ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES DIXMIER

Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 315-328

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__315_0>

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE ALGÉBRIQUES

par J. DIXMIER

INTRODUCTION

Soient G un groupe topologique, U une représentation unitaire de G. Soit A l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs U_s, $s \in G$. Si A est de type I, on dit que U est de type I. Si toute représentation unitaire fortement continue de G est de type I, on dit que G est de type I. Pour qu'un groupe G à base dénombrable soit de type I, il suffit que toute représentation unitaire factorielle fortement continue dans un espace hilbertien à base dénombrable soit de type I (cf. [6], parties *b*) et *c*) de la démonstration du théorème 3). Les groupes de type I se comportent de façon plus simple que les groupes généraux dans la théorie des représentations unitaires.

Dans [7], Harish-Chandra a prouvé que tout groupe de Lie réel connexe semi-simple est de type I. J'ai montré dans [6] que tout groupe de Lie réel connexe nilpotent est de type I. Dans ce mémoire, nous montrerons que tout groupe algébrique réel est de type I (et même un résultat un peu plus précis; cf. théorème 1). On pourrait abréger un peu les démonstrations en admettant les résultats de [6]; mais nous avons préféré rendre les raisonnements indépendants de [6], de sorte qu'on redémontre en particulier, par une nouvelle méthode, que les groupes de Lie réels connexes nilpotents sont de type I. Par contre, nous nous appuyons de façon essentielle sur le théorème d'Harish-Chandra; on notera en outre que notre théorème 1 ne contient pas le théorème d'Harish-Chandra, car un groupe de Lie réel connexe semi-simple n'est pas toujours isomorphe à un groupe algébrique réel; ceci soulève la question suivante: si un groupe de Lie réel connexe est de type I, son revêtement universel est-il de type I? Nous n'avons pu résoudre ce problème.

Les outils principaux sont: 1) le théorème cité d'Harish-Chandra; 2) la théorie des représentations induites de G. W. Mackey [8]; 3) un résultat de C. Chevalley sur les relations d'équivalence définies par un groupe algébrique [4]. Comme ce résultat n'est pas encore publié, nous allons l'énoncer avec précision: soient G un groupe algébrique réel, G^0 sa composante connexe (pour la topologie ordinaire), V une variété algébrique réelle (non nécessairement irréductible); supposons que G opère à gauche dans V de telle sorte que l'application $G \times V \rightarrow V$ soit partout régulière au sens de la géométrie algébrique; soit R la relation d'équivalence définie par G^0 dans V. Alors, R est borélienne, c'est-à-dire qu'il existe une suite de parties $V_1, V_2, \ldots$ de V, boréliennes pour la topologie usuelle de V, saturées pour R, et telles que toute classe modulo R soit l'intersection des V_i qui la contiennent.

On désignera par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

1. — Préliminaires sur les groupes de type I.

Soit $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien. Considérons deux vecteurs unitaires f, f' de $\mathfrak{H}$ comme équivalents si $f = \lambda f'$, où λ est un scalaire de module 1. Une classe de vecteurs unitaires de H s'appelle un rayon [1].

Pour tout ce qui concerne les algèbres de von Neumann, nous renvoyons à [5], où on trouvera les références aux mémoires originaux. Si A est une algèbre de von Neumann dans $\mathfrak{H}$, on désignera par $\mathbf{U}(A)$ le groupe des opérateurs unitaires de A modulo le groupe des opérateurs scalaires unitaires. On désignera par $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus dans $\mathfrak{H}$. On appellera topologie forte sur $\mathbf{U}(\mathfrak{L}(\mathfrak{H}))$ la topologie quotient de la topologie forte sur l'ensemble des opérateurs unitaires de $\mathfrak{H}$. Cette topologie est étudiée dans [1]. C'est aussi la topologie de la convergence simple sur l'ensemble des rayons.

LEMME 1. — *Soient* A *un facteur de type* I, G *un groupe topologique,* $x \rightarrow \alpha_x$ *une représentation de* G *dans le groupe des* $*$*-automorphismes de* A. *On suppose que, pour tout* $T \in A$, $\alpha_x(T)$ *dépend continûment de* x *pour la topologie forte. Alors, il existe une représentation fortement continue* $x \rightarrow \mathrm{U}_x$ *de* G *dans* $\mathfrak{U}(A)$ *telle que, pour tout* $x \in G$, *tout* $U_x \in \mathrm{U}_x$ *et tout* $T \in A$, *on ait* $\alpha_x(T) = U_x T U_x^{-1}$.

