *t* impair

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{cccc}
 & s & & n & & s & & n \\
 (b_k) & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & \longrightarrow & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\
 (d_k) & 1 & d_{s+1} & \dots & d_{n-1} & & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots\dots & 0
 \end{array}$$

(Nous avons $d'_k = 0$ pour $s + 3 \leq k \leq n$). Appliquons (iv) et le lemme 0 pour minorer $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$.

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq \lambda_s r_{s-1} + \lambda_s q_s - r_s \lambda_{s+2} - r_s \lambda_{s+2}.$$

(La minoration $-2r_s \lambda_{s+2}$ obtenue pour les indices compris entre $s + 1$ et $t - 1$ provient de (iv) et du fait que s est impair. La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K - 1$ provient du fait que t est impair et que $x'_{t-1} < x_{t-1}$) d'où :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq r_s (\lambda_s - 2\lambda_{s+2}) > 0.$$

b₂₁₂) *t* pair

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{cccc}
 & s & & n + 1 & & s & & n + 1 \\
 (b_k) & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & \longrightarrow & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\
 (d_k) & 1 & d_{s+1} & \dots & d_{n-1} & & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1
 \end{array}$$

(Nous avons $d'_k = 0$ pour $s \leq k \leq n$, et la suite (d'_k) obtenue est bien une suite normale car $d'_{n+2} = 0$.) De même que précédemment :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq \lambda_s r_{s-1} + \lambda_s q_s - \lambda_{s+2} r_s - \lambda_{n+1} r_s.$$

(La minoration $-\lambda_{s+2} r_s - \lambda_{n+1} r_s$ obtenue pour les indices compris entre $s + 1$ et $t - 1$ provient de (iv) et du fait que s est impair, et la minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K - 1$ provient du fait que t est pair et que $x'_{t-1} > x_{t-1}$.) D'où :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq r_s (\lambda_s - \lambda_{s+2} - \lambda_{s+4}) \geq 0.$$

b₂₂) $x_{s-1} < r_{s-1}$

La condition $x_{n-1} > r_{n-1}$ entraîne qu'il existe un indice k strictement compris entre s et n tel que $d_k = 1$. Soit m le plus petit de ces indices k . Nous avons alors $x_{m-1} < r_{m-1}$ et sommes ramenés à un cas similaire à b_1 (voir l'introduction du cas b_1).

En conclusion, soit donc $(r, x) \in \mathcal{O}_K^1$ tel que $b_{k_0} = 1$. On peut construire, en effectuant successivement l'un des changements de composantes précédents, un couple $(r', x') \in \mathcal{O}_K^1$ tel que, pour tout indice k pair, on ait $d'_k = 0$, et vérifiant :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq 0.$$

Considérons maintenant $(R, X) \in \mathcal{O}_K^1$. D'après le corollaire 0, il existe $(r, x) \in \mathcal{O}_K^1$ tel que $b_{k_0} = 1$ et

$$\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({R\alpha}, X) \geq -3,$$

donc $(r', x') \in \mathcal{O}_K^1$ tel que, pour tout indice pair k on ait $d'_k = 0$, et vérifiant :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') \geq \varphi^-({R\alpha}, X) - 3.$$

D'après (vi) et (vii) $\varphi^-({x'\alpha}, r') \geq \varphi^-({r'\alpha}, x') - 1$. (x', r') n'appartient pas à \mathcal{O}_K^1 , mais on peut trouver (u, v) appartenant à \mathcal{O}_K^1 , ne différant de (x', r') qu'au plus par les six premières composantes (les composantes d'indice pair de n restant nulles).

