ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT
R. PARVATHAM

Ultraconvergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 239-262
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_239_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 239-262

ULTRACONVERGENCE ET SINGULARITÉS POUR UNE CLASSE DE SÉRIES D'EXPONENTIELLES

par M. BLAMBERT et R. PARVATHAM

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution au problème de la localisation des singularités des fonctions analytiques d'une variable complexe définies par des séries d'exponentielles dont les coefficients sont des polynômes tayloriens.

Il est bien connu qu'un tel problème est difficile à cerner et que les méthodes utilisées par un certain nombre d'auteurs procèdent très souvent d'une généralisation de celles développées pour les séries de Dirichlet classiques.

L'école russe a obtenu de très intéressants résultats dans l'étude des fonctions représentables par les séries étudiées ici (du type $\Sigma\, P_n(s) \exp(-s\lambda_n))$. On a convenu, dans diverses notes, de désigner celles-ci sous le vocable d'éléments LC-dirichlétiens, réservant d'une part celui d'éléments L-dirichlétiens à la sous-classe des LC-dirichlétiens dont les coefficients λ_n constituent une D-suite, sous-classe étudiée avec succès spécialement par B. Lepson [13], et d'autre part celui de C-dirichlétiens au cas où les polynômes $P_n(s)$ se réduisent à des constantes complexes. Certains des résultats de B. Lepson ont été repris, améliorés et généralisés par M. Berland et M. Blambert [1] et sont en partie rappelés et utilisés dans ce travail. T.M. Gallie [7], [8] a inauguré pour les C-dirichlétiens une méthode d'étude féconde qui, affinée par J. Siméon et M. Blambert [6], leur a permis de structurer une théorie fine de la convergence de tels éléments, et J.R. Shackell [19], [20], [21] et G.L. Luntz [14], [15], indépendamment l'un de l'autre, ont donné, pour ces séries, d'intéressants résultats. Le présent travail s'inspire, en partie, de méthodes introduites par ces deux auteurs, notamment celles de G.L. Luntz [16], [17] pour les séries de Taylor-Dirichlet. Bien entendu, les noms cités ne constituent en aucune manière une liste exhaustive des auteurs ayant spécialement abordé l'étude de problèmes concernant les séries d'exponentielles. Dans cet ordre d'idées, citons les résultats obtenus dans sa belle thèse par J.P. Kahane [9], reflets de certaines idées dues à S. Mandelbrojt [18]. On reprendra dans un mémoire en préparation des idées et des méthodes de ces deux auteurs, que l'on combinera à des travaux russes récents.

Ici, dans ce travail, on aborde le problème de la localisation des singularités des fonctions analytiques définies par des éléments LC-dirichlétiens dont la suite des exposants complexes (λ_n) est assujettie à une condition restrictive. Le résultat fondamental obtenu (proposition II.1) est déduit du rapprochement de deux types de propriétés (et généralise d'autres résultats obtenus par les auteurs [2]) : l'un relatif à la détermination d'une portion de frontière naturelle d'une fonction analytique, conséquence d'une propriété d'ultraconvergence de la série de définition de cette fonction, et l'autre reposant sur un beau théorème de A.F. Leont'ev – G.P. Lapin [10], [11] relatif à l'existence de fonctions entières du type exponentiel, au sens de G. Polya, sous des conditions portant sur la donnée des valeurs de ces fonctions et de certaines de leurs dérivées en des points déterminés. L'ensemble constitue le chapitre II.

Dans un premier chapitre, on traite des propriétés de convergence et d'ultraconvergence des éléments LC-dirichlétiens, généralisant certains résultats antérieurement obtenus par les auteurs [3]. Incidemment, ces propriétés permettent d'énoncer un résultat sur la localisation des zéros dont on sait l'intime relation avec les singularités des fonctions. Les propriétés énoncées au chapitre I sont systématiquement utilisées au chapitre II.

Une bibliographie, non exhaustive du sujet, complète l'exposé.

CHAPITRE PREMIER

A. On considère l'élément $\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s)\exp(-s\lambda_n)$, où $P_n(s) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{nj} s^j$, les a_{nj} étant des constantes complexes, avec $a_{n,m_n} \neq 0$, $s = \sigma + i\tau$, $(\sigma, \tau) \in \mathbf{R}^2$, et où les λ_n sont des constantes complexes telles que la suite des modules des λ_n, $(|\lambda_n|)$, est une D-suite ($\Longleftrightarrow |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|$, avec $\lim |\lambda_n| = \infty$, $n \uparrow \infty$; dans tout ce qui suit, on supposera cette condition réalisée. Il en résulte que : dire "(λ_n) est une D-suite" est équivalent à dire, par définition "les λ_n sont positifs et satisfont à cette condition"). On désigne par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ qui sont des zéros pour le polynôme P_n et par $\mathcal{E}_\infty$ l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ qui sont chacun un zéro pour une infinité de polynômes P_n. On pose $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^d \cup \mathcal{E}_\infty$, où $\mathcal{E}^d$ désigne le dérivé de $\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{E}_n$. On supposera, dans tout ce travail : $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* \neq \emptyset$. Cet ensemble est un ouvert de $\mathbf{C}$. Pour chaque point $s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$, on a $P_n(s) \neq 0$, à partir d'une certaine valeur de l'entier n, dépendant évidemment du point s considéré. On pose :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \quad \delta_*(s) = \liminf \{-\operatorname{Log} |P_n(s)\exp(-s\lambda_n)|/|\lambda_n|\}, \quad n \uparrow \infty .$$

(où $\operatorname{Log} x$ désigne, pour $x > 0$, le logarithme népérien de x) et

$$\forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \quad \mathcal{D}_{*\alpha} = \{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \mid \delta_*(s) > \alpha\} .$$

On sait que :

$$\forall_{s_0 \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \quad \forall_{\epsilon \in]0, \operatorname{dist}(s_0, \mathcal{E}^*)[} \quad \exists_{n' \in \mathbf{N}} \quad \forall_{n \geqslant n'} \quad \forall_{s \in \overline{d(s_0, 1/2)}}$$

$$|P_n(s)| > A_n[3(1 + |s_0|)]^{-m_n} \operatorname{Min}\{1, (\epsilon/2)^{m_n}\}$$

où $A_n = \operatorname{Max}\{|a_{nj}| \mid j \in \{0, 1, 2, \ldots, m_n\}\}$.

On pose $\beta^* = \limsup \{m_n/|\lambda_n|\}$, $n \uparrow \infty$. Supposant $\beta^* = 0$, on déduit de la minoration ci-dessus et d'une majoration triviale de $|P_n(s)|$:

$$\forall_{s\in \mathbf{C}-\mathcal{E}^*} \quad \limsup \{\operatorname{Log} A_n/|\lambda_n|\} = \limsup \{\operatorname{Log} |P_n(s)|/|\lambda_n|\}, \quad n\uparrow\infty$$

(et l'analogue pour la limite inférieure).

Utilisant ce résultat et posant

$$\sigma_* = \operatorname{Inf}\{\sigma = \mathcal{R}s \,|\lim \{A_n \exp(-s|\lambda_n|)|\} = 0, \ n\uparrow\infty\},$$

on prouve facilement :

PROPOSITION I.1. – *Sous les conditions :* (λ_n) *est une D-suite,* $\beta^* = 0$ *et* σ_* *est finie, si* D *est un domaine convexe inclus dans* $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ *alors, pour chaque* $\alpha \in \mathbf{R}$, *l'ouvert* $D \cap \mathcal{D}_{*\alpha}$ *est convexe ou vide. Si* $\mathcal{E}^* = \phi$ *alors* $\mathcal{D}_{*\alpha}$ *est convexe ou vide.*

Si pour chaque n on a $m_n = 0$, et (λ_n) étant en général une suite complexe, ($\Longleftrightarrow$ $\{f\}$ se réduit alors à l'élément C-dirichlétien $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,0}\exp(-s\lambda_n)$, avec $a_{n,0} \neq 0$), on sait que $\mathcal{D}_{*\alpha}$ est convexe ou vide pour chaque $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère l'élément dirichlétien $\{f_A\} : \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-s|\lambda_n|)$; on pose :

$$\sigma_*^{f_A} = \liminf \{\operatorname{Log} A_n/|\lambda_n|\}$$

$$\beta_* = \liminf \{m_n/|\lambda_n|\}, \quad n\uparrow\infty .$$

$$\forall_{s\in\mathbf{C}-\mathcal{E}^*} \quad \delta^*(s) = \limsup \{-\operatorname{Log}|P_n(s)\exp(-s\lambda_n)|/|\lambda_n|\}, \quad n\uparrow\infty .$$

Supposant $\sigma_*^{f_A}$ fini, on a : $\delta^*(s) \leqslant \sigma - \sigma_*^{f_A} - \beta_*[\operatorname{Log}\gamma + \operatorname{Log}(1+|s|)]$, où γ est une constante qui peut être, eu égard à la minoration de $|P_n(s)|$ citée ci-dessus, prise égale à $6/\epsilon$. On pose :

$$\forall_{\alpha\in\mathbf{R}} \quad \Delta_\alpha^* = \{s\in\mathbf{C}-\mathcal{E}^* \,|\, \sigma - \sigma_*^{f_A} - \beta_*[\operatorname{Log}\gamma + \operatorname{Log}(1+|s|)] > \alpha\},$$

$$\mathcal{D}_\alpha^* = \{s\in\mathbf{C}-\mathcal{E}^* \,|\, \delta^*(s) > \alpha\} ;$$

on a : $\mathcal{D}_{*\alpha} \subset \mathcal{D}_\alpha^* \subset \Delta_\alpha^*$, et on prouve facilement :

PROPOSITION I.2. – *Sous les conditions :* (λ_n) *est une* D*-suite,* $\beta_* < \infty$, $\sigma_*^{f_A}$ *est fini, et* D *désignant un domaine convexe inclus dans* $\bar{\mathbf{C}} - \mathcal{E}^*$, *alors : si* s_1 *et* s_2 *sont deux points de l'ensemble* $D \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^* - \Delta_\alpha^*$, *avec* $\mathcal{R}s_1 = \mathcal{R}s_2$ *le segment* $[s_1, s_2]$ *joignant ces deux points appartient aussi à cet ensemble.*

Dans ce qui suit $\mathcal{K}$ désignera toujours un compact de $\mathbf{C}$. On convient de dire qu'une application est sous-lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbf{C}$ si elle est lipschitzienne sur tout compact inclus dans cet ouvert. On rappelle les trois propositions suivantes :

PROPOSITION I.3, [3]. – *Sous la condition $\beta^* < \infty$ et s'il existe un point $s_0 \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ tel que $\delta_*(s_0)$ est fini, alors l'application $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* \ni s \longmapsto \delta_*(s)$ est sous-lipschitzienne sur son support (et donc uniformément continue sur chaque compact inclus dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. L'ensemble $\mathcal{O}_{*\alpha}$ pour chaque $\alpha \in \mathbf{R}$ est alors un ouvert (s'il n'est pas vide) non nécessairement connexe de $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$.*

PROPOSITION I.4, [3]. – *Sous la condition $\beta^* < \infty$, l'implication suivante est vraie :*

$$\forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \left\{ \mathcal{O}_{*\alpha} \neq \phi \Longrightarrow \forall_{\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{*\alpha}} \ \exists_{\beta' > \beta^*} \ \exists_{n' \in \mathbf{N}} \ \forall_{n \geqslant n'} \ \forall_{s \in \mathcal{K}} \right.$$
$$\left. |\mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp[-|\lambda_n|(\alpha - \beta')] \right\} .$$

On pose $\mathrm{L} = \limsup \{\operatorname{Log} n/|\lambda_n|\}$, $n \uparrow \infty$; on a :

PROPOSITION I.5, [3]. – *Sous la condition $\mathrm{L} < \infty$, l'élément* LC*-dirichlétien $\{f\}$ converge absolument sur l'ouvert $\mathcal{O}_{*\mathrm{L}}$. Sous les conditions : $\mathrm{L} < \infty$ et $\beta^* < \infty$, l'élément* LC*-dirchlétien $\{f\}$ converge absolument et sous-uniformément sur $\mathcal{O}_{*,\mathrm{L}+\beta^*}$ et diverge sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* - \overline{\mathcal{O}}_{*0}$ (où $\overline{\mathcal{O}}_{*0}$ désigne l'adhérence dans $\mathbf{C}$ de $\mathcal{O}_{*0}$). Sans condition sur β^*, sous la seule condition $\mathrm{L} = 0$, l'ouvert $\mathcal{O}_{*0}$ est alors l'ouvert maximal de convergence absolue de $\{f\}$ dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$.*

B. Utilisant une idée de G.L. Luntz [17] et considérant à nouveau l'élément LC-dirichlétien $\{f\}$, on suppose ici, dans tout ce paragraphe, $m_n \geqslant 1$ pour chaque entier $n > 1$ ($\{f\}$ ne peut donc pas se réduire à un élément C-dirichlétien). On désigne par M l'ensemble des points de $\mathbf{R}^+$ qui sont des quotients $|\lambda_n|/m_n$. On suppose M borné. On désigne par M^d son dérivé, par M_∞ l'ensemble des points réels α qui sont chacun respectivement égaux à une infinité de quotients $|\lambda_n|/m_n$, et on pose $\mathrm{M}^* = \mathrm{M}^d \cup \mathrm{M}_\infty$. L'ensemble M^* est un fermé de $\mathbf{R}$ (et donc un compact de $\mathbf{R}$ puisque M est borné). Soient deux constantes

ρ et α, avec $\rho \in M^*$ et $\alpha > 0$. L'ensemble des quotients $|\lambda_n|/m_n$ appartenant à l'intervalle compact $[\rho - \alpha, \rho + \alpha]$ est ordonné en une sous-suite $(|\lambda_{n_j\alpha}|/m_{n_j\alpha})$, $j \in \mathbf{N}$, de la suite $(|\lambda_n|/m_n)$. On pose (comme au paragraphe (A)) :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \quad \delta_*(\rho, \alpha, s) =$$
$$= \liminf \{- \operatorname{Log} |P_{n_j^\alpha}(s) \exp(-s\lambda_{n_j^\alpha})| / |\lambda_{n_j^\alpha}|\}, \; n \uparrow \infty,$$

et on désigne par $\{f\}_{\rho,\alpha}$ l'élément LC-dirichlétien

$$\sum_j P_{n_j^\alpha}(s) \exp(-s\lambda_{n_j^\alpha}).$$

L'application $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* \ni s \longmapsto \delta_*(\rho, \alpha, s)$ est définie pour l'élément $\{f\}_{\rho,\alpha}$ comme δ_* pour l'élément $\{f\}$, et avec $\beta^* < \infty$ s'il existe $s_0 \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ tel que $\delta_*(\rho, \alpha, s_0)$ est fini alors elle est sous-lipschitzienne sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. Il est évident que :

$$\alpha' > \alpha \Longrightarrow \delta_*(\rho, \alpha', s) \leqslant \delta_*(\rho, \alpha, s).$$

On pose (s'il existe un point s tel que $|\delta_*(\rho, \alpha, s)| < \infty$) :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \quad \delta_*(\rho, s) = \lim \delta_*(\rho, \alpha, s), \quad \alpha \downarrow 0,$$

et

$$\forall_{\beta \in \mathbf{R}} \quad \mathcal{D}_{*,\rho,\beta} = \{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \mid \delta_*(\rho, s) > \beta\}.$$

Il est évident que :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \; \forall_{\rho \in M^*} \; \forall_{\alpha > 0} \quad \delta_*(\rho, s) \geqslant \delta_*(\rho, \alpha, s) \geqslant \delta_*(s)$$

et donc $\forall_{\rho \in M^*} \; \forall_{\beta \in \mathbf{R}} \; \mathcal{D}_{*,\rho,\beta} \supset \mathcal{D}_{*,\beta}$. On énonce :

PROPOSITION I.6. – *Sous les conditions : l'entier* $m_n \geqslant 1$ *pour chaque* $n \geqslant 1$, M^* *est borné, et* L *est fini, on a :*

1) $\{f\}$ *converge absolument sur* $\bigcap_{\rho \in M^*} \mathcal{D}_{*,\rho,L}$;

2) $\{f\}$ *diverge sur* $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* - \bigcap_{\rho \in M^*} \overline{\mathcal{D}_{*,\rho,0}}$ (*où* $\overline{\mathcal{D}_{*,\rho,0}}$ *désigne l'adhérence dans* $\mathbf{C}$ *de* $\mathcal{D}_{*,\rho,0}$).

Soit $s \in \bigcap_{\rho \in M^*} \mathcal{D}_{*,\rho,L}$ (si cet ensemble n'est pas vide). On a : $\delta_*(\rho, s) > L$ et donc

$$\forall_{\rho \in M^*} \; \exists_{\epsilon_\rho > 0} \; \exists_{\alpha_\rho > 0} \quad \delta_*(\rho, \alpha_\rho, s) > L + \epsilon_\rho .$$

On considère l'ensemble des ouverts $]\rho - \alpha_\rho , \rho + \alpha_\rho[$, indexés par ρ sur M^*, et, puisque M^* est un compact, on a :

$$\exists_{\{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_k\}\subset M^*} \quad M^* \subset \bigcup_{j\in\{1,2,\ldots,k\}}]\rho_j - \alpha_{\rho_j} , \rho_j + \alpha_{\rho_j}[\,.$$

Il n'existe donc qu'un nombre fini au plus de quotients $|\lambda_n|/m_n$ n'appartenant pas à l'ouvert $\bigcup_j]\rho_j - \alpha_{\rho_j} , \rho_j + \alpha_{\rho_j}[$. On considère l'ensemble des quotients $|\lambda_n|/m_n$ appartenant à $[\rho_j - \alpha_{\rho_j} , \rho_j + \alpha_{\rho_j}]$ et on l'ordonne en une sous-suite $(|\lambda_{n_p^j}|/m_{n_p^j})$, $p \in \mathbf{N}$, de la suite $(|\lambda_n|/m_n)$. On a :

$$\forall_{j\in\{1,2,\ldots,k\}} \quad \exists_{\epsilon_j>0} \quad \delta_*(\rho_j , \alpha_{\rho_j} , s) > L + \epsilon_j \,,$$

et (eu égard à la définition de $\delta_*(\rho_j , \alpha_{\rho_j} , s)$) :

$$\exists_{p_j} \quad \forall_{p\geqslant p_j} \quad \text{Log}\, |P_{n_p^j}(s) \exp(-s\lambda_{n_p^j})| < -(L + \epsilon_j)\, |\lambda_{n_p^j}| \,;$$

donc la série $\{f\}_{\rho_j,\alpha_{\rho_j}}$ converge absolument au point s. Il s'ensuit que $\{f\}$ converge absolument au point s.

Si $\mathbf{C} - \mathscr{E}^* - \bigcap_{\rho\in M^*} \overline{\mathcal{D}_{*,\rho,0}}$ est non vide, soit s un point de cet ensemble. On a :

$$\exists_{\rho_0\in M^*} \quad s \notin \overline{\mathcal{D}_{*,\rho_0,0}} (\Longrightarrow \delta_*(\rho_0 , s) < 0$$
$$\Longrightarrow \exists_{\epsilon>0} \quad \delta_*(\rho_0 , s) < -\epsilon \Longrightarrow \exists_{\alpha>0} \quad \delta_*(\rho_0 , \alpha , s) < -\epsilon) \,.$$

On considère l'ensemble des quotients $|\lambda_n|/m_n$ appartenant à l'intervalle $[\rho_0 - \alpha , \rho_0 + \alpha]$ et on l'ordonne en une sous-suite de $(|\lambda_n|/m_n)$ que l'on note $(|\lambda_{n_j}|/m_{n_j})$, $j \in \mathbf{N}$. On a donc :

$$\exists_{j_0} \quad \forall_{j\geqslant j_0} \quad \exp(\epsilon\, |\lambda_{n_j}|) < |P_{n_j}(s) \exp(-s\lambda_{n_j})| \,.$$

L'élément $\{f\}$ diverge au point s.

Remarque. – Sous les conditions légitimant l'assertion (1) de la proposition (I.6), on a, avec $L = 0$: $\mathcal{D}_{*0} = \text{Int} \bigcap_{\rho\in M^*} \mathcal{D}_{*,\rho,0}$.

C. n et n' étant deux entiers naturels, avec $n' \geqslant n$, on désigne par $E_{n,n'}$ l'ensemble (indexé par le couple (n, n')) des points de $\mathbf{C}$ qui sont des zéros pour le polynôme LC-dirichlétien :

$$S_{n,n'}(s) = \sum_{j=n}^{n'} P_j(s) \exp(-s\lambda_j),$$

par E la réunion de tous les ensembles $E_{n,n'}$ correspondant à tous les couples (n, n'), et par E_∞ l'ensemble formé des points qui sont chacun zéros pour une infinité de polynômes $S_{n,n'}(s)$. On pose $E^* = E^d \cup E_\infty$, où E^d est le dérivé de E. E^* est un fermé de $\mathbf{C}$. Il est évident que $E \supset \mathcal{E}$ et $E_\infty \supset \mathcal{E}_\infty$, donc $E^* \supset \mathcal{E}^*$. On suppose dans tout ce qui suit $\mathbf{C} - E^* \neq \phi$ ($\Longrightarrow \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \neq \phi$). On énonce :

PROPOSITION I.7. — *Sous les conditions* : $(|\lambda_n|)$ *est une* D*-suite,* $L < \infty$, $\beta^* < \infty$ *et* $\sigma_* < \infty$, *alors on a* : $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*L}) \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \subset E^*$.

L'assertion est évidemment triviale si l'ensemble $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*L}) \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ est vide. Dans le cas contraire, on suppose l'assertion fausse. Il existe alors un point b appartenant à cet ensemble et un disque ouvert de centre b et de rayon $\rho > 0$ —noté $d(b, \rho)$— inclus dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ et tel que $\overline{d(b, \rho)} \cap E^* = \phi$. On considère un composant connexe $\mathcal{G}$ de l'ouvert $d(b, \rho) \cap \mathcal{D}_{*L}$. On remarquera que si, plus particulièrement, les conditions de la proposition (I.1) sont satisfaites, alors puisque $d(b, \rho) \subset \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$, l'ouvert $d(b, \rho) \cap \mathcal{D}_{*L}$ est convexe (donc connexe).

Puisque $\overline{d(b, \rho)} \cap E^* = \phi$, on a :

$$\exists_{n_0} \ \forall_{n' \geqslant n \geqslant n_0} \ \forall_{s \in d(b,\rho)} \ S_{n,n'}(s) \neq 0 .$$

Or

$$\forall_{n \in \mathbf{N} - \{0\}} \ \forall_{s \in \mathbf{C}} \ |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| \leqslant A_n \exp\left\{ \left[\frac{m_n}{|\lambda_n|} \mathrm{Log}(1 + |s|) + |s|\right] |\lambda_n| \right\}$$

et $\forall_{\beta' > \beta^*} \ \exists_{n'_0} \ \forall_{n \geqslant n'_0} \ m_n/|\lambda_n| < \beta'$. Soit un certain $\beta' > \beta^*$.

On pose : $\omega = \beta' \mathrm{Log}(1 + |b| + \rho) + (1 + |b| + \rho)$,

d'où $\forall_{n \geqslant n'_0} \ \forall_{s \in d(b,\rho)} \ |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < A_n \exp(\omega |\lambda_n|)$. On a, comme on le constate facilement eu égard à la définition de σ_* :

$$\sigma_* = \limsup \{\mathrm{Log}\, A_n/|\lambda_n|\}, \ n \uparrow \infty ,$$

et donc $\sigma_c^{f_A} - \sigma_* \leqslant L$, où $\sigma_c^{f_A}$ désigne l'abscisse de convergence de l'élément dirichlétien $\{f_A\}$. On a :

$$\underset{\sigma'>\sigma_*}{\forall} \ \underset{n_0''}{\exists} \ \underset{n\geqslant n_0''}{\forall} \ A_n < \exp(\sigma' \, |\lambda_n|).$$

En définitive, posant $n_1 = \operatorname{Max}\{n_0, n_0', n_0''\}$, on obtient :

$$\underset{n\geqslant n_1}{\forall} \ \underset{s\in d(b,\rho)}{\forall} \ |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp[(\omega + \sigma') \, |\lambda_n|].$$

On pose :

$$\underset{s\in d(b,\rho)}{\forall} \ T_{n_1,n}(s) = [S_{n_1,n}(s)]^{1/|\lambda_n|}$$

$[S_{n_1,n}]^{1/|\lambda_n|}$ étant, par définition, égal à $\exp[(1/|\lambda_n|) \operatorname{Log} S_{n_1,n}(s)]$, où $\operatorname{Im} \operatorname{Log} S_{n_1,n}(s) \in]-\pi, \pi]$, pour chaque point s de $d(b, \rho)$.

Pour chaque entier $n \geqslant n_1$, l'application $T_{n_1,n}$: $d(b, \rho) \ni s \longmapsto T_{n_1,n}(s)$ est holomorphe sur son support $d(b, \rho)$. On a :

$$\underset{s\in d(b,\rho)}{\forall} \ |T_{n_1,n}(s)| = |S_{n_1,n}(s)|^{1/|\lambda_n|} \leqslant \left[\sum_{j=n_1}^{n} |P_j(s) \exp(-s\lambda_j)|\right]^{1/|\lambda_n|}$$
$$\leqslant \{n \exp[(\omega + \sigma') \, |\lambda_n|]\}^{1/|\lambda_n|}.$$

Eu égard à la condition $L < \infty$, la suite des applications $(T_{n_1,n})$, $n \geqslant n_1$, est bornée sur le disque $d(b, \rho)$. Cette suite est donc normale sur $d(b, \rho)$. Soit $\mathcal{K}$ un compact inclus dans $d(b, \rho)$ tel que $\mathcal{G} \cap \operatorname{Int}\mathcal{K} \neq \emptyset$ et $\operatorname{Int}\mathcal{K}$ est un connexe. Il est évident que $\operatorname{Int}\mathcal{K} \cup \mathcal{G}$ est un ouvert connexe non vide. De toute suite extraite de $(T_{n_1,n})$, on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur $\mathcal{K}$. La fonction limite est holomorphe sur $\operatorname{Int}\mathcal{K}$ et continue sur $\mathcal{K}$. Puisque $\mathcal{D}_{*,L}$ est, comme on sait, un ouvert de convergence absolue pour $\{f\}$ (et plus précisément l'ouvert maximal de convergence absolue de $\{f\}$ relativement à $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ si $L = 0$), on a donc :

$$\underset{s\in\mathcal{K}\cap\mathcal{G}}{\forall} \ \lim T_{n_1,n}(s) = 1, \quad n \uparrow \infty.$$

De toute suite extraite de $(T_{n_1,n})$, on peut donc extraire une sous-suite uniformément convergente sur $\mathcal{K}$ vers une fonction limite holomorphe sur $\operatorname{Int}\mathcal{K}$, continue sur $\mathcal{K}$, et prenant la valeur 1 en chaque point de l'ouvert $\mathcal{K} \cap \mathcal{G}$. Donc cette fonction limite prend la valeur 1 en chaque point de $\mathcal{K}$.

Il en résulte que la suite $(T_{n_1,n})$ converge vers la même fonction limite sur $\mathcal{K}$ et donc :

$$\underset{s\in d(b,\rho)}{\forall} \lim \mathrm{T}_{n_1,n}(s) = 1\,,\quad n \uparrow \infty\,,$$

puisque tout point s de $d(b\,,\rho)$ peut appartenir à un compact $\mathcal{K}$ satisfaisant aux conditions précisées.

Soit un point $s_0 \in d(b\,,\rho) \cap (\mathbf{C} - \mathcal{E}^* - \overline{\mathcal{D}_{*0}})$. On a (eu égard au résultat obtenu ci-dessus) :

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{n_1'(\geqslant n_1)}{\exists}\ \underset{n\geqslant n_1'}{\forall}\ \left|\sum_{j=n_1}^{n} \mathrm{P}_j(s_0)\exp(-s_0\lambda_j)\right| < (1+\epsilon)^{|\lambda_n|}$$

et donc

$$\underset{n>n_1'}{} |\mathrm{P}_n(s_0)\exp(-s_0\lambda_n)| = |\mathrm{S}_{n_1,n}(s_0) - \mathrm{S}_{n_1,n-1}(s_0)| < 2(1+\epsilon)^{|\lambda_n|}$$

d'où

$$-\operatorname{Log}|\mathrm{P}_n(s_0)\exp(-s_0\lambda_n)|/|\lambda_n| > -\operatorname{Log} 2/|\lambda_n| - \operatorname{Log}(1+\epsilon)\,,$$

$\delta_*(s_0) \geqslant -\operatorname{Log}(1+\epsilon)$ ($\Longrightarrow \delta_*(s_0) \geqslant 0$ puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire) et donc $s_0 \in \overline{\mathcal{D}_{*0}} \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. La contradiction établit l'assertion.

D. Dans ce paragraphe, on suppose que la suite complexe (λ_j) satisfait aux conditions (C) suivantes :

1) la série $\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-s\,|\lambda_j|)$ converge sur $\mathrm{P}_0 = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathcal{R}s > 0\}$;

2) $\underset{\eta>0}{\forall}$ la suite d'applications (θ_n) est bornée sur

$\overline{\mathrm{P}}_\eta = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathcal{R}s \geqslant \eta\}$, où $\theta_n : \mathrm{P}_0 \ni s \longmapsto \theta_n(s)$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \exp(-s(|\lambda_j| - |\lambda_n|))$$

3) $\underset{\eta>0}{\forall}$ la suite d'applications (θ_n^*) est bornée sur $\overline{\mathrm{P}}_\eta$, où
$\theta_n^* : \mathrm{P}_0 \ni s \longmapsto \theta_n^*(s) = \sum_{j=1}^{n} \exp[-s(|\lambda_n| - |\lambda_j|)]$.

Les trois conditions suivantes sont vérifiées par toute D-suite $(|\lambda_j|)$ satisfaisant à $\operatorname{Inf}\{|\lambda_{j+1}| - |\lambda_j|\} > 0$. Pour toute suite (λ_j) satisfaisant aux conditions (C) on a $\mathrm{L} = 0$.

Proposition I.8. – *Sous les conditions*

1) *la suite complexe* (λ_n) *satisfait les conditions* (C) ;

2) $\beta^* < \infty$ *et* σ_* *est fini ;*

3) $\mathcal{D}_{*,\beta^*} \neq \phi$;

4) *il existe une sous-suite* (n_ν), $\nu \in \mathbf{N}$, *de la suite des entiers naturels* (n) *et une suite de constantes strictement positives* (θ_ν), $\nu \in \mathbf{N}$, *avec* $\lim \theta_\nu = \infty$, *telles que* : $\underset{\nu\in\mathbf{N}}{\forall}$ $|\lambda_{n_\nu+1}| > (1+\theta_\nu)\,|\lambda_{n_\nu}|$, *alors la suite* $(S_{n_\nu}(s))$, $\nu \in \mathbf{N}$,

où $S_{n_\nu}(s) = \sum_{j=1}^{n_\nu} P_j(s)\exp(-s\lambda_j)$, *converge en chaque point* s *d'un ouvert connexe* D, *inclus dans* $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ *et tel que* $D \cap \mathcal{D}_{*,\beta^*} \neq \phi$, *dans lequel la fonction analytique* f *définie par* $\{f\}$ *est holomorphe.*

On considère trois domaines bornés $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ satisfaisant aux conditions suivantes : $\overline{\Delta}_1 \subset \Delta_2$, $\overline{\Delta}_2 \subset \Delta_3 \subset \overline{\Delta}_3 \subset \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$, $\overline{\Delta}_1 \subset \mathcal{D}_{*,\beta^*}$. En outre, $\overline{\Delta}_3$ est inclus dans un ouvert connexe dans lequel la fonction analytique f définie par $\{f\}$ est holomorphe. Enfin, on suppose que $\mathrm{Fr}(\Delta_1), \mathrm{Fr}(\Delta_2), \mathrm{Fr}(\Delta_3)$ satisfont à une condition du type Hadamard, notée (H), à savoir :

$$\underset{b\in]0,1[}{\forall} \quad \mathrm{Log}\, M_2 \leqslant b\,\mathrm{Log}\, M_1 + (1-b)\,\mathrm{Log}\, M_3$$

où
$$\underset{i\in\{1,2,3\}}{\forall} \quad M_i = \mathrm{Max}\,\{|f(s)| \mid s \in \mathrm{Fr}(\Delta_i)\}.$$

Remarque 1. — Soit $\mathcal{K}$ un compact inclus dans l'ouvert $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. On pose :

$$M_{\mathcal{K}} = \mathrm{Sup}\,\{\delta_*(s) \mid s \in \mathcal{K}\}$$
$$m_{\mathcal{K}} = \mathrm{Inf}\,\{\delta_*(s) \mid s \in \mathcal{K}\}\,;$$

$M_{\mathcal{K}}$ et $m_{\mathcal{K}}$ sont des réels finis et $\underset{s_0\in\mathcal{K}}{\exists}$ $\delta_*(s_0) = m_{\mathcal{K}}$, puisque δ_* est continue sur l'ouvert $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. On a :

$$\underset{s\in\mathcal{K}}{\forall} \ \delta_*(s) \geqslant m_{\mathcal{K}} \quad \text{et} \quad \underset{\alpha<m_{\mathcal{K}}}{\forall}\ \underset{s\in\mathcal{K}}{\forall}\ \delta_*(s) > \alpha \ (\Longrightarrow \mathcal{K} \subset \mathcal{D}_{*\alpha}),$$

et
$$\mathcal{K} \not\subset \mathcal{D}_{*,m_{\mathcal{K}}}.$$

On pose : $\alpha_{\mathcal{K}} = \mathrm{Sup}\,\{\alpha \in \mathbf{R} \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{D}_{*\alpha}\}$ et on a : $m_{\mathcal{K}} \geqslant \alpha_{\mathcal{K}}$. On suppose $\alpha_{\mathcal{K}} < m_{\mathcal{K}}$; on a alors : $\underset{\epsilon>0}{\exists}$ $\alpha_{\mathcal{K}} < m_{\mathcal{K}} - \epsilon$. Or $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}_{*,m_{\mathcal{K}}-\epsilon}$ et donc $\alpha_{\mathcal{K}}$ n'est pas le supremum de l'ensemble $I_{\mathcal{K}} = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{D}_{*\alpha}\}$; d'où : $\alpha_{\mathcal{K}} = m_{\mathcal{K}}$.

Si pour $\mathcal{K}$ on choisit $\overline{\Delta}_1$ on a donc $\alpha_{\Delta_1} = m_{\Delta_1}$ et

$I_{\Delta_1} =]-\infty, \alpha_{\Delta_1}[\ni \beta^*$; si pour $\mathcal{K}$ on choisit $\overline{\Delta}_3$ on a $\alpha_{\Delta_3} = m_{\Delta_3}$, et $I_{\Delta_3} =]-\infty, \alpha_{\Delta_3}[$.

Remarque 2. – Soient un point $s \in \overline{\Delta}_1$ et une constante réelle α telle que $\overline{\Delta}_1 \subset \mathcal{D}_{*\alpha}$. On a montré que $\alpha < \alpha_{\Delta_1} = m_{\Delta_1}$; on a : $\delta_*(s) > \alpha$. L'application δ_* est continue sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$, en particulier au point s ; donc à chaque point s de $\overline{\Delta}_1$ on peut associer un disque d_{s,ϵ_s}, de centre s et de rayon égal à $\epsilon_s > 0$, et un nombre α_s strictement supérieur à α tels que :

$$d_{s,\epsilon_s} \subset \mathcal{D}_{*\alpha} \quad \text{et} \quad \underset{s' \in d_{s,\epsilon_s}}{\forall} \ \delta_*(s') > \alpha_s .$$

L'ensemble des disques d_{s,ϵ_s} indexés par s sur $\overline{\Delta}_1$ est un recouvrement ouvert du compact $\overline{\Delta}_1$. On a alors :

$$\underset{\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}}{\exists} \ \bigcup_{j=1}^{k} d_{s_j,\epsilon_{s_j}} \supset \overline{\Delta}_1 .$$

On pose $\alpha' = \operatorname{Min} \{\alpha_{s_1}, \ldots, \alpha_{s_k}\}$. On a : $\alpha' > \alpha$ et

$$\underset{s' \in \overline{\Delta}_1}{\forall} \ \underset{j \in \{1,2,\ldots,k\}}{\exists} \ s' \in d_{s_j,\epsilon_{s_j}} \ (\Longrightarrow \delta_*(s') > \alpha_{s_j} \geqslant \alpha') .$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\underset{\alpha' > \alpha}{\exists} \ \underset{s \in \overline{\Delta}_1}{\forall} \ \delta_*(s) > \alpha' \ (\Longleftrightarrow \underset{\alpha' > \alpha}{\exists} \ \overline{\Delta}_1 \subset \mathcal{D}_{*\alpha'}) .$$

On a, en définitive :

$$\overline{\Delta}_1 \subset \mathcal{D}_{*\alpha} \Longrightarrow \underset{\alpha' > \alpha}{\exists} \ \overline{\Delta}_1 \subset \mathcal{D}_{*\alpha'} .$$

On rappelle qu'on a prouvé ($\mathcal{K}$ désignant un compact de $\mathbf{C}$) :

$$\underset{\mathcal{K} \subset \mathcal{D}_{*\alpha}}{\forall} \ \underset{\beta' > \beta^*}{\forall} \ \underset{n'}{\exists} \ \underset{n \geqslant n'}{\forall} \ \underset{s \in \mathcal{K}}{\forall} \ |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp[-|\lambda_n| (\alpha - \beta')] .$$

Or $\operatorname{Fr}(\Delta_1)$ est un compact inclus dans chaque ouvert $\mathcal{D}_{*,\alpha_{\Delta_1}-\epsilon}$, avec $\epsilon > 0$ arbitraire. Utilisant ce résultat et les remarques antérieures, on obtient :

$$\underset{\beta' \in]\beta^*, \alpha_{\Delta_1}[}{\forall} \ \underset{n'_1}{\exists} \ \underset{n \geqslant n'_1}{\forall} \ \underset{s \in \operatorname{Fr}(\Delta_1)}{\forall} \ |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp[-|\lambda_n| (\alpha_{\Delta_1} - \beta')]$$

d'où, pour $n \geqslant n'_1$,

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |P_j(s) \exp(-s\lambda_j)| < \sum_{j=n+1}^{\infty} \exp[-|\lambda_j| (\alpha_{\Delta_1} - \beta')]$$

où $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} \exp[-|\lambda_j| (\alpha_{\Delta_1} - \beta')]$

$$= \exp[-|\lambda_{n+1}|(\alpha_{\Delta_1} - \beta')] \sum_{j=n+1}^{\infty} \exp[-(\alpha_{\Delta_1} - \beta')(|\lambda_j| - |\lambda_{n+1}|)].$$

Puisque la suite (λ_n) vérifie les conditions (C) et que $\alpha_{\Delta_1} - \beta' > 0$, il existe donc un nombre fini strictement positif, dépendant de $\beta' \in]\beta^*, \alpha_{\Delta_1}[$, que l'on note $B(\beta')$, tel que :

$$\forall_{n \in \mathbf{N}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \exp[-(\alpha_{\Delta_1} - \beta')(|\lambda_j| - |\lambda_{n+1}|)] \leqslant B(\beta'),$$

d'où, en définitive, pour chaque $n \geqslant n_1'$:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |P_j(s)\exp(-s\lambda_j)| < B(\beta')\exp[-|\lambda_{n+1}|(\alpha_{\Delta_1} - \beta')].$$

On considère maintenant l'ensemble I_{Δ_3}. On a :

$$\forall_{s \in \overline{\Delta}_3} \ \exists_{n'(=n_s)} \ \forall_{n \geqslant n'} \ \delta(n, s) \geqslant \frac{-\operatorname{Log} A_n}{|\lambda_n|} - \frac{m_n}{|\lambda_n|}\operatorname{Log}(1 + |s|) - |s|.$$

Posant $\mu_{\Delta_3} = \operatorname{Sup}\{|s| \mid s \in \overline{\Delta}_3\}$, on a :

$$\forall_{n \geqslant n'} \ \delta(n, s) \geqslant \frac{-\operatorname{Log} A_n}{|\lambda_n|} - \frac{m_n}{|\lambda_n|}\operatorname{Log}(1 + \mu_{\Delta_3}) - \mu_{\Delta_3}$$

d'où $\delta_*(s) \geqslant -\sigma_* - \beta^* \operatorname{Log}(1 + \mu_{\Delta_3}) - \mu_{\Delta_3}$.

Il en résulte que $\overline{\Delta}_3$ est inclus dans chaque $\mathcal{D}_{*\alpha}$, avec $\alpha < -\sigma_* - \beta^* \operatorname{Log}(1 + \mu_{\Delta_3}) - \mu_{\Delta_3}$, et donc

$$\alpha_{\Delta_3} \geqslant -\sigma_* - \beta^* \operatorname{Log}(1 + \mu_{\Delta_3}) - \mu_{\Delta_3}.$$

Eu égard à la proposition (I.4), on a :

$$\forall_{\beta' > \beta^*} \ \exists_{n_2'} \ \forall_{n \geqslant n_2'} \ \forall_{s \in \operatorname{Fr}(\Delta_3)} \ |P_n(s)\exp(-s\lambda_n)| < \exp[-|\lambda_n|(\alpha_{\Delta_3} - \beta')]$$

d'où :

$$\forall_{s \in \operatorname{Fr}(\Delta_3)} \sum_{j=1}^{n(\geqslant n_2')} |P_j(s)\exp(-s\lambda_j)| = \sum_{j=1}^{n_2'-1} |\ldots| + \sum_{j=n_2'}^{n} |\ldots|$$

$$\leqslant \operatorname{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n_2'-1} |\ldots| \mid s \in \operatorname{Fr}(\Delta_3)\right\} + \sum_{j=n_2'}^{n} \exp[-|\lambda_j|(\alpha_{\Delta_3} - \beta')].$$

On choisit $\beta' > \beta^*$ de sorte que $\alpha_{\Delta_3} - \beta' \neq 0$. On examine successivement les deux cas suivants :

1) Si $\alpha_{\Delta_3} - \beta' > 0$, on a :

$$\sum_{j=n_2'}^{n} \exp[-|\lambda_j|(\alpha_{\Delta_3} - \beta')] =$$

$$= \exp[|\lambda_n| (\alpha_{\Delta_3} - \beta')] \sum_{j=n'_2}^{n} \exp[-(\alpha_{\Delta_3} - \beta')(|\lambda_j| + |\lambda_n|)]$$
$$< B''(\beta') \exp[|\lambda_n| (\alpha_{\Delta_3} - \beta')]$$

où $B''(\beta')$ est la somme de la série $\sum_{j=0}^{\infty} \exp[-2(\alpha_{\Delta_3} - \beta')\, |\lambda_j|]$.

2) Si $\alpha_{\Delta_3} - \beta' < 0$, on a :

$$\sum_{j=n'_2}^{n} \exp[-|\lambda_j| (\alpha_{\Delta_3} - \beta')] = \sum_{j=n'_2}^{n} \exp[|\lambda_j|\, |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|]$$
$$= \exp[|\lambda_n|\, |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|] \sum_{j=n'_2}^{n} \exp[-(|\lambda_n| - |\lambda_j|)\, |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|].$$

Il existe un nombre strictement positif, dépendant de β', que l'on note $B'(\beta')$, tel que :

$$\forall_{n \in \mathbf{N}-\{0\}} \sum_{j=1}^{n} \exp[-(|\lambda_n| - |\lambda_j|)\, |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|] \leqslant B'(\beta')\,;$$

d'où, en définitive :

$$\sum_{j=n'_2}^{n} \exp[-|\lambda_j|\, |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|] \leqslant B'(\beta') \exp[|\lambda_n|\, |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|].$$

Rapprochant les résultats obtenus dans les deux cas, et posant $B'''(\beta') = \mathrm{Max}\, \{B'(\beta'), B''(\beta')\}$, on a :

$$\sum_{j=n'_2}^{n} \exp[-|\lambda_j| (\alpha_{\Delta_3} - \beta')] \leqslant B'''(\beta') \exp[|\lambda_n|\, |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|].$$

Eu égard à la généralisation du théorème des trois cercles de Hadamard (supposant la condition (H) satisfaite), on a :

$$\exists_{b \in]0,1[} \ \mathrm{Log}\, M_{2,\nu} \leqslant b\, \mathrm{Log}\, M_{1,\nu} + (1-b)\, \mathrm{Log}\, M_{3,\nu}$$

en posant $\forall_{i \in \{1,2,1\}} M_{i,\nu} = \mathrm{Sup}\, \{|R_{n_\nu}(s)| \mid s \in \mathrm{Fr}(\Delta_i)\}$ où $R_{n_\nu}(s) = f(s) - \sum_{j=1}^{n_\nu} P_j(s) \exp(-s\lambda_j)$. On a ici pour $n_\nu \geqslant n'_1$:

$$M_{1,\nu} \leqslant B(\beta') \exp[-|\lambda_{n_\nu+1}| (\alpha_{\Delta_1} - \beta')]$$
$$< B(\beta') \exp[-(1+\theta_\nu)\, |\lambda_{n_\nu}| (\alpha_{\Delta_1} - \beta')].$$

Posant $B_0 = \mathrm{Max}\, \{|f(s)| \mid s \in \mathrm{Fr}(\Delta_3)\}$

$$+ \mathrm{Max} \left\{ \sum_{j=1}^{n'_2-1} |P_j(s) \exp(-s\lambda_j)| \mid s \in \mathrm{Fr}(\Delta_3) \right\},$$

on a, pour $n_\nu \geqslant n'_2$:

$$M_{3,\nu} \leqslant B_0 + B'''(\beta') \exp[|\lambda_{n_\nu}| |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|] ,$$

d'où, posant $B^*(\beta') = \operatorname{Max}\{B_0 , B'''(\beta')\}$, on a :

$$M_{3,\nu} \leqslant 2\, B^*(\beta') \exp[|\lambda_{n_\nu}| |\alpha_{\Delta_3} - \beta'|] .$$

Enfin, on obtient :

$$b \operatorname{Log} M_{1,\nu} + (1-b) \operatorname{Log} M_{3,\nu} \leqslant b \operatorname{Log} B(\beta') + (1-b) \operatorname{Log}(2B^*(\beta'))$$
$$+ \{[-b(1+\theta_\nu)(\alpha_{\Delta_1} - \beta') + (1-b)|\alpha_{\Delta_3} - \beta'|] |\lambda_{n_\nu}|\} .$$

Puisque $\lim \theta_\nu = \infty$, $\nu \uparrow \infty$, on a :

$$-b(1+\theta_\nu)(\alpha_{\Delta_1} - \beta') + (1-b)|\alpha_{\Delta_3} - \beta'| = -\infty , \quad \nu \uparrow \infty$$

d'où : $\lim \operatorname{Log} M_{2,\nu} = -\infty$, $\nu \uparrow \infty$, et donc :

$$\underset{s \in \overline{\Delta}_2}{\forall} \quad \lim R_{n_\nu}(s) = 0 \left(\Longleftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n_\nu} P_j(s) \exp(-s\lambda_j) \right) \text{ converge} \right) .$$

CHAPITRE II

A. On considère une application entière φ du type exponentiel au sens de G. Polya ($\Longleftrightarrow \varphi$ est au plus de l'ordre borélien égal à 1 et au plus du type fini de cet ordre, par exemple égal à σ, si cet ordre est 1 On note, comme il est usuel, $\varphi \in [1, \infty)$, et, plus précisément, $\varphi \in [1, \sigma])$. Soit $\{\varphi\} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le germe taylorien de φ au point $z = 0$. L'élément $\{\Phi\} : \sum_{n=0}^{\infty} (a_n n!/z^{n+1})$ est le germe taylorien, au point ∞ du plan gaussien $\overline{\mathbf{C}}$, d'une application de support $\overline{\mathbf{C}} - \overline{d(0, \sigma)}$, holomorphe sur son support, que l'on note Φ ($\overline{d(0, \sigma)}$ est l'adhérence du disque $d(0, \sigma)$). On a, comme on sait :

$$\forall_{s \in \mathbf{C}} \ \varphi(s) = (1/2\pi i) \oint_{\mathrm{Fr}(d(0,\sigma'))} \Phi(z) \exp(zs) dz ,$$

où $d(0, \sigma')$ est le disque centré au point $z = 0$ et de rayon égal à $\sigma' > \sigma$. On considère à nouveau un élément LC-dirichlétien $\{f\} : \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)$. (On désigne par $\{f\}_s$ ou $f(s)$ la somme de cette série en un point s où elle converge). On désigne par E_f un ensemble sur lequel $\{f\}$ converge uniformément. On suppose $\mathrm{Int}\, \mathrm{E}_f \neq \emptyset$. Soit G un ouvert connexe inclus dans $\mathrm{Int}\, \mathrm{E}_f$. Soit $\mathrm{G_H}$ un ouvert connexe (contenant G) dans lequel est holomorphe une extension $\overline{f}$ de l'application $\mathrm{G} \ni s \longmapsto f(s)$; on a par définition $\forall_{s \in \mathrm{G}} \ \overline{f}(s) = f(s)$. On suppose que $\mathrm{G}_\sigma = \mathrm{G} - \overline{\bigcup_{z \in \mathrm{Fr(G)}} d(z, \sigma)}$ est non vide et soit un composant connexe de $\mathrm{G_H} - \overline{\bigcup_{z \in \mathrm{Fr(G)}} d(z, \sigma)}$ — que l'on note $\mathrm{G}_{\mathrm{H},\sigma}$ — ayant une intersection non vide avec G_σ. On peut donc trouver un nombre strictement positif ϵ_0 suffisamment petit de sorte qu'il existe un ouvert connexe $\mathrm{G}_{\mathrm{H},\sigma+2\epsilon_0}$ satisfaisant aux conditions :

$$\mathrm{G}_{\mathrm{H},\sigma+2\epsilon_0} \subset \mathrm{G_H} - \overline{\bigcup_{z \in \mathrm{Fr(G)}} d(z, \sigma + 2\epsilon_0)}$$

$$\mathrm{G}_{\mathrm{H},\sigma+2\epsilon_0} \cap \mathrm{G}_{\sigma+2\epsilon_0} \neq \emptyset, \text{ où } \mathrm{G}_{\sigma+2\epsilon_0} = \mathrm{G} - \overline{\bigcup_{z \in \mathrm{Fr(G)}} d(z, \sigma + 2\epsilon_0)} \neq \emptyset .$$

Il est évident que :

$$\forall_{z \in G_{H,\sigma+2\epsilon_0}} \quad \forall_{\xi \in d(z,\epsilon_0)} \quad \forall_{u \in d(0,\sigma+\epsilon_0)} \quad \xi - u \in \overline{d(z, \sigma + 2\epsilon_0)} \subset G_H .$$

Posant $G'_\sigma = \bigcup_{z \in G_{\sigma+2\epsilon_0}} d(z, 2\epsilon_0)$, on a : $G'_\sigma \subset G_\sigma$. ($G'_\sigma$ peut être partie "stricte" de G_σ comme le montrent des cas triviaux). L'élément $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\xi - u)\exp[-\lambda_n(\xi - u)]$ converge uniformément par rapport à $(\xi, u) \in \overline{d(z, \epsilon_0)} \times \overline{d(0, \sigma + \epsilon_0)}$ pour chaque point $z \in G_{\sigma+2\epsilon_0}$ (et donc en particulier pour chaque point $z \in G_{H,\sigma+2\epsilon_0} \cap G_{\sigma+2\epsilon_0}$). La fonction f des deux variables ξ et u : $(\xi, u) \longmapsto f(\xi - u)$ est holomorphe sur $d(z, \epsilon_0) \times d(0, \sigma + \epsilon_0)$ et continue sur $\overline{d(z, \epsilon_0)} \times \overline{d(0, \sigma + \epsilon_0)}$. Le point z étant fixé sur $G_{H,\sigma+2\epsilon_0}$, la fonction : $d(z, \epsilon_0) \ni \xi \longmapsto f(\xi - u)$ indexée par u sur $\overline{d(0, \sigma + \epsilon_0)}$ (et plus particulièrement sur $\Gamma_{\epsilon_0} = \mathrm{Fr}(d(0, \sigma + \epsilon_0))$, est holomorphe sur son support $d(z, \epsilon_0)$. On considère l'application suivante, indexée par z sur $G_{\sigma+2\epsilon_0}$:

$$F_z : d(z, \epsilon_0) \ni \xi \longmapsto F_z(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\epsilon_0}\uparrow} f(\xi - u)\, \Phi(u)\, du ;$$

F_z est holomorphe sur $d(z, \epsilon_0)$. On a :

$$\forall_{\xi \in d(z,\epsilon_0)} \quad F_z(\xi) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\xi\lambda_n) \left\{ \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\epsilon_0}\uparrow} \left(\sum_{j=0}^{m_n} a_{nj}(\xi - u)^j\right) \exp(u\lambda_n)\, \Phi(u)\, du \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\xi\lambda_n) \sum_{j=0}^{m_n} a_{nj} \sum_{t=0}^{j} (-1)^t \binom{j}{t} \xi^{j-t} \varphi^{(t)}(\lambda_n)$$

puisque $\varphi^{(t)}(\lambda_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\Gamma_{\epsilon_0}\uparrow} u^t \exp(u\lambda_n)\, \Phi(u)\, du$ (où $\varphi^{(t)}(\lambda_n)$ désigne la valeur en λ_n de la dérivée d'ordre t de φ). On déduit facilement de ce résultat que :

$$\forall_{z \in G_{\sigma+2\epsilon_0}} \quad \forall_{\xi \in d(z,\epsilon_0)} \quad F_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\xi\lambda_n) \sum_{t=0}^{m_n} \frac{(-1)^t \varphi^{(t)}(\lambda_n)\, P_n^{(t)}(\xi)}{t!}$$

(la série converge uniformément par rapport à ξ sur $d(z, \epsilon_0)$). L'espace des doublets $(d(z, \epsilon_0), F_z)$, indexés par z sur $G_{\sigma+2\epsilon_0}$, est, en général, une restriction d'une branche de fonction analytique –que l'on note F– holomorphe sur $G'_{\sigma+\epsilon_0} = \bigcup_{z \in G_{\sigma+2\epsilon_0}} d(z, \epsilon_0)$.

Chaque doublet est un germe de F. Il est évident que :

$$\underset{\xi\in G'_{\sigma+\epsilon_0}}{\forall}\ \underset{z\in G_{\sigma+2\epsilon_0}}{\exists}\ \xi\in d(z,\epsilon_0)$$

et donc

$$F_z(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\oint_{\Gamma_{\epsilon_0}\uparrow} f(\xi-u)\,\Phi(u)\,du$$

d'où :

$$\underset{\xi\in G'_{\sigma+\epsilon_0}}{\forall}\quad F(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\oint_{\Gamma_{\epsilon_0}\uparrow} f(\xi-u)\,\Phi(u)\,du$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\exp(-\xi\lambda_n)\sum_{t=0}^{m_n}\frac{(-1)^t\varphi^{(t)}(\lambda_n)\,P_n^{(t)}(\xi)}{t!}\right\}.$$

$\overline{f}$ est une fonction des deux variables ξ et u, en posant $\xi-u=s$, avec $\xi-u\in G_H$. La fonction $G_{H,\sigma+2\epsilon_0}\times\overline{\Gamma}_{\epsilon_0}\ni(\xi,u)\longmapsto\overline{f}(\xi-u)$ est holomorphe sur son support ; donc l'application

$$G_{H,\sigma+2\epsilon_0}\ni\xi\longmapsto\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\oint_{\Gamma_{\epsilon_0}\uparrow}\overline{f}(\xi-u)\,\Phi(u)\,du$$

est holomorphe sur son support. Cette application est une extension holomorphe de F à $G_{H,\sigma+2\epsilon_0}$.

B. On rappelle un résultat dû à G.P. Lapin [10] et généralisant un résultat plus simple de A.F. Leont'ev [11]. Soient :

* (λ_n) *une suite de constantes complexes telle que la suite associée des modules des* λ_n, $(|\lambda_n|)$, *satisfait aux conditions :*

$$\underset{n\in\mathbf{N}-\{0\}}{\forall}\ |\lambda_n|<|\lambda_{n+1}|\ \textit{ et }\ \lim|\lambda_n|=\infty,\ \textit{ avec }\ \lambda_1\neq 0\ ;$$

* (p_n) *est une suite d'entiers strictement positifs ;*

* ρ *une constante strictement positive et* $m=\mathrm{Inf}\{n\in\mathbf{N}\,|\,n>\rho\}$;

* (a_{niq}), $n\in\mathbf{N}-\{0\}$, $i\in\{1,2,\ldots,p_n\}$, $q\in\{0,1,2,\ldots,m-1\}$, *un ensemble de constantes complexes satisfaisant à la condition :* $\limsup\{(1/|\lambda_n|^\rho)\,\mathrm{Log}\,b_n\}<\infty$, $n\uparrow\infty$, *où*

$$b_n=\mathrm{Max}\,\{|a_{niq}|/(i-1)!\ |\ i\in\{1,2,\ldots,p_n\},\ q\in\{0,1,2,\ldots,m-1\}\}.$$

Posant :

$$\theta_1=\limsup\left\{\sum_{i=1}^{n}p_i/|\lambda_n|^\rho\right\},\quad n\uparrow\infty$$

et

$$\theta_2=\limsup\,\{(1/|\lambda_n|^\rho)\,\mathrm{Log\,Max}\,[|\gamma_{nj}|/j!\ |\ j\in\{1,2,\ldots,p_n\}]\},\quad n\uparrow\infty$$

où $\gamma_{nj} = \dfrac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[\dfrac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{F(z)}\right]_{z=\lambda_n}$ *et* $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1-(z/\lambda_n)^m]^{p_n}$,

si les conditions : $\theta_1 < \infty$ *et* $\theta_2 < \infty$ *sont satisfaites, alors il existe une fonction entière* f *appartenant à la classe* $[\rho, \infty)$ *et satisfaisant aux conditions :*

$$(\mathcal{C}) : \underset{n\in\mathbf{N}-\{0\}}{\forall} \ \underset{i\in\{1,2,\ldots,p_n\}}{\forall} \ \underset{q\in\{0,1,2,\ldots,m-1\}}{\forall} a_{niq} = f^{(i-1)}(\epsilon^q \lambda_n)$$

où $\epsilon = \exp[2\pi i/m]$. *Plus précisément, posant*

$$M_n = \operatorname{Max}\left\{ \frac{|\gamma_{n,p_n-i-\ell+1}|}{(p_n-i-\ell)!} \cdot \frac{|a_{n,\ell+1,q}|}{\ell!} \;\middle|\; \begin{array}{l} i\in\{1,2,\ldots,p_n\} \\ \ell\in\{0,1,2,\ldots,p_n-i\} \\ q\in\{0,1,2,\ldots,m-1\} \end{array} \right\};$$

$$\gamma = \limsup\{(1/|\lambda_n|^\rho) \operatorname{Log} M_n\}, \ n\uparrow\infty;$$

$$\gamma^+ = \operatorname{Max}\{\gamma, 0\};$$

et sous les conditions ci-dessus, Lapin, prouve que $\gamma < \infty$ *et qu'il existe une application entière* f *satisfaisant aux conditions* $(\mathcal{C})$ *et appartenant à la classe* $[\rho, \tau+\gamma^+]$, *avec* $F \in [\rho, \tau]$.

Remarques :

1) La notation $\gamma_{nj} = \dfrac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[\dfrac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{F(z)}\right]_{z=\lambda_n}$ signifie que γ_{nj} est la dérivée au point $z=\lambda_n$ de l'extension à $\mathbf{C} - \bigcup_{j(\neq n)} \lambda_j$ de la fonction $\mathbf{C} - \bigcup_j \lambda_j \ni z \longmapsto \dfrac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{F(z)}$ en lui attribuant pour valeur au point λ_n : $\lim \dfrac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{F(z)}$; $z \longrightarrow \lambda_n$.

2) La condition $\theta_1 < \infty$ implique que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} [1-(z/\lambda_n)^m]^{p_n}$ est absolument et sous-uniformément convergent sur $\mathbf{C}$ ($\Longleftrightarrow$ uniformément convergent sur tout compact de $\mathbf{C}$) et qu'en outre, il existe une constante strictement positive τ telle que la fonction entière $F : \mathbf{C} \ni z \longmapsto F(z)$ appartient à l'espace $[1, \tau]$.

Revenons à l'élément LC-dirichlétien $\{f\}$: $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(s)\exp(-s\lambda_n)$ considéré au début du chapitre II et à l'ouvert $\mathcal{D}_{*\alpha}$ défini comme il a été dit au chapitre (I-A). On précisera ultérieurement la valeur de la constante réelle α. On remarquera, en outre, qu'ici la suite de constantes complexes (λ_n) satisfait à une condition un peu plus restrictive que celle figurant dans la proposition de Leont'ev (en effet, ici, la suite des modules $(|\lambda_n|)$ est une D-suite). On suppose que $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*\alpha}) \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \neq \phi$, ($\mathcal{D}_{*\alpha}$ est alors partie stricte de $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. Il existe un point $s_1 \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ tel que $\delta_*(s_1) \leqslant \alpha$; ce qui implique : $\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*}$ $\delta_*(s)$ est fini). Soit s_0 un point de cet ensemble. On a : $\delta_*(s_0) = \alpha$ (puisque δ_* est continue sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$). De la suite (λ_n) on peut extraire une sous-suite (λ_{n_p}) telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\alpha = \lim \{-\mathrm{Log}\, |\mathrm{P}_{n_p}(s_0) \exp(-s_0 \lambda_{n_p})/|\lambda_{n_p}|\}\, , \; p \uparrow \infty$$

et
$$\lim |\lambda_{n_{p+1}}/\lambda_{n_p}| = \infty\, , \; p \uparrow \infty .$$

On considère l'élément LC-dirichlétien suivant :

$$\{\mathrm{F}\} : \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{P}_{n_p}(s) \exp(-s\lambda_{n_p})$$

et on pose

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \quad \delta^1_*(s) = \lim \mathrm{Inf}\, \{-\mathrm{Log}\, |\mathrm{P}_{n_p}(s) \exp(-s\lambda_{n_p})| / |\lambda_{n_p}|\}\, , \; p \uparrow \infty$$

et $\mathcal{D}^1_{*\alpha} = \{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \mid \delta^1_*(s) > \alpha\}$. On a : $\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*}$ $\delta^1_*(s) \geqslant \delta_*(s)$, et donc $\mathcal{D}^1_{*\alpha} \supset \mathcal{D}_{*\alpha}$. δ^1_* est à valeurs finies sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ et sous-lipschitzien sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ et $\mathcal{D}^1_{*\alpha}$ est un ouvert inclus dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$, en outre, on a : $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* \cap \mathrm{Fr}(\mathcal{D}^1_{*\alpha}) = \{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \mid \delta^1_*(s) = \alpha\} \ni s_0$. On pose $\tau_0 = \lim\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} (m_i + 1)/|\lambda_n| \right\}$, $n \uparrow \infty$, et on suppose $\tau_0 < \infty$; cette dernière condition implique la convergence absolue et sous-uniforme sur $\mathbf{C}$ du produit infini : $\prod_{n=1}^{\infty} [1 - (z^2/\lambda_n^2)]^{m_n+1}$. On désigne par $\mathrm{L}(z)$ sa valeur au point z de $\mathbf{C}$. L'application $\mathrm{L} : \mathbf{C} \ni z \longmapsto \mathrm{L}(z)$ est entière et $\mathrm{L} \in [1\, , \pi\tau_0]$.

Choisissant, dans la proposition de Lapin, la constante ρ égale à 1, on a $m = 2$. On suppose que la condition $\theta_2 < \infty$ est satisfaite ici avec $\mathrm{L}(z)$ en place de $\mathrm{F}(z)$. Pour valeurs a_{niq} on choisit :

$$\forall_{n \in \mathbf{N} - \{0\}} \; \forall_{q \in \{0,1\}} \; \forall_{i \in \{2, \ldots, m_n+1\}} \; a_{niq} = 0\, ,$$

$$\forall_{p \in \mathbf{N} - \{0\}} \; a_{n_p, 1, 0} = 1 \;\text{ et }\; a_{n_p, 1, 1} = 0\, ,$$

$$\forall_{q \in \{0,1\}} \; \forall_{n \notin (n_p)} \; a_{n,1,q} = 0\, .$$

La condition du théorème portant sur les b_n, à savoir, avec $\rho = 1$: $\limsup \{\operatorname{Log} b_n / |\lambda_n|\} < \infty$, $n \uparrow \infty$, est, avec le choix ci-dessus des a_{niq}, trivialement satisfaite et, en outre, on a :

$$\mathrm{M}_{n_p} = \operatorname{Max} \left\{ \frac{|\gamma_{n_p, m_{n_p}+2-i}|}{(m_{n_p}+1-i)!} \,\middle|\, i \in \{1, 2, \ldots, m_{n_p}+1\} \right\}$$

et pour $n \notin (n_p) : \mathrm{M}_n = 0$. Or la condition $\theta_1 < \infty$ implique (avec $0! = 1$)

$$\theta_2 = \limsup \left\{ (1/|\lambda_n|) \operatorname{Log} \operatorname{Max} \left[\frac{|\gamma_{n,j}|}{(j-1)!} \,\middle|\, j \in \{1, 2, \ldots, m_n + 1\} \right] \right\},$$

et donc $\theta_2 = \limsup \{(1/|\lambda_{n_p}|) \operatorname{Log} \mathrm{M}_{n_p}\}$, $n \uparrow \infty$, d'où $\gamma = \theta_2 < \infty$ ($\Longrightarrow \gamma^+ < \infty$).

Les conditions du théorème de Lapin étant satisfaites, il existe alors au moins une fonction entière $\varphi \in [1, \pi\tau_0 + \gamma^+]$ telle que les conditions ($\mathcal{C}$) suivantes sont satisfaites :

$$\forall_{n \in \mathbf{N} - \{0\}} \ \forall_{i \in \{1, 2, \ldots, m_n\}} \ \varphi^{(i)}(\lambda_n) = 0$$

$$\forall_{p \in \mathbf{N} - \{0\}} \ \varphi(\lambda_{n_p}) = 1 \quad \text{et} \quad \forall_{n \notin (n_p)} \ \varphi(\lambda_n) = 0 .$$

Soit donc une certaine fonction entière $\varphi \in [1, \sigma]$, avec $\sigma = \pi\tau_0 + \gamma^+$, satisfaisant aux conditions ($\mathcal{C}$) précisées ci-dessus. On suppose que les précautions de type topologique formulées au début du chapitre II sont satisfaites avec la valeur $\sigma = \pi\tau_0 + \gamma^+$. La série

$$\{\mathrm{F}\} : \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp(-s\lambda_n) \sum_{t=0}^{m_n} (-1)^t \varphi^{(t)}(\lambda_n) \mathrm{P}_n^{(t)}(s) \right\},$$

où Φ est la transformée de Borel de φ, converge uniformément sur $\mathrm{G}'_{\sigma+\epsilon_0}$. L'application

$$\mathrm{G}_{\mathrm{H}, \sigma+2\epsilon_0} \ni s \longmapsto (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_{\epsilon_0}} \overline{f}(s-u)\, \Phi(u)\, du$$

est une extension holomorphe de F à $\mathrm{G}_{\mathrm{H}, \sigma+2\epsilon_0}$.

La condition $\tau_0 < \infty$ implique, comme il est trivial :

$$\lim \left\{ \operatorname{Log} \sum_{i=1}^{n} (m_i + 1) / |\lambda_n| \right\} = 0, \quad n \uparrow \infty .$$

On sait qu'alors $\{f\}$ converge absolument et sous-uniformément sur l'ouvert $\mathcal{D}_{*0}$ et diverge sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* - \overline{\mathcal{D}_{*0}}$. Donc $\{\mathrm{F}\}$ converge absolument et sous-uniformément sur l'ouvert $\mathcal{D}^1_{*0}$ et diverge sur $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* - \overline{\mathcal{D}^1_{*0}}$. Si $\{f\}$ est plus particulièrement un élément LC-dirichlétien dont la suite (λ_n) satisfait aux conditions (C) énoncés au chapitre $(\mathrm{I} - \mathrm{D})$, alors eu égard à la proposition (I.8) tout point de $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}^1_{*0}) \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ est singulier pour la fonction F définie par le prolongement analytique de l'application

$$\mathcal{D}^1_{*0} \ni s \longmapsto \mathrm{F}(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{P}_{n_p}(s) \exp(-s\lambda_{n_p}).$$

Eu égard aux résultats antérieurs, il est impossible d'obtenir une extension holomorphe de l'application

$$\mathcal{D}_{*0} \ni s \longmapsto f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)$$

à $\mathcal{D}_{*0} \cup d(s_0, r)$, où $d(s_0, r)$ est un disque centré en s_0 et de rayon $r > \pi\tau_0 + \gamma^+$ ou, ce qui est équivalent, f admet au moins un point singulier dans tout disque centré en s_0 et de rayon $r > \pi\tau_0 + \gamma^+$. Or s_0 est un point arbitraire de $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*0}) \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$; on peut donc énoncer :

Proposition II.1. – *Considérant un élément LC-dirichlétien* $\{f\} : \sum_{1}^{\infty} \mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)$, *sous les conditions* :

* $\tau_0 = \limsup \left[\sum_{i=1}^{n} (m_i + 1)/|\lambda_n| \right] < \infty$,
* $\gamma = \limsup \left\{ \mathrm{Log\,Max} \left[\frac{|\gamma_{nj}|}{j!} \,|\, j \in \{1, 2, \ldots, m_n + 1\} \right] \right\} < \infty$, $n \uparrow \infty$, *où* $\gamma_{nj} = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[\frac{(z - \lambda_n)^{m_n+1}}{\mathrm{L}(z)} \right]_{z=\lambda_n}$, *avec* $\mathrm{L}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 - (z/\lambda_n)^2]^{m_n+1}$, *(avec la signification attribuée à* γ_{nj} *dans la remarque (1) consécutive au théorème de Lapin),*
* $\mathcal{D}_{*0}$ *est une partie stricte de* $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$,
on ne peut obtenir une extension holomorphe à $\mathcal{D}_{*0} \cup d(s, r)$ *(où* $s \in \mathrm{Fr}(\mathcal{D}_{*0}) \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$*) de l'application* $\mathcal{D}_{*0} \ni s \longmapsto f(s)$, *où* $r > \pi\tau_0 + \gamma^+$, *avec* $\gamma^+ = \mathrm{Max}\,\{0, \gamma\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BLAMBERT et M. BERLAND, Sur la convergence des éléments L-dirichlétiens, *C.R.A.S.*, 280 (1975), 263-266.

[2] M. BLAMBERT et R. PARVATHAM, Sur la localisation des points singuliers des fonctions définies par des éléments L-dirichlétiens, *Bull. Sc. Math.* (à paraître).

[3] M. BLAMBERT et R. PARVATHAM, On the overconvergence of certain series I, *International J. of Math. and Math. Physics,* East Carolina University, U.S.A. (à paraître).

[4] M. BLAMBERT et R. PARVATHAM, Quelques applications d'un théorème de Leont'ev-Lapin, *C.R.A.S.*, 286 (1978), 373-376.

[5] M. BLAMBERT et R. PARVATHAM, Convergence et ultraconvergence des séries d'exponentielles à coefficients polynomiaux, *C.R.A.S.*, 286 (1978), 1227-1230.

[6] M. BLAMBERT et J. SIMEON, Sur une technique d'étude des propriétés de convergence des séries de Dirichlet à exposants complexes, *An. Fac. Sc. Univ.* Porto, 56 (1973), 1-33.

[7] T.M. GALLIE, Region of convergence of Dirichlet series with complex exponents, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 627-629.

[8] T.M. GALLIE, Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), 57-72.

[9] J.P. KAHANE, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, vol. 5 (1953-54), 39-130.

[10] G.P. LAPIN, On the interpolation in the class of entire functions of finite order and finite type, *Mat. Sb.*, N.S., 29, 11 (1951), 565-580.

[11] A.F. LEONT'EV, On the interpolation in the class of entire functions of finite order and normal type, *Doklady, Akad. Nauk.*, S.S.S.R., N.S., 66 (1949), 153-156.

[12] A.F. LEONT'EV, Series of Dirichlet polynomials and their generalizations, *Trudy Mat. Inst.* Steklov, 39, Izdat Akad. Nauk., S.S.S.R., Moscow (1951).

[13] B. LEPSON, On hyperdirichlet series and on related questions of the general theory of functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 18-45.

[14] G.L. LUNTZ, On certain generalized Dirichlet series, *Mat. Sb.*, N.S., 52 (1942), 33-50.

[15] G.L. LUNTZ, On Dirichlet series with complex exponents, *Mat. Sb.*, N.S., 67 (1965), 89-134.

[16] G.L. LUNTZ, On series of Taylor-Dirichlet type, *Izv. Akad. Nauk Armjan, S.S.R.*, Ser. Fiz Mat. Nauk, 14, 2 (1961), 7-16.

[17] G.L. LUNTZ, On the overconvergence of certain series, *Izv. Ann. Armjan, S.S.R.*, Ser. Fiz Mat. Nauk, 15, 5 (1962), 11-26.

[18] S. MANDELBROJT, Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications. Gauthiers-Villars, Paris 1952.

[19] J.R. SHACKELL, Some theorems on the boundary behaviour of Dirichlet series with complex exponents, *J. London Math. Soc.*, 42 (1962), 57-72.

[20] J.R. SHACKELL, Singularities of Dirichlet series with complex exponents, *Michigan Math. J.*, 14 (1967), 497-505.

[21] J.R. SHACKELL, Overconvergence of Dirichlet series with complex exponents, *J. Analyse Math.*, 14 (1967), 135-170.

Manuscrit reçu le 31 mai 1978.

M. BLAMBERT et R. PARVATHAM,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS n° 188
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères.