ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PAUL DUFOUR

Stabilité simultanée de deux fonctions différentiables

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 263-282

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_263_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 263-282

STABILITÉ SIMULTANÉE DE DEUX FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Jean-Paul DUFOUR

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

I. INTRODUCTION

Dans ce texte "différentiable" voudra dire "de classe C^∞". Nous considérons une application différentiable $f : V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie sur la variété différentiable compacte V de dimension n, $n \geqslant 2$.

DEFINITION 1.1. – *Nous dirons que f est bi-stable si pour toute application différentiable $g : V \longrightarrow \mathbf{R}^2$, assez proche de f dans la topologie de Whitney* ([4]), *il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^2 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ V & \xrightarrow{g} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

où h et k sont des difféomorphismes tels que

$$k(x, y) = (k_1(x), k_2(y)) \in \mathbf{R}^2$$

pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Lorsqu'il existe un tel diagramme nous dirons que f est bi-équivalente à g.

Contrairement à la notion usuelle ([4]) le difféomorphisme du but, k, est le produit de deux difféomorphismes de $\mathbf{R}$. On peut considérer que l'étude de la bi-stabilité est l'étude de la stabilité simultanée de deux fonctions définies sur V (les deux composantes de f) ou bien de la stabilité d'un diagramme $\mathbf{R} \longleftarrow V \longrightarrow \mathbf{R}$ ([1]).

Le principal résultat de ce travail est le théorème ci-dessous où l'on caractérise les applications bi-stables.

DEFINITION 1.2. – *Soit* v *un point pli* ([4]) *(respectivement un point fronce* ([4])) *de* $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^2$; *nous dirons que* v *est un pli transverse (respectivement une fronce transverse) si l'image de* df_v *est transverse aux deux sous-espaces* $\{0\} \times \mathbf{R}$ *et* $\mathbf{R} \times \{0\}$ *de* $\mathbf{R}^2$. *Soit* v *un point pli ; nous dirons que* v *est un pli tangent si l'une des deux composantes de* f *admet* v *comme point critique non dégénéré.*

THEOREME. – *L'application* $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *est bi-stable si et seulement si elle n'admet comme points singuliers que des plis transverses, des plis tangents ou des fronces transverses et si* f, *restreinte à l'ensemble critique* Σf, *est injective.*

L'ensemble des applications f qui n'admettent comme points singuliers que des plis transverses, des plis tangents ou des fronces transverses est un ouvert dense de $C^\infty(V, \mathbf{R}^2)$ (Proposition 3.1) ; en fait c'est l'ensemble des applications qui possèdent les propriétés génériques de Y.H. Wan dans la référence [5].

Ici, comme dans l'étude de la stabilité au sens classique, les vraies difficultés sont locales et concernent la stabilité de couples de germes de fonctions. Les techniques de J.N. Mather ne suffisent cependant pas à résoudre le problème ; ainsi il est intéressant de noter que nous obtenons un théorème de stabilité dans la catégorie C^∞ mais que nous ignorons s'il est vrai en analytique !

En fait l'étape décisive est la preuve de la bi-stabilité locale des fronces transverses (lemme 3.3). Pour la mener à bien nous avons dû développer une technique de résolution des équations du type $\lambda(x) = X(x^3 + x^2) + (1 + ax)\,Y(x^2)$, d'inconnues X et Y. Notre chapitre II est consacré à cela ; c'est la partie la plus originale de ce travail.

Les modèles locaux (à bi-équivalence locale près) d'applications bi-stables sont les suivants :

$$(y, x_2, x_3, \dots, x_n) \longmapsto \left(y + \sum_{i=2}^{n} \pm x_i^2, y\right)$$

pour le pli transverse,

$$(y, x_2, x_3, \dots, x_n) \longmapsto \left(y^2 + \sum_{i=2}^{n} \pm x_i^2, y\right)$$

pour le pli tangent et à permutation près des coordonnées,

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \longmapsto \left(x^3 + xy + y + \sum_{i=3}^{n} \pm x_i^2, y\right)$$

pour la fronce transverse. On peut reformuler ces résultats en termes de feuilletages et l'on a, par exemple, l'énoncé suivant :

Soient deux feuilletages non singuliers de codimension 1, ayant un contact générique d'ordre 3 en un point ; alors il existe des coordonnées locales $x, y, x_3, \dots, x_n$, telles que les deux feuilletages soient définis par les fonctions y et $x^3 + xy + y + \sum_{i=3}^{n} \pm x_i^2$.

Ceci complète en partie le travail de S. Ferry ([3]). Nous ne démontrerons pas ici l'assertion relative au modèle de la fronce transverse ; la preuve est très proche de celle de la bi-stabilité locale ; on trouvera dans [2] les grandes lignes des deux démonstrations.

L'auteur tient à remercier ici Jean Martinet dont les nombreuses critiques et suggestions ont permis l'élaboration de cet article.

II. LE LEMME TECHNIQUE PRINCIPAL

Dans cette partie nous considérons deux fonctions différentiables $a(x, t)$ et $b(x, t)$ définies sur $\mathbf{R}^2$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

i) $a(0,0) \neq 0$

ii) $b(0, t) = \dfrac{\partial b}{\partial x}(0, t) = 0$ pour tout t

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 b}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$$

iii) $(p/3)\, a(0, t) \dfrac{\partial^3 b}{\partial x^3}(0, t) - \dfrac{\partial a}{\partial x}(0, t) \dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2}(0, t) \neq 0$

pour tout entier p et tout t dans un voisinage I de 0 (indépendant de p).