D'après le corollaire 0, nous avons :

$$\varphi^-({u\alpha}, v) \geq \varphi^-({x'\alpha}, r') - 6.$$

De même que précédemment, il existe un couple $(u', v') \in \mathcal{O}_K^1$ tel que toutes les composantes d'indice pair de v' soient nulles (et celles de u' aussi, car par construction $u' = u$) et vérifiant :

$$\varphi^-({u'\alpha}, v') \geq \varphi^-({u\alpha}, v) - 3.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\varphi^-({u'\alpha}, v') \geq \varphi^-({R\alpha}, X) - 13$$

et $(u', v') \in \mathcal{O}_K^2$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

4. Evaluations de $\varphi^-({r\alpha}, x)$ pour certains couples (r, x) .

Donnons tout d'abord quelques propriétés des nombres réels λ_n et q_n . D'après (ii) et (viii) il est évident que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n q_n = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+p} q_n = \frac{1}{\alpha^p} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Posons :

$$L(p) = \frac{1}{\alpha^p} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \quad \text{et} \quad \lambda_{n+p} q_n = L(p) + \epsilon_p(n).$$

Nous utiliserons les inégalités suivantes :

$$L(1) > 0,276 ; L(4) > 0,065 ; 0,040 < L(5) < 0,041 ; L(8) < 0,010$$

PROPOSITION 3. — Soit N un entier, $N > 1$. Définissons le couple (r, x) par :

$$r = \sum_{k=0}^{N-1} q_{4k+3} \quad \text{et} \quad x = \sum_{k=0}^{N-1} q_{4k+5}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \varphi^-({r\alpha}, x) &= \frac{3}{5} N + o(N) \\ \varphi^-({r\alpha}, x) &= \sum_{k=0}^{N-1} (\varphi^-({r_{4k+5}\alpha}, x_{4k+5}) - \varphi^-({r_{4k+1}\alpha}, x_{4k+1})) \\ &\quad + \varphi^-({r_1\alpha}, x_1). \end{aligned}$$

Posons :

$$G(k) = \varphi^-({r_{4k+5}\alpha}, x_{4k+5}) - \varphi^-({r_{4k+1}\alpha}, x_{4k+1}).$$

D'après le lemme 0,

$$G(k) = 1 - \lambda_{4k+3} \left(\sum_{l=1}^k q_{4l+1} \right) - \lambda_{4k+5} \left(\sum_{l=0}^k q_{4l+3} \right).$$

Calculons la limite de $G(k)$ pour k tendant vers l'infini

$$\begin{aligned} \lim G(k) &= 1 - \frac{2}{\alpha(\alpha^2 + 1)} \left(1 + \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^8} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{2\alpha^3}{(\alpha^2 + 1)^2 (\alpha^2 - 1)} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition 3.

Soit \mathcal{O}_K^3 le sous-ensemble de \mathcal{O}_K^2 défini par les conditions relatives aux suites normales $(b_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ et $(d_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K-1\}}$ associées à r et x :

— Pour tout indice n , $b_n = 1$ implique $d_n = 0$.

— Si n_1 et n_2 sont deux indices consécutifs tels que $b_{n_1} = b_{n_2} = 1$, il existe un indice n' et un seul, $n_1 < n' < n_2$ tel que $d_{n'} = 1$.

PROPOSITION 4. — Pour tout couple (r, x) , $(r, x) \in \mathcal{O}_K^3$ et pour tout entier K_0 , $K_0 < K$:

$$\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_{K_0}\alpha}, x_{K_0}) \leq \frac{3}{20} (K - 1 - K_0) + o(K).$$

Afin de démontrer cette proposition, établissons les lemmes suivants.

LEMME 1. — Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^3$, soit n un indice impair, $n < K - 6$ tel que

$$b_n = b_{n+6} = 1 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = b_{n+5} = 0.$$

Alors :

$$\varphi^-({r_{n+6}\alpha}, x_{n+6}) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) \leq 0,766 + \epsilon(n)$$

(où ϵ est une suite tendant vers 0).

Deux cas sont à envisager : $d_{n+2} = 1$ ou $d_{n+4} = 1$. Appliquons le lemme 0. Dans le premier cas :

$$\begin{aligned} \varphi^-({r_{n+6}\alpha}, x_{n+6}) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) &= -\lambda_{n+2}r_{n+1} + 1 - \lambda_{n+6}x_{n+5} \\ &\leq 1 - \lambda_{n+2}q_n - \lambda_{n+6}q_{n+2}. \end{aligned}$$

Dans le second cas :

$$\begin{aligned} \varphi^-({r_{n+6}\alpha}, x_{n+6}) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) &= -\lambda_{n+4}r_{n+3} + 1 - \lambda_{n+6}x_{n+5} \\ &\leq 1 - \lambda_{n+4}q_n - \lambda_{n+6}q_{n+4}. \end{aligned}$$

Or $\lambda_{n+p}q_n = L(p) + \epsilon_p(n)$, $L(4) < 0,065$ et $L(2) > 0,169$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2. — Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^3$. Soient k un entier, $3 < k < K/2$ et n un indice impair, $n < K - 2k$ tels que : $b_n = b_{n+2k} = 1$ et $b_{n+1} = \dots = b_{n+2k-1} = 0$. Alors :

$$\varphi^-({r_{n+2k}\alpha}, x_{n+2k}) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) < 1.$$

Soit n' l'indice, $n < n' < n + 2k$ tel que $d_{n'} = 1$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \varphi^-({r_{n+2k}\alpha}, x_{n+2k}) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) &= -\lambda_{n'}r_{n'-1} \\ &\quad + 1 - \lambda_{n+2k}x_{n+2k-1} < 1. \end{aligned}$$

LEMME 3. — Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^3$. Soient k un entier, $0 < k < \frac{K}{4}$ et n un indice impair, $n < K - 4k$ tels que : $b_n = b_{n+4} = \dots = b_{n+4k} = 1$. Alors :

$$\varphi^-({r_{n+4k}\alpha}, x_{n+4k}) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) \leq \frac{3}{5}k + 0,102 + \sum_{l=0}^{k-1} \epsilon(n + 4l)$$

(où ϵ est une suite tendant vers 0).

Remarquons que $(r, x) \in \mathcal{O}_K^3$ implique

$$d_{n+2} = d_{n+6} = \dots = d_{n+4k-2} = 1.$$

Supposons que $n \equiv 3 \pmod{4}$, posons $n = 4k_0 + 3$. En appliquant le lemme 0 nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi^- (\{r_{n+4k} \alpha\}, x_{n+4k}) - \varphi^- (\{r_n \alpha\}, x_n) &= k - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} r_{4k_0+4+4l} \\ &\quad - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} x_{4k_0+6+4l} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} r_{4k_0+4+4l} &\geq \sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3} - (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-5} + \dots) \\ &\geq \sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3} - (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4}) \end{aligned}$$

(d'après (i)).

De même :

$$x_{4k_0+6+4l} \geq \sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+5} - (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2})$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi^- (\{r_{n+4k} \alpha\}, x_{n+4k}) - \varphi^- (\{r_n \alpha\}, x_n) &\leq k - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} \left(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3} \right) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} \left(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+5} \right) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4}) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2}). \end{aligned}$$

Il est évident (voir proposition 3) que :

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_{4k_0+5+4l} \left(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3} \right) - \lambda_{4k_0+7+4l} \left(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+5} \right) \\ = \frac{3}{5} + \epsilon'(k_0 + l) \end{aligned}$$

(où ϵ' est une suite tendant vers 0).

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4}) &< \lambda_{4k_0+4} (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4}) \\ &= L(5) + L(8) + \epsilon_5(4k_0 - 1) + \epsilon_8(4k_0 - 4). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2}) &< \lambda_{4k_0+6} (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2}) \\ &= L(5) + L(8) + \epsilon_5(4k_0 + 1) + \epsilon_8(4k_0 - 2) \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi^- (\{r_{n+4k}\alpha\}, x_{n+4k}) - \varphi^- (\{r_n\alpha\}, x_n) \leq \frac{3}{5} k + 2(L(5) + L(8)) + \sum_{l=0}^{k-1} \epsilon(n + 4l).$$

Il est évident que l'on obtient un résultat analogue si $n \equiv 1 \pmod{4}$. Le lemme 3 se déduit de l'inégalité précédente et du fait que $L(5) < 0,041$ et $L(8) < 0,010$.

