ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES VEY

Principe de la phase résonnante

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_307_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 307-311

PRINCIPE DE LA PHASE RÉSONNANTE

par Jacques VEY

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

Soit S une fonction analytique sur $\mathbf{R}^n$, à valeurs réelles, et φ une fonction C^∞ à support compact (à valeurs réelles ou complexes). Formons, pour $h > 0$, l'intégrale

$$J_{S,\varphi}(h) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{iS(x)\hbar} \varphi(x)\, d^n x$$

(on a posé comme à l'ordinaire $\hbar = h/2\pi$). Le classique principe de la phase stationnaire traite du comportement de cette intégrale quand $h \longrightarrow 0$. Voici les deux phénomènes fondamentaux :

a) Si S n'a pas de point critique sur le support de φ, $J_{S,\varphi}(h)$ est plate quand $h \longrightarrow 0$; c'est-à-dire que pour tout entier $p \geqslant 0$, on peut trouver une constante $C_p(S, \varphi)$ telle que $J_{S,\varphi}(h) \leqslant C_p(S, \varphi)\, h^p$; ou encore, puisque les dérivées par rapport à h de $J_{S,\varphi}(h)$ sont des intégrales du même type, on peut dire que la fonction $J_{S,\varphi}(h)$, prolongée par 0 pour $h = 0$, est une fonction C^∞ sur $[0, +\infty[$, plate à l'origine.

b) Laissons à présent la fonction S libre de présenter des points critiques sur le support de φ. Il résulte de (a) que si $J_{S,\varphi}(h)$ doit présenter un développement asymptotique quand $h \longrightarrow 0$, ce développement ne saurait dépendre que du comportement de S et de φ sur l'ensemble critique de S. Cela dit, il y a effectivement un développement asymptotique, de la forme

$$J_{S,\varphi}(h) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_0 + \mathbf{N} \\ 0 \leqslant p \leqslant n-1}} a_{\lambda,p}(S, \varphi)\, e^{ic_j/\hbar} h^\lambda\, |\log h|^p$$

où $c_1, \ldots, c_k$ sont les différentes *valeurs* critiques de S, où Λ_0 est un ensemble fini de nombres rationnels, et les $a_{\lambda,p}$ des distributions concentrées sur l'ensemble critique de S. Pour fixer les idées, disons que la contribution d'un point de Morse a de S est $e^{i\sigma\pi/4} \, |\det \frac{1}{2} \mathrm{H}_a(\mathrm{S})|^{-n/2} \, \varphi(a) \, e^{i\mathrm{S}(a)/\hbar} \, h^{n/2} + 0(h^{1+n/2})$ où $\mathrm{H}_a(\mathrm{S})$ désigne la hessienne de S en a, et σ sa signature (nombre de carrés > 0 moins nombre de carrés négatifs). La suite du développement, que j'ai laissée implicite dans le $0(h^{1+n/2})$, est connue ; et si plus généralement, le point critique a devait dégénérer (c'est-à-dire la forme quadratique $\mathrm{H}_a(\mathrm{S})$ dégénérer), la forme du développement a été explorée par différents auteurs ([1]).

Voici maintenant la variante que je me propose d'examiner. Partons des mêmes données que précédemment : S, φ, et la variable $h > 0$, et formons les sommes (finies pour chaque valeur particulière de h) $\Sigma_{\mathrm{S},\varphi}(h) = h^n \sum_{x \in h\mathbf{Z}^n} e^{i\mathrm{S}(x)/\hbar} \, \varphi(x)$ où $h\mathbf{Z}^n$ désigne le réseau des points dont les n coordonnées sont des multiples entiers de h. C'est une somme de Riemann de l'intégrale $\mathrm{J}_{\mathrm{S},\varphi}(h)$, mais le point crucial est que la maille du réseau est précisément l'unité d'action dans la phase. En géneral, on pourrait former les sommes de Riemann de la fonction $e^{i\mathrm{S}/\hbar}$ sur le réseau $k\mathbf{Z}^n$ ($k > 0$ petit) et il est concevable (et vrai) que si $k << h$ (par exemple si $k = h^2$), les fonctions $\Sigma_{\mathrm{S},\varphi}(h)$ et $\mathrm{J}_{\mathrm{S},\varphi}(h)$ ne différeraient que par une fonction plate de h. Mais la présente définition va amener des phénomènes de résonance : il saute aux yeux par exemple que si l'on ajoute à S une forme linéaire L à coefficients entiers, on ne modifie pas $\Sigma_{\mathrm{S},\varphi}(h)$; alors que les ensembles critiques de S et S + L n'ont rien de commun.

Définissons alors un *point résonnant* de la fonction S : c'est un point où les n dérivées partielles $\partial\mathrm{S}/\partial x_j$ prennent simultanément des valeurs entières $\gtrless 0$; ou si l'on préfère, c'est un point où la différentielle $d\mathrm{S}$ tombe dans le réseau dual $(\mathbf{Z}^n)^*$ de $\mathbf{Z}^n$.

THEOREME 1. – *Si la fonction* S *ne présente pas de point résonnant sur le support de* φ, *alors* $\Sigma_{\mathrm{S},\varphi}(h)$ *est plate quand* $h \longrightarrow 0$.

Au vu de ce résultat, il devient clair que si $\Sigma_{\mathrm{S},\varphi}(h)$ possède un développement asymptotique, celui-ci ne dépendra que du comportement de S et φ sur l'ensemble résonnant (ie. l'ensemble des points résonnants) de S. Cet ensemble se décrit comme la réunion, pour

L parcourant le réseau $(\mathbf{Z}^n)^*$ des formes linéaires à coefficients entiers, des ensembles critiques X_L des fonctions $S - L$.

THEOREME 2. – *Les deux fonctions de* h, $\Sigma_{S,\varphi}(h)$ *et* $\sum_{L \in (\mathbf{Z}^n)^*} J_{S-L,\varphi}(h)$ *ne diffèrent que par une fonction plate de* h.

Noter que la somme sur L est finie : on peut la restreindre aux formes L dont la norme est inférieure au maximum de $\|dS\|$ sur le support de φ. En d'autres termes, et déduction faite des phénomènes de résonance, on est ramené aux développements asymptotiques de la phase stationnaire. Par exemple, si l'intersection de l'ensemble résonnant de S avec le support de φ se réduit à un nombre fini de points, $a_1, \ldots, a_k$, tous de Morse (c'est-à-dire que chaque a_j est un point critique non dégénéré de la fonction $S - L_j$; $L_j = d_{a_j}S$ est la différentielle de S en a_j), on aura

$$\Sigma_{S,\varphi}(h) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} e^{i\sigma_j \pi/4} \left|\det \frac{1}{2} H_{a_j}(S)\right|^{-n/2} \varphi(a_j)\, e^{i(S(a_j) - L_j(a_j))/\hbar}\, h^{n/2} + 0(h^{1+n/2})$$

(σ_j désigne la signature de la hessienne $H_{a_j}(S)$ de S, ou $S - L_j$, au point a_j).

Les deux théorèmes résultent de la formule de Poisson. Cette dernière stipule que si f est une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à support compact, et si $\hat{f}$ est sa transformée de Fourier,

$$\sum_{x \in \mathbf{Z}^n} f(x) = \sum_{2\pi \mathbf{Z}^n} \hat{f}(\xi).$$

De là on tire, par un changement de coordonnées linéaire,

$$h^n \sum_{x \in h\mathbf{Z}^n} f(x) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^n/\hbar} \hat{f}(\xi);$$

il serait d'ailleurs plus approprié d'écrire dans le second membre $(\mathbf{Z}^n)^*$ plutôt que $\mathbf{Z}^n$, puisque ξ est un vecteur covariant, ie. une forme linéaire. Appliquons cette formule à $f = e^{iS/\hbar}\varphi$, en observant que si $L \in \mathbf{Z}^n$ (ou $(\mathbf{Z}^n)^*$),

$$\hat{f}(L/\hbar) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(S(x) - Lx)/\hbar} \varphi(x)\, d^n x$$

il vient

$$\Sigma_{S,\varphi}(h) = \sum_{L \in (\mathbf{Z}^n)^*} J_{S-L,\varphi}(h). \tag{1}$$

Soit K le support de φ, et Λ l'ensemble, *fini*, des $L \in (\mathbf{Z}^n)^*$ dont la norme $|L|$ est inférieure ou égale à $1 + 2 \sup_K |dS|$.

Pour $L \notin \Lambda$, la fonction $S - L$ ne peut présenter de point critique sur K, et donc $J_{S-L,\varphi}(h)$ est plate quand $h \longrightarrow 0$. Plus précisément :

LEMME. – *Soit* S *une fonction analytique, réelle, sur* $\mathbf{R}^n$; φ *une fonction* C^∞ *à support compact* K ; *et* L *une forme linéaire. Supposons* $|L| > 1 + 2 \sup_K |dS|$. *Alors, pour tout entier* $p \geqslant 0$,

$$|J_{S-L,\varphi}(h)| \leqslant h^p (1 + |L|)^{-p}\, C(p\,, \|S\|_{p+1,K}\,, \|\varphi\|_p\,, \mathrm{vol}(K))\,.$$

Dans le second membre, $\mathrm{vol}(K)$ désigne le volume de K, et $\|f\|_{p,K}$ le maximum sur K des dérivées partielles de la fonction f d'ordre $\leqslant p$, l'indice K étant omis si f est à support dans K ; enfin C est une constante (par rapport à h et L) ne dépendant que des arguments indiqués dans les parenthèses. Admettons ce lemme et revenons à la formule (1). Je dis que la contribution, dans le second membre, des formes $L \notin \Lambda$ sera une fonction plate de h. En effet quel que soit l'entier $p \geqslant 0$, et je peux tout de suite supposer $p \geqslant n$,

$$\sum_{L \notin \Lambda} J_{S-L,\varphi}(h) \leqslant h^p C(p, K, \|S\|_{p+1,K}\,, \|\varphi\|_p) \sum_L (1 + |L|)^{-p}$$

et la série de droite est convergente. Donc modulo fonctions plates, il ne reste plus, à droite de (1), qu'un nombre fini de fonctions $S - L$, les seules d'ailleurs susceptibles de présenter un point critique sur le support de φ : ceci donne les théorèmes 1 et 2.

Preuve du lemme. – Posons $L = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} L_j x_j$, $S_{|j} = \partial S/\partial x_j$, et $\sigma(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (S_{|j} - L_j)^2$: on a $\sigma(x) \geqslant (1 + |L|)^2$ sur K. La dérivée partielle en x_k est $-\sigma^{-2} \sum_j 2(S_{|j} - L_j)\, S_{|jk}$ donc de l'ordre de $(1 + |L|)^{-3}$; dans les dérivées ultérieures, le facteur $S_{|jk}$ engendre toute une dynastie de termes du même ordre ; et compte tenu de l'estimation de σ^{-1} elle-même, on trouve, pour tout entier $p \geqslant 0$, $\|\sigma^{-1}\|_{p,K} \leqslant (1 + |L|)^{-2}\, C_1(p\,, \|S\|_{p+1,K})$.

Soit maintenant Ω^n_K l'espace des formes différentielles de degré n et nulles en dehors de K ; soit P l'opérateur qui envoie la forme $\omega = f(x)\, d^n x$ sur

$$P\omega = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^j \sigma^{-1} (S_{|j} - L_j) f(x)\, dx_{\hat{j}}$$

où $dx_{\hat{j}}$ désigne le produit $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ avec dx_j omis. D'une part, pour tout entier $q \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \|P\omega\|_q &\leqslant C_2(q)\, \|\sigma^{-1}\|_{q,K}\, \|S_{|j} - L_j\|_{q,K}\, \|\omega\|_q \\ &\leqslant C_3(q, \|S\|_{q+1,K})\, \|\omega\|_q\, (1 + |L|)^{-1} \end{aligned}$$

(la norme d'une forme est le maximum des normes de ses coefficients) ; d'autre part, $\omega = d(S - L) \wedge P\omega$. Cette dernière relation permet une succession d'intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int e^{i(S-L)/\hbar}\omega &= \int e^{i(S-L)/\hbar}\, d(S-L) \wedge P\omega = i\hbar \int e^{i(S-L)/\hbar}\, dP\omega \\ &= \ldots = (i\hbar)^p \int e^{i(S-L)/\hbar}\, (dP)^p \omega . \end{aligned}$$

Estimons la norme de l'opérateur dP composé de d et P :

$$\|dP\omega\|_{p-1} \leqslant n\, \|P\omega\|_p \leqslant C_5(p, \|S\|_{p+1,K})\, \|\omega\|_p\, (1 + |L|)^{-1}$$

et ceci donne par itération

$$\|(dP)^p\omega\|_0 \leqslant C_6(p, \|S\|_{p+1,K})\, \|\omega\|_p\, (1 + |L|)^{-p} .$$

Reportons cette majoration dans (3) :

$$\left| \int e^{i(S-L)/\hbar}\omega \right| \leqslant C_7(K, p, \|S\|_{p+1,K})\, \|\omega\|_p\, h^p\, (1 + |L|)^{-p}$$

ce qui, avec $\omega = \varphi\, d^n x$, est la majoration annoncée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. MALGRANGE, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure,* 4ème série, t. 7 fasc. 3 (1974), 405-430.

Manuscrit reçu le 2 août 1978.

Jacques VEY,
Centre Universitaire de Savoie
&
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS
Institut Fourier
BP 116, 38402 St Martin d'Hères.