DÉMONSTRATION. — Il existe un espace hilbertien $\mathfrak{H}$ et un $*$-isomorphisme de A sur $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Cet isomorphisme est fortement bicontinu sur les parties de A et $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ bornées pour la norme. On peut donc supposer désormais que $A = \mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Pour tout $x \in G$, il existe un opérateur unitaire U_x dans $\mathfrak{H}$ tel que $\alpha_x(T) = U_x T U_x^{-1}$ pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ ([5], chapitre III, paragraphe 3, proposition 3). Tout revient à montrer que la classe de U_x dans $\mathfrak{U}(\mathcal{L}(\mathfrak{H}))$ dépend continûment de x pour la topologie forte. Soit f un vecteur unitaire de $\mathfrak{H}$. Il faut montrer que le rayon défini par $U_x f$ dépend continûment de x. Soit E le projecteur de rang 1 dont l'ensemble des valeurs est la droite portée par f. Le projecteur dont l'ensemble des valeurs est la droite portée par $U_x f$ est $\alpha_x(E)$. Par hypothèse, il dépend continûment de x pour la topologie forte. Quand x tend vers x_0 dans G, $\|\alpha_x(E)U_{x_0}f\| = |(U_x f | U_{x_0} f)|$ tend vers $\|\alpha_{x_0}(E)U_{x_0}f\| = 1$, donc ([1], formule 1.3) le rayon défini par $U_x f$ tend vers le rayon défini par $U_{x_0} f$, d'où le lemme.

Soient G un groupe topologique et $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien. Nous appellerons représentation unitaire-projective de G une représentation de G dans $\mathfrak{U}(\mathcal{L}(\mathfrak{H}))$. Soit $x \rightarrow U_x$ une application de G dans l'ensemble des opérateurs unitaires de $\mathfrak{H}$, continue pour la topologie forte, et telle que $U_x U_{x'} = \sigma(x, x') U_{xx'}$ pour $x \in G$, $x' \in G$, $\sigma(x, x')$ désignant un nombre complexe de module 1. Cette application définit, par passage au quotient, une représentation unitaire-projective fortement continue de G. Toute représentation unitaire-projective fortement continue de G s'obtient de cette manière si G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe ([1], théorèmes 1.1, 3.3 et 5.1), et aussi, de façon évidente, si G est discret. Soit toujours $x \rightarrow U_x$ une application possédant les propriétés considérées plus haut; il existe un groupe topologique H, un sous-groupe fermé central H′ de H, et une représentation unitaire fortement continue $y \to V_y$ de H, tels que : 1) H′ est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1; 2) H/H′ s'identifie à G; 3) pour tout $x \in G$, il existe un représentant y de x dans H tel que $U_x = V_y$ (cf. [1] et [10]).

Lemme 2. — *Soient* G *un groupe topologique,* G_1 *un sous-groupe fermé distingué de* G, U *une représentation unitaire fortement continue de* G, U_1 *la restriction de* U *à* G_1. *On fait les hypothèses suivantes :*

a) U_1 *est factorielle de type* I;

b) toute représentation unitaire-projective fortement continue de G/G_1 *est de type* I.

Alors, U *est de type* I.

Démonstration. — Soit A le facteur de type I engendré par les opérateurs U_s, où $s \in G_1$. Soit A′ son commutant. L'espace hilbertien où opère U s'identifie à un produit tensoriel $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$ d'espaces hilbertiens, de façon que A s'identifie à $\mathbf{C}_{\mathfrak{H}} \otimes \mathcal{L}(\mathfrak{H}')$ (où $\mathbf{C}_{\mathfrak{H}}$ désigne l'ensemble des opérateurs scalaires de $\mathfrak{H}$) et A′ à $\mathcal{L}(\mathfrak{H}) \otimes \mathbf{C}_{\mathfrak{H}'}$. Pour tout $x \in G$, $U_x A U_x^{-1} = A$ (puisque G_1 est distingué dans G). Donc (lemme 1) il existe une représentation fortement continue $x \to \mathbf{V}_x$ de G dans $\mathbf{U}(A)$ telle que, pour tout $V_x \in \mathbf{V}_x$, $U_x^{-1} V_x$ définisse l'automorphisme identique de A; on a alors $U_x = W_x V_x$ avec $W_x \in A'$. Soit $x' \in G$. On a

$$W_x W_{x'} V_x V_{x'} = W_x V_x W_{x'} V_{x'} = U_x U_{x'} = U_{xx'} = W_{xx'} V_{xx'}$$