Démontrons maintenant la proposition 4. Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^3$. Considérons la suite (b_n) et les trois types de séquences décrites dans les lemmes 1, 2, 3 apparaissant dans cette suite. Toutes les séquences (sauf peut-être au plus une) du type du lemme 3 sont précédées d'une séquence du type du lemme 1 ou du lemme 2.

La proposition 4 est une conséquence triviale des lemmes 1, 2 et 3, en remarquant que $1 + 0,102 < 8 \cdot \frac{3}{20}$ et $0,766 + 0,102 < 6 \cdot \frac{3}{20}$.

5. Troisième réduction.

PROPOSITION 5. —

$$\sup_{(r,x) \in \mathcal{O}_K^2} \varphi^- (\{r\alpha\}, x) = \sup_{(r,x) \in \mathcal{O}_K^3} \varphi^- (\{r\alpha\}, x) + o(K).$$

Supposons K impair et considérons un couple (r, x) appartenant à \mathcal{O}_K^2 tel que :

- pour $k > K - 22$, $b_k = 1 \implies d_k = 0$;
- il existe k , $K - 22 < k < K - 2$ tel que $b_k \neq d_k$.

Soit n , s'il existe, le plus grand indice tel que $b_n = d_n = 1$. Soit alors p le plus petit des indices $k > n$ tels que $b_k \neq d_k$. Considérons les différents cas suivants :

a) $p > n + 2$

* Supposons $b_p = 1$ et considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow & 1 & 0 & 0 \\ (d_k) & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Appliquons (iv) et le lemme 0 pour minorer $\varphi^-({r'\alpha}, x')$ - $\varphi^-({r\alpha}, x)$ dans les deux cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{a}_1) \quad x_{n-1} &> r_{n-1} \\ \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) &\geq \lambda_n q_n + \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+2}(r_{n-1} + q_n) \\ &\quad - \lambda_{n+3}(q_{n+2} - q_n) \geq q_n(\lambda_n - \lambda_{n+2}) - \lambda_{n+3}q_{n+1} \\ &= q_n \lambda_{n+1} - \lambda_{n+3}q_{n+1} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a}_2) \quad x_{n-1} &< r_{n-1} \\ \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) &\geq -1 + \lambda_n q_n + \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+2}(r_{n-1} + q_n) \\ &\quad - \lambda_{n+3}(q_{n-2} - q_n) + 1 \geq q_n \lambda_{n+1} - \lambda_{n+3}q_{n+1} > 0. \end{aligned}$$

* Si $d_p = 1$, le changement de composantes

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow & 0 & 0 & 1 \\ (d_k) & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

conduit au même résultat.

b) $p = n + 2$

* Supposons $b_p = 1$ et examinons les différents cas suivants :

b₁) $x_{n-1} < r_{n-1}$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 1 & 0 & 1 & \longrightarrow & 0 & 0 & 1 \\ (d_k) & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0. \end{array}$$

D'après le lemme 0,

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq -1 + \lambda_n x_n + 1 > 0.$$

b₂) $x_{n-1} > r_{n-1}$

b₂₁) $d_{n-2} = 0$

Remarquons qu'alors $b_{n-2} = 0$ et considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \longrightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (d_k) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{array}$$

En utilisant (iv) et le lemme 0 nous obtenons :

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) \geq 1 - \lambda_{n-2}x_{n-3} - 1 + \lambda_n(q_n + x_{n-3}) - \lambda_n q_{n-2} \geq \lambda_n q_{n-1} - \lambda_{n-1} q_{n-3} > 0.$$

$b_{22}) d_{n-2} = 1$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

n	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ & A \\ 1 & 0 \end{matrix}$	\longrightarrow	n	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & A & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	sauf les 2 dernières composantes
-----	---	-------------------	-----	---	----------------------------------

c'est-à-dire $b'_n = 1, d'_n = 0; b'_{n+1} = d'_{n+1} = 0; b'_{n+2} = 0, d'_{n+2} = 1$ et pour un indice k tel que : $n + 3 \leq k \leq K - 1, b'_k = b_{k-2}$ et $d'_k = d_{k-2}$.

