André Lambert

Quelques théorèmes de décomposition des ultradistributions

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 3 (1979), p. 57-100

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_57_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979) 57-100

QUELQUES THÉORÈMES DE DÉCOMPOSITION DES ULTRADISTRIBUTIONS

par André LAMBERT

I. INTRODUCTION

Dans ce travail, on s'intéresse aux ultradistributions construites sur des classes de fonctions indéfiniment différentiables non quasi-analytiques. On se propose de répondre aux deux questions suivantes :

a) Soit T une ultradistribution de classe $\{M_n\}$ de support S : $S = S^+ \cup S^-$ $\wedge = S^+ \cap S^- \neq \phi$. Sous quelles conditions sur S, et éventuellement sur $\{M_n\}$, peut-on construire deux ultradistributions T^+ et T^- de *même classe que* T telles que

$$T = T^+ + T^- \ ; \ \ \operatorname{supp} T^\pm \subset S^\pm .$$

b) Soit T une ultradistribution de classe $\{M_n\}$. On sait [1], [2] que T peut être décomposée en une série de dérivées de mesures : $T = \sum_n D^n \mu_n$ (I.1), le support des mesures étant inclus dans un voisinage arbitraire du support S de T.

Sous quelles conditions sur S, et éventuellement sur la suite $\{M_n\}$, le support des μ_n peut-il être pris *inclus dans* le support de T, la série (I.1) convergeant toujours dans le même espace d'ultradistributions ?

Au chapitre V, on montre que la décomposition $T = T^+ + T^-$ est possible si S^+ et S^- ont, à leur intersection, des points de contact d'un type imposé par la suite $\{M_n\}$, situation décrite par la propriété de "séparation M-régulière" de S^+ et S^- définie au chapitre III où nous suivons une méthode connue dans le cadre de la théorie des distributions [3], [4].

Au chapitre IV, où les techniques de constructions de prolongements de fonctions dues à Whitney ([6], [7]) sont largement utilisées, on montre que les supports des μ_n peuvent être pris *inclus dans* le support de T, si celui-ci possède une propriété *locale* de régularité, trivialement vérifiée pour les ensembles convexes et qui généralise la régularité au *sens de Whitney* des ensembles fermés de $\mathbf{R}^\nu$ [5]. Cette propriété est étudiée au chapitre III.

Dans les deux questions étudiées, il se pose un problème de stabilité : T^+ et T^-, $\sum_n D^n \mu_n$ appartiennent-ils au même espace que T ? On peut répondre par l'affirmative pour un ensemble assez large de suites non quasi-analytiques étudiées au chapitre II où l'on construit une suite de fonctions à supports compacts dont les propriétés (supports, dérivées) sont essentielles dans la construction de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ par le procédé de sommation de Mittag Leffler (utilisé au chapitre IV).

Dans un article en préparation, on donne quelques applications :

– application du découpage des supports à la construction de séries des perturbations renormalisées issues de théories quantiques des champs locales et à lagrangiens non polynomiaux (Epstein et Glaser [9], [10]).

– grâce à la décomposition en mesures, on peut, par l'intermédiaire de la transformation de Fourier-Laplace, montrer l'hypoellipticité de l'opérateur d'onde dans les espaces d'ultradistributions, et donner une caractérisation complète des ultradistributions à supports coniques en termes de fonctions analytiques dans des tubes.

Donnons brièvement la définition des espaces fondamentaux pour lesquels on pourra consulter [1], [2], [11], [12], [13], [14].

Soit $\{M_n\}$ $n \in \mathbf{N}^+$ une suite strictement positive. Soit u un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$ et A une constante strictement positive ; on désigne par $\mathcal{E}(u, A, \{M_n\})$ l'espace vectoriel des fonctions ϕ définies sur u, à valeurs complexes, indéfiniment différentiables dans u et vérifiant :

$$\|\phi\|_{u,A} = \sup_{n\in\mathbf{N}^\nu} \left(\sup_{x\in u} \left| \frac{D^n \phi(x)}{A^{|n|} M_{|n|}} \right| \right) < \infty \qquad \text{(I.1)}$$

où $|n| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$; $n = (n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$;

$$D^n = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x_1^{n_1}, \ldots, \partial x_\nu^{n_\nu}}.$$

La topologie de $\mathcal{E}(u, A, \{M_n\})$ est définie par la norme $\|\phi\|_{u,A}$, qui en fait un espace de Banach.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$. On définit $\mathcal{E}(\Omega, \{M_n\})$ par :

$$\mathcal{E}(\Omega, \{M_n\}) = \bigcap_{u,\bar{u} \subset\subset \Omega} \Big(\bigcup_{A>0} \mathcal{E}(u, A, \{M_n\}) \Big).$$

Du point de vue topologique, on prend pour $\mathcal{E}(\Omega, \{M_n\})$ la limite inductive suivant A des $\mathcal{E}(u, A, \{M_n\})$ puis la limite projective suivant u des $\mathcal{E}(u, \{M_n\}) = \bigcup_{A>0} \mathcal{E}(u, A, \{M_n\})$.

Les ϕ_j convergent vers zéro (resp^t : forment un ensemble borné) dans $\mathcal{E}(\Omega, \{M_n\})$ si et seulement si : $\forall u$; $\bar{u} \subset\subset \Omega$ $\exists A > 0$ tel que $\|\phi_j\|_{u,A} \longrightarrow 0$ (resp^t : forment un ensemble borné dans chacun des $\mathcal{E}(u, \{M_n\})$.

On désigne par $\mathcal{D}(u, A, \{M_n\})$ le sous-espace des fonctions de $\mathcal{E}(u, A, \{M_n\})$ ayant un support compact contenu dans $\bar{u}$, muni de la topologie définie par la norme (I.1) qui en fait un espace de Banach.

On définit $\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\})$ par :

$$\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\}) = \bigcup_{u,\bar{u} \subset\subset \Omega} \Big(\bigcap_{A>0} \mathcal{D}(u, A, \{M_n\}) \Big).$$

On munit $\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\})$ de la topologie limite inductive des $\mathcal{D}(u, A, \{M_n\})$. Du fait que $\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\})$ est une limite inductive d'espaces de Banach, il suit [1], [2] :

THEOREME (I.2). – *Pour qu'un ensemble soit borné dans* $\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\})$, *il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un* $\mathcal{D}(u, A, \{M_n\})$ *et y soit borné.*

THEOREME (I.3). – *Pour qu'une forme linéaire sur* $\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\})$ *soit continue, il faut et il suffit que l'image de toute partie bornée soit bornée.*

On appelle ultradistributions de classe $\{M_n\}$ sur Ω les éléments de $\mathcal{D}'(\Omega, \{M_n\})$ dual de $\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\})$. On munit $\mathcal{D}'(\Omega, \{M_n\})$ de la topologie forte du dual (topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}(\Omega, \{M_n\})$.

$\mathcal{D}'(\Omega, \{M_n\})$ est un espace de Fréchet dont la topologie est définie par la famille des seminormes :

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega, \{M_n\}) ; \quad |||T|||_{u,A} = \sup_{\|\phi\|_{u,A} \leqslant 1} |T(\phi)| . \tag{I.4}$$

Rappels et notations concernant la formule de Taylor.

Soit f une application $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ à valeurs complexes

$$n! = \prod_{\mu=1}^{\nu} n_\mu ! ;$$

$$x \in \mathbf{R}^\nu : x^n = \prod_{\mu=1}^{\nu} x_\mu^{n_\mu} ; \quad d(x, \{0\}) = \|x\| = \sqrt{\prod_{\mu=1}^{\nu} x_\mu^2} .$$

Le polynome et le reste de Taylor seront notés : $x, x_0 \in \mathbf{R}^\nu$, $k \in \mathbf{N}_+$

$$f(x) = (T_{x_0}^k f)(x) + (R_{x_0}^k f)(x) = \sum_{n, |n| \leqslant k} \frac{(x - x_0)^n}{n!} D^n f(x_0) .$$

On a les formules suivantes :

$$T_x^k(T_y^k f) = T_y^k f \tag{I.5}$$

$$T_x^k(R_y^k f) = T_x^k f - T_y^k f = R_y^k f - R_x^k f \tag{I.6}$$

$$D^\alpha(T_x^k f) = T_x^{k-|\alpha|}(D^\alpha f) \tag{I.7}$$

et donc :
$$D^\alpha(R_y^{|\alpha|} f)(x) = D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y) \tag{I.8}$$

$$R_x^k(T_y^k f) = 0 . \tag{I.9}$$

Soit $\{M_n\}_{n \in \mathbf{N}_+}$ une suite (> 0), on posera :

$$M_n^{(k)} = \frac{M_n}{\left(\frac{M_k}{k!}\right)^{n/k}} . \tag{I.10}$$

II. CONSTRUCTION D'UNE SUITE PARTICULIERE DE FONCTIONS A SUPPORTS COMPACTS

THEOREME (II.1). – *Soit $\{M_n\}$ une suite appartenant à $\mathfrak{F}$; il existe une suite $\{e_k\}_{k \in \mathbf{N}_+}$ de fonctions indéfiniment différentiables,* *à valeurs réelles positives, à supports indépendants de* k, *inclus dans la Boule unité* $\mathcal{B}(0,1)$ *de* $\mathbf{R}^\nu$, *d'intégrale unité, invariantes par rotation autour de* $\{0\}$, *analytiques dans le domaine* $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(0,1)\backslash\{0\}$ *et dont les dérivées satisfont à :* $\exists$ *des constantes* A, B, C *positives telles que, pour tous* $n \in \mathbf{N}_+^\nu$, $k \in \mathbf{N}_+$, $x \in \mathbf{R}^\nu$

$$|D^n e_k(x)| \leqslant C A^{|n|} B^k M_{|n|}^{(k)}$$

où B *ne dépend que de* $\{M_n\}$.

L'ensemble des suites $\mathfrak{F}$ est défini et étudié au paragraphe (II.1). La démonstration du théorème est faite en (II.2 et 3), des applications en sont données en (II.4).

1. Propriétés de certaines suites non quasi-analytiques.

Definition (II.1.1). – *On désigne par* $\mathfrak{F}$ *l'ensemble des suites* $\{M_n\}$ $n \in \mathbf{N}_+$ *strictement positives, possédant les propriétés (II.1, 2, 3, 4, 5) avec* $M_0 = M_1 = 1$.

(II.1.2). – $\{M_n\}$ *est logarithmiquement convexe* : $\forall n \in \mathbf{N}_+$: $M_n^2 \leqslant M_{n-1} M_{n+1}$. Ceci implique en particulier $M_n M_k \leqslant M_{n+k}$ $\forall n$, $k \in \mathbf{N}_+$.

(II.1.3). – $\{M_n\}$ *est "stable par convolution"* : $\exists B$ tel que $M_{n+k} \leqslant B^{n+k} M_n M_k$ $\forall n$, $k \in \mathbf{N}_+$. Cette propriété assure que le produit de convolution de deux ultradistributions de classe $\{M_n\}$, dont l'une au moins est à support compact, est une ultradistribution de classe M_n [1], [2], [12].

(II.1.4). – $\{M_n\}$ *est fortement non quasi-analytique* : $\exists A > 0$ tel que $\forall p \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} \frac{M_n}{M_{n+1}} \leqslant Ap \cdot \frac{M_p}{M_{p+1}}$.

