ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT GERBER

Sur une classe de solutions des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 359-382

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__359_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR UNE CLASSE DE SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT AVEC SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE PESANT

par **Robert GERBER.**

INTRODUCTION

Dans ma thèse [1] j'ai considéré le problème de la détermination des écoulements irrotationnels et avec surface libre, d'un liquide parfait et pesant, dans un canal dont le fond est connu. J'ai en particulier obtenu des théorèmes d'existence concernant essentiellement des mouvements du type torrentiel, qui sont relativement rapides et dans lesquels les pentes de la ligne libre et du fond sont de même signe.

Je me suis proposé dans le présent travail d'établir des théorèmes d'existence pour les mouvements du type fluvial qui, au contraire des précédents, sont relativement lents et présentent une ligne libre dont la pente est de signe contraire à celle du fond.

Ce mémoire constitue un prolongement de ma thèse et l'instrument principal de nos démonstrations sera encore la théorie du point fixe de Schauder et Leray.

Dans le chapitre I nous allons rappeler les notations et les résultats généraux de ma thèse, qui seront utilisés. Nous préciserons aussi dans ce chapitre les problèmes traités et nous indiquerons les résultats nouveaux acquis.

[1] Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, t. 34, 1955, pp. 185-299. Dans la suite ce Mémoire sera désigné par les initiales R. G.

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ÉNONCÉ DES PROBLÈMES

1. Schéma du mouvement. Notations. — Le mouvement irrotationnel et permanent est supposé s'effectuer dans le plan vertical Oxy, où Oy est orienté suivant la verticale ascendante, et l'on introduit la variable complexe $z = x + iy$. Le domaine fluide $\mathcal{A}$ est limité par une paroi (S), qui est fixée, et par une ligne libre (L), de forme *a priori* inconnue. La paroi (S) est supposée rectifiable, douée d'une tangente continue et d'une courbure bornée. On désigne par l l'abscisse curviligne d'un point de (S), le sens des l croissants étant celui de l'écoulement qui s'effectue de la gauche vers la droite, et par $\theta[l]$ l'angle algébrique que fait avec Ox la tangente orientée a (S) au point d'abscisse curviligne l. La courbe (S) est déterminée à une translation près par la donnée de la fonction $\theta[l]$, possédant une dérivée bornée et l'on suppose que le point $l = 0$ de (S) coïncide avec l'origine du plan Oxy.

2. Fonction $\omega(\zeta)$. — Avec les hypothèses faites la détermination d'un écoulement de débit ψ_0 sur (S) se ramène au problème harmonique aux limites suivant [2] :

Soit $\zeta = \varphi + i\psi$ le potentiel complexe, et soit $\mathfrak{D}$ la bande du plan ζ d'équations $-\infty < \varphi < +\infty$, $0 < \psi < \psi_0$. On demande de construire une fonction $\omega(\zeta)$, holomorphe sur $\mathfrak{D}$, et qui satisfait aux conditions ci-après :

[2] Cf : R. G. Chap. I, pp. 190-194, p 204.

1° Sur $\psi = \psi_0$, $\omega(\zeta)$ a une limite continue $f(\varphi) + ig(\varphi)$ qui vérifie la relation

$$\frac{dg}{d\varphi} = -\frac{\gamma}{V_0^3} e^{-3g(\varphi)} \sin f(\varphi) \tag{1. 1}$$

où γ est l'accélération de la pesanteur et V_0 la vitesse en un point particulier.

2° Sur $\psi = 0$, $\omega(\zeta)$ a une limite continue $\theta[l(\varphi)] + ih(\varphi)$ les fonctions inconnues $l(\varphi)$ et $h(\varphi)$ étant liées par

$$l(\varphi) = \frac{1}{V_0}\int_0^{\varphi} e^{-h(u)}\, du. \tag{1. 2}$$

3° La fonction

$$z(\zeta) = \frac{1}{V_0}\int_0^{\zeta} e^{i\omega(\zeta')}\, d\zeta' \tag{1. 3}$$

est univalente sur $\mathfrak{D}$.

. . . .

La fonction $Z(\xi)$ précédente réalise une application conforme de la bande $\mathfrak{D}$ sur le domaine $\mathfrak{A}$ du mouvement, dans laquelle les images des droites $\psi = 0$ et $\psi = \psi_0$ sont respectivement les courbes (S) et (L).

Si $\vec{V}(\varphi,\psi)$ désigne le vecteur vitesse au point image du point $\zeta = \varphi + i\,\psi$, et si l'on pose

$$\omega(\zeta) = U(\varphi,\ \psi) + iT(\varphi,\ \psi)$$
$$V(\varphi,\ \psi) = |\vec{V}(\varphi,\ \psi)|$$

On a

$$U(\varphi,\ \psi) = \arg \vec{V}(\varphi,\ \psi)$$
$$e^{T(\varphi,\psi)} = \frac{V(\varphi,\ \psi)}{V_0},$$

En particulier, $f(\varphi)$ représente l'angle algébrique que fait avec Ox la tangente orientée à (L) au transformé du point $\zeta = \varphi + i\,\psi_0$.

De plus, il sera commode pour ce qui suit de poser

$$\mu_0 = \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} \tag{1. 4}$$

$$\mu(\varphi) = \mu_0 e^{-3g(\varphi)} = \frac{\gamma\psi_0}{V^3(\varphi,\ \psi_0)}. \tag{1. 5}$$

3. Système intégrodifférentiel du mouvement. — La fonction $\omega(\zeta)$ s'exprime sur $\mathfrak{D}$ en fonction de $g(\varphi)$ et de $\theta[l(\varphi)]$ sous forme d'intégrales dues à M. Villat, et, en vertu des propriétés de régularité de $\theta[l(\varphi)]$ et de $g(\varphi)$ [3], les formules de M. Villat sont encore valables sur la frontière [4].