donc $W_{xx'}^{-1} W_x W_{x'} = V_{xx'} V_{x'}^{-1} V_x^{-1} \in A \cap A'$, donc $V_{xx'} = \sigma(x, x') V_x V_{x'}$, $W_{xx'} = \sigma(x, x')^{-1} W_x W_{x'}$ où $\sigma(x, x')$ est un nombre complexe de module 1. Posons $V_x = 1 \otimes \tilde{V}_x$, $W_x = \tilde{W}_x \otimes 1$. Alors, $x \to \tilde{V}_x$, $x \to \tilde{W}_x$ définissent des représentations unitaires-projectives de G. Comme les représentations unitaires-projectives déduites des applications $x \to U_x$ et $x \to \tilde{V}_x$ sont fortement continues, il en est de même de la représentation unitaire-projective déduite de l'application $x \to \tilde{W}_x$. Pour $x \in G_1$, on a $U_x \in A$, donc W_x est un opérateur scalaire, donc $x \to \tilde{W}_x$ définit une représentation unitaire-projective fortement continue de G/G_1. Soit B (resp. C) l'algèbre de von Neumann engendrée par les W_x pour $x \in G$ (resp. par les U_x

pour $x \in G$). Alors, $C = B \otimes \mathfrak{L}(\mathfrak{H}')$. D'après l'hypothèse faite sur G/G_1, B est de type I. Donc C est de type I.

LEMME 3. — *Soient* G *un groupe topologique à base dénombrable,* G_1 *un sous-groupe fermé distingué de* G, *d'indice fini dans* G. *Si* G_1 *est de type* I, G *est de type* I.

DÉMONSTRATION. — Soit n l'indice de G_1 dans G. Le lemme est évident pour $n = 1$. Nous procéderons par récurrence sur n, en supposant le lemme établi lorsque l'indice de G_1 dans G est $< n$.

Soient U une représentation unitaire factorielle fortement continue de G dans un espace à base dénombrable, A (resp. B) l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs U_s pour $s \in G_1$ (resp. pour $s \in G$). Soit C le centre de A. Pour tout $x \in G$ et tout $s \in G_1$, on a $U_x U_s U_x^{-1} = U_{xsx^{-1}} \in A$, donc $U_x A U_x^{-1} = A$, donc $U_x C U_x^{-1} = C$. Soit α_x l'automorphisme de C ainsi défini par U_x. Pour $x \in G_1$, α_x est l'identité. Donc, par passage au quotient, on définit une représentation $y \to \beta_y$ de G/G_1 dans le groupe des automorphismes de C.

Soit $\mathfrak{S}$ le spectre de C. Pour tout $y \in G/G_1$, l'automorphisme β_y définit un homéomorphisme γ_y de $\mathfrak{S}$ sur $\mathfrak{S}$ et on obtient ainsi un système d'imprimitivité pour G de base $\mathfrak{S}$. Comme U est factorielle, les seuls éléments de C invariants par les β_y sont les opérateurs scalaires. Montrons que $\mathfrak{S}$ est fini. Si $\mathfrak{S}$ n'est pas fini, les transformés d'un point ζ_0 de $\mathfrak{S}$ par les γ_y ne constituent pas $\mathfrak{S}$ tout entier. Alors, pour un voisinage ouvert et fermé V_0 bien choisi de ζ_0, l'ensemble $\bigcup_{y \in G/G_1} \gamma_y(V_0)$ n'est pas $\mathfrak{S}$ tout entier, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{S}$ est fini, et G est transitif dans $\mathfrak{S}$.

Soient ζ un point de $\mathfrak{S}$, S son stabilisateur dans G, qui est un sous-groupe de G contenant G_1. Distinguons deux cas :

a) $S \neq G$. Alors, l'indice de G_1 dans S est strictement plus petit que l'indice de G_1 dans G, donc S est de type I d'après l'hypothèse de récurrence. D'autre part, U est unitairement équivalente à la représentation de G induite par une représentation unitaire fortement continue V de S, et l'algèbre de von Neumann engendrée par les V_s, $s \in S$, est de même type que l'algèbre de von Neumann engendrée par B et C ([8] et [10]);

comme $B \supset A \supset C$, et que l'algèbre de von Neumann engendrée par les V_s, $s \in S$, est de type I, on voit que B est de type I, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

b) $S = G$. Comme G est transitif dans $\mathfrak{S}$, c'est que $\mathfrak{S}$ se réduit au point ζ. Dans ce cas, A est un facteur (de type I). Nous achèverons la démonstration en montrant qu'on peut appliquer le lemme 2, c'est-à-dire que toute représentation unitaire-projective de G/G_1 est de type I. Une telle représentation provient d'une représentation unitaire fortement continue d'un groupe Γ, extension centrale de G/G_1 par le groupe des nombres complexes de module 1. Comme Γ est compact, toutes ses représentations unitaires fortement continues sont de type I. D'où le lemme.

2. — Algèbres de Lie nilpotentes spéciales.

Soient K un corps commutatif, n un entier $\geqslant 0$, $(e_0, e_1, \dots, e_{2n})$ une base d'un espace vectoriel de dimension $2n+1$ sur K. On vérifie aussitôt qu'on définit sur cet espace une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en posant

$$[e_1, e_{n+1}] = e_0, \quad [e_2, e_{n+2}] = e_0, \quad \dots, \quad [e_n, e_{2n}] = e_0,$$

les autres crochets étant nuls ou déduits des précédents par antisymétrie. Le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est Ke_0. Le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est abélien. Donc $\mathfrak{g}$ est nilpotente, et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{c}$. Les idéaux non nuls de $\mathfrak{g}$ sont les sous-espaces de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{c}$.

Les algèbres de Lie du type précédent seront dites *nilpotentes spéciales.*

Lemme 4. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente sur* K, $\mathfrak{c}$ *son centre. On suppose que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *est de dimension* 1. *Alors,* $\mathfrak{g}$ *est produit d'une algèbre abélienne et d'une algèbre nilpotente spéciale. Si* $\dim \mathfrak{c} = 1$, $\mathfrak{g}$ *est nilpotente spéciale.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la restriction de adx à $\mathfrak{g}'$ est nilpotente, donc nulle puisque $\dim \mathfrak{g}' = 1$; donc $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{c}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est extension centrale de l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ par $\mathfrak{g}'$. Cette extension est définie, à un isomorphisme près, par une application bilinéaire alternée de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}'$, qui s'identifie à une forme bilinéaire alternée f sur $\mathfrak{a}$. Soit φ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{n}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}$ orthogonaux à tous les éléments de $\mathfrak{a}$ pour f, et $\mathfrak{n}'$ un sous-espace de $\mathfrak{a}$ supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{a}$. Soient $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{m}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{n}')$, $\mathfrak{b}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{m}$. Alors, $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}'$ est une sous-algèbre nilpotente spéciale de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{m}'$, et $[\mathfrak{b}, \mathfrak{m}'] = 0$. D'où le lemme.

LEMME 5. — *Sur* R^{2n+1}, *définissons une multiplication de la manière suivante :*

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{2n}).(y_0, y_1, \ldots, y_{2n}) = (x_0 + y_0 - x_1y_{n+1} - x_2y_{n+2} - \cdots \\ - x_ny_{2n}, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_{2n} + y_{2n}).$$

On définit ainsi sur R^{2n+1} *une structure de groupe de Lie réel* G. *Le groupe* G *est nilpotent; son centre et son groupe des commutateurs sont identiques à l'ensemble des* $(x, 0, 0, \ldots, 0)$ *où* $x \in \mathbf{R}$; *son algèbre de Lie est nilpotente spéciale.*

DÉMONSTRATION. — L'associativité de la multiplication résulte du calcul suivant :

$$(x_0 + y_0 - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{2n}, x_1 + y_1, \ldots, x_{2n} + y_{2n}).(z_0, z_1, \ldots, z_{2n}) \\ = (x_0 + y_0 + z_0 - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{2n} - (x_1 + y_1)z_{n+1} - \cdots \\ - (x_n + y_n)z_{2n}, x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_{2n} + y_{2n} + z_{2n});$$

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{2n}).(y_0 + z_0 - y_1z_{n+1} - \cdots - y_nz_{2n}, y_1 + z_1, \ldots, y_{2n} + z_{2n}) \\ = (x_0 + y_0 + z_0 - y_1z_{n+1} - \cdots - y_nz_{2n} - x_1(y_{n+1} + z_{n+1}) - \cdots \\ - x_n(y_{2n} + z_{2n}), x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_{2n} + y_{2n} + z_{2n}).$$

La multiplication admet l'élément neutre $(0, 0, \ldots, 0)$. Enfin, l'élément $(x_0, \ldots, x_{2n})$ admet l'inverse

$$(-x_0 - x_1x_{n+1} - \cdots - x_nx_{2n}, -x_1, \ldots, -x_{2n}).$$

D'où l'existence du groupe de Lie réel G. On a la formule

$$(1) \quad (x_0, \ldots, x_{2n}) . (y_0, \ldots, y_{2n}).(x_0, \ldots, x_{2n})^{-1}.(y_0, \ldots, y_{2n})^{-1} \\ = (x_0 + y_0 - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{2n}, x_1 + y_1, \ldots, x_{2n} + y_{2n}). \\ (-x_0 - x_1x_{n+1} - \cdots - x_nx_{2n} - y_0 - y_1y_{n+1} - \cdots - y_ny_{2n} \\ - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{2n}, -x_1 - y_1, \ldots, -x_{2n} - y_{2n}) \\ = (x_0 + y_0 - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{2n} - x_0 - x_1x_{n+1} - \cdots \\ - x_nx_{2n} - y_0 - y_1y_{n+1} - \cdots - y_ny_{2n} - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{2n} \\ + (x_1 + y_1)(x_{n+1} + y_{n+1}) + \cdots + (x_n + y_n)(x_{2n} + y_{2n}), 0, \ldots, 0) \\ = (y_1x_{n+1} - x_1y_{n+1} + \cdots + y_nx_{2n} - x_ny_{2n}, 0, \ldots, 0).$$

Cette formule prouve que le centre et le groupe des commutateurs de G sont identiques à l'ensemble des éléments de la forme $(x, 0, ..., 0, 0)$. Donc G est nilpotent, et, compte tenu du lemme 4, son algèbre de Lie est nilpotente spéciale.

(*Ajouté pendant la correction des épreuves.* — Comme me l'a fait remarquer I. E. Segal, le lemme 6 est dû à J. von Neumann [12].)

LEMME 6. — *Soient* G *le groupe de Lie du lemme* 5, C *son centre,* U *une représentation unitaire fortement continue de* G *dans un espace à base dénombrable, non triviale sur* C.

(i) *Pour que* U *soit factorielle, il faut et il suffit que* U *soit un opérateur scalaire pour* $s \in$ C.

(ii) *Si la condition* (i) *est remplie,* U *est de type* I.

DÉMONSTRATION. — Si U est factorielle, il est clair que U_s est un opérateur scalaire pour $s \in$ C. Supposons maintenant que U_s soit un opérateur scalaire pour $s \in$ C. Nous allons montrer que U est factorielle de type I, ce qui prouvera le lemme.

Soit H l'ensemble des $(x_0, \ldots, x_{2n}) \in$ G tels que

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2n} = 0.$$

On vérifie aussitôt que H est un sous-groupe fermé distingué abélien de G contenant C. Le dual $\hat{H}$ de H s'identifie à l'ensemble des systèmes $(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ de nombres réels, la dualité étant réalisée par

$$\langle(x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0),\ (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)\rangle = e^{i(x_0\xi_0 + \cdots + x_n\xi_n)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
&(y_0, \ldots, y_{2n}) \cdot (x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \cdot (y_0, \ldots, y_{2n})^{-1} \\
&\qquad = (y_0 + x_0,\ y_1 + x_1,\ \ldots,\ y_n + x_n,\ y_{n+1},\ \ldots,\ y_{2n}) \cdot \\
&(-y_0 - y_1y_{n+1} - \cdots - y_ny_{2n},\ -y_1,\ \cdots,\ -y_{2n}) \\
&\qquad = (x_0 - y_1y_{n+1} - \cdots - y_ny_{2n} + (y_1 + x_1)y_{n+1} + \cdots \\
&\qquad + (y_n + x_n)y_{2n},\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ \ldots,\ 0) \\
&\qquad = (x_0 + x_1y_{n+1} + \cdots + x_ny_{2n},\ x_1, \ldots x_n,\ 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Soit $(\xi'_0, \ldots, \xi'_n)$ le transformé de l'élément $(\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \hat{H}$ par l'élément $(y_0, \ldots, y_{2n}) \in$ G. On a

$$\begin{aligned}
e^{i(x_0\xi'_0 + \cdots + x_n\xi'_n)} &= \langle(x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0),\ (\xi'_0, \ldots, \xi'_n)\rangle \\
&= \langle(y_0, \ldots, y_{2n}) \cdot (x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \cdot (y_0, \ldots, y_{2n})^{-1},\ (\xi_0, \ldots, \xi_n)\rangle \\
&= \langle(x_0 + x_1y_{n+1} + \cdots + x_ny_{2n},\ x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0),\ (\xi_0, \ldots, \xi_n)\rangle \\
&= e^{i[x_0\xi_0 + x_1(\xi_0y_{n+1} + \xi_1) + \cdots + x_n(\xi_0y_{2n} + \xi_n)]}
\end{aligned}$$

quels que soient les nombres réels $x_0, \ldots, x_n$. Donc

(2) $\xi'_0 = \xi_0, \quad \xi'_1 = \xi_0 y_{n+1} + \xi_1, \quad \ldots, \quad \xi'_n = \xi_0 y_{2n} + \xi_n.$

L'orbite relative à G d'un point $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ tel que $\xi_0 \neq 0$ est donc l'ensemble des $(\xi'_0, \ldots, \xi'_n)$ tels que $\xi'_0 = \xi_0$. L'orbite d'un point $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ tel que $\xi_0 = 0$ se réduit à ce point. Ainsi, H est régulièrement contenu dans G [8]. On notera en outre que G est produit semi-direct de H et du sous-groupe des éléments de la forme $(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$.

Soient V la restriction de U à H, μ la mesure opératorielle sur $\hat{H}$ associée à V par le théorème de Stone généralisé. Soit H_1 le sous-groupe de H formé des $(x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ tels que $x_0 = 0$. On a $H = H_1 \times C$. Soit W la restriction de V à H_1. Pour $s = s_1 c \in H$ $(s_1 \in H_1, \ c \in C)$, on a $V_s = \chi(c) W_{s_1}$, χ étant un caractère non trivial de C. Le dual $\hat{H}_1$ de H_1 s'identifie à l'ensemble des $(\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \hat{H}$ tels que $\xi_0 = 0$; soit ν la mesure opératorielle sur $\hat{H}_1$ associée à W; la mesure μ se déduit de ν par une translation de la forme $(\xi_0, 0, \ldots, 0)$, où $\xi_0 \neq 0$ puisque χ est non trivial. On voit donc que μ est concentrée sur une orbite Ω relative à G.

Soit $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ un point de cette orbite. Les formules (2) montrent que le stabilisateur de ce point est H. Donc [8] U peut s'identifier à la représentation de G induite par une représentation unitaire continue U′ de H. D'après [9], théorème 12.1, la restriction de U à H est intégrale hilbertienne sur G/H de représentations déduites de U′ par action des automorphismes intérieurs définis par les éléments de G. Donc la mesure opératorielle associée à U′ est concentrée sur Ω. Par suite ([9], théorème 10.1), U est intégrale hilbertienne sur H de représentations induites par les caractères de H qui appartiennent à Ω. Or, toutes ces représentations sont irréductibles et unitairement équivalentes ([8], théorème 3). Donc ([11], théorème 1.5), U est factorielle de type I.

3. — Représentations unitaires-projectives des groupes de Lie réductifs.

LEMME 7. — *Soient* K *un corps commutatif de caractéristique* 0, $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$ *des algèbres de Lie sur* K, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. *On suppose* $\mathfrak{g}_1$ *semi-simple. Toute extension centrale* $\mathfrak{g}'$ *de* $\mathfrak{g}$ *par une algèbre de*

Lie abélienne $\mathfrak{a}$ est de la forme $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2'$, où $\mathfrak{g}_2'$ est une extension centrale de $\mathfrak{g}_2$ par $\mathfrak{a}$.

DÉMONSTRATION. — Soit φ l'application canonique de $\mathfrak{g}'$ sur $\mathfrak{g}$, de noyau $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{g}_2' = \varphi^{-1}(\mathfrak{g}_2)$ est extension centrale de $\mathfrak{g}_2$ par $\mathfrak{a}$. D'autre part, $\mathfrak{g}'/\mathfrak{g}_2'$ est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_2$, donc semi-simple. Donc il existe une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, isomorphe à $\mathfrak{g}_1$, et supplémentaire de $\mathfrak{g}_2'$ dans $\mathfrak{g}'$. La représentation adjointe ρ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_2'$ est semi-simple, et annule $\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{a}'$ un sous-espace de $\mathfrak{g}_2'$ supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_2'$ et stable par ρ; on a donc $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}'] \subset \mathfrak{a}'$. Comme $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{a}'$ commutent modulo $\mathfrak{a}$, on a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}'] \subset \mathfrak{a}$. Donc $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}'] = 0$, et par suite $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_2'] = 0$. Ainsi, $\mathfrak{g}'$ est isomorphe au produit $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_2'$.

LEMME 8. — *Soient $\mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie semi-simple réelle, $\mathfrak{g}_2$ une algèbre de Lie abélienne réelle, $\mathfrak{g}_3$ une algèbre de Lie nilpotente spéciale réelle,* G *un groupe de Lie réel connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_3$. Alors, toute représentation unitaire fortement continue de* G *est de type* I.

DÉMONSTRATION. — Comme toute représentation de G provient d'une représentation de son revêtement universel, on peut supposer G simplement connexe. Alors, G est isomorphe à $G_1 \times G_2 \times G_3$, où G_i désigne, pour $i = 1, 2, 3$, le groupe de Lie réel connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i$. Soient U une représentation unitaire fortement continue factorielle de G dans un espace hilbertien, A (resp. A_i) l'algèbre de von Neumann engendrée par les U_s pour $s \in G$ (resp. pour $s \in G_i$). Alors, les A_i commutent deux à deux. Puisque A est un facteur, chaque A_i est un facteur. Le facteur A_1 est de type I d'après [7], p. 230; le facteur A_3 est de type I d'après le lemme 6; le facteur A_2 se réduit à l'ensemble des opérateurs scalaires. Alors [5] A est de type I.

LEMME 9. — *Soit* G *un groupe de Lie réel connexe dont l'algèbre de Lie est réductive. Alors, toute représentation unitaire-projective fortement continue de* G *est de type* I.