Calculons $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$

$$\begin{aligned} \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) &= \varphi^-({r'_n\alpha}, x'_n) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) \\ &+ (\varphi^-({r'_{n+2}\alpha}, x'_{n+2}) - \varphi^-({r'_{n+1}\alpha}, x'_{n+1})) \\ &+ (\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r'_{n+3}\alpha}, x'_{n+3})) \\ &- (\varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3}) - \varphi^-({r_{n+1}\alpha}, x_{n+1})) \\ &- (\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3})). \end{aligned}$$

Afin d'évaluer cette somme, établissons le lemme suivant :

LEMME 4. — Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^2$ $\left(r = \sum_{i=1}^{K-1} b_i q_i \text{ et } x = \sum_{i=1}^{K-1} d_i q_i \right)$.

Posons $r' = \sum_{i=1}^{K-1} b_i q_{i+2}$ et $x' = \sum_{i=1}^{K-1} d_i q_{i+2}$. Alors, pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r'_{n+2}\alpha}, x'_{n+2}) \\ = \varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n) + O(\lambda_n). \end{aligned}$$

Posons :

$$\Delta = \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r'_{n+2}\alpha}, x'_{n+2}) - (\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_n\alpha}, x_n))$$

et calculons Δ en appliquant le lemme 0

$$\Delta = \sum_{k=n+1}^{K-1} (-1)^k [\lambda_{k+2}(d_k r'_{k+1} + b_k x'_{k+2}) - \lambda_k(d_k r_{k-1} + b_k x_k)].$$

Comparons $\lambda_{k+2} r'_{k+1}$ à $\lambda_k r_{k-1}$

$$\lambda_{k+2} r'_{k+1} = \lambda_{k+2} \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_{i+2}$$

$$\lambda_k r_{k-1} = \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i.$$

Or $b_i \neq 0 \implies i$ impair. Supposons donc i impair

$$\lambda_{k+2} q_{i+2} = \lambda_k q_i \left(\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_k} \frac{q_{i+2}}{q_{i+1}} \frac{q_{i+1}}{q_i} \right)$$

$$= \lambda_k q_i \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) \left(\alpha + \frac{\lambda_{i+1}}{q_{i+1}} \right) \left(\alpha - \frac{\lambda_i}{q_i} \right) = \lambda_k q_i \left[1 + O\left(\frac{1}{q_i^2}\right) \right]$$

d'où :

$$\lambda_{k+2} r'_{k+1} = \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i \left[1 + O\left(\frac{1}{q_i^2}\right) \right] = \lambda_k r_{k-1} + \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i O\left(\frac{1}{q_i}\right)$$

$$= \lambda_k r_{k-1} + O(\lambda_k).$$

De même $\lambda_{k+2} x'_{k+2} = \lambda_k x_k + O(\lambda_k)$. D'où :

$$\Delta = \sum_{\substack{k=n+1 \\ k \text{ impair}}}^{K-1} O(\lambda_k) = O(\lambda_n) \quad (\text{d'après (iv)}),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.

Revenons à la minoration de $\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x)$.

Introduisons (r'', x'') défini par : $r'' = \sum_{i=1}^{K-3} b_i q_{i+2}$ et $x'' = \sum_{i=1}^{K-3} d_i q_{i+2}$ et posons :

$$\Delta_2 = \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r'_{n+3}\alpha}, x'_{n+3}) - (\varphi^-({r''\alpha}, x'') - \varphi^-({r''_{n+3}\alpha}, x''_{n+3}))$$

$$\Delta_3 = \varphi^-({r''\alpha}, x'') - \varphi^-({r''_{n+3}\alpha}, x''_{n+3}) - (\varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3}) - \varphi^-({r_{n+1}\alpha}, x_{n+1}))$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3.$$

$$\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) = \lambda_n r_{n-1} + \lambda_n q_n - \lambda_{n+2} (r_{n-1} + q_n)$$

$$+ \Delta_1 - (\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3}))$$

$$\geq \lambda_{n+1} q_n + \Delta_1 - (\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3})).$$