Nous consacrons cette partie à la démonstration de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. – *Pour toute fonction différentiable* μ, *définie sur* $\mathbf{R}^2$, *il existe deux fonctions différentiables* Y *et* Z *définies sur* $\mathbf{R}^2$, telles que l'on puisse écrire

$$\mu(x, t) = a(x, t)\ \mathrm{Y}(x^2, t) + \mathrm{Z}(b(x, t), t) \tag{2.1}$$

pour tous (x, t) *assez voisins de l'origine. De plus* Y *et* Z *sont déterminés de manière unique par (2.1) sur un domaine de la forme* $[0, \epsilon] \times \mathrm{I}$.

1. Résolution formelle de (2.1).

On choisit un intervalle compact $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que $a(0, t)$, $\dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2}(0, t)$ et $\dfrac{\partial^3 b}{\partial x^3}(0, t)$ soient non nuls pour $t \in \mathrm{J}$.

Nous notons $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{J})[x]$ l'anneau des séries formelles $g = \Sigma\, g_i x^i$ où g_i (= "$g_i(t)$") est dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{J})$. Pour toute fonction différentiable $h : \mathrm{J} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ nous notons $\mathrm{T}h$ sa "série de Taylor" dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{J})[x]$: $\mathrm{T}h = \Sigma\, \dfrac{\partial^i h}{\partial x^i}(0, t)\, \dfrac{x^i}{i!}$.

LEMME 2.1. – *Pour tout* μ *dans* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{J})[x]$ *il existe deux uniques séries* Y *et* Z *dans* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{J})[x]$ *telles que l'on ait*

$$\mu = (\mathrm{T}a)\,\mathrm{Y} \circ x^2 + \mathrm{Z} \circ (\mathrm{T}b). \tag{2.2}$$

Ce lemme exprime que l'on sait résoudre "formellement" (2.1) dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{J})[x]$.

Démonstration du lemme 2.1. – Nous notons $a_i(t) = \dfrac{1}{i!}\dfrac{\partial^i a}{\partial x^i}(0, t)$ *et* $b_i(t) = \dfrac{1}{i!}\dfrac{\partial^i b}{\partial x^i}(0, t)$; alors (2.2) se traduit par

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= a_0 \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Z}_0 \\
\mu_1 &= a_1 \mathrm{Y}_0 \\
\mu_2 &= a_0 \mathrm{Y}_1 + b_2 \mathrm{Z}_1 + a_2 \mathrm{Y}_0 \\
\mu_3 &= a_1 \mathrm{Y}_1 + b_3 \mathrm{Z}_1 + a_1 \mathrm{Y}_0 \\
&\vdots \\
\mu_{2p} &= a_0 \mathrm{Y}_p + (b_2)^p \mathrm{Z}_p + \mathrm{W}_{2p} \\
\mu_{2p+1} &= a_1 \mathrm{Y}_p + p b_3 (b_2)^{p-1} \mathrm{Z}_p + \mathrm{W}_{2p+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

où W_{2p} et W_{2p+1} ne dépendent que de $\mathrm{Y}_0, \ldots, \mathrm{Y}_{p-1}$ et $\mathrm{Z}_0, \ldots, \mathrm{Z}_{p-1}$. Le déterminant de la matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & (b_2)^p \\ a_1 & p b_3 (b_2)^{p-1} \end{vmatrix}, \quad p > 0,$$

est $(b_2)^{p-1} (p a_0 b_3 - a_1 b_2)$ et est inversible à cause des hypothèses ii) et iii). Ceci permet de construire pas à pas les Y_i et Z_i, à partir des μ_i, achevant ainsi la démonstration.

DEFINITION 2.1. – *Soit* $h(x, t)$ *une fonction définie sur* $\mathbf{R}^2$. *Nous dirons que* h *est* x*-plate sur* $\mathrm{K} \subset \mathbf{R}$ *si, pour tout entier* p, *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que l'on ait* $|h(x, t)| \leqslant |x|^p$ *pour tout* (x, t) *avec* $t \in \mathrm{K}$ *et* $|x| < \epsilon$.

Dans le cas où h est différentiable elle est x-plate sur K si et seulement si $\dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(0, t)$ est nul pour tout t dans K et tout p.

Le lemme 2.1 ramène la résolution de (2.1) à la recherche de solutions x-plates lorsque le premier membre est x-plat, d'après le lemme de prolongement de Borel ([4], Chap. IV, lemme 2.5).

Par la suite nous supposerons toujours que μ, le premier membre de (2.1), est x-plat sur J.

2. Suppression d'une inconnue.

LEMME 2.2. – *Il existe une fonction différentiable*

$$\sigma(x, t) = x + x^2 \nu(x, t),$$

définie sur un domaine $]-\epsilon, \epsilon[\times J$, *telle que l'on ait*

$$b(\sigma(x, t), t) = b(-x, t) \tag{2.3}$$

pour tout (x, t) *dans ce domaine. On a de plus*

$$\nu(0, t) = -\frac{\partial^3 b}{\partial x^3}(0, t)/3\,\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(0, t) \tag{2.4}$$

pour tout t *dans* J.

Démonstration. – L'équation (2.3) se traduit par une équation implicite de variables x, t, ν de la forme

$$x^2 b_2(t) + x^3 b_3(t) + 2x^3 \nu b_2(t) + x^4 \chi(x, t, \nu) = x^2 b_2(t) - x^3 b_3(t)$$

$\left(b_2(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(0, t)\ ,\ b_3(t) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 b}{\partial x^3}(0, t)\right)$ qui devient

$$2\nu b_2(t) + 2b_3(t) + x\chi(x, t, \nu) = 0.$$

Cette équation admet bien une solution du type cherché ce qui achève la démonstration.