DÉMONSTRATION. — Comme pour le lemme 8, on peut supposer G simplement connexe. Toute représentation unitaire-projective fortement continue de G provient alors d'une représentation unitaire fortement continue d'un groupe de Lie réel connexe G', extension centrale de G par un groupe de Lie abélien connexe de dimension 1. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de G et G'. Puisque $\mathfrak{g}$ est produit d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$ et d'une algèbre de Lie abélienne, $\mathfrak{g}'$ est, d'après le lemme 7, produit de $\mathfrak{s}$ et d'une algèbre $\mathfrak{a}$ extension centrale d'une algèbre de Lie abélienne par une algèbre de Lie de dimension 1; l'algèbre $\mathfrak{a}$ est soit abélienne, soit produit d'une algèbre abélienne par une algèbre nilpotente spéciale (lemme 4). Il suffit alors d'appliquer le lemme 8.

4. — Le théorème principal.

LEMME 10. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps commutatif,* $\mathfrak{n}$ *un idéal nilpotent de* $\mathfrak{g}$. *On suppose que tout idéal abélien de* $\mathfrak{g}$ *contenu dans* $\mathfrak{n}$ *est nul ou de dimension* 1. *Alors,* $\mathfrak{n}$ *est ou nul, ou spécial.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Si dim $\mathfrak{n}' > 1$, il existe des idéaux $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ de $\mathfrak{n}$, de dimensions 1 et 2, tels que $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2 \subset \mathfrak{n}'$; on a

$$[\mathfrak{n}', \mathfrak{n}_2] = [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}_2] \subset [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_2], \mathfrak{n}] + [[\mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}] = 0.$$

Donc le centre de $\mathfrak{n}'$ est de dimension > 1. Or, ce centre est un idéal caractéristique de $\mathfrak{n}$, donc un idéal de $\mathfrak{g}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\mathfrak{n}'$ est de dimension 0 ou 1. Si $\mathfrak{n}' = 0$, $\mathfrak{n}$ est abélienne, donc est de dimension 0 ou 1 (et, dans ce dernier cas, spéciale). Supposons désormais $\mathfrak{n}'$ de dimension 1. Le centre de $\mathfrak{n}$ est non nul, donc de dimension 1 (car c'est un idéal de $\mathfrak{g}$). Donc $\mathfrak{n}$ est spéciale (lemme 4).

LEMME 11. — *Soient* G *un groupe algébrique réel,* P *un sous-groupe algébrique distingué de* G. *Alors, la composante connexe de* G/P *est un groupe de Lie réel isomorphe à la composante connexe d'un groupe algébrique réel.*

DÉMONSTRATION. — Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie de P. Il existe une représentation rationnelle ρ de G dont le noyau est P ([3], p. 119, proposition 11). Soient H le plus petit groupe algébrique réel contenant $\rho(G)$, H^0 sa composante connexe, $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Alors la différentielle de ρ applique $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$ ([2], p. 140, proposition 5). Donc $H^0 \subset \rho(G) \subset H$, et $\rho(G)$ est fermé dans H pour la topologie ordinaire. Alors, le groupe de Lie G/P est isomorphe au groupe de Lie $\rho(G)$. Donc la composante connexe de G/P est isomorphe à H^0, ce qui prouve le lemme.

THÉORÈME 1. — *La composante connexe d'un groupe algébrique réel est de type* I.

DÉMONSTRATION. — Soient G un groupe algébrique réel, G^0 sa composante connexe, U une représentation unitaire factorielle fortement continue de G^0 dans un espace hilbertien à base dénombrable. Nous allons prouver que U est de type I, ce qui démontrera le théorème. On peut évidemment supposer G irréductible.

Raisonnant par récurrence, nous supposerons le théorème établi pour les groupes de dimension $<$ dim G.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G (et de G^0). Il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$, formé d'endomorphismes nilpotents, tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ soit réductive ([3], p. 107, théorème 3). L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est nilpotente, toute sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{n}$ est algébrique, et l'application exponentielle définit un isomorphisme analytique de $\mathfrak{a}$ sur un sous-groupe algébrique A de G^0, isomorphisme qui transforme les fonctions polynômes sur $\mathfrak{a}$ en fonctions polynomes sur A ([3], p. 123, proposition 14). Supposons que $\mathfrak{a}$ soit abélienne, et soit un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors, A est abélien et distingué dans G ([3], p. 30, corollaire 2 de la proposition 11). L'application exponentielle transforme la structure vectorielle de $\mathfrak{a}$ en une structure vectorielle sur A, dont l'addition est la loi de composition du groupe A. Pour tout $x \in G$, l'application $a \rightarrow xax^{-1}$ de A sur A est un automorphisme u_x de cet espace vectoriel réel, et $x \rightarrow u_x$ est une représentation rationnelle de G; la représentation contragrédiente est rationnelle; or, les automorphismes de cette représentation contragrédiente s'identifient aux opérations de G dans $\hat{A}$. La relation d'équivalence définie par G^0 dans $\hat{A}$ est donc borélienne (cf. introduction). Ainsi, A est régulièrement contenu dans G au sens de [9].

Soit V la restriction de U à A. Puisque A est régulièrement contenu dans G^0, la mesure opératorielle sur $\hat{A}$ associée à V est concentrée sur une orbite Ω relative à G^0. Supposons d'abord qu'on puisse choisir $\mathfrak{a}$ de manière que Ω ne soit pas réduite à un point. Soient S et S′ les stabilisateurs dans G^0 et G d'un même point de Ω. Alors, S′ est algébrique ([3], p. 28, corollaire 2). La composante connexe S^0 de S est aussi la composante connexe de S′. Comme Ω n'est pas réduite à un point, on a $\dim S < \dim G$; donc S^0 est de type I d'après l'hypothèse de récurrence, donc S est de type I d'après le lemme 3. Or ([8] et [10]) la représentation U est de même type qu'une représentation unitaire fortement continue de S. Ainsi, U est de type I.

Dans la suite de la démonstration, nous pouvons donc faire l'hypothèse suivante :

(H) Pour tout idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$, la restriction de U à A est une représentation par des opérateurs scalaires.

Distinguons alors deux cas :

a) Supposons qu'il existe un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$ de dimension > 1. Soit M le noyau de U. Comme la restriction de U à A est scalaire, la composante connexe P de $M \cap A$ est un sous-espace vectoriel non nul de A. D'autre part P est distingué dans G^0. La représentation U définit par passage au quotient une représentation unitaire fortement continue U′ de G^0/P. Il suffit de prouver que U′ est de type I. Pour cela, on va montrer qu'on peut appliquer à G^0/P l'hypothèse de récurrence. D'abord, $\dim G^0/P < \dim G^0$. Ensuite, soit $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie de P. C'est un idéal algébrique de $\mathfrak{g}$. Donc P est un sous-groupe algébrique distingué dans G. Donc la composante connexe de G/P, qui est G^0/P, est isomorphe à la composante connexe d'un groupe algébrique (lemme 11). Ainsi, on peut effectivement appliquer à G^0/P l'hypothèse de récurrence.

b) Supposons qu'il n'existe aucun idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$ et de dimension > 1. Alors, $\mathfrak{n}$ est ou nul, ou spécial (lemme 10). Si $\mathfrak{n} = 0$, $\mathfrak{g}$ est réductive, et il suffit d'appliquer le lemme 9. Si $\mathfrak{n}$ est spécial, soit $\mathfrak{c}$ son centre. Soient N et C les sous-groupes de G^0 correspondant à $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{c}$. Si la restriction de U à C est triviale, on considère, comme plus haut, la représentation de G/C déduite de U par passage au quotient, et on applique l'hypothèse de récurrence. Supposons désormais cette restriction non triviale. Cette restriction est scalaire d'après l'hypothèse (H). Donc la restriction de U à N est factorielle de type I (lemme 6). Il suffit alors d'appliquer les lemmes 2 et 9.

COROLLAIRE. — *Tout groupe algébrique réel est de type* I.

DÉMONSTRATION. — Ceci résulte aussitôt du théorème 1 et du lemme 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. BARGMANN, On unitary ray representations of continuous groups, *Ann. of Math.*, 59 (1954), p. 1-46.

[2] C. CHEVALLEY, Théorie des groupes de Lie, t. II, *Act. Sc. Ind.*, n° 1152, Paris, Hermann, 1951.

[3] C. CHEVALLEY, Théorie des groupes de Lie, t. III, *Act. sc. Ind.*, n° 1226, Paris, Hermann, 1955.

[4] C. CHEVALLEY, à paraître.

[5] J. DIXMIER, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, *Cahiers scientifiques*, n° XXV, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[6] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, à paraître au *Journ. de Math.*

[7] HARISH-CHANDRA, Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space I, Trans. Amer. *Math. Soc.*, 75 (1953), p. 185-243.

[8] G. W. MACKEY, Imprimitivity for representations of locally compact groups I, Proc. Nat. *Acad. Sc. U.S.A.*, 95 (1949), p. 537-545.

[9] G. W. MACKEY, Induced representations of locally compact groups I, *Ann. of Math.*, 55 (1952), p. 101-139.

[10] G. W. MACKEY, The theory of group representations, cours miméographié, Université de Chicago, 1955.

[11] F. I. MAUTNER, Unitary representations of locally compact groups I, *Ann. of Math.*, 51 (1950), p. 1-25.

[12] J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Mathematische Annalen, 104(1931), p. 570-578.