Or, d'après le lemme 4, $\Delta_3 = O(\lambda_n)$ et,

$$\Delta_2 = \sum_{\substack{i=n+4 \\ i \text{ impair}}}^{K-1} \lambda_i [d_i(r''_{n+3} - r'_{n+3}) + b_i(x''_{n+3} - x'_{n+3})] \geq \lambda_{n+4} (x''_{n+3} - x'_{n+3})$$

(car $r''_{n+3} > r'_{n+3}$ et $x''_{n+3} > x'_{n+3}$)

$$\Delta_2 \geq \lambda_{n+4} q_{n-1} \quad (\text{car } d_{n-2} = 1 \text{ et } q_n - q_{n-2} = q_{n-1})$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r\alpha}, x) &\geq \lambda_{n+1} q_n + \lambda_{n+4} q_{n-1} + O(\lambda_n) \\ &- (\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3})) \geq 0,316 \\ &- (\varphi^-({r\alpha}, x) - \varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3})) + \epsilon(n) \end{aligned}$$

(où ϵ est une suite tendant vers 0).

En effet :

$$\lambda_{n+1} q_n \longrightarrow L(1) ; \lambda_{n+4} q_{n-1} \longrightarrow L(5) ; L(1) > 0,276 \text{ et } L(5) > 0,04.$$

* Si $d_p = 1$ les changements de composantes définis dans les cas suivants :

$$b'_1) \quad x_{n-1} > r_{n-1}$$

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow & 1 & 0 & 0 \\ (d_k) & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$b'_2) \quad x_{n-1} < r_{n-1}$$

$$b'_{21}) \quad b_{n-2} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} & n & n \\ (b_k) & 0 & 0 & 0 & 1 & \longrightarrow & 0 & 0 & 1 \\ (d_k) & 0 & 0 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$b'_{22}) \quad b_{n-2} = 1$$

$$\begin{array}{ccc} (b_k) & 1 & 0 & \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ A \end{array}} & \longrightarrow & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ A \end{array}} & \text{sauf les deux der-} \\ (d_k) & 1 & 0 & \boxed{1} & & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \text{nières compo-} \\ & & & & & & & & & & \text{santes} \end{array}$$

donnent respectivement les mêmes résultats que dans les cas $b_1)$, $b_{21})$ et $b_{22})$.

Afin de pouvoir tirer parti des minoration effectuées dans les cas b_{22}) et b'_{22}), établissons les lemmes suivants :

LEMME 5. — Soit (r, x) un couple de \mathcal{O}_K^2 tel que $b_n = 1$ implique $d_n = 0$. Alors il existe un couple (r', x') de \mathcal{O}_K^3 tel que : $\varphi^-({r'\alpha}, x') \geq \varphi^-({r\alpha}, x)$.

Ce lemme se déduit trivialement du lemme 0.

LEMME 6. — Soit K un entier impair, $K > 22$. Soit $(r, x) \in \mathcal{O}_K^2$. Soient k un entier, $k \geq 1$ et $(r', x') \in \mathcal{O}_{K+2k}^2$ tel que, pour tout indice i , $K - 20 \leq i < K$ on ait : $b'_{i+2k} = b_i$ et $d'_{i+2k} = d_i$.

Supposons de plus que pour

$$i = K - 3 \text{ et } i = K - 2, \quad x_i < r_i \iff x'_{i+2k} < r'_{i+2k}.$$

Alors :

$$|\varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r'_{K+2k-3}\alpha}, x'_{K+2k-3}) - \varphi^-({r\alpha}, x) + \varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3})| \leq 0,01 + \epsilon(K)$$

(où ϵ est une suite tendant vers 0).