LEMME 2.3. – *L'équation (2.1) avec un premier membre x-plat sur* J *admet une (unique) solution* (Y, Z) *si pour toute fonction différentiable* $\lambda(x, t)$, *x-plate sur* J, *il existe une (unique) fonction différentiable* X, *x-plate sur* J, *telle que*

$$\lambda(x, t) = a(\sigma(x, t), t)\,X(\sigma(x, t), t) - a(-x, t)\,X(x, t) \tag{2.5}$$

sur un domaine $[0, \epsilon] \times J$ ou $[-\epsilon, 0] \times J$ $(\epsilon > 0)$.

Démonstration. – Soit μ une fonction différentiable x-plate sur J ; on pose $\lambda(x, t) = \mu(\sigma(x, t), t) - \mu(-x, t)$. C'est encore une fonction x-plate sur J ; nous supposons résolue (2.5) avec le premier membre λ sur $[0, \epsilon] \times J$ (le cas $[-\epsilon, 0] \times J$ se traite de manière analogue) et une solution X x-plate sur J. Il existe une (unique) fonction différentiable Y, x-plate sur J, telle que l'on ait $X(x, t) = Y(x^2, t)$ pour tout (x, t) dans un domaine de la forme $[0, \epsilon'[\times J$. Considérons alors la fonction

$$\mu(x, t) - a(x, t) \ Y(x^2, t) ;$$

c'est une fonction x-plate sur J et on peut écrire

$$\mu(x, t) - a(x, t) \ Y(x^2, t) = Z(b(x, t), t) \tag{2.6}$$

pour une (unique) fonction x-plate bien choisie Z et pour tout (x, t) dans un domaine de la forme $[0, \epsilon''[\times J$. Ceci résout (2.1) pour $x \geqslant 0$; nous allons voir que (2.6) s'étend à $x < 0$. La relation (2.4) implique l'existence de $\epsilon''' > 0$ tel que $\sigma(x, t) \leqslant x$ pour $0 < x < \epsilon'''$ et $t \in J$. Soit x tel que

$$0 < x < \inf \{\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon'''\},$$

l'équation (2.6) mène à

$$\mu(\sigma(x, t), t) - a(\sigma(x, t), t) \ Y((\sigma(x, t))^2, t) = Z(b(\sigma(x, t), t), t)$$

pour tout $t \in J$. Grâce à (2.5) cette équation se récrit

$$\mu(-x, t) - a(-x, t) \ Y(x^2, t) = Z(b(\sigma(x, t), t), t) ;$$

enfin la relation (2.3) transforme cette équation en une équation de la forme (2.6) mais avec $-x$ à la place de x. Ceci achève la démonstration.

3. Séries auxiliaires.

Soit K un intervalle compact de $\mathbf{R}$ et $\delta(x, t) = x + x^2 h(x, t)$ une fonction différentiable définie sur un voisinage de $\{0\} \times K$ dans $\mathbf{R}^2$. Nous dirons que δ est une *contraction* (respectivement : une *dilatation*) sur K si l'on a $h(0, t) < 0$ (respectivement $h(0, t) > 0$) pour tout $t \in K$. On note

$$\delta_t(x) = \delta(x, t), \ \delta_n(x, t) = \delta_t \circ \delta_t \circ \ldots \circ \delta_t(x)$$

(n fois) et $\delta_0(x, t) = x$.

LEMME 2.4. – *Soit δ une telle contraction et $\alpha(x, t)$ une fonction différentiable, définie sur un voisinage de $\{0\} \times K$, telle que $\alpha(0, t) = 1$ pour tout t dans K. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour toute fonction $S(x, t)$ définie sur un voisinage de $[0, \epsilon] \times K$, de classe C^1, x-plate sur K ainsi que ses deux dérivées partielles,* *la série de terme général*

$$u_n(x\,,\,t) = \alpha(x\,,\,t) \times \alpha(\delta(x\,,\,t)\,,\,t) \times \ldots \times \alpha(\delta_n(x\,,\,t)\,,\,t) \times \mathrm{S}(\delta_{n+1}(x\,,\,t)\,,\,t)$$

est uniformément convergente et sa somme est une fonction de classe C^1, *x-plate sur* K *ainsi que ses deux dérivées partielles, sur* $[0\,,\epsilon] \times \mathrm{K}$. *Si* δ *est une dilatation on a le même résultat en remplaçant* $[0\,,\epsilon] \times \mathrm{K}$ *par* $[-\epsilon\,,0] \times \mathrm{K}$.

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de ce lemme. Nous ne l'établirons que pour le cas des contractions, le cas des dilatations est analogue.

Soient alors une contraction δ et α tels que dans l'énoncé du lemme 2.4, on choisit ϵ de façon que l'on ait

$$0 \leqslant \delta(x\,,\,t) \leqslant x - cx^2\ ;\ 0 \leqslant \frac{\partial\delta}{\partial x}(x\,,\,t) \leqslant 1\ ;\ \alpha(x\,,\,t) > 0 \quad (2.7)$$

avec une constante $c > 0$ et pour tout $(x\,,\,t)$ dans $[0,\epsilon] \times \mathrm{K}$.

SOUS-LEMME 2.1. – *Les séries de termes généraux* $(\delta_n)^2$, $n(\delta_n)^4$ *et* $n^2(\delta_n)^8$ *sont uniformément convergentes sur* $[0\,,\epsilon] \times \mathrm{K}$.

Démonstration. – On déduit de (2.7) l'inégalité

$$\delta_{n+1} \leqslant \delta_n - c(\delta_n)^2$$

qui, par sommation membre à membre, mène à

$$c \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\delta_n)^2 \leqslant \delta_1 - \delta_{\mathrm{N}+1}\,.$$

On en déduit la convergence uniforme de $\Sigma\,(\delta_n)^2$. Comme la suite $n \longmapsto (\delta_n(x\,,\,t))^2$ est décroissante on en tire que la suite $n \longmapsto n(\delta_n)^2$ converge uniformément vers 0. Ceci permet d'affirmer la convergence uniforme des séries $\Sigma\, n(\delta_n)^4$ et $\Sigma\, n^2(\delta_n)^8$ achevant ainsi la démonstration.

SOUS-LEMME 2.2. – *Il existe un entier* m *tel que la suite* $n \longmapsto v_n$ *définie par*

$$v_n(x\,,\,t) = \alpha(x\,,\,t) \times \alpha(\delta(x\,,\,t)\,,\,t) \times \ldots \times \alpha(\delta_n(x\,,\,t)\,,\,t) \times (\delta_{n+1}(x\,,\,t))^m$$

soit uniformément bornée sur $[0,\epsilon] \times \mathrm{K}$.

Démonstration. – On a $\alpha(x\,,\,t) = 1 + x\,\beta(x\,,\,t)$ et

$$\alpha(x\,,\,t) \leqslant 1 + ax$$

sur $[0, \epsilon] \times \mathrm{K}$ pour une certaine constante $a > 0$. Alors on a

$$\alpha(x, t) \left(\frac{\delta(x, t)}{x}\right)^m \leqslant (1 + ax)(1 - cx)^m .$$

Pour $m > a/c$ le second membre de cette inégalité a une dérivée négative ; comme sa valeur pour $x = 0$ est 1 on en déduit que $\alpha(x, t)(\delta(x, t)/x)^m$ est majoré par 1 sur $[0, \epsilon] \times \mathrm{K}$. Par ailleurs on a

$$v_n(x, t)/v_{n-1}(x, t) = \alpha(\delta_n(x, t), t)\left(\frac{\delta(\delta_n(x, t), t)}{\delta_n(x, t)}\right)^m$$

donc v_n/v_{n-1} est majoré par 1 ce qui achève la démonstration.

Démonstration du lemme 2.4.

a) *Convergence de* $\Sigma\, u_n$: la x-platitude de S mène à une majoration $|\mathrm{S}(x, t)| \leqslant \mathrm{C}\, x^{m+2}$ pour tout $(x, t) \in [0, \epsilon] \times \mathrm{K}$ et une constante C bien choisie. On en déduit

$$|u_n(x, t)| \leqslant \mathrm{C}\, v_n(x, t)\, (\delta_{n+1}(x, t))^2$$

qui, au vu des deux sous-lemmes précédents, mène au résultat.

b) *Dérivabilité par rapport à* x : on a

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) = \alpha(x, t) \times \alpha(\delta, t) \times \ldots \times \alpha(\delta_n, t)$$
$$\times \left[\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}(\delta_{n+1}, t)\frac{\partial \delta_{n+1}}{\partial x} + \mathrm{S}(\delta_{n+1}, t) \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\delta_i, t)\, \frac{\partial \delta_i}{\partial x} \,/\, \alpha(\delta_i, t)\right]$$

sur $[0, \epsilon] \times \mathrm{K}$. Par ailleurs on a

$$\frac{\partial \delta_n}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial \delta}{\partial x}(\delta_{n-1}, t) \times \ldots \times \frac{\partial \delta}{\partial x}(\delta, t) \times \frac{\partial \delta}{\partial x}(x, t)$$

qui, au vu de (2.7), mène à

$$0 \leqslant \frac{\partial \delta_n}{\partial x}(x, t) \leqslant 1 \tag{2.8}$$

sur $[0, \epsilon] \times \mathrm{K}$. Les hypothèses de x-platitude se traduisent par

$$\left|\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \mathrm{C}\, x^{m+2} , \quad |\mathrm{S}(x, t)| \leqslant \mathrm{C}'\, x^{m+4} ;$$

nous notons M un majorant de $\left|\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} / \alpha\right|$ sur $[0, \epsilon] \times \mathrm{K}$. Alors on peut écrire

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x\,,t)\right| \leqslant v_n\ [C(\delta_{n+1})^2 + C'\,M(n+1)\,(\delta_{n+1})^4]$$

pour $(x\,,t) \in [0\,,\epsilon] \times K$. Les sous-lemmes 2.1 et 2.2 permettent d'en déduire la convergence uniforme de la série de terme général $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ et donc que la somme de la série de terme général u_n admet une dérivée par rapport à x continue sur $[0,\epsilon] \times K$.

c) *Dérivabilité par rapport à* t : on a

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x\,,t) = \alpha(x\,,t) \times \alpha(\delta\,,t) \times \ldots \times \alpha(\delta_n\,,t) \left[\frac{\partial S}{\partial x}(\delta_{n+1}\,,t)\frac{\partial \delta_{n+1}}{\partial t} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial S}{\partial t} + S(\delta_{n+1}\,,t) \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\delta_i\,,t)\frac{\partial \delta_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\delta_i\,,t)\right)\Big/\alpha(\delta_i\,,t)\right].$$

Par ailleurs on peut écrire

$$\frac{\partial \delta_n}{\partial t}(x\,,t) = \frac{\partial \delta}{\partial t}(\delta_{n-1}\,,t) + \frac{\partial \delta}{\partial x}(\delta_{n-1}\,,t)\frac{\partial \delta_{n-1}}{\partial t}$$

qui, au vu de (2.8), mène à

$$\left|\frac{\partial \delta_n}{\partial t}(x\,,t)\right| < n\,P$$

en notant P une borne de $\left|\dfrac{\partial \delta}{\partial t}\right|$ sur $[0,\epsilon] \times K$. Les hypothèses de x-platitude mènent à

$$\left|\frac{\partial S}{\partial t}(x\,,t)\right| \leqslant D\,x^{m+2}\ ;\ \left|\frac{\partial S}{\partial x}(x\,,t)\right| \leqslant D'\,x^{m+4}\ ;\ |S(x,t)| \leqslant D''\,x^{m+8}.$$

On note Q une borne de $\left|\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}\Big/\alpha\right|$ sur $[0,\epsilon] \times K$ et l'on a

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \leqslant v_n \left[D'P(n+1)\,(\delta_{n+1})^4 + D(\delta_{n+1})^2 \right.$$
$$\left. + D''\left(M\,\frac{n(n+1)}{2}\,P + (n+1)\,Q\right)(\delta_{n+1})^8\right].$$

Les sous-lemmes 2.1 et 2.2 permettent d'en déduire la convergence uniforme de la série de terme général $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$ et donc que la somme de la série de terme général u_n admet une dérivée par rapport à t continue sur $[0,\epsilon] \times K$.

d) *x-platitude* : pour tout entier N il existe une constante C telle que $|S(x\,,t)| \leqslant C\,x^{N+m+2}$ pour $(x\,,t) \in [0,\epsilon] \times K$; donc on a $$|S(\delta_{n+1}, t)| \leqslant C\, x^{N} (\delta_{n+1})^{m+2}$$

et $$|u_n(x, t)| \leqslant C\, x^{N}\, v_n(x, t)\, (\delta_{n+1})^2 .$$

Alors on peut écrire

$$\left|\sum_0^\infty u_n(x, t)\right| \leqslant C\, x^{N} \sum_0^\infty v_n(x, t)\, (\delta_{n+1})^2$$

qui mène à

$$\left|\sum_0^\infty u_n(x, t)\right| \leqslant C'\, x^{N}$$

pour une constante C' et tous $(x, t) \in [0, \epsilon] \times K$. Cela prouve que la somme de la série $\Sigma\, u_n$ est x-plate. On opère de manière analogue pour prouver que ses dérivées sont x-plates achevant ainsi la démonstration.

Remarque 2.1. – Si l'on remplace α par $\alpha \dfrac{\partial \delta}{\partial x}$ dans l'énoncé du lemme 2.4 on arrive au même résultat avec le même ϵ ; c'est une conséquence de (2.8).

4. Fin de la démonstration de la proposition 2.1.

Le lemme 2.3 prouve qu'il nous suffit de résoudre l'équation (2.5) sur un domaine $[0, \epsilon] \times J$ ou $[-\epsilon, 0] \times J$ pour achever la démonstration de la proposition 2.1. Posant

$$\alpha(x, t) = a(\sigma(x, t), t)/a(-x, t),$$

cela nous ramène à la résolution de

$$\lambda(x, t) = \alpha(x, t)\ X(\sigma(x, t), t) - X(x, t) \tag{2.9}$$

sur un domaine de la forme $[0, \epsilon] \times J$ ou $[-\epsilon, 0] \times J$ (λ est x-plat sur J et l'on cherche X x-plate sur J).

Le lemme 2.2 montre que σ est soit une contraction soit une dilatation au sens du paragraphe précédent, nous nous placerons dans le cas d'une contraction et nous résoudrons (2.9) sur un domaine $[0, \epsilon] \times J$ (le cas des dilatations se traite de manière analogue en remplaçant $[0, \epsilon] \times J$ par $[-\epsilon, 0] \times J$).

a) *Unicité de la solution*

La solution de (2.9) (si elle existe) est unique si l'équation

$$X(x\,,\,t) = \alpha(x\,,\,t)\ X(\sigma(x\,,\,t)\,,\,t) \tag{2.10}$$

n'admet que la solution nulle. Si X vérifie (2.10), on a

$$\begin{aligned} X(x\,,\,t) = \alpha(x\,,\,t) \times \alpha(\sigma(x\,,\,t)\,,\,t) \\ \times \ldots \times \alpha(\sigma_n(x\,,\,t)\,,\,t)\ X(\sigma_{n+1}(x\,,\,t)\,,\,t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

pour tout n. Si X est x-plate et différentiable le lemme 2.4 affirme que le deuxième membre de (2.11) est le terme général d'une série convergente. On en déduit $X = 0$ et donc que (2.9) ne peut admettre qu'une solution x-plate sur un domaine $[0, \epsilon] \times J$.

b) *Existence de la solution*

Le lemme 2.4 prouve que la série de terme général

$$\begin{aligned} X_n(x\,,\,t) = -\,\alpha(x\,,\,t) \times \alpha(\sigma(x\,,\,t)\,,\,t) \\ \times \ldots \times \alpha(\sigma_n(x\,,\,t)\,,\,t)\quad \lambda(\sigma_{n+1}(x\,,\,t)\,,\,t) \end{aligned}$$

est uniformément convergente sur le domaine $[0, \epsilon] \times J$ et que sa somme $\overline{X}$ est de classe C^1, x-plate sur J ainsi que ses dérivées partielles. Il est élémentaire que $X = \overline{X} - \lambda$ vérifie (2.9). Il nous reste à montrer que X est de classe C^∞ pour prouver que c'est la solution cherchée.

c) *Dérivabilité de la solution*

On remarque que $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ vérifie l'équation

$$\rho(x\,,\,t) = \beta(x\,,\,t)\quad Z(\sigma(x\,,\,t)\,,\,t) - Z(x\,,\,t)$$

d'inconnue Z, avec $\rho(x\,,\,t) = -\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}(x\,,\,t) + \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x\,,t)\ X(\sigma(x\,,t)\,,t)$ et $\beta(x\,,t) = \alpha(x\,,t)\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x\,,\,t)$. C'est une équation du même type que (2.9) ; la x-platitude de X permet de prouver comme en a) que sa solution est unique ; par le lemme 2.4 (et la remarque 2.1) on prouve comme en b) que cette solution est de classe C^1 sur $[0, \epsilon] \times J$ x-plate sur J ainsi que ses dérivées. On en déduit que $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ est de classe C^1 et que ses dérivées sont x-plates sur J.

Par ailleurs $\dfrac{\partial X}{\partial t}$ vérifie l'équation obtenue en remplaçant $\lambda(x, t)$ par

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t)\, X(\sigma(x, t), t) - \alpha(x, t)\, \frac{\partial X}{\partial x}(\sigma(x, t), t)\, \frac{\partial \sigma}{\partial t}(x, t)$$

dans (2.9). Comme en a) et b), on prouve que la solution de cette équation est unique, de classe C^1, x-plate ainsi que ses dérivées. Cela prouve que $\dfrac{\partial X}{\partial t}$ admet des dérivées continues et x-plates sur J.

Une induction évidente, basée sur le fait que les dérivées d'ordre supérieur de X vérifient des équations

$$\rho(x, t) = \alpha(x, t)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t)\right)^n Z(\sigma(x, t), t) - Z(x, t)$$

permet d'achever la démonstration.

5. Remarque.

L'étude de certains germes de diagrammes $M \longleftarrow V \longrightarrow W$ où $\dim M > 1$ nécessite la résolution d'équations de la forme

$$\mu(x, t) = a(x, t)\, Y(b(x, t), t) + c(x, t)\, Z(d(x, t), t) \quad (2.13)$$

plus générales que (2.1). La résolution formelle ne pose pas de difficultés majeures et l'on résout le cas x-plat en généralisant les techniques développées ci-dessus. On obtient ainsi le résultat suivant.

LEMME 2.5. – *Soient* a, b, c, d, *des fonctions différentiables définies sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ $(x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^p)$ *telles que*

$$\begin{aligned}
b(x, t) &= x^{2m}\, \alpha(x^2, t) + x^{2m+2q-1}\, \beta(x^2, t)\\
d(x, t) &= x^{2r}\, \gamma(x^2, t) + x^{2r+2l-1}\, \delta(x^2, t)\\
a(x, t) &= x^{s}\, \epsilon(x, t)\\
c(x, t) &= x^{u}\, \xi(x, t)
\end{aligned}$$

où m, r, s, u, q, l *sont des entiers* ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$ *sont des fonctions différentiables telles que l'on ait* m, r, q, l, $\alpha(0,0)$, $\gamma(0,0)$, $\epsilon(0,0)$ *et* $\xi(0,0)$ *non nuls. On associe à* b *et* d *le nombre* Q *tel que*

$$Q = \begin{cases} \delta(0,0)/r \ \gamma(0,0) & si \quad l < q \\ -\beta(0,0)/m \ \alpha(0,0) & si \quad q < l \\ \delta(0,0)/r \ \gamma(0,0) - \beta(0,0)/m \ \alpha(0,0) & si \quad l = q . \end{cases}$$

On impose $Q \neq 0$ *et on suppose que, lorsque*

$$a(x, t) \ c(-x, t) / a(-x, t) \ c(x, t) = (-1)^{u+1} + x^w \ C(x, t)$$

avec $w < 2 \inf (q, l) - 1$ *et* $C(0,0) \neq 0$, *on ait*

$$Q \times C(0,0) \ (-1)^{u+1} > 0 .$$

Alors pour toute fonction différentiable $\mu(x, t)$, *définie sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ *et* x*-plate sur un voisinage de* 0, *il existe deux uniques fonctions* $Y(x, t)$ *et* $Z(x, t)$, *différentiables et* x*-plates sur des voisinages de* 0, *qui vérifient (2.13) sur un voisinage de* 0.

En particulier les hypothèses de ce lemme sont vérifiées si a et c ne sont pas x-plats, si $d(x, t) = x^{2r}$ et si

$$b(x, t) = \alpha(t) \ x^{2m} + \beta(t) \ x^{2m+1} + x^{2m+2} \ \gamma(x, t), \ \alpha(0) \ \beta(0) \neq 0.$$

Ce résultat est à rapprocher du fait, beaucoup plus élémentaire, que si a et b sont deux fonctions différentiables telles que a ne soit pas x-plate et $b(x, t) = x^{2m+1} \ \alpha(x, t)$ avec $\alpha(0,0) \neq 0$; alors pour toute fonction différentiable et x-plate μ, définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$, on peut écrire $\mu(x, t) = a(x, t) \ X(b(x, t), t)$.

III. DEMONSTRATION DU THEOREME

1. Une propriété générique.

PROPOSITION 3.1. – *L'ensemble* $\mathcal{F}$ *des applications* $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *qui ne présentent que des plis tangents ou transverses ou bien des fronces transverses comme points singuliers est un ouvert dense de* $C^\infty(V, \mathbf{R}^2)$ *pour la topologie de Whitney.*

Démonstration. – L'ensemble $\mathcal{F}'$ des applications $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ qui ne présentent que des plis tangents ou transverses ou bien des fronces quelconques comme points singuliers est un ouvert dense :

il est l'intersection de l'ensemble de celles qui ne présentent que des plis ou des fronces comme points singuliers avec l'ensemble de celles dont les deux composantes sont des fonctions de Morse.

Notons S^1_{11} (respectivement : S^2_{11}) le sous-ensemble de la variété de Thom-Boardman $S_{11} \subset J^2(V, \mathbf{R}^2)$ ([4]) formé des jets $j^2 f(x)$ tels que la première (respectivement : la deuxième) composante de f admette x comme point critique. On montre que S^1_{11} et S^2_{11} sont des sous-variétés de codimension $n+1$ de $J^2(V, \mathbf{R}^2)$: ce sont des sous-variétés de codimension 1 de S_{11}. L'ensemble $\mathfrak{F}$ est l'intersection de $\mathfrak{F}'$ avec l'ensemble des $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dont le jet d'ordre 2 est transverse à la fois à S^1_{11} et S^2_{11}. La densité de $\mathfrak{F}$ est alors une conséquence des théorèmes de transversalité.

Considérons f dans $\mathfrak{F}$; elle admet un nombre fini de points fronces $c_1, \ldots, c_p$. Nous choisissons un voisinage compact U de $\{c_1, \ldots, c_p\}$ sur lequel les deux composantes de f sont régulières. Il résulte des propriétés de la transversalité (voir [4], Chap. II, § 4, Exercice 1) que, pour tout g assez voisin de f, g n'admet de fronces que dans U ; comme de plus les deux composantes de g sont régulières dans U (pour tout g assez voisin de f) on en déduit que g n'a pas de fronces non transverses. Ceci et l'ouverture de $\mathfrak{F}'$ prouvent que $\mathfrak{F}$ est un ouvert achevant ainsi la démonstration.

2. Déformations de fronces.

DEFINITION 3.1. – *Soient $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ et $g: W \longrightarrow \mathbf{R}^2$ deux applications différentiables, v un point de V, w un point de la variété W. Nous dirons que f en v est localement bi-équivalente à g en w s'il existe deux difféomorphismes locaux $h: V, v \longrightarrow W, w$ et $k: \mathbf{R}^2, f(v) \longrightarrow \mathbf{R}^2, g(w)$ avec $k(x, y) = (k_1(x), k_2(y)) \in \mathbf{R}^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ voisin de $f(v)$ et $k \circ f(u) = g \circ h(u)$ pour tout u proche de v.*

On démontre par des arguments standard ([5], [1]) le lemme suivant.

LEMME 3.1. – *Si $f: V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ admet un pli transverse en v elle est, en v, localement bi-équivalente à l'application*

$$(y, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \left(y + \sum_{i=2}^{n} \pm x_i^2 , y\right)$$

en 0 ; *si elle admet un pli tangent en* v *elle est localement bi-équivalente à l'une des applications*

$$(y, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \left(y^2 + \sum_{i=2}^{n} \pm x_i^2 , y\right),$$

$$(y, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (y, y^2 + \Sigma \pm x_i^2);$$

si elle admet une fronce transverse en v *elle est localement bi-équivalente à*

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \longmapsto \left(x^3/3 + xy + y + y^2\lambda(y) + \sum_{i=3}^{n} \pm x_i^2 , y\right)$$

où λ *est une application différentiable de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$.

DEFINITION 3.2. – *Une déformation de* f *est une application différentiable* $F(v, t)$ *de* $V \times \mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}^2$ *telle que* $F(v, 0) = f(v)$ *pour tout* $v \in V$.

Pour toute application $(y, t) \longmapsto L(y, t)$ on écrit $L_t(y) = L(y, t)$.

DEFINITION 3.3. – *Soient* F *et* G *deux déformations de* $f : V \longrightarrow \mathbf{R}^2$. *Nous dirons que* F *est bi-équivalente à* G *si il existe trois applications différentiables* $H : V \times \mathbf{R} \longrightarrow V$, $K_1 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $K_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *telles que* H_t, K_{1t} *et* K_{2t} *soient des difféomorphismes pour* t *voisin de* 0 *et l'identité pour* $t = 0$ *avec*

$$(K_{1t} \times K_{2t}) \circ F_t = G_t \circ H_t \tag{3.1}$$

pour t *assez voisin de* 0. *Si* v *est un point de* V *nous dirons que* F *est localement bi-équivalente à* G *en* v *si l'on est dans la même situation quitte à se restreindre à un voisinage de* v.

Par la suite la lettre z désignera le $(n-1)$-uplet $(x, x_3, \dots, x_n)$; on pose

$$f_\lambda(z, y) = x^3/3 + xy + y + y^2\,\lambda(y) + \sum_{i=3}^{n} \pm x_i^2$$

pour toute fonction différentiable λ.

LEMME 3.2. – *Toute déformation de* $(z, y) \longmapsto (f_\lambda(z, y), y)$ *est localement bi-équivalente en* 0 *à une déformation de la forme*

$$(z, y, t) \longmapsto (f_\lambda(z, y) + \epsilon(y, t), y). \tag{3.2}$$

Démonstration. – Soit F, de composantes F_1 et F_2 une déformation quelconque de $(z, y) \longmapsto (f_\lambda(z, y), y)$. Nous avons $F_2(z, y, 0) = y$; alors le changement de variables

$$(z, y, t) \longmapsto (z, F_2(z, y, t), t)$$

nous ramène au cas où $F_2(z, y, t) = y$. Nous nous plaçons dans ce cas.

La fonction F_1 est un déploiement à deux paramètres (y, t) de $x^3/3 + \sum_{i=3}^{n} \pm x_i^2$; elle peut donc être mise, via un changement de variables du type $(z, y, t) \longmapsto (\varphi(z, y, t), y, t)$, sous la forme

$$\frac{x^3}{3} + \sum_{i=3}^{n} \pm x_i^2 + \alpha(y, t)x + \beta(y, t).$$

La "versalité" de F_1 implique que $\frac{\partial\alpha}{\partial y}(0)$ est non nul. Les changements de variables $(z, y, t) \longmapsto (z, \alpha(y, t), t)$ à la source et $(y, t) \longmapsto (\alpha(y, t), t)$ au but de F_2 nous ramènent au cas où F est de la forme (3.2), achevant ainsi la démonstration.

3. Démonstration du théorème.

a) *Nécessité*

Compte tenu de la densité de l'ensemble $\mathfrak{F}$, toute application bi-stable est dans $\mathfrak{F}$ (la propriété caractéristique de l'ensemble $\mathfrak{F}$ est invariante par bi-équivalence). Il nous suffit alors de voir que si $f_{|\Sigma f}$ n'est pas injective, f ne peut être bi-stable. Dans ce cas il existe v et w, deux éléments distincts de Σf, tels que $f(v) = f(w)$. On remarque que le rapport des pentes des droites $\operatorname{Im} df_v$ et $\operatorname{Im} df_w$ est un invariant pour la bi-équivalence. Or il suffit d'une petite perturbation de f pour modifier ce rapport : ceci prouve la nécessité des conditions du théorème pour la bi-stabilité.

b) *Suffisance*

Compte tenu de la proposition 3.1 l'ensemble des applications vérifiant les hypothèses du théorème est un ouvert. Alors pour montrer qu'une telle application f est bi-stable il suffit de prouver qu'elle est bi-stable "par déformation" : toute déformation G de f est bi-équivalente à la déformation triviale $(v, t) \longmapsto f(v)$.

Suivant la procédure habituelle on obtient H, K_1 et K_2 réalisant cette bi-équivalence (définition 3.2) en intégrant des champs dépendant du temps X, Y_1 et Y_2 définis respectivement sur V, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}$. L'équation (3.1) se traduit alors par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, v) = -d_v G_t X_t(v) + (Y_{1t} \times Y_{2t}) \circ G_t(v). \tag{3.3}$$

Pour achever notre démonstration nous allons prouver que l'on sait résoudre cette équation. Pour cela nous utilisons le lemme qui suit ; c'est dans la démonstration de ce lemme qu'intervient la proposition 2.1.

LEMME 3.3. – *Soit* v_0 *un point fronce transverse de* f *et* G *une déformation quelconque de* f. *Alors il existe des champs dépendant du temps* X, Y_1, Y_2, *définis respectivement sur* $V, \mathbf{R}, \mathbf{R}$ *et qui vérifient l'équation (3.3) pour* v *assez voisin de* v_0 *et* t *assez voisin de* 0.

Démonstration. – Compte tenu du lemme 3.1 on peut remplacer $f(v)$ par $(f_\lambda(z, y), y)$. Le lemme 3.2 nous ramène au cas où G est de la forme $(f_\lambda(z, y) + \epsilon(t, y), y)$. Alors (3.3) se récrit

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t}(y, t) = (y + x^2)\, X(z, y, t) + (1 + y\,\chi(y, t) + x)\, Y(z, y, t) + \sum_{i=3}^{n} \pm 2\, x_i X_i(z, y, t) + Z(f_\lambda(z, y) + \epsilon(t, y), t) \tag{3.4}$$

$$0 = Y(z, y, t) + T(y, t)\ ; \tag{3.5}$$

ce système d'équations (inconnues X, Y, X_i et T) se ramène à la seule équation (3.4) mais où l'on impose que Y ne dépende pas de z.

Supposons que l'on ait $\epsilon(y, t) = v(t) + y\, s(y, t)$. On définit $\widetilde{Z}$ par $\widetilde{Z}(u, t) = Z(u + v(t), t) - \dfrac{dv}{dt}(t)$; alors, quitte à remplacer Z par $\widetilde{Z}$ on peut supposer que v est nul. On pose alors

$$\epsilon(y, t) = y\,\gamma(t) + y^2\,\lambda(y, t) \qquad (\gamma(0) = 0).$$

En remplaçant y par $-x^2, x_3, \ldots, x_n$ par 0 dans (3.4) et en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 nous ramenons la résolution de (3.4) à celle d'une équation de la forme

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t}(-x^2, t) = (1 + x + \gamma(t) + x^2 \, \tau(x, t)) \, \mathrm{Y}(-x^2, t) + \mathrm{Z}(-x^2(1 + \gamma(t)) - \frac{2}{3} x^3 + x^4 \, \theta(x, t), t).$$

La proposition 2.1 affirme l'existence de solutions achevant ainsi la démonstration du lemme 3.3.

Nous revenons maintenant à la démonstration du théorème.

Le lemme précédent permet de résoudre (3.3) au voisinage des fronces transverses. Le lemme 3.1 et le paragraphe 6 de la référence [1] donnent un résultat analogue au voisinage des plis transverses ou tangents. Enfin on remarque que si $v_0 \notin \Sigma f$, f est une submersion au voisinage de v_0 ; il en est de même de G_t pour t voisin de 0 et l'on sait résoudre

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}(t, v) = - d_v \, \mathrm{G}_t \, \mathrm{X}_t(v) \tag{3.6}$$

pour t petit et v proche de v_0. Ainsi nous savons résoudre (3.3) au voisinage de chacun des points de V et pour $|t| < \epsilon$ (on utilise la compacité de V).

Pour tout $q \in \mathbf{R}^2$, $f^{-1}(q) \cap \Sigma f$ contient au maximum un point, au voisinage duquel on peut écrire (3.3). On étend la solution X à un voisinage de $f^{-1}(q)$ en utilisant (3.6) et une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de $f^{-1}(q)$. On "globalise" maintenant les solutions X et Y de (3.3) à l'aide d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de $\mathbf{R}^2$. Ceci achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. DUFOUR, Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e Série, t. 10 (1977), 153-174.

[2] J.P. DUFOUR, Bi-stabilité des fronces, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 285 (Sept. 77).

[3] S. FERRY, Codimension one Morse Theories, thesis, University of Michigan, 1973.

[4] M. GOLUBITSKY, V. GUILLEMIN, Stable Mappings and Their Singularities, *Graduate Texts in Mathematics,* Springer Verlag, 1973.

[5] Y.H. WAN, Morse Theory for Two functions, *Topology,* Vol. 14, n° 3, 218-228.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1977.

J.P. DUFOUR,
Département de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques
Place Eugène Bataillon
34060 Montpellier Cedex.