On obtient ainsi les deux relations qui suivent entre les valeurs à la frontière de $\omega(\zeta)$

$$(1.6)\quad f(\varphi) = -\frac{1}{2\psi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)-g(\varphi)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\psi_0}(u-\varphi)}\,du + \frac{1}{2\psi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta[l(u)]}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2\psi_0}(u-\varphi)}\,du$$

$$(1,7)\quad h(\varphi) = -\frac{1}{2\psi_0}\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\theta[l(u)]-\theta[l(\varphi)]}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\psi_0}(u-\varphi)}\,du + \frac{1}{2\psi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2\psi_0}(u-\varphi)}\,du.$$

Cela ramène le problème aux limites pour $\omega(\zeta)$ à la résolution du système intégro-différentiel des quatre équations (1. 1), (1. 2), (1. 6), (1. 7) dont les inconnues sont les fonctions $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $h(\varphi)$, $l(\varphi)$. Une solution de ce système fournit un écoulement de débit ψ_0, pourvu que la fonction correspondante $z(\zeta)$, définie par (1. 3), soit univalente. Il a été établi dans R. G. Ch. I, p. 194, que cette dernière condition avait lieu si les fonctions $f(\varphi)$ et $\theta[l(\varphi)]$ prenaient leurs valeurs sur un même intervalle inférieur ou égal à π.

. . . .

4. Écoulements (F). Système Σ. — Dans R. G. on a considéré, en particulier, le cas simple des écoulements qui présentent une périodicité géométrique et qui admettent des axes verticaux de symétrie. La fonction $\theta[l]$ est alors périodique, de

(3) La fonction $g(\varphi)$ est analytique (R. G., Chap. V), et $\theta[l(\varphi)]$ admet une dérivée bornée (R. G., Chap. I, pp. 201-207).

(4) Cf. R. G. Chap. I, pp. 202-203.

période $2L_0$. On prend pour origine des abscisses l un point de symétrie de (S), que l'on appelle A. Avec cela $\theta[l]$ est impaire, nulle pour $l = 0$ et $l = Lo$. On appelle B le point $l = Lo$ de (S), C et D les points de (L) qui sont sur les verticales de A et de B. On désigne par L_0' la longueur de la projection horizontale de l'arc $\widehat{AB}$ de (S). De plus on se donne la vitesse V_0 au point C.

Il suffit dans ce cas de considérer le domaine borné $\mathcal{A}$ de l'écoulement, qui est limité par les verticales de A et de B. L'image de $\mathcal{A}$ est le rectangle $\mathfrak{D}$: $0 < \varphi < \varphi_0$, $0 < \psi < \psi_0$, le nombre φ_0 étant inconnu. A cause de la symétrie la fonction $\omega(\zeta)$ est imaginaire pure sur les côtés $\varphi = 0$, et $\varphi = \varphi_0$ du rectangle $\mathfrak{D}$ et elle est nulle au point $\varphi = 0$, $\psi = \psi_0$, la vitesse devant être égale à V_0 au point C.

La transformation

$$\zeta = i\frac{\varphi_0}{\pi}\log Z + \varphi_0 + i\psi_0 \tag{1, 8}$$

effectue l'application conforme du rectangle $\mathfrak{D}$ sur la demi-couronne circulaire (C) :

$$q < \rho < 1, \qquad 0 < s < \pi$$

du plan $Z = \rho e^{is}$, le nombre q étant défini par

$$-\frac{\log q}{\pi} = \frac{\psi_0}{\varphi_0}. \tag{1, 9}$$

Les images des côtés $\psi = 0$, $\psi = \psi_0$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0)$ sont les demi-circonférences $\rho = q$, $\rho = 1$, $(0 \leqslant s \leqslant \pi)$, et la correspondance entre ces frontières est donnée par

$$\varphi = -\frac{\varphi_0}{\pi}s + \varphi_0. \tag{1, 10}$$

Au moyen de cette transformation $\omega(\zeta)$, $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $h(\varphi)$, $l(\varphi)$, $\mu(\varphi)$ deviennent des fonctions de Z ou de S, que nous notons encore $\omega(Z)$, $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$, $l(s)$, $\mu(s)$.

La fonction $\omega(Z)$ définie sur (C), est imaginaire pure sur l'axe réel, et les inconnues $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$, $l(s)$ sont définies sur le segment $0 \leqslant s \leqslant \pi$. Elles vérifient le système ci-dessous, qui se déduit du système des quatre équations (1. 1), (1. 2), (1. 6),

(1. 7) par le changement de variable précédent, et qui tient compte de ce que $\omega(Z)$ doit être nulle pour $Z = -1$.

$$(1, 11) \qquad \frac{dg}{ds} = \frac{\varphi_0}{\pi\psi_0}\mu(s)\sin f(s), \qquad g(\pi) = 0\left(\mu(s) = \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3}e^{-3g(s)}\right)$$

$$(1, 12) \qquad l(s) = \frac{\varphi_0}{\pi V_0}\int_\pi^s e^{-h(u)}du$$

$$(1, 13) \qquad f(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [g(u) - g(s)]N_1(u, s, q)\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]N_2(u, s, q)\,du$$

$$(1, 14) \qquad h(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\theta[l(u)] - \theta[l(s)]]N_3(u, s, q)\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(u)N_4(u, s, q)\,du$$

Les noyaux N_1, N_2, N_3, N_4 qui ont été explicités dans R. G. (ch. II, p. 217) dépendent du paramètre q, et par suite du nombre φ_0 qui est une inconnue. Mais on dispose dans le cas périodique de l'équation supplémentaire

$$(1, 15) \qquad L_0 = \frac{\varphi_0}{\pi V_0}\int_0^\pi e^{-h(u)}du$$

qui exprime que la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est fixée.

Nous appellerons dans ce qui suit écoulements (F) *les mouvements du type périodique qui satisfont de plus aux conditions*

$$(1, 16) \qquad 0 \leqslant f(\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0)$$

$$(1, 17) \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta[l] \leqslant 0 \qquad (0 \leqslant l \leqslant L_0)$$

On considérera le problème (F) *de la détermination des écoulements* (F) *qui correspondent à la donnée de la paroi* (S), *du débit* ψ_0, *et de la vitesse* V_0 *au point* C *de la ligne libre.*

....

La paroi (S) satisfaisant à (1. 17). Une solution du problème (F) est constituée par une solution du système Σ des cinq équations (1. 11) à (1. 15) qui vérifie les inégalités (1. 16) [15].

[15] Remarquons que les inégalités (1, 16) et (1, 17) entraînent que la condition d'univalence indiquée précédemment se trouve être vérifiée.

5. Modes de démonstration. Énoncé des résultats. — Le système intégro-différentiel des écoulements a été ramené dans R. G. à une équation fonctionnelle de la forme

$$x = \mathrm{F}(x) \tag{1, 18}$$

où x est un point d'un espace de Banach $\mathcal{E}$, à laquelle s'applique la théorie du point fixe de Schauder et Leray, qui constituera encore l'instrument essentiel de nos démonstrations.

Ces modes de démonstration exigent la vérification de deux catégories de propriétés de l'équation (1. 18). Les premières concernent la complète continuité de la transformation F (x); les secondes consistent en des limitations *a priori* des solutions éventuelles.

On a montré dans R. G. que la condition de complète continuité se vérifiait facilement dans le cas des mouvements à périodicité géométrique où l'on ne rencontre pas les difficultés dues aux points à l'infini. Dans notre thèse, on a pu tourner ces difficultés, pour les écoulements uniformes à l'infini, en utilisant des artifices qui reposaient sur le fait que la quantité $\mu(\varphi)$ restait petite pour les mouvements considérés.

Ces artifices ne sont plus valables pour les mouvements que nous étudions ici, où $\mu(\varphi)$ ne satisfait pas à cette dernière condition, et pour éviter ces difficultés nous ne considérons dans ce qui suit que les mouvements du type périodique.

En ce qui concerne les limitations *a priori* des solutions, une partie de celles établies dans notre thèse utilisaient aussi le fait que la quantité $\mu(\varphi)$ était petite. Nous serons ainsi conduits à effectuer de nouvelles limitations *a priori* pour les écoulements du type (F), lorsque $\mu(\varphi)$ est assez grande.

Voici maintenant le plan de nos démonstrations.

Dans le chapitre II, nous modifions le système Σ des équations des écoulements périodiques, de manière que toute solution du système ainsi modifié détermine un écoulement qui soit du type (F), pourvu qu'elle vérifie les inégalités

$$|f(s)| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} \leqslant \mathrm{C^{te}}$$

$$\mu(s) \geqslant \mathrm{C^{te}}$$

où les valeurs numériques des constantes seront précisées par la suite.

Dans le chapitre III nous montrons que l'angle f et le rapport $\frac{\psi_0}{\varphi_0}$ peuvent se majorer en fonction d'une minorante μ_m et d'une majorante μ_M de $\mu(\varphi)$ et d'autre part que si la période géométrique du mouvement est assez grande vis-à-vis de la profondeur moyenne on peut majorer l'oscillation de $\mu(\varphi)$ en fonction de la dénivellation de la paroi (S).

En considérant un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ défini par des inégalités de la forme

$$|f(s)| \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \mu_m \leqslant \mu(s) \leqslant \mu_M, \qquad \frac{\psi_0}{\varphi_0} \leqslant C^{te}$$

les méthodes de Schauder et Leray nous permettent, au chapitre II, de conclure à l'existence de mouvements (F) relativement lents, pourvu que la dénivellation de la paroi soit petite et que la période géométrique soit grande, par rapport à la profondeur moyenne.

Ce sont là à proprement parler des écoulements du type fluvial.

. . . .

Faisons remarquer que des résultats analogues à ceux du chapitre II et du chapitre III s'obtiendraient, avec des simplifications, dans le cas des écoulements uniformes à l'infini pour lesquels :

$$f(\varphi) \geqslant 0, \qquad \theta[l(\varphi)] \leqslant 0, \qquad -\infty \leqslant \varphi \leqslant +\infty.$$

CHAPITRE II

SUR LES ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS (F)

6. Résultats préliminaires. — Un écoulement (F) satisfait par définition aux conditions

$$0 \leqslant f(s) \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{2. 1}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta\,[l(s)] \leqslant 0 \tag{2. 2}$$

et il résulte de (1, 11) et de (2, 1) que

$$\frac{dg}{ds} \geqslant 0. \tag{2. 3}$$

Il a été établi dans R. G. (ch. II, p. 217) que le noyau N_2 de la formule (1. 13) était positif, et que le noyau N_1 était du signe de $u - s$. Ces dernières propriétés et l'inégalité (2. 2) montrent que pour un écoulement (F) le premier terme du deuxième membre de (1. 13) est positif et que le deuxième terme est négatif, leur somme étant positive.

Considérons la relation

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [g(u) - g(s)]\, N_1(u,\ s,\ q)\, du \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \theta\,[l(u)]\,.\, N_2(u,\ s,\ q)\, du \end{aligned} \tag{2. 4}$$

que l'on obtient en faisant $f(s) = 0$ dans (1. 13). Cette relation exprime donc que $\omega(Z)$ est imaginaire pure sur la demi-circonférence extérieure de (C). Comme $\omega(Z)$ est aussi imaginaire pure sur l'axe réel on peut alors, après prolongements, exprimer $\omega(Z)$, et $g(s)$, en fonction de $\theta[l(s)]$ au moyen de la formule de M. Villat [6], qui résout le problème de Dirichlet pour une couronne circulaire. On obtient ainsi

$$(2.5)\quad g(s) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta\,[l(u)]\Big[\zeta_3\Big(s-u+\frac{\omega_3}{2}\Big) + \zeta\Big(s-u+\frac{\omega_3}{2}\Big) - \zeta_3\Big(s+u+\frac{\omega_3}{2}\Big) - \zeta\Big(s+u+\frac{\omega_3}{2}\Big)\Big]\,du + C^{te}.$$

Les fonctions elliptiques qui entrent dans cette formule et dans les suivantes ont les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ avec

$$\omega_1 = \pi, \qquad \omega_3 = -2i\log q = \frac{2i\pi\psi_0}{\varphi_0}.$$

Si $\omega(Z)$ est imaginaire pure sur $\rho = 1$, $g(s)$ est dérivable. Par dérivation de (2. 5) on obtient

$$(2.6)\qquad \frac{dg}{ds} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\,N_5(u, s, q)\,du$$

avec

$$(2.7)\quad N_5(u, s, q) = p\Big(s-u+\frac{\omega_3}{2}\Big) + p\Big(s-u-\frac{\omega_3}{2}\Big) - p\Big(s+u+\frac{\omega_3}{2}\Big) - p\Big(s+u-\frac{\omega_3}{2}\Big).$$

Le raisonnement qui précède montre que (2. 4) et (2. 6) sont équivalentes. Par suite N_1 étant du signe de $u - s$, *l'inégalité*

$$(2.8)\qquad \frac{dg}{ds} \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\,N_5(u, s, q)\,du$$

entraîne

$$(2.9)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [g(u)-g(s)]\,N_1(u, s, q)\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta\,[l(u)]\,N_2(u, s, q)\,du \geqslant 0.$$

D'autre part, si $f(s)$ est nulle et si $\theta[l(s)]$ est négative, $\frac{dg}{ds}$ est positive (car la partie réelle U de ω est alors négative sur (C) et $\frac{dg}{ds} = \left[\frac{\partial U}{\partial \rho}\right]_{\rho=1} \geqslant 0$).

(6) H. Villat. Aperçus théoriques sur la résistance des fluides, p. 16.

Il s'ensuit que l'intégrale de la formule (2. 6) est positive quand $\theta[l]$ est négative. Il serait d'ailleurs facile de vérifier que le noyau N_5 est négatif si $0 \leqslant \frac{s}{u} \leqslant \pi$.

De plus, *si* $\theta[l]$ *est négative, les deux quantités positives*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]N_5(u,\ s,\ q)\,du, \qquad -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]N_2(u,\ s,\ q)\,du$$

vérifient l'inégalité

$$(2.\ 10) \quad -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]N_2(u,\ s,\ q)\,du \geqslant \nu(\tau)\cdot\frac{\omega_3}{2i\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\,.\ N_5(u,\ s,\ q)\,du$$

où τ *est le rapport* $\frac{\omega_3}{i\pi}$ *des périodes et où la fonction* $\nu(\tau)$ *est positive, non nulle et tend vers* 1 *quand* τ *tend vers zéro* (7).

Pour établir (2. 10) il suffit de montrer que

$$(2.\ 11) \qquad N_2(u,\ s,\ q) + \nu(\tau)\frac{\omega_3}{2i\pi}N_5(u,\ s,\ q) \geqslant 0.$$

Or on a

$$(2.\ 12) \quad N_2(u,s,q) + \nu(\tau)\frac{\omega_3}{2i\pi}N_5(u,s,q) = K(s-u) - K(s+u)$$

en posant (8)

$$(2.\ 13) \quad K(x) = i\frac{d}{dx}\log \xi_{30}\left(x - \frac{\omega_3}{2}\right) + \nu(\tau)\frac{\omega_3}{2i\pi}\left[\wp\left(x-\frac{\omega_3}{2}\right) + \wp\left(x+\frac{\omega_3}{2}\right)\right].$$

Si x est réel on a

$$\wp\left(x \pm \frac{\omega_3}{2}\right) - e_3 = e^{\pm i\delta(x)}\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}$$

avec $\delta(x)$ réelle.

(7) En revenant au plan ζ ce résultat peut s'exprimer ainsi : soient $\omega_1 = U_1 + iT_1$ et $\omega_2 = U_2 + iT_2$, holomorphes dans le rectangle $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$, imaginaires pures sur les côtés $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$; ω_1 étant réelle sur $\psi = \psi_0$ et ω_2 y étant imaginaire pure. Si ω_1 et ω_2 ont sur $\psi = 0$ une même partie réelle, de signe constant, alors :

$$U_1(\varphi,\ \psi_0) \geqslant \nu(\tau)\,.\,\frac{\psi_0}{\pi}\left[\frac{\partial U_2(\varphi,\ \psi)}{\partial\psi}\right]_{\psi=\psi_0}.$$

(8) Le noyau N_2 a été explicité dans R. G. Chap. II, p. 217.

On peut après un calcul facile exprimer $K(x)$ au moyen de $\delta(x)$. On trouve

(2. 14)
$$K(x)=\left[(e_1-e_3)-2\cos\delta(x)\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}+(e_2-e_3)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+\nu(\tau)\frac{\omega_3}{2i\pi}\left[2e_3+2\cos\delta(x)\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}\right].$$

La fonction $K(x)$ est paire, périodique, de périodes $2\omega_1=2\pi$ et $2\omega_3$ et par suite on voit que l'on aura

$$(2.\ 15)\qquad K(s-u)-K(s+u)\geqslant 0\quad 0\leqslant {s \atop u}\leqslant\pi$$

d'où (2. 11), pourvu que $K(x)$ soit décroissante sur $0\leqslant x\leqslant\omega_1$.

Comme $\delta(x)=\arg\left[p\left(x+\frac{\omega_3}{2}\right)-e_3\right]$ est une fonction croissante de x quand x croît de 0 à ω_1, $K(x)$ sera décroissante sur $0\leqslant x\leqslant\omega_1$, si la dérivée par rapport à $\cos\delta$ de l'expression (2. 14) de $K(x)$ est négative. Cela a lieu en particulier si

(2. 16)
$$\left[(e_1-e_3)+2\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}+(e_2-e_3)\right]^{-\frac{1}{2}}\geqslant\nu(\tau)\frac{\omega_3}{i\pi}.$$

En introduisant le module k des fonctions elliptiques, en posant

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{[(t^2-1)(1-k^2t^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

et en tenant compte de ce que

$$K'=\frac{\omega_3}{i}\sqrt{e_1-e_3},\qquad k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}$$

(2. 16) s'écrit

$$(2.\ 17)\qquad \nu(\tau)\leqslant\frac{\pi}{K'(1+k)}$$

Le deuxième membre de (2. 17) est une fonction décroissante de $\tau=\frac{\omega_3}{i\pi}$, qui est égale à 1 pour $\tau=0$.

D'après les raisonnements qui précèdent, il suffira que $\nu(\tau)$ lui soit égale pour que l'inégalité (2. 10) ait lieu. Ceci établit le résultat annoncé.

En vue des raisonnements ultérieurs remarquons que si τ est inférieur à 2 les valeurs prises par $\nu(\tau)$ restent supérieures à un nombre voisin de 0,85.

7. **Équations des écoulements (F). Système Σ^*.** — Introduisons maintenant l'équation auxiliaire

$$(2,\ 18)\quad \frac{dg}{ds}=\left|\frac{\varphi_0}{\pi\psi_0}\mu(s)\sin f(s)-\frac{C}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\,N_5(u,\ s,\ q)\,du\right| + \frac{C}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\,.\,N_5(u,\ s,\ q)\,du \qquad g(\pi)=0$$

où C est une constante positive, non nulle. Nous allons établir le résultat suivant :

Si $\theta[l]$ *est négative, on peut déterminer la constante* C, *positive non nulle de manière que l'équation à la ligne libre* (1. 11) *et la condition*

$$(2,\ 19)\qquad f(s)\geqslant 0$$

soient vérifiées par toute solution des équations (1. 13) et (2. 18) *qui satisfait aux inégalités*

$$(2.\ 20)\qquad |f(s)|\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$(2.\ 21)\qquad \frac{\psi_0}{\varphi_0}\leqslant M$$

$$(2.\ 22)\qquad \mu(s)\geqslant\mu_m>[1+\varepsilon(M)]\frac{\pi^2}{2}$$

où M *est un nombre positif quelconque et* $\varepsilon(M)$ *étant une fonction de* M *qui est égale à zéro pour* M *nul, et qui prend des valeurs petites si* M *est inférieur à* 1.

Démonstration. — Soient des fonctions $f(s)$, $g(s)$, $l(s)$ qui vérifient les équations (1. 13), (2. 18) et les conditions (2. 20) à (2. 22). $\theta[L]$ étant négative on a d'après (2. 18)

$$(2.\ 23)\qquad \frac{dg}{ds}\geqslant\frac{C}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\,.\,N_5(u.\ s.\ q)\,du\geqslant 0$$

ce qui en vertu d'un résultat du début de ce chapitre (cf. : (2. 8) et (2. 9)) entraîne

$$(2.\ 24)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [g(u)-g(s)]\mathrm{N}_1(u.\ s.\ q)\,du \geqslant -\frac{\mathrm{C}}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\mathrm{N}_2(u.\ s.\ q)\,du$$

et pour $f(s)$ qui vérifie (1. 13)

$$(2.\ 25)\quad f(s) \geqslant -(\mathrm{C}-1)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\mathrm{N}_2(u.\ s.\ q)\,du.$$

Le noyau N_2 étant positif et $\theta[l]$ négative, $f(s)$ sera positive si C est supérieure à 1, ce que l'on supposera.

En tenant compte de l'inégalité (2. 10) établie précédemment et de ce que $\omega_3 = \dfrac{2i\pi\psi_0}{\varphi_0}$,(2. 25) permet d'écrire

$$(2.\ 26)\quad f(s) \geqslant (\mathrm{C}-1)\nu(\tau)\frac{\psi_0}{\varphi_0}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\mathrm{N}_5(u.\ s.\ q)\,du$$

et comme $f(s)$ satisfait par hypothèse à (2. 20)

$$(2.\ 27)\quad \sin f(s) \geqslant \frac{2}{\pi}(\mathrm{C}-1)\nu(\tau)\frac{\psi_0}{\varphi_0}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)].\mathrm{N}_5(u.\ s.\ q)\,du.$$

Si la quantité qui figure en valeur absolue dans (2. 18) est positive, l'équation (2. 18) se réduit à l'équation (1. 11). Cette quantité sera positive si

$$(2.\ 28)\quad \frac{\varphi_0}{\pi\psi_0}\mu_m \sin f(s) \geqslant \frac{\mathrm{C}}{\pi}\int_0^\pi \theta[l(u)]\mathrm{N}_5(u,\ s,\ q)\,du$$

et comme on a (2. 27) l'inégalité (2. 28) est une conséquence de l'inégalité

$$(2.\ 29)\quad \frac{\varphi_0}{\pi\psi_0}\mu_m\frac{2}{\pi}(\mathrm{C}-1)\nu(\tau)\frac{\psi_0}{\varphi_0} \geqslant \mathrm{C}$$

qui peut s'écrire

$$(2.\ 30)\quad \mathrm{C}\left[\mu_m - \frac{1}{\nu(\tau)}\cdot\frac{\pi^2}{2}\right] \geqslant \mu_m.$$

Si μ_m satisfait à la condition

$$(2.\ 31)\quad \mu_m > \frac{1}{\nu(\tau)}\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

on pourra prendre la constante C, positive, non nulle, de manière que (2. 30) soit vérifiée, la condition (2. 19) étant par ailleurs satisfaite.

Compte tenu du comportement de la fonction $\nu(\tau)$ indiqué au paragraphe 6 et de ce que $\tau = \frac{\omega_3}{i\pi} = 2\frac{\psi_0}{\varphi_0}$ le résultat annoncé se trouve établi.

En particulier, si le nombre M de la condition (2. 21) vérifie

$$M \leqslant 1 \tag{2. 32}$$

on aura pour la quantité $\varepsilon(M)$ de la condition (2. 22)

$$1 + \mathcal{E}(M) \leqslant a \tag{2. 33}$$

où le nombre a est à peu près égal à 1,2.

Soit alors Σ^* *le système des cinq équations* (1. 12), (1. 13), (1. 14), (1. 15), (2. 18). *Les résultats qui précèdent montrent qu'il est possible de prendre la* C^{te} *de la formule* (2. 18) *de manière que toute solution de* Σ^* *qui vérifie les inégalités* (2. 20) *à* (2. 22) *constitue une solution du problème* (F).

CHAPITRE III

LIMITATION DES INCONNUES

Nous établirons dans ce chapitre certaines limitations, *a priori*, pour les écoulements (F).

8. Majoration de l'angle $f(\varphi)$. — On a le résultat suivant : *soit un écoulement* (F) *pour lequel*

$$\mu_m \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu_M. \tag{3. 1}$$

On a alors

$$|f(\varphi)| < \frac{\pi}{2} \tag{3. 2}$$

pourvu que μ_m *et* μ_M *vérifient la condition*

$$\log \frac{\mu_M}{\mu_m} \left| \log \operatorname{th} \frac{1}{4\mu_M} \right| < \frac{3}{2}\pi^2 - \frac{6}{\pi}. \tag{3. 3}$$

Démonstration. — Pour un écoulement (F), $f(\varphi)$ a un signe opposé au dernier terme de (1. 6) et par suite

$$|f(\varphi)| \leqslant \left| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u) - g(\varphi)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0}(u - \varphi)} du \right|. \tag{3. 4}$$

En décomposant l'intervalle d'intégration en

$$\left[\varphi - \eta \frac{\psi_0}{\pi}, \varphi + \eta \frac{\psi_0}{\pi} \right]$$

et en son complémentaire, η désignant un nombre positif, non nul, on obtient pour l'intégrale de la formule (3. 4) la majoration suivante (9)

$$(3.\ 5)\qquad \left|\frac{1}{2\psi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)-g(\varphi)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\psi_0}(u-\varphi)}\,du\right| \leqslant \frac{2\psi\eta_0}{\pi^2}\operatorname{Max}\left|\frac{dg}{d\varphi}\right| + \frac{\tilde{\omega}(g)}{\pi}\left|\log \operatorname{th}\frac{\eta}{4}\right|$$

où $\tilde{\omega}(g)$ désigne l'oscillation de $g(\varphi)$.

D'après les relations (1. 1), (1. 5) et les inégalités (3. 1) on a

$$(3.\ 6)\qquad \operatorname{Max}\left|\frac{dg}{d\varphi}\right| \leqslant \frac{\mu_M}{\psi_0},\qquad \tilde{\omega}(g) \leqslant \frac{1}{3}\log\frac{\mu_M}{\mu_m}.$$

En combinant les inégalités (3. 4), (3. 5), (3. 6), on obtient la relation

$$(3.\ 7)\qquad |f(\varphi)| \leqslant \frac{2\eta\mu_M}{\pi^2} + \frac{1}{3\pi}\log\frac{\mu_M}{\mu_m}\cdot\left|\log \operatorname{th}\frac{\eta}{4}\right|$$

qui, en prenant $\eta = \dfrac{1}{\mu_M}$ s'écrit

$$(3.\ 8)\qquad |f(\varphi)| \leqslant \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{3\pi}\log\frac{\mu_M}{\mu_m}\cdot\left|\log \operatorname{th}\frac{1}{4\mu_M}\right|$$

et la condition (3. 2) sera vérifiée si μ_m et μ_M satisfont à la relation (3. 3).

Donnons quelques indications sur les valeurs des paramètres μ_m et μ_M qui vérifient (3. 3) :

lorsque $\mu_m = \dfrac{\pi^2}{2}$, μ_M doit être inférieur à un nombre voisin de 40 et quand μ_m croît, il faut que

$$\mu_M - \mu_m < A$$

A étant une fonction croissante de μ_m qui tend vers l'infini en même temps que μ_m.

Enfin notons pour la suite que si μ_m et μ_M satisfont à (3. 3) et sont supérieurs à $\dfrac{\pi^2}{2}$ le rapport $\dfrac{\mu_M}{\mu_m}$ est inférieur à un nombre voisin de 8.

(9) On trouvera le détail de ce calcul dans R. G. Chap. I, pp. 205-206, où il a été utilisé pour majorer une intégrale du même type.

9. Limitations de la vitesse et du rapport $\frac{\psi_0}{\varphi_0}$. — Soit un écoulement (F) qui vérifie les conditions (3. 1) où μ_m et μ_M sont pour l'instant positifs, quelconques. Désignons par C^{te} des nombres positifs non nuls qui peuvent se calculer en fonction de μ_m, μ_M, et d'une borne supérieure de la courbure de (S).

On a évidemment pour la vitesse V sur (L)

$$C^{te} V_0 \leqslant V \leqslant C^{te} V_0 \tag{3. 9}$$

et d'après un résultat de R. G. chapitre I, p. 205, il s'ensuit que la vitesse sur (S) satisfait à des inégalités analogues.

On en déduit pour le paramètre φ_0 les limitations suivantes

$$C^{te} V_0 L_0 \leqslant \varphi_0 \leqslant C^{te} V_0 L_0$$

d'où

$$C^{te} \frac{H_0}{L_0} \leqslant \frac{\psi_0}{\varphi_0} \leqslant C^{te} \frac{H_0}{L_0} \tag{3. 10}$$

avec

$$H_0 = \frac{\psi_0}{V_0}. \tag{3. 11}$$

En vue des raisonnements qui suivent, on peut construire une borne supérieure plus précise du rapport $\frac{\psi_0}{\varphi_0}$, dans l'hypothèse où les paramètres μ_m et μ_M vérifient (3. 3) et sont supérieurs à $\frac{\pi^2}{2}$.

On a en effet ([10])

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} \leqslant \frac{H_0}{L'_0} \cdot \left(\frac{\mu_M}{\mu_m}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3. 12}$$

L'_0 étant la mesure de la demi-période du mouvement suivant Ox et l'on a indiqué à la fin du paragraphe 8 que dans les hypothèses précédentes le rapport $\frac{\mu_M}{\mu_m}$ était inférieur à un nombre voisin de 8. On a alors sensiblement

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} \leqslant 2 \frac{H_0}{L'_0}. \tag{3. 13}$$

([10]) On a $\varphi_0 \geqslant L'_0 . \operatorname{Min} V(\varphi, \psi_0)$ et $V^3(\varphi, \psi_0) \geqslant V_0^3 \frac{\mu_m}{\mu_M}$ d'où (3. 12).

10. Majoration de l'oscillation de $\mu(\varphi)$. — On se propose maintenant, pour un écoulement (F), de majorer *a priori* l'oscillation de $\mu(\varphi)$ par un nombre fixé, non nul, qui peut être arbitrairement petit.

Désignant par Δ_S et Δ_L les dénivellations de la paroi (S) et de la ligne libre (L), et posant

$$\delta_S = \frac{\Delta_S}{H_0}, \qquad \delta_L = \frac{\Delta_L}{H_0} \tag{3. 14}$$

on établira le résultat ci-après :

Soient des écoulements (F) *pour lesquels les paramètres* V_0, ψ_0 *et* L_0 *ont même valeur et qui, dans leur ensemble, satisfont aux inégalités* (3. 1) *et ont une courbure* $\left|\frac{d\theta}{dl}\right|$ *bornée.*

Si μ_m *est supérieur à* $\frac{\pi}{2}$, *et si le rapport* $\frac{H_0}{L_0}$ *est assez petit, il existe pour l'ensemble de ces mouvements une majorante de* δ_L *de la forme*

$$\delta_L \leqslant \Phi(\delta_S) \tag{3. 15}$$

où la fonction $\Phi(\delta_S)$ *tend vers zéro avec son argument.*

La relation de Bernoulli fournit une inégalité de la forme

$$|\mu(\varphi) - \mu_0| \leqslant C^{te}\delta_L$$

et (3. 15) donnera pour l'oscillation de $\mu(\varphi)$ la majoration

$$|\mu(\varphi) - \mu_0| \leqslant C^{te}\Phi(\delta_S). \tag{3. 16}$$

Démonstration de (3. 15). — On a la formule

$$\int_C \left(U\frac{dW}{dn} - W\frac{dU}{dn}\right) d\sigma \tag{3. 17}$$

dans laquelle $U(\varphi, \psi)$ est la partie réelle de la fonction $\omega(\zeta)$, $W(\varphi, \psi)$ la fonction harmonique

$$W(\varphi, \psi) = \sin\frac{\pi\varphi}{\varphi_0} \cdot \operatorname{sh}\frac{\pi\psi}{\varphi_0} \tag{3. 18}$$

et C le contour du rectangle $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$.

Les fonctions $U(\varphi, \psi)$ et $W(\varphi, \psi)$ satisfont aux conditions aux limites suivantes

$$(3.\ 19)\qquad W(\varphi, 0) = 0, \qquad U(\varphi, 0) = \theta[l(\varphi)]$$

$$(3.\ 20)\qquad W(0, \psi) = W(\varphi_0, \psi) = U(0, \psi) = U(\varphi_0, \psi) = 0$$

$$(3.\ 21)\qquad \left[\frac{\partial U}{\partial \psi}\right]_{\psi=\psi_0} = \frac{\mu(\varphi)}{\psi_0}\sin f(\varphi)$$

et compte tenu de ces conditions aux limites, (3. 17) s'écrit

$$(3.\ 22)\qquad \int_0^{\varphi_0} f(\varphi)\,.\sin\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\left[\frac{\sin f(\varphi)}{f(\varphi)}\mu(\varphi) - \frac{\pi\psi_0}{\varphi_0\,\mathrm{th}\frac{\pi\psi_0}{\varphi_0}}\right]d\varphi$$
$$= -\frac{\pi\psi_0}{\varphi_0\,\mathrm{sh}\frac{\pi\psi_0}{\varphi_0}}\int_0^{\varphi_0}\theta\,[l(\varphi)]\,.\sin\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\,d\varphi.$$

D'après les inégalités (3. 10), qui ont lieu pour l'ensemble des mouvements considérés, le rapport $\frac{\psi_0}{\varphi_0}$ pourra être aussi petit que l'on veut si le rapport $\frac{H_0}{L_0}$ est assez petit. Par suite si

$$\mu(\varphi) \geqslant \mu_m > \frac{\pi}{2}$$

et si le rapport $\frac{H_0}{L_0}$ est assez petit on aura

$$(3.\ 23)\qquad \frac{\sin f(\varphi)}{f(\varphi)}\mu(\varphi) - \frac{\pi\psi_0}{\varphi_0\,\mathrm{th}\frac{\pi\psi_0}{\varphi_0}} \geqslant C^{te} > 0$$

en désignant, ainsi que dans ce qui suit, par C^{te} des nombres positifs non nuls, qui dépendent des grandeurs ψ_0, V_0, L_0 $\mathrm{Max}\left|\frac{d\theta}{dl}\right|$, μ_m, μ_M.

Sur le segment $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ les conditions suivantes ont lieu

$$f(\varphi) \geqslant 0, \qquad \theta\,[l(\varphi)] \leqslant 0, \qquad \sin\frac{\pi\varphi}{\varphi_0} \geqslant 0$$

et l'on déduit alors de (3. 22) et (3. 23) l'inégalité

$$(3.\ 24)\qquad \int_0^{\varphi_0} f(\varphi)\sin\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\,d\varphi \leqslant C^{te}\left|\int_0^{\varphi_0}\theta\,[l(\varphi)]\,.\sin\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\,d\varphi\right|.$$

Les dénivellations Δ_L et Δ_S qui sont données par

$$\Delta_L = \int_0^{\varphi_0} \sin f(\varphi) \frac{d\varphi}{V(\varphi, \psi_0)}, \tag{3. 25}$$

$$\Delta_S = -\int_0^{\varphi_0} \sin \theta \, [l(\varphi)] \frac{d\varphi}{V(\varphi, 0)} \tag{3. 26}$$

vérifient des inégalités de la forme

$$\Delta \leqslant \frac{C^{te}}{V_0} \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \, d\varphi, \tag{3. 27}$$

$$\Delta_S \geqslant -\frac{C^{te}}{V_0} \int_0^{\varphi_0} \theta \, [l(\varphi)] \, d\varphi. \tag{3. 28}$$

Nous allons majorer l'intégrale de (3. 27). Pour cela décomposons l'intervalle d'intégration en $[\varepsilon\varphi_0, \varphi_0 - \varepsilon\varphi_0]$ et en son complémentaire, ε étant un nombre positif, non nul. Sur $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $f(\varphi)$ et $\sin \frac{\pi\varphi}{\varphi_0}$ étant positifs, on peut écrire

$$\int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \, d\varphi \leqslant 2\varepsilon\varphi_0 \operatorname{Max} |f| + \frac{1}{\sin \varepsilon\pi} \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \sin \frac{\pi\varphi}{\varphi_0} \, d\varphi. \tag{3. 29}$$

En combinant les inégalités (3. 24), (3. 27), (3. 28), (3. 29) on obtient une relation de la forme

$$\Delta_L \leqslant C^{te} \frac{\varepsilon\varphi_0}{V_0} + C^{te} \frac{\Delta_S}{\varepsilon}$$

ou

$$\delta_L \leqslant C^{te} \, \varepsilon \frac{\varphi_0}{\psi_0} + C^{te} \frac{\delta_S}{\varepsilon}$$

ce qui compte tenu de (3. 10) s'écrit

$$\delta_L \leqslant C^{te} \varepsilon + C^{te} \frac{\delta_S}{\varepsilon}. \tag{3. 30}$$

Si l'on prend ε éga à $\sqrt{\delta_S}$ on aura

$$\delta_L \leqslant C^{te} \sqrt{\delta_S} \tag{3. 31}$$

ce qui donne une majorante de δ_L qui est bien de la forme (3. 15)

Remarque. — Lorsque μ_m est supérieur à $\frac{\pi^2}{2}$ l'inégalité (3. 23) a lieu pourvu que

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} \leqslant b \tag{3. 32}$$

où b est très voisin de 1.

CHAPITRE IV

THÉORÈME D'EXISTENCE

11. Le système des équations (1. 11) à (1. 15) des mouvements à périodicité géométrique a été ramené dans R. G. (ch. II, p. 218-223) à une équation de la forme

$$x = F(x)$$

où x est un point d'un espace de Banach $\mathcal{E}$, et $F(x)$ une transformation complètement continue sur $\mathcal{E}$.

Le système Σ^* du problème (F) ne diffère du système précédent que par le remplacement de l'équation (1. 11) par l'équation (2. 18), et il est facile de s'assurer que Σ^* peut aussi se mettre sous la forme d'une équation

$$x = F^*(x) \tag{4. 1}$$

où $F^*(x)$ est complètement continue sur $\mathcal{E}$.

L'équation (4. 1) étant supposée construite avec les valeurs données des paramètres V_0 et ψ_0, et K étant un nombre qui varie de 0 à 1, nous introduirons l'équation

$$x = F^*(x, K) \tag{4. 2}$$

qui se déduit de (4. 1) en remplaçant $\theta[l]$ par $K\theta[l]$.

Supposons maintenant que V_0 et ψ_0 satisfassent à la condition

$$\mu_0 = \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} > a \cdot \frac{\pi^2}{2} \tag{4. 3}$$

où le nombre a a une valeur voisine de 1, 2, et soit ϖ le sous-ensemble formé de $\mathcal{E}$ défini par les inégalités

$$\mu_m \leqslant \mu(s) \leqslant \mu_M \tag{4. 4}$$

$$|f(s)| \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{4. 5}$$

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} \leqslant b \tag{4. 6}$$

où le nombre b est très peu inférieur à 1, et les nombres μ_m et μ_M étant supposés satisfaire à la relation (3. 3) et aux inégalités [11]

$$(4.\ 7) \qquad a\frac{\pi^2}{2} \leqslant \mu_m < \mu_0 < \mu_M.$$

Les résultats des chapitres II et III conduisent successivement aux conclusions ci-après :

1° Si la constante C de la formule (2. 18) est assez grande toute solution de l'équation (4. 2) qui appartient à ϖ est une solution du problème (F) pour une paroi d'équation $\theta = K\theta[l]$, $0 \leqslant l \leqslant L_0$ (cf. paragraphe 7). On a donc pour ces solutions éventuelles, eu égard à (4. 7)

$$(4.\ 8) \qquad \mu_m < \mu_0 \leqslant \mu(s).$$

2° Ces solutions étant du type (F) et satisfaisant aux conditions (4. 3) à (4. 7), elles vérifient les inégalités au sens strict (cf. paragraphes 8 et 9) :

$$(4.\ 9) \qquad |f(s)| < \frac{\pi}{2}$$

$$(4.\ 10) \qquad C^{te} < \frac{\psi_0}{\varphi_0} < b$$

pourvu que le rapport $\frac{H_0}{L'_0}$ soit inférieur à un nombre sensiblement égal à $\frac{1}{2}$.

De plus pour ces solutions les vitesses sont bornées dans leur ensemble par des nombres finis, non nuls.

3° Si la dénivellation relative $\delta_s = \frac{\Delta_s}{H_0}$ de la paroi est suffisamment petite, la dénivellation relative $\delta_L = \frac{\Delta_L}{H_0}$ de la ligne libre est petite de telle manière que l'on ait pour ces solutions

$$(4.\ 11) \qquad \mu(s) - \mu_0 < \mu_M - \mu_0.$$

Cela est le résultat établi au paragraphe 10.

Les inégalités (4. 8), (4. 9), (4. 10), (4. 11) expriment que lorsque $0 \leqslant K \leqslant 1$ les solutions de (4. 2) qui appartiennent

(11) On pourra choisir μ_m inférieur à μ_0, mais arbitrairement voisin de μ_0, puis calculer μ_M en fonction de μ_m de manière à ce que (3, 3) soit vérifiée. Compte tenu de (4, 3) on aura bien (4, 7).

à ϖ sont extérieures à la frontière de ϖ. De plus ces solutions sont bornées dans leur ensemble.

L'indice total des solutions de (4. 2) qui appartiennent à ϖ est donc constant lorsque K prend ses valeurs sur le segment [0, 1].

Pour la valeur zéro du nombre K, qui correspond au cas d'un fond rectiligne horizontal, l'équation (4. 2) a la solution unique $x = 0$. Cela est une conséquence de l'inégalité (3. 24) avec $\theta[l] = 0$, $f(\varphi) \geqslant 0$ $(0 < \varphi < \varphi_0)$.

Enfin si $K = 0$, la transformation $F^*(x, K)$ est biunivoque au voisinage de $x = 0$. En effet dans le cas contraire on aurait

$$0 = -\frac{1}{2\psi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)-g(\varphi)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2\psi_0}(u-\varphi)}\,du$$

avec $g(\varphi)$ non identiquement nulle, ce qui exprimerait qu'il existe $\omega(\zeta)$, non constante, holomorphe dans la bande $\mathfrak{D}$ et dont la partie réelle est nulle sur les côtés de $\mathfrak{D}$.

Il résulte de ces propriétés que l'indice des solutions de l'équation (4. 2) qui appartiennent à ϖ, lequel est constant lorsque $0 \leqslant K \leqslant 1$, est égal à ± 1 pour $K = 0$.

L'équation (4. 1) qui correspond à $K = 1$ admet donc au moins une solution sur ϖ.

Conclusion. — *Il existe au moins une solution du problème* (F) *pourvu que*

$$\frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} \geqslant a\cdot\frac{\pi^2}{2} \qquad (a \neq 1{,}2) \tag{4. 12}$$

$$\frac{H_0}{L_0'} \leqslant c \qquad (C \neq 0{,}5) \tag{4. 13}$$

et si le rapport $\frac{\Delta_s}{H_0}$ *est suffisamment petit.*