Posons :

$$\Delta = \varphi^-({r'\alpha}, x') - \varphi^-({r'_{K+2k-3}\alpha}, x'_{K+2k-3}) - \varphi^-({r\alpha}, x) + \varphi^-({r_{K-3}\alpha}, x_{K-3})$$

et appliquons le lemme 0 (K est impair) :

$$\Delta = \lambda_{K-2}(d_{K-2}r_{K-3} + b_{K-2}x_{K-2}) - \lambda_{K+2k-2}(d_{K-2}r'_{K-2k-3} + b_{K-2}x'_{K-2k-2}).$$

Or :

$$r'_{K+2k-3} = r'_{K+2k-21} + \sum_{i=K-20}^{K-1} b_i q_{i+2k}$$

et

$$r_{K-3} = r_{K-21} + \sum_{i=K-20}^{K-1} b_i q_i$$

d'où :

$$|\lambda_{K-2}r_{K-3} - \lambda_{K+2k-2}r'_{K+2k-3}| \leq |\lambda_{K-2}r_{K-21} - \lambda_{K+2k-2}r'_{K+2k-21}| + \left| \sum_{i=K-20}^{K-3} b_i (\lambda_{K-2}q_i - \lambda_{K+2k-2}q_{i+2k}) \right|$$

$$|\lambda_{K-2}r_{K-3} - \lambda_{K+2k-2}r'_{K+2k-3}| \leq \lambda_{K-2}q_{K-20} + \lambda_{K+2k-2}q_{K+2k-20} + \epsilon(K)$$

(d'après (i) et la convergence des suites $n \rightarrow \lambda_{n+p} q_n$) ; soit :

$$|\lambda_{K-2} r_{K-3} - \lambda_{K+2k-2} r'_{K+2k-3}| < \frac{2}{\alpha^{19}} + \epsilon(K) \quad (\text{d'après (ii) et (viii)}).$$

On majore de la même façon l'autre terme entrant dans la composition de Δ et on obtient $|\Delta| \leq (4/\alpha^{18}) + \epsilon(K)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Supposons K impair et considérons $(r, x) \in \mathcal{O}_K^2$ tel que, pour $k > K - 22$, $b_k = 1 \rightarrow d_k = 0$ et tel qu'il existe p , $p > K - 22$ pour lequel $b_p \neq d_p$.

Définissons $(R, X) \in \mathcal{O}_K^2$ en effectuant successivement pour tous les indices n nécessaires les changements de composantes définis précédemment.

Supposons que nous ayons eu à effectuer l changements de composantes correspondant aux cas b_{22}) ou b'_{22}). Pour $i = 1, 2, \dots, l$, appelons (r^i, x^i) les couples obtenus avant le $i^{\text{ème}}$ changement de composantes correspondant aux cas b_{22}) ou b'_{22}).

Nous noterons :

$$r^i = \sum_{k=1}^{K-1} b_k^i q_k \quad \text{et} \quad x^i = \sum_{k=1}^{K-1} d_k^i q_k.$$

En utilisant les notations précédentes nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi^- (\{R\alpha\}, X) - \varphi^- (\{r\alpha\}, x) &\geq 0,316 l - \sum_{i=1}^l ((\varphi^- (\{r^i\alpha\}, x^i) \\ &\quad - \varphi^- (\{r_{K-3}^i\alpha\}, x_{K-3}^i)) + O(1) \end{aligned}$$

en effet, d'après (iv), $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \lambda_n = O(1)$.

Notons $R = \sum_{k=1}^{K-1} B_k q_k$ et $X = \sum_{k=1}^{K-1} D_k q_k$ et considérons $(R', X') \in \mathcal{O}_{K+2l}^2$ défini de la façon suivante :

$R' = \sum B'_k q_k$ et $X' = \sum D'_k q_k$, où, pour $k < K$ $B'_k = B_k$ et $D'_k = D_k$ et pour $K \leq k < K + 2l$, $B'_k = b_{k-2s}^{l-s+1}$ et $D'_k = d_{k-2s}^{l-s+1}$ si $K + 2(s - 1) \leq k < K + 2s$.

Remarque. - (R', X') est obtenu comme (r', x') en effectuant les différents changements de composantes, mais en gardant

les deux composantes supplémentaires à chaque changement du type b_{22}) ou b'_{22}).

(R', X') vérifie les propriétés suivantes :

– si $k < K + 2l$ $B'_k = 1 \implies D'_k = 0$

– pour tout s , $s \in \{1, 2, \dots, l\}$,

$$r_{K-2}^s < x_{K-2}^s \iff R'_{K+2(l-s)} < X'_{K+2(l-s)}$$

– pour tout s , $s \in \{1, 2, \dots, l\}$ et pour tout k , $K - 20 \leq k < K$

$$b_k^s = B'_{k+2(l-s+1)} \quad \text{et} \quad d_k^s = D'_{k+2(l-s+1)}.$$

D'après le lemme 6 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l (\varphi^-({r^i \alpha}, x^i) - (\varphi^-({r^i_{K-3} \alpha}, x^i_{K-3}))) \\ \leq \varphi^-({R' \alpha}, X') - \varphi^-({R'_{K-1} \alpha}, X'_{K-1}) + l \cdot 0,01 + l \epsilon(K). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \varphi^-({R \alpha}, X) - \varphi^-({r \alpha}, x) \geq l [0,306 + \epsilon(K)] - (\varphi^-({R' \alpha}, X') \\ - \varphi^-({R'_{K-1} \alpha}, X'_{K-1})) + O(1) \end{aligned}$$

or, d'après la proposition 4 et le lemme 5 :

$$\varphi^-({R' \alpha}, X') - \varphi^-({R'_{K-1} \alpha}, X'_{K-1}) \leq 0,3l + o(K)$$

donc, finalement :

$$\varphi^-({R \alpha}, X) - \varphi^-({r \alpha}, x) \geq o(K).$$

Il est clair que nous obtenons le même résultat si K est pair.

Soit maintenant un couple (u, v) de \mathcal{O}_K^2 . D'après le corollaire 0, il existe $(r, x) \in \mathcal{O}_K^2$ tel que pour $k > K - 22$, $b_k = 1 \implies d_k = 0$, tel qu'il existe p , $K - 22 < p < K - 2$ avec $b_p \neq d_p$ et tel que :

$$\varphi^-({r \alpha}, x) \geq \varphi^-({u \alpha}, v) - 22.$$

En appliquant le résultat précédent, il existe un couple $(R, X) \in \mathcal{O}_K^2$ tel que pour $k < K$, $B_k = 1 \implies D_k = 0$ et $\varphi^-({u \alpha}, v) \leq \varphi^-({R \alpha}, X) + o(K)$.

La proposition 5 est maintenant une conséquence immédiate du lemme 5.

6. Le résultat final.

$$\text{THEOREME.} - S^*\left(\left(\left\{n \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}\right)\right) = \frac{0,15}{\text{Log} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Ce théorème se déduit immédiatement des propositions 1, 2, 3 et 5.

Remarques

a) Si u désigne la suite de van der Corput, R. Bejian et H. Faure [1] ont montré que $S(u) = \frac{1}{3 \text{Log} 2}$.

b) Nous conjecturons que pour la suite $\left(\left\{n \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}\right)$, $S\left(\left(\left\{n \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}\right)\right) = \frac{0,2}{\text{Log} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

Cette quantité est peu différente de 0,415 donc inférieure à $\frac{1}{3 \text{Log} 2}$. Une preuve de cette conjecture donnerait un exemple de suite u pour laquelle $S(u)$ est plus petit que la quantité analogue calculée dans le cas de la suite de van der Corput (qui donne le meilleur résultat connu actuellement pour S).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BEJIAN et H. FAURE, Discrépance de la suite de van der Corput, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 285 (1977), 313-316.
- [2] Y. DUPAIN, Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$, *Acta Math. Acad. Scient. Hung.*, t. 29(3,4) (1977), 289-303.
- [3] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, Wiley Interscience, New York, (1974), 88-132.
- [4] J. LESCA, Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Acta Arith.*, 20 (1972), 345-352.

- [5] J. LESCA, Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, (1966-67), fascicule 1, exposé n° 2.

Manuscrit reçu le 6 septembre 1977.

Yves DUPAIN,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226
U.E.R. de Mathématiques et
d'Informatique de l'Université
de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex.