Annales de l'institut Fourier

Jacques Martinet

Petits discriminants

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 159-170

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_159_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29,1 (1979), 159-170

PETITS DISCRIMINANTS

par Jacques MARTINET *

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

1. Introduction.

Les travaux récents de Odlyzko, puis de Odlyzko, Poitou et Serre (cf. [10]) ont conduit à des minorations des discriminants bien meilleures que celles que l'on avait pu obtenir auparavant à l'aide de méthodes issues de la géométrie des nombres. Le problème se pose de savoir si ces minorations sont proches des meilleures possibles. Nous tentons d'apporter une réponse à ce problème dans le cas des corps totalement imaginaires en construisant pour divers degrés des corps de discriminant proche des minorations évoquées ci-dessus. La comparaison est faite avec les minorations données par Odlyzko sous l'hypothèse de Riemann généralisée (notée GRH dans la suite de ce travail) dans des tables datées du 29 novembre 1976 ([9]).

Dans le paragraphe 2, nous construisons des corps comme corps de classes de corps quadratiques ou biquadratiques totalement imaginaires. Les résultats sont présentés sous forme de tables. Pour un degré n donné, nous ne donnons un corps K de degré n, de discriminant d_K, que lorsque $|d_K|^{1/n}$ n'excède pas de plus de 3 % la minoration à laquelle nous nous référons. Cette règle, quelque peu arbitraire, nous a permis de donner des exemples pour les degrés $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 72$ et 80. Les tables figurent au paragraphe 5.

(*) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

La méthode indiquée ci-dessus ne donne pas de bons résultats pour les degrés dépassant la centaine. Nous décrivons dans le paragraphe 3 un procédé utilisant les corps de classes de Hilbert des corps abéliens totalement imaginaires, que nous illustrons par deux exemples, de degrés respectifs 480 et 12 144.

On peut utiliser les minorations de discriminants pour étudier des problèmes de nombre de classes. Cette question est abordée au paragraphe 4. Nous montrons en particulier que les corps que nous donnons dans les tables ont pour nombre de classes 1.

Les résultats présentés dans cet article ont fait l'objet de deux exposés de séminaire ([6] et [7]).

2. Constructions de corps de classes.

On note d_K le discriminant d'un corps de nombres K. Soit k un corps de nombres totalement imaginaire. Notons O_k son anneau d'entiers, E_k le groupe de ses unités et Cl_k le groupe de ses classes d'idéaux. A tout idéal entier I de k, la théorie du corps de classes associe une extension abélienne k_I de k, le corps de classes de rayon I, dont le groupe de Galois G_I vérifie la suite exacte $0 \longrightarrow (O_k/I)^*/\mathrm{Im}\, E_k \longrightarrow G_I \longrightarrow Cl_k \longrightarrow 0$.

Toute extension abélienne K de k est contenue dans un corps k_I convenable ; le plus petit idéal I qui convient s'appelle le conducteur de K.

Soit K une extension abélienne de k, de conducteur F. En déterminant pour un diviseur F' de F le groupe $(O_k/F')^*/\mathrm{Im}\, E_k$, on détermine le degré sur k de la sous-extension maximale de K/k de conducteur divisant F'. On en déduit pour tout diviseur F' de F le nombre de caractères de K/k de conducteur F', et le produit des conducteurs des caractères de K/k est le discriminant relatif de K/k.

Lorsque k est un corps quadratique imaginaire, l'image de E_k dans $(O_k/F)^*$ est un groupe isomorphe à E_k, donc d'ordre 2, 4 ou 6, sauf dans les deux cas suivants : F divise l'idéal $2\,O_k$, ou $d = -3$ et F divise l'idéal $2\sqrt{-3}\,O_k$. La détermination, pour chaque discriminant d et chaque idéal entier F du corps k de discriminant

d, du degré et du discriminant des corps de classes de conducteur F sur k est alors immédiate.

Lorsque k est une corps biquadratique totalement imaginaire, le groupe des unités de k est de rang 1. Plutôt que d'étudier, pour chaque corps k, chaque conducteur possible sur k, ce qui conduirait à des calculs longs et fastidieux, nous avons cherché des exemples à l'aide de la méthode suivante.

Soit ϵ une unité fondamentale de k, et soit ζ une racine de l'unité contenue dans k dont l'ordre r soit maximal. Etant donnés deux entiers p et q, $p > 0$, $0 \leqslant q < r$, on considère l'idéal principal I engendré par $(\epsilon^p - \zeta^q)$. Les unités ϵ^p et ζ^q ont même image dans $(O_k/I)^*$, si bien que l'ordre du sous-groupe de $(O_k/I)^*$ formé des images des unités de k ne dépasse pas pq. En calculant la norme de I, on trouve tout de suite l'ordre du groupe $(O_k/I)^*/\mathrm{Im}\, E_k$, donc le degré du corps k_I, dont le discriminant est ensuite calculé par la méthode indiquée ci-dessus.

Le calcul du degré du corps de classe de rayon I nécessite théoriquement que l'on connaisse une unité fondamentale. Pratiquement, lorsque l'on connaît une unité ϵ, on évite de vérifier qu'elle est fondamentale en procédant ainsi : on calcule l'ordre n du quotient de $(O_k/I)^*$ par le sous-groupe engendré par l'image de ϵ et ζ, et l'on vérifie en calculant modulo des idéaux premiers convenablement choisis que les unités $\zeta^x \epsilon$, $0 \leqslant x < r$, ne sont une puissance p-ème pour aucun diviseur premier p de n. C'est ce procédé qui a été appliqué pour vérifier les résultats de la table II.

Nous présentons les résultats sous forme de tables. La table I concerne les extensions abéliennes de corps quadratiques imaginaires ; elle a été confectionnée en utilisant des calculs de Gilles Robert. La table II concerne les extensions abéliennes des corps biquadratiques totalement imaginaires.

Les corps K_n sont tous des corps de classes de rayon, à l'exception du corps de degré 24 de la table I, qui est un sous-corps du corps de degré 48 qui se trouve dans cette même table.

On observe que la plupart des exemples de la table I ayant un degré divisible par 4 sont améliorés dans la table II. On pourrait probablement faire de même pour des degrés divisibles par 6 ou 8 en considérant les corps de classes des corps de degré 6 ou 8 que l'on connaît. Néanmoins, l'existence de plusieurs unités fondamentales complique considérablement les calculs.

Le corps K de degré 8 donné dans la table I est un corps de classes de rayon un idéal premier au-dessus de 17 sur $k = \mathbf{Q}(i)$. L'extension K/k est cyclique de degré 4. Donc, K est une extension quadratique du corps K' de degré 4, totalement imaginaire, de discriminant $2^4.17 = 272$; le conducteur de K/K' est l'idéal de K' au-dessus de 17 ramifié dans K'. Le discriminant de K lui-même est $d_K = 2^8.17^3 = 1\,257\,728$. Nous avons vérifié que d_K est le plus petit discriminant possible pour un corps totalement imaginaire de degré 8 contenant un corps de degré 4. Cela nécessite en particulier de vérifier qu'il n'existe pas de corps K' de degré 4 ayant une classe au sens restreint d'ordre 2 dont le discriminant vérifie l'inégalité $|d_{K'}| \leqslant [2^4.17^{3/2}] = 1\,121$. La vérification se fait en utilisant les tables de Godwin ([1], [2] et [3]). Le plus petit discriminant d'un corps de degré 4 possédant une classe d'ordre 2 au sens restreint est $3^2.5^3 = 1\,125$, discriminant du corps cyclique totalement réel de degré 4 et de conducteur 15, et l'extension non ramifiée aux places finies qui lui correspond est le corps des racines 15-èmes de l'unité.

Les corps de classes de corps quadratiques ou biquadratiques ne donnent pas de bons exemples pour les degrés dépassant la centaine. Un autre procédé de construction est donné au paragraphe suivant.

3. Utilisation des corps de classes de Hilbert.

Hasse ([4]) a construit une table des nombres de classes relatifs des corps abéliens imaginaires de conducteurs au plus 100 ; c'est cette table qui est à l'origine du corps de degré 40 donné dans la table II. Cette table ne conduit pas directement à d'autres exemples de petits discriminants (exception faite du corps de degré 14 de la table I, bien connu par ailleurs). Voici néanmoins deux exemples utilisant les calculs de nombre de classes de Hasse.

Dans le premier cas, on considère le corps abélien K de degré 8, de conducteur $3.17 = 51$, de nombre de classes 5 (c'est l'extension quadratique non ramifiée du corps de degré 4 et de nombre de classes 10 utilisé dans la table II). Le corps K contient le corps quadratique $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Le nombre premier 17 est inerte dans k. Le corps de classes K_1 de rayon 17 sur k a pour degré relatif $\frac{17^2 - 1}{6} = 48$. Il contient K. On a $[K_1 : \mathbf{Q}] = 96$ et 5 ne divise pas $[K_1 : K]$. Donc, le degré sur K_1 de son corps de classes de Hilbert est divisible par 5. On en déduit l'existence d'une extension non ramifiée L_1 de K_1, de degré $5.96 = 480$ sur $\mathbf{Q}$. Pour le corps L_1, on a :

$$|d_{L_1}|^{1/480} = |d_{K_1}|^{1/96} = 3^{1/2}.17^{47/48} = 27{,}757\ldots .$$

La table de Odlyzko sous GRH donne pour tout corps M_1 de degré 480 la minoration $|d_{M_1}| \geqslant 26{,}485$; l'excès est de 4,80 %.

Dans le second cas, K est le corps cyclotomique de conducteur $3.23 = 69$. On prend $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ comme ci-dessus ; K/k a pour conducteur 23, et le corps de classes K_2 de conducteur 23 sur k a pour degré relatif $\frac{23^2 - 1}{6} = 88$. Ici encore, le nombre de classes de K_2 est divisible par celui de K. On en déduit l'existence d'un corps L_2 de degré $2.88.69 = 12144$, qui est une extension non ramifiée de K_2. Pour le corps L_2, on a :

$$|d_{L_2}|^{1/12144} = |d_{K_2}|^{1/76} = 3^{1/2}.23^{87/88} = 38{,}442\ldots .$$

Par interpolation de la table de Odlyzko sous GRH, on trouve pour un corps M_2 de degré 12144 la minoration approximative $|d_{M_2}|^{1/12144} \geqslant 34{,}95$; l'excès est de 10 % environ.

Remarque. – Nous avons montré dans [5] que le corps $k = \mathbf{Q}\left(\cos \frac{2\pi}{11}, \sqrt{-46}\right)$ possède une 2-tour de corps de classes infinie. Il en résulte l'existence pour tout n de la forme 5.2^p, $p \geqslant 1$, (et aussi pour tout n de la forme $5.3.2^p$, $p \geqslant 2$, car $k(\sqrt{2})$ contient le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ de nombre de classes 3) d'un corps K_n de degré n pour lequel on a l'égalité :

$$|d_{K_n}|^{1/n} = |d_k|^{1/10} = 92{,}368\ldots .$$

Comparé à la meilleure minoration asymptotique démontrée sous l'hypothèse de Riemann généralisée, à savoir 44,7 (cf. [10]), l'excès est de 107 % environ.

4. Corps de nombre de classes 1.

Les minorations des discriminants permettent de majorer dans certains cas les nombres de classes. Plus précisément, Odlyzko donne dans ses tables pour chaque entier n pair un réel α_n tel que, pour tout corps K totalement imaginaire de degré n, on ait $|d_K|^{1/n} \geqslant \alpha_n$. Si pour un entier r et un corps K de degré n, on a l'inégalité $|d_K|^{1/n} > \alpha_{rn}$, on en déduit qu'une extension non ramifiée L de K a un degré sur K inférieur à r, car $|d_L|^{1/[L:\mathbf{Q}]} = |d_K|^{1/n}$, et en particulier que le nombre de classes de K est inférieur à r ; dans la suite, nous notons h_K le nombre de classes d'un corps K.

Si $r = 2$, on a évidemment $h_K = 1$. En tenant compte de l'action de groupes des Galois, on peut dans certains cas, comme le fait Masley ([8]), prouver l'égalité $h_K = 1$ même lorsque l'inégalité $|d_K|^{1/n} > \alpha_{rn}$ exige que l'on choisisse $r > 2$. Nous utilisons la proposition suivante, que nous nous contentons d'énoncer pour des extensions cycliques de degré premier.

PROPOSITION. — *Soit* L/K *une extension cyclique de degré premier* p, *et soit* l *un nombre premier qui ne divise pas* h_K.

(i) *Si* $l = p$, *et si exactement une place de* K *se ramifie dans* L, *alors* h_L *est premier à* l.

(ii) *Si* $l \neq p$, *soit* e *le plus petit entier positif pour lequel la congruence* $l^e \equiv 1 \bmod p$ *soit vérifiée. Alors, si* h_L *est divisible par* l, h_L *est divisible par* l^e ; *en particulier, on a alors l'inégalité* $h_L > p$.

Démonstration. — Ces résultats étant bien connus, nous en donnons une démonstration succinte.

On observe d'abord que l'ensemble V des classes x de L vérifiant $x^l = 1$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{F}_l$ à l éléments stable par $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, qui fournit donc une représentation de G. On montre ensuite que le sous-espace V^G de V formé des classes invariantes par G est réduit à l'élément neutre. Sous les hypothèses de (i), cela résulte de la détermination classique des classes invariantes ("formule des classes ambiges"). Sous les hypothèses de (ii), cela se voit en calculant la norme dans L/K d'une classe x : par extension des classes à L, on obtient x^p, alors, x est annulé à la fois par l et par ph_k, donc $x = 1$. L'égalité $V = (0)$ est maintenant claire dans le cas (i), puisque une représentation non nulle d'un p-groupe sur un corps de caractéristique p contient la représentation unité ([11], chap. IX, th. 2). Dans le cas (ii), on écrit V comme somme directe de représentations irréductibles rationnelles sur $\mathbf{F}_l$. Aucune de ces représentations n'est la représentation unité ; leur degré commun est égal au degré sur $\mathbf{F}_l$ du corps obtenu en adjoignant à $\mathbf{F}_l$ les racines p-èmes de l'unité (corps engendré par les valeurs des caractères absolument irréductibles non triviaux), c'est-à-dire précisément e.

Nous pouvons maintenant prouver que les 27 corps figurant dans les tables ont tous pour nombre de classes 1. Jusqu'au degré 60, cela résulte immédiatement des tables ($r = 2$ convient). Pour les degrés 72 et 80, il faut prendre $r = 3$. Donc, en désignant par K l'un des deux corps, on a $h_K \leqslant 2$. Dans les deux cas, K est une extension cyclique d'un corps k de nombre de classes 1 de degré 4 sur $\mathbf{Q}$, une unique place se ramifie dans K/k et cette place est totalement ramifiée dans K/k. Pour tout diviseur q de $[K:k]$, soit K_q la sous-extension de K/k de degré q sur k. On a aussi pour tout q l'inégalité $h_{K_q} \leqslant 2$. Pour le corps de degré 72, l'application de (ii) à K_3/k puis à K_9/K_3 montre que l'on a $h_{K_3} = h_{K_9} = 1$. En appliquant (i) à $K/K_9 = K_{18}/K_9$, on en déduit l'égalité $h_K = 1$. Dans le cas du degré 80, on montre par (ii) l'égalité $h_{K_5} = 1$, puis on conclut comme ci-dessus en appliquant (i) aux extensions K_{10}/K_5 et $K_{20}/K_{10} = K/K_{10}$.

On peut exhiber des exemples de corps de nombre de classes 1 de degré plus élevé. Ainsi, soit k le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{1+2i})$ $(i^2 = -1)$, de discriminant $2^6.5 = 320$. L'idéal principal $(5+2i)$ est un idéal premier au-dessus de 29 dans $\mathbf{Q}(i)$, soit p_{29} et $\dfrac{1+\sqrt{1+2i}}{1+i}$ est une unité d'ordre infini de k, soit ϵ. On a

$$\epsilon^7 = \frac{1}{1+i}\,[(-21-20i) + (-19-4i)\sqrt{1+2i}].$$

Notons N et T la norme et la trace dans $k/\mathbf{Q}(i)$. On a

$(5+2i)^2 = 21+20i$, d'où $T(\epsilon^7) \equiv 0 \mod p_{29}^2$, $N(\epsilon) = -1$, d'où $N(\epsilon^7) = -1$, d'où enfin $N(\epsilon^7 - 1) = T(\epsilon^7) \equiv 0 \mod p_{29}^2$. Mais $19 + 4i \not\equiv 0 \mod p_{29}$. Il existe donc un idéal P_{29} au-dessus de p_{29} pour lequel on a la congruence $\epsilon^7 \equiv 1 \mod P_{29}^2$. On vérifie modulo un idéal premier de k de degré 1 au-dessus de 233 que ϵ n'est pas une puissance 29-ème dans k. Il en résulte que le corps de classes de rayon P_{29}^2 sur k a pour degré relatif $29.(29-1)/4.7 = 29$. On a ainsi un corps K de degré $4.29 = 116$ sur $\mathbf{Q}$. Le discriminant de K/k est $P_{29}^{2.28}$ (les caractères non triviaux ont tous pour conducteur P_{29}^2). On trouve alors pour le discriminant de K la relation $|d_K|^{1/116} = 2^{3/2}.5^{1/4}.29^{14/29} = 21{,}491\ldots$.

La table de Odlyzko donne $\alpha_{2400} = 21{,}535$; une extension non ramifiée de K a donc un degré au plus égal à $[2400/116] = 20$. On a donc l'inégalité $h_K \leqslant 20$, d'où l'on déduit $h_K = 1$ en appliquant (ii). Un autre exemple de corps de nombre de classes 1 et de degré 116 s'obtient en considérant un corps de classes de rayon un idéal premier au-dessus de 1103 sur le corps biquadratique de discriminant 257 défini par le polynôme $X^4 + X^2 + X + 1$.

Il est à noter que la minoration sous GRH donnée par Odlyzko dépasse la minoration asymptotique inconditionnelle à partir du degré 190. A moins d'améliorer les minorations inconditionnelles, il n'est pas possible de construire par le procédé ci-dessus des corps de nombre de classes 1 de degré dépassant 190. Bien entendu, si l'on admettait l'hypothèse de Riemann généralisée, on pourrait donner des exemples de degré beaucoup plus élevé : en particulier, on prouverait que le corps de degré 480 construit au paragraphe 3 a pour nombre de classes 1.

5. Tables.

Voici la signification des données portées dans les tables I et II. On trouve dans la colonne 1 un entier n, le degré d'un corps K dont le discriminant d_K est déterminé par les colonnes 4 et 5. La colonne 6 donne la minoration sous GRH de Odlyzko, et la colonne 7 donne l'erreur relative, exprimée en pourcentage, du résultat de la colonne 5 relativement à la minoration correspondante de la colonne 6. Les résultats des colonnes 5 et 6 sont arrondis aux trois décimales

les plus proches, et ceux de la colonne 7 aux deux décimales les plus proches. La colonne 2 donne le discriminant d'un corps k totalement imaginaire, quadratique dans la table I, biquadratique dans la table II. Le corps K est un corps de classes sur k dont le conducteur est donné dans la colonne 3, avec les notations suivantes : dans la table I, p_q désigne un idéal premier de degré 1 au-dessus du nombre premier q ; dans la table II, P_q (resp. p_q) désigne un idéal premier de degré 1 (resp. de degré 2) au-dessus du nombre premier q.

Voici les corps k utilisés dans la table II (cf. [2]). Les corps de discriminants $3^2.13 = 117$, $3^3.7 = 189$ et $3^2.37 = 333$ sont des extensions quadratiques de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ de conducteurs respectifs p_{13}, $p_3 p_7$ et p_{37} ; le corps de discriminant $5^3 = 125$ (resp. $2^8 = 256$) est le corps des racines 5-èmes (resp. 8-èmes) de l'unité. Les corps de discriminants 229 et 257 sont définis par les polynômes $X^4 + X + 1$ et $X^4 + X^2 + X + 1$, de groupes de Galois symétriques de degré 4. Le corps de discriminant $3^2.17^3 = 44\,217$ est le corps cyclique de degré 4, de conducteur $3.17 = 51$ et de nombre de classes 10 (Hasse, [4], n° 6). Le corps de discriminant $5^2.19^2 = 9025$ est le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-19})$, dont le nombre de classes est égal à 4.

Table I

Corps de classes de corps quadratiques imaginaires *

n	$-d$	f	$\|d_K\|^{1/n}$	$\|d_K\|^{1/n}$	Odl	%
2	3	(1)	$3^{1/2}$	1,732	1,721	0,64
4	3	p_{13}	$3^{1/2}.13^{1/4}$	3,289	3,263	0,79
6	3	p_{19}	$3^{1/2}.19^{1/3}$	4,622	4,592	0,65
8	4	p_{17}	$2.17^{3/8}$	5,787	5,734	0,92
10	3	p_{31}	$3^{1/2}.31^{2/5}$	6,841	6.726	1.70
12	3	$p_3 p_{19}$	$3^{3/4}.19^{5/12}$	7,774	7,598	2,32
14	71	(1)	$71^{1/2}$	8,426	8,371	0,66
16	15	$p_3 p_5$	$3^{3/4}.5^{7/8}$	9,321	9,068	2,78
18	4	p_{37}	$2.37^{4/9}$	9,954	9,697	2,65
22	7	p_{23}	$7^{1/2}.23^{5/11}$	11,003	10,797	1,91
24	7	(3) p_7	$3^{3/4}.7^{5/6}$	11,537	11,283	2,25
32	15	$p_2^2 p_3 p_5$	$2^{1/2}.3^{3/4}.5^{7/8}$	13,181	12,912	2,08
36	23	p_{13}	$23^{1/2}.13^{5/12}$	13,964	13,581	2,82
48	7	(3) p_7	$3^{7/8}.7^{11/12}$	15,565	15,225	2,23

* Table établie d'après des calculs de Gilles Robert.

Table II

Corps de classes de corps biquadratiques totalement imaginaires

n	d	f	$\lvert d_K \rvert^{1/n}$	$\lvert d_K \rvert^{1/n}$	Odl	%
12	$3^2.13$	P_{163}	$3^{1/2}.13^{1/4}.163^{1/6}$	7,687	7,598	1,17
16	$3^2.13$	P_{241}	$3^{1/2}.13^{1/4}.241^{3/16}$	9,198	9,068	1,43
20	2^8	p_{11}	$2^2.11^{2/5}$	10,438	10,270	1,64
24	$3^2.13$	P_{397}	$3^{1/2}.13^{1/4}.397^{5/24}$	11,441	11,283	1,40
36	229	P_{307}	$229^{1/4}.307^{2/9}$	13,889	13,581	2,26
40	$3^2.17^3$	(1)	$3^{1/2}.17^{3/4}$	14,501	14,183	2,24
44	$3^3.7$	P_{463}	$3^{3/4}.7^{1/4}.463^{5/22}$	14,960	14,728	1,57
48	$5^2.19^2$	$p_2 p'_2$	$2^{2/3}.5^{1/2}.19^{1/2}$	15,472	15,225	1,62
52	5^3	P_{911}	$5^{3/4}.911^{3/13}$	16,114	15,680	2,77
56	257	$P_2^2 P_{211}$	$2^{1/4}.211^{13/56}.257^{1/4}$	16,493	16.097	2,46
60	$3^2.37$	p_{19}	$3^{1/2}.37^{1/4}.19^{7/15}$	16,880	16,482	2,41
72	2^8	P_{577}	$2^2.577^{17/72}$	17,948	17,497	2,57
80	257	P_{641}	$257^{1/4}.641^{19/80}$	18,583	18,073	2,82

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.J. GODWIN, Real quartic fields with small discriminants, *J. London Math. Soc.,* 31 (1956), 478-485.

[2] H.J. GODWIN, On totally complex quartic fields with small discriminants, *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* 53 (1957), 1-4.

[3] H.J. GODWIN, On quartic fields of signature one with small discriminant, *Quart. J. Math.,* Oxford, (2), 8 (1957), 214-222.

[4] H. HASSE, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie-Verlag, Berlin, 1952.

[5] J. MARTINET, Tours de corps de classes et estimations de discriminants, *Invent. Math.,* 44 (1978), 65-73.

[6] J. MARTINET, Petits discriminants, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Paris, exposé du 12 décembre 1977.

[7] J. MARTINET, Corps de nombre de classes 1, Séminaire de théorie des nombres, Bordeaux, exposé n° 12 du 20 janvier 1978.

[8] J. MASLEY, Odlyzko bounds and class number problems, in *Algebraic Number Fields,* A. Fröhlich éd., Academic Press, Londres, New York, 1977.

[9] A.M. ODLYZKO, Discriminant Bounds, tables multigraphiées datées du 29 novembre 1976.

[10] G. POITOU, Minorations de discriminants [d'après A.M. Odlyzko], Séminaire Bourbaki, exposé 479, février 1976.

[11] J.-P. SERRE, Corps locaux, deuxième édition, Hermann, Paris, 1968.

Manuscrit reçu le 13 juillet 1978.

Jacques MARTINET,
U.E.R. de Mathématiques
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex (France).