La non quasi-analyticité ordinaire : $\displaystyle\sum_n \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty$ implique la non trivialité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu, \{M_n\})$ [15]. Roumieu [2] a montré que l'on ne peut pas, en général, décomposer une ultradistribution à support ponctuel en une série de dérivées de mesures de Dirac. La non quasi-analyticité forte est adoptée pour permettre cette décomposition.

(II.1.5). – *La suite* M_n *est "très régulière"* : ceci signifie que $P_n = \dfrac{M_n}{(n!)^\alpha}$ est régulière [2] pour tout $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{A}$; c'est-à-dire que $\dfrac{P_n}{nP_{n-1}}$ est croissante. La régularité de $\{P_n\}$ assure ([2]) que si ϕ est de classe $\{P_n\}$, $\dfrac{1}{\phi}$ l'est aussi partout où elle est définie.

On remarque que (II.1.5) implique (II.1.2).

PROPOSITION (II.1.6). – Si $\{M_n\}$ *vérifie (II.1.4), alors,* $\forall \alpha$: $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{A}\cdot$ *La suite* $P_n = \dfrac{M_p}{(n!)^\alpha}$ *est non quasi-analytique.*

Démonstration. – Soit $\chi_p(x)$ la fonction caractéristique du segment $[p, p+1]$ et $f(x) = \sum\limits_{p=0} \chi_p(x) \dfrac{M_p}{M_{p+1}}$; il suffit de montrer : $\displaystyle\int_1^\infty f(t)\, t^\alpha dt < \infty$ pour $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{A}\cdot$ (II.1.4) implique : $G(x) = \displaystyle\int_x^\infty f(t)\, dt \leqslant A\, x\, f(x)$.

$G(x)$ est positive, décroissante, $\lim\limits_{x \to \infty} G(x) = 0$, et $\dfrac{d}{dx} G(x) = -f(x)$; $G(1) = 1$; $G(x) \leqslant -\dfrac{1}{A}\dfrac{d}{dx} G(x)$.

Donc, en intégrant $G(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{1/A}}$, alors :

$$\int_1^\infty f(t)\, t^\alpha dt = -\int_1^\infty t^\alpha dG(t) = -[t^\alpha G(t)]^\infty]_1^\infty - \alpha \int_1^\infty G(t)\, t^{\alpha-1}\, dt$$
$$\leqslant 1 + \lim_{t \to \infty} (t^{\alpha - 1/A}) + \alpha \int_1^\infty \frac{dt}{t^{1+1/A-\alpha}} < \infty, \text{ si } \alpha < \frac{1}{A}\cdot$$

PROPOSITION (II.1.7). – *Soit* $\{M_n\}$ *une suite vérifiant (II.1.4) et (II.1.5). Soient* A *la constante qui intervient dans (II.1.4) et* ϵ : $0 < 2\epsilon < \dfrac{1}{A}\cdot$ *La suite* $Q_n = \dfrac{M_n}{(n!)^\epsilon}$ *est fortement non quasi-analytique.*

Démonstration. – D'après (II.1.6) Q_n et $P_n = \dfrac{M_n}{n!^{2\epsilon}}$ sont non quasi-analytiques, et puisque P_n est régulière :

$$\sum_{n\geqslant p} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqslant \frac{(p+1)P_p}{P_{p+1}} \sum_{n\geqslant p} \frac{1}{(n+1)^{1+\epsilon}}.$$

D'après : $\displaystyle\int_x^\infty \frac{dt}{t^{1+\epsilon}} = \frac{x}{\epsilon}\,\frac{1}{x^{1+\epsilon}}$, la suite $(n!)^{1+\epsilon}$ est fortement non quasi-analytique pour $\epsilon > 0$.

C'est-à-dire : $\exists B$ tel que : $\displaystyle\sum_{n>p} \frac{1}{(n+1)^{1+\epsilon}} \leqslant Bp\,\frac{1}{(p+1)^{1+\epsilon}}$

et, par conséquent, $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqslant Bp \cdot \frac{Q_p}{Q_{p+1}}$.

Proposition (II.1.8). – *Si* $\{N_n\}$ *est logarithmiquement convexe* $(N_0 = 1)$, *alors :* $N_n^{1/n} \leqslant \dfrac{N_n}{N_{n-1}}$. *En effet,* $\dfrac{N_n}{N_{n-1}}$ *est alors croissante, donc :* $\left(\dfrac{N_n}{N_{n-1}}\right)^n \geqslant \dfrac{N_n}{N_{n-1}} \cdots \dfrac{N_1}{N_0} = N_n$.

Proposition (II.1.9). – *Si* $\{N_n\}$ *est régulière* $(N_0 = 1)$, *alors* $\left(\dfrac{N_n}{n!}\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{N_n}{nN_{n-1}}$.

Conséquence de la croissance de $\dfrac{N_n}{nN_{n-1}}$.

Proposition (II.1.10). – *Si* $\{P_n\}$ *est stable par convolution et régulière, alors :* $\exists B > 0$ *tel que :*

$$\frac{P_n^{(k)}}{n!} \leqslant B^{p-n+k} \frac{P_p^{(k)}}{p!}\ ; \quad \forall k \in \mathbf{N}^+ \text{ et } n \leqslant p.$$

Démonstration. – Posons $p = n + \beta$; $\beta \in \mathbf{N}_+$

$$\mathfrak{a} = \frac{P_n^{(k)}}{n!} \frac{(n+\beta)!}{P_{n+\beta}^{(k)}} = \frac{P_n}{P_{n+\beta}} \cdot \frac{n+\beta!}{n!} \left(\frac{P_k}{k!}\right)^{\beta/k}$$

d'après la proposition (II.1.9) : $\left(\dfrac{P_k}{k!}\right)^{\beta/k} \leqslant \dfrac{P_{k+\beta}}{P_k}\,\dfrac{k!}{k+\beta!}$, donc :

$\mathfrak{a} < \dfrac{P_n\, P_{k+\beta}}{P_{n+\beta}\, P_k}\,\dfrac{n+\beta!k!}{n!\;k+\beta!}$ d'autre part, la suite $d_n = \dfrac{P_n}{n!}$ est stable par convolution. Ceci donne :

$$\mathfrak{a} < \frac{d_n\, d_{\beta+k}}{d_{n+k}\, d_k} \leqslant B^{\beta+k} \frac{d_n\, d_\beta\, d_k}{d_{n+k}\, d_k} \leqslant B^{\beta+k}.$$

PROPOSITION (II.1.11). — *Soient* $\{M_n\}$ *une suite de* $\mathfrak{F}$, $Q_n = \dfrac{M_n}{n!^\epsilon}$; $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2A}$ (A *est la constante qui intervient dans (II.1.4)).* $r \in \mathbf{N}_+$ *et* $\left[\dfrac{n}{r}\right]$ *le plus petit entier* $\geqslant \dfrac{n}{r}$. *Alors, pour* ϵ *et* r *tels que* $\epsilon \cdot r = 1$, *on a :* $\dfrac{Q_{[n/r]}}{(Q_k^{1/k})^{[n/r]}} \leqslant B^{n+1} \dfrac{M_n^{(k)}}{n!}$.

Démonstration. — Utilisant $\left[\dfrac{n}{r}\right] \leqslant n$ et la proposition (II.1.10), on a :

$$\frac{n!\, Q_{[n/r]}}{(Q_k^{1/k})^{[n/r]}} \leqslant B^{n+k}\, M_n^{(k)} \cdot \frac{[n/r]!\; k!^{\epsilon n/k}}{n!^\epsilon\; k!^{[n/r]/k}}$$

$$\leqslant B^{n+k}\, M_n^{(k)}\; n!^{(1/r-\epsilon)}\; k!^{n/k(\epsilon - 1/r)}.$$

PROPOSITION (II.1.12). — *Soit* $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$; *la suite* $\{\sigma_k\}$ *définie par* $\sigma_k = \dfrac{1}{H\left(\dfrac{M_k}{k!}\right)^{1/k}}$ $(H > 0)$ *satisfait à :*

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_k = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{k+1} \leqslant \sigma_k \leqslant B\, \sigma_{k+1}$$

où B *est la constante qui intervient dans* (II.1.3).

Démonstration. — La suite $P_k = \dfrac{M_k}{k!^\alpha}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{1}{A}\right)$ est non quasi-analytique et régulière

$$\frac{k!}{P_k} = \left(\frac{k\, P_{k-1}}{P_k}\right) \left(\frac{(k-1)\, P_{k-2}}{P_{k-1}}\right) \ldots \leqslant \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^k = 1$$

$\sigma_k = \dfrac{1}{H} \left(\dfrac{k!}{M}\right)^{1/k} = \dfrac{1}{H} \left(\dfrac{k!}{P_k}\right)^{1/k} \dfrac{1}{k!^{\alpha/k}} \leqslant \dfrac{1}{H}\, \dfrac{1}{k!^{\alpha/k}}$; cette dernière suite tend vers zéro lorsque $k \longrightarrow \infty$. En utilisant la proposition (II.1.9), on a :

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}\right)^k = \frac{M_{k+1}}{(k+1)\, M_k} \left(\frac{k+1\,!}{M_{k+1}}\right)^{1/(k+1)} \geqslant 1\,.$$

D'autre part, en utilisant (II.1.3) :

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}\right)^k = \frac{M_{k+1}}{M_k} \left(\frac{k+1\,!}{M_{k+1}}\right)^{1/(k+1)} \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{M_{k+1}}{M_k} \leqslant B^k\,.$$

2. Etude d'une suite de produits infinis.

Dans ce paragraphe, on montre le résultat suivant :

LEMME (II.2.1). – *Soient* $\{M_n\}$ *une suite* $\mathcal{G}$ *et* $\{Q_n^{[k]}\}$ *l'ensemble des suites définies pour* $k \in \mathbf{N}_+$ *par* : $Q_n^{[k]} = \left(\frac{B^2}{Q_{2k}^{1/k}}\right)^n Q_{2n}$ *avec* : $Q_n = \frac{M_n}{n!^\epsilon}$ *et* $0 < \epsilon < \frac{1}{2A}$ *où* A *et* B *sont les constantes qui interviennent dans (II.1.3 et 4). On peut construire une suite* $\{\Gamma_k\}$ $k \in \mathbf{N}_+$ *de fonctions entières de* $Z \in \mathbf{C}$ *satisfaisant aux estimations :*

(i) $\forall Z \in D = \{|Z \in \mathbf{C}|\ |x| \geqslant |y|\}$ *on a* :

$$|\Gamma_k(Z)| \geqslant \frac{1}{B^{2k}} \exp\{Q^{[k]}(|x|^2)\}$$

(ii) *Pour les valeurs réelles* x *de* Z, *on a* :

$$|\Gamma_k(x)| \leqslant \exp(4A_0 k\, |x|)$$

(A_0 *ne dépend que de* $\{M_n\}$ *et de* ϵ).

Note. – Conformément aux notations usuelles [1], [2], [11] : $\exp\{Q^{[k]}(u)\} = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}_+} \left(\frac{u^n}{Q_n^{[k]}}\right)$. C'est une fonction croissante, continue pour $u > 0$ si, comme c'est le cas ici, elle est construite à partir d'une suite non quasi-analytique [15], et qui tend vers l'infini avec u.

Démonstration de i). – Posons : $q_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$; $\alpha_n = \sqrt{q_{2n} q_{2n+1}}$; $C_k = Q_{2k}^{1/2k}$ et :

$$Z \in \mathbf{C} : \Gamma_k(Z) = \Gamma_k^+(Z) \,.\, \Gamma_k^-(Z) = \prod_{n \geqslant k} \left(1 + \frac{i C_k Z}{\alpha_n}\right) \prod_{p \geqslant k} \left(1 - \frac{i C_k Z}{\alpha_p}\right).$$

Les fonctions $\Gamma_k, \Gamma_k^+, \Gamma_k^-$ sont entières $\left(\sum \frac{1}{\alpha_n} < \infty\right)$ de type exponentiel nul ([1] p. 100) et leurs zéros sont situés sur l'axe $\mathcal{R}e\, Z = 0 : x = 0$; $y = \pm \frac{\alpha_n}{C_k}$, $n \geqslant k$. $\forall Z = x + iy \in \mathbf{C}$, on a :

$$|\Gamma_k(Z)| = \prod_{n\geqslant k} \sqrt{\left(1 - \frac{yC_k}{\alpha_n}\right)^2 + \frac{x^2 C_k^2}{\alpha_n^2}} \sqrt{\left(1 + \frac{yC_k}{\alpha_n}\right)^2 + \frac{x^2 C_k^2}{\alpha_n^2}}$$
$$\geqslant \prod_{n\geqslant k} \left(\frac{|x|^2 C_k^2}{\alpha_n^2}\right).$$

D'autre part, dans le domaine $D = \{Z \mid x^2 - y^2 \geqslant 0\}$: $\left| 1 + \dfrac{Z^2 C_k^2}{\alpha_n^2} \right| \geqslant 1$
$\Gamma_k(Z)$ satisfait donc à :

$$|\Gamma_k(Z)| \geqslant \operatorname*{Sup}_{n\in \mathbf{N}_+} \left\{ \left(\frac{|x|^n C_k^n}{\alpha_k \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+n-1}}\right)^2 \right\} \geqslant \operatorname*{Sup}_{n} \left\{ \frac{|x|^{2n} C_k^{2n} Q_{2k}}{Q_{2n+2k}} \right\}$$

et, avec (II.1.3) : $|\Gamma_k(Z)| \geqslant \dfrac{1}{B^{2k}} \operatorname*{Sup}_{n} \left\{ \left(\dfrac{|x| C_k}{B}\right)^{2n} \dfrac{1}{Q_{2n}} \right\}$.

Démonstration de ii). – On a $\sqrt{q_{2n}\, q_{2n+1}} \geqslant q_{2n} = \dfrac{Q_{2n}}{Q_{2n-1}}$ et, d'après (II.1.8) : $C_k \leqslant \dfrac{Q_{2k}}{Q_{2k-1}}$, utilisant la non quasi-analyticité forte de Q_n :

$$C_k \sum_{n\geqslant k} \frac{1}{\sqrt{q_{2n}\, q_{2n-1}}} \leqslant \frac{Q_{2k}}{Q_{2k-1}} \sum_{n\geqslant 2k} \frac{1}{q_n}$$
$$\leqslant \frac{Q_{2k}}{Q_{2k-1}} \left(A_0 . 2k\, \frac{Q_{2k-1}}{Q_{2k}}\right) = 2\, A_0 k$$

$$\Gamma_k(x) = \prod_{n\geqslant k} \left(1 + \frac{x^2 C_k^2}{\alpha_n^2}\right) \leqslant \prod_{n\geqslant k} \left(1 + \frac{C_k |x|}{\alpha_n}\right)^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

et, par conséquent,

$$\Gamma_k(x) \leqslant \exp\left(2 |x| C_k \sum_{n\geqslant k} \frac{1}{\sqrt{q_{2n}\, q_{2n+1}}}\right) \leqslant \exp(4\, A_0\, k |x|).$$

LEMME (II.2.2). – *Soit* $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$. *Il existe une suite* $\{\Phi_k\}$ $k \in \mathbf{N}_+$ *de fonctions analytiques dans un ouvert* $\omega \subset \mathbf{C}$ *contenant le segment* $]-1,0[$ *et satisfaisant à : Il existe des constantes* A_1 *et* C *telles que :* $\forall x \in]-1,0[$, n *et* $k \in \mathbf{N}_+$

$$|D^n \Phi_k(x)| \leqslant C\, A_1^n\, B^{4k}\, M_n^{(k)}$$

où B *ne dépend que de la suite* $\{M_n\}$.

Démonstration. – Les fonctions Γ_k définies plus haut dépendent de $\epsilon \left(0 < \epsilon < \dfrac{1}{2A}\right)$ puisque $Q_n = \dfrac{M_n}{n!^{\epsilon}}$ en dépend.

On pose $\mathcal{U}(Z) = \dfrac{1}{Z^r(Z+1)^r}$ où $Z \in \mathbf{C}$; $r \in \mathbf{N}_+$ et :

$$\Phi_k(Z) = \frac{1}{(\Gamma_k \circ \mathcal{U})(Z)} .$$

Désignons par L la famille, lorsque $0 < h < \dfrac{1}{2}$, des losanges ouverts $\subset \mathbf{C}$ construits à partir des points $Z = 0$, $Z = -1$ et tangents au cercle de centre $Z = -\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{h}{2}$; soit ϕ le $\dfrac{1}{2}$ angle au sommet $(Z = 0)$ de ces losanges.

On a : $\sin\phi = h$; $\cos\phi = \sqrt{1-h^2}$ et $\cos 2\phi = 1 - 2h^2$.

Posant $Z = \rho_1 e^{i\phi_1} = \rho_2 e^{i\phi_2} - 1$, on a, dans un losange quelconque de la famille L : $|\cos(\phi_1 + \phi_2)| > |\cos 2\phi| = 1 - 2h^2$ et, par conséquent : $\left|\mathcal{R}e \dfrac{1}{Z(Z+1)}\right| > \dfrac{1-2h^2}{\rho_1\rho_2}$; pour tout $r \in \mathbf{N}_+$, on peut choisir h assez petit (disons h_r) pour que l'on ait dans le losange l_r correspondant : $\cos(r(\phi_1+\phi_2)) > \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2}$.

L'application $\mathcal{U} : Z \longrightarrow \zeta$ envoie alors tout point $Z \in l_r$ dans le domaine $E = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid |\mathcal{R}e\,\zeta| > |\mathcal{I}m\,\zeta|\}$.

Donnons une minoration de $|\mathcal{R}e\,\mathcal{U}(Z)|$ pour $Z \in l_r$. On a :

$$|\mathcal{R}e\,\mathcal{U}(Z)| = |\cos r(\phi_1+\phi_2)| \,.\, |\mathcal{U}(Z)| > \frac{\sqrt{2}}{2} |\mathcal{U}(Z)|$$

$\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < h_r$ donne : $y^2 < \dfrac{h_r^2 x^2}{1-h_r^2}$; donc $x^2 + y^2 < \dfrac{x^2}{1-h_r^2}$.

D'autre part, $|Z+1|^2 = (1-|x|)^2 + y^2 < 1 + y^2 < \dfrac{1}{1-h_r^2}$ et, par conséquent $\left(\dfrac{1}{|Z|\,|Z+1|}\right)^r > \dfrac{(1-h_r^2)^r}{|x|^r}$.

Il existe donc une constante A_r telle que, pour tout $Z \in l_r$:

$$|\mathcal{R}e\,\mathcal{U}(Z)| > A_r^r \frac{1}{|x|^r} > A_r^r . \qquad \text{(II.2.3)}$$

L'application $\mathcal{U} : Z \longrightarrow \zeta$ envoie donc tout point Z de l_r dans le domaine $E_r = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid |\mathcal{R}e\,\zeta| > |\mathcal{I}m\,\zeta|$ et $|\mathcal{R}e\,\zeta| > A_r^r\}$.

E_r étant disjoint de l'ensemble des zéros de $(\Gamma_k \circ \mathcal{U})(Z)$, la fonction $\Phi_k(Z) = \dfrac{1}{(\Gamma_k \circ \mathcal{U})(Z)}$ est analytique dans l_r où, d'après le lemme (II.2.1)i), elle satisfait à :

$$|\Phi_k(Z)| \leqslant B^{2k} \exp\{-Q^{[k]}(|\mathcal{R}e\, \mathcal{U}(Z)|^2)\}$$

et, puisque $\exp\{-Q^{[k]}\}$ est une fonction décroissante :

$$|\Phi_k(Z)| \leqslant B^{2k} \exp\left\{-Q^{[k]}\left(\left(\frac{A_r}{|x|}\right)^{2r}\right)\right\}. \qquad \text{(II.2.4)}$$

Pour estimer les dérivées des $\Phi_k(Z)$ en un point u du segment réel $]-1,0[$, on applique la formule de Cauchy au cercle γ de centre u et de rayon $\dfrac{h_r|u|}{2}$; $\Phi_k(u)$ étant symétrique par rapport à $u = -\dfrac{1}{2}$, il suffit de faire le calcul pour $u \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.

$$|D^n\Phi_k(u)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{\Phi_k(Z)}{(Z-u)^{n+1}}\, dZ\right|$$
$$\leqslant \frac{n!}{2\pi}\left(\frac{2}{h_r}\right)^n \frac{1}{|u|^n}\int_0^{2\pi}\left|\Phi_k\left(u + \frac{h_r|u|\,e^{i\psi}}{2}\right)\right| d\psi$$

Soit, avec (II.2.4) :

$$|D^n\Phi_k(u)| \leqslant n!\left(\frac{2}{h_r}\right)^n B^{2k} \sup_{0<u<1}\left(\frac{1}{u^n}\exp\left\{-Q^{[k]}\left(\left(\frac{A_r}{u}\right)^{2r}\right)\right\}\right).$$

Si $\hat{Q}_n^{[k]} = \dfrac{Q_n^{[k]}}{(A_r^{2r})^n}$ et $\left[\dfrac{n}{2r}\right]$ est le plus petit entier $\geqslant \dfrac{n}{2r}$, on a, pour $0 < u < 1$:

$$|D^n\Phi_k(u)| \leqslant n!\left(\frac{2}{h_r}\right)^n B^{2k} \sup_{0<v<1}\left(\frac{1}{v^{[n/2r]}}\exp\left\{-\hat{Q}^{[k]}\left(\frac{1}{v}\right)\right\}\right).$$

Le dernier facteur est, par définition [1], [2], [15], la "régularisée convexe par l'intermédiaire des log" de la suite $\{\hat{Q}_n^{[k]}\}_{n\in\mathbf{N}}$ (pour la valeur $\left[\dfrac{n}{2r}\right]$ de l'argument) qui, puisque cette suite est (comme Q_n), logarithmiquement convexe, est égale à $\hat{Q}_{[n/2r]}^{[k]}$:

$$|D^n\Phi_k(u)| \leqslant n!\left(\frac{2}{h_r\, A_r^{2r}}\right)^n B^{2k}\, Q_{[n/2r]}^{[k]}.$$

Or : $\left[\frac{n}{r}\right] \leqslant 2\left[\frac{n}{2r}\right] \leqslant \left[\frac{n}{r}\right] + 1$.

Ceci donne : $Q^{[k]}_{[n/2r]} = \left(\frac{B^2}{Q^{1/k}_{2k}}\right)^{[n/2r]} Q_{2[n/2r]} \leqslant \frac{B^{2n}\, Q_{[n/r]}}{(Q^{1/2k}_{2k})^{[n/r]}}$.

Prenant alors r et ϵ tels que $r \,.\, \epsilon = 1$, on obtient :

$$Q^{[k]}_{[n/2r]} \leqslant B^{3n+2k}\, \frac{M^{(2k)}_n}{n!} \leqslant B^{3n+2k}\, \frac{M^{(k)}_n}{n!}$$

et, par conséquent : $|D^n \Phi_k(u)| \leqslant \left(\frac{2B^3}{h_r\, A^{2r}_r}\right)^n B^{4k}\, M^{(k)}_n$.

Ceci achève la démonstration du lemme (II.2.2) qui généralise un résultat de Dzanasija [8].

3. La suite des fonctions e_k à supports compacts sur $\mathbf{R}^\nu$.

A partir des Φ_k construites au paragraphe précédent, on définit la suite de fonctions b_k :

$$b_k(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ pour } \ x < -1 \\ \Phi_k(x) \ \text{ pour } \ -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \ \text{ pour } \ x > 0 \end{cases}$$

b_k est une suite de fonctions positives, nulles ainsi que toutes leurs dérivées pour $x = 0$ et $x = -1$, et prolongeables analytiquement dans un voisinage complexe de $]-1,0[$.

On définit la suite de fonctions a_k par :

$$a_k(x) = \frac{\int_{-1}^{x} b_k(t)\,dt}{\int_{-1}^{0} b_k(t)\,dt} \quad \text{pour } -1 \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et :}$$

$a_k(x) = a_k(-x)$ pour $0 < x \leqslant 1$ et $a_k(x) = 0$ partout ailleurs.

Les a_k sont des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}$, positives, paires, vérifiant $a_k(0) = 1$ et $\forall n : D^n\, a_k(0) = 0$.

Donnons une estimation des dérivées : $D^n\, a_k(x) = \dfrac{D^{n-1}\, b_k(x)}{\int b_k(t)\,dt}$.

$b_k(x)$ est symétrique par rapport à $x = -\dfrac{1}{2}$ et prend en ce point sa valeur maximum ; donc :

$$\int b_k(t)\,dt > \frac{1}{2}\, b_k\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\Phi_k\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2\prod\limits_{n\geqslant k}\left(1+\dfrac{C_k^2\,E^2}{\alpha_n^2}\right)} = \frac{1}{2\Gamma_k(E)} \quad \text{où} \quad E = \frac{16^r}{3^r}.$$

La partie ii) du lemme (II.2.1) : $b_k\left(-\dfrac{1}{4}\right) \geqslant \exp(-4\,A_0 E\,k)$ donne, avec le lemme (II.2.2) et la proposition (II.1.10) :

$$\forall n,\ k \in \mathbf{N}_+ :\ |D^n a_k(x)| \leqslant C_1\, B_1^k\, A_1^n\, M_n^{(k)} \qquad \text{(II.3.1)}$$

avec $C_1 = 2CB$ et $B_1 = B^4 \exp(4\,A_0 E)$.

On définit alors la suite $\{f_k\}_{k\in\mathbf{N}_+}$ d'applications de $\mathbf{R}^\nu$ dans $\mathbf{R}^+$ par :

$$f_x(x) = a_k\Big(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2\Big) \qquad \text{(II.3.2)}$$

et la suite $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}_+}$ par : $e_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{\int f_k(t)\,d^\nu t}$. (II.3.3)

Le support des e_k et f_k est inclus dans la Boule unité $\mathcal{B}(0,1)$ de $\mathbf{R}^\nu$. Ces fonctions sont positives, analytiques dans le domaine $\mathring{\mathcal{B}}(0,1)\backslash\{0\} = \{x \mid 0 < \sum_i x_i^2 < 1\}$ et invariantes par rotation autour de l'origine.

Si $\omega_\nu(u)$ est le volume de la sphère de rayon u dans $\mathbf{R}^\nu$, on a : $\displaystyle\int f_k(t)\,d^\nu t \geqslant a_k\left(\frac{1}{2}\right)\omega_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,\omega_\nu\left(\frac{1}{2}\right)$.

Cette estimation, et la formule donnant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction composée, nous conduisent aux estimations suivantes :

Il existe des constantes A, B, C positives B ne dépendant que de la suite $\{M_n\} \in \mathfrak{I})$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}^\nu$, $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+^\nu$:

$$|D^n e_k(x)| \leqslant C\, A^{|n|}\, B^k\, M_{|n|}(k) \qquad \text{(II.3.4)}$$

et, puisque les fonctions a_k sont analytiques sur le segment $]0,1[$ on obtient pour e_1 : $\forall$ l'ouvert $\Omega \subset \breve{\mathcal{B}}(0,1)\backslash\{0\}$ il existe des constantes A_1, C_1 telles que $\forall x \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}_+^\nu$:

$$|D^n e_1(x)| \leqslant C_1\, A_1^{|n|}\, |n|! \qquad \text{(II.3.5)}$$

4. Construction de suites de fonctions subordonnées à un ensemble fermé de $\mathbf{R}^\nu$.

Soient S un ensemble fermé de $\mathbf{R}^\nu$, $\{M_n\}$ une suite $\in \mathcal{F}$ et σ_k une suite positive, décroissante, tendant vers 0 lorsque $k \in \mathbf{N}_+$ tend vers l'infini, définie par $\sigma_k = \dfrac{1}{H\left(\dfrac{M_k}{k!}\right)^{1/k}}$, où H est une constante positive.

On désigne par $\{S_k\}_{k\in\mathbf{N}_+}$ la suite d'ensembles de $\mathbf{R}^\nu$ suivante :

$$S_k = \left\{ x \in \mathbf{R}^\nu \mid d(x, S) \leqslant \frac{\sigma_k}{2} \right\} \quad ; \quad d(x, S) = \operatorname*{Inf}_{x' \in S} d(x, x').$$

Soient χ_{S_k} la fonction caractéristique de S_k, et e_{σ_k} la fonction d'intégrale unité définie à partir des e_k (II.3.3) par :

$$e_{\sigma_k}(x) = \left(\frac{4}{\sigma_k}\right)^\nu e_k\left(\frac{4x}{\sigma_k}\right). \qquad \text{(II.4.1)}$$

Les relations $\dfrac{1}{\sigma_k^\nu} \leqslant H^\nu \left(\dfrac{M_k}{M_{k-1}}\right)^\nu \leqslant H^\nu B^{\nu k}$ donnent, pour les dérivées de e_{σ_k} :

$\exists C_0, G_0, B_0$ (constantes positives : B_0 ne dépendant que de $\{M_n\}$ et ν) telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^\nu,\ k \in \mathbf{N}_+,\ n \in \mathbf{N}_+^\nu : |D^n e_{\sigma_k}(x)| \leqslant C_0 (H\,G_0)^{|n|} B_0^k M_{|n|}. \qquad \text{(II.4.2)}$$

Définissant la suite $\{\varphi_k^S\}$ par : $\varphi_k^S(x) = (\chi_{S_k} * e_{\sigma_k})(x)$, on obtient :

PROPOSITION (II.4.3). – *Les fonctions* $\varphi_k^S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ *satisfont à* :

(i) $0 \leqslant \varphi_k^S(x) \leqslant 1$

(ii) $$\varphi_k^S(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \text{ t.q. } d(x, S) \leqslant \dfrac{\sigma_k}{2} \\ 0 & \forall x \text{ t.q. } d(x, S) \geqslant \sigma_k \end{cases}$$

(iii) $\exists B_1 > 0$ et $\forall$ *le compact* $K \subset \mathbf{R}^\nu$, $\exists C_1, G_1$ t.q. $\forall x \in K$, $k \in \mathbf{N}_+$ *et* $n \in \mathbf{N}_+^\nu$:

$$|D^n \varphi_k^S(x)| \leqslant \frac{C_1 G_1^{|n|} B_1^k M_{|n|}^{(k)}}{\sigma_k^{|n|}} = C_1 (H\,G_1)^{|n|} B_1^k M_{|n|}.$$

D'après (II.1.12) : $\sigma_{k+1} \leqslant \sigma_k \leqslant B\sigma_{k+1}$, on a :

PROPOSITION (II.4.4). – *Les fonctions* $(\mathcal{W}_k^S - \mathcal{W}_{k+1}^S)$ *satisfont pour tout* $k \in \mathbf{N}_+$ *à* :

(i) $(\mathcal{W}_k^S - \mathcal{W}_{k+1}^S)(x) = 0 \quad \forall x$ t.q. $\begin{cases} d(x, S) \geqslant \sigma_k \\ d(x, S) \leqslant \dfrac{\sigma_k}{2B} \end{cases}$

(ii) *et, avec des constantes différentes, à des inégalités analogues à (II.4.3, iii).*

Rappelons, en le complétant, un résultat de Whitney (voir [7]).

LEMME (II.4.5). – *Soit* S *un ensemble fermé de* $\mathbf{R}^\nu$, $\{M_n\}$ *une suite* $\in \mathfrak{F}$, *on peut, pour tout* $k \in \mathbf{N}_+$, *construire une suite* $\{\phi_{k,j}\}_j$ *de fonctions possédant les propriétés suivantes :*

(i) *les* $\phi_{k,j}$ *ont des supports compacts indépendants de* k *; elles appartiennent à* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^\nu \backslash S)$, *sont positives et telles que* $\sum_j \phi_{k,j}(x) = 1 \quad \forall x \notin S$.

(ii) *tout compact* $\subset \mathbf{R}^\nu \backslash S$ *intersecte seulement un nombre fini de supports de* $\phi_{k,j}$.

(iii) *il existe des constantes positives* F_0 *et* G_0 *telles que* $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$ *et* $x \in \mathbf{R}^\nu \backslash S$:

$$\left|\sum_j D^n \phi_{k,j}(x)\right| \leqslant F_0^k \, G_0^{|n|} \, d(x, S)^{-|n|} \, M_{|n|}^{(k)} .$$

(iv) *il existe une constante* C *indépendante de* j, k, S, *telle que* : $\operatorname{diam}(\operatorname{Supp} \phi_{k,j}) \leqslant C\, d(\operatorname{Supp} \phi_{k,j}, S)$.

Ces résultats (à l'exception de iii) qui doit être précisé), sont montrés par Whitney pour le cas d'une suite de fonctions ϕ_j (au lieu de $\phi_{k,j}$) construite à partir d'une seule fonction $\phi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$.

Si y_j est le centre d'un cube C_j d'arête $s_j < d(y_j, S)$ et $\psi_j(x) = \phi\left(\dfrac{x - y_j}{s_j}\right)$, Whitney montre :

$$|D^n \psi_j(x)| \leqslant \sup_x |D^n \phi(x)| \, \frac{C_1^{|n|}}{d(x, S)^{|n|}} \tag{II.4.6}$$

On remplace ici $\psi_j(x)$ par la suite :

$$\psi_{k,j}(x) = (\chi_b * e_{k,a})\left(\frac{x - y_j}{s_j}\right)$$

où $e_{k,a}(x) = e_k\left(\frac{x}{a}\right)$; e_k est la suite définie en (II.3.3), a une constante > 0 et $\chi_b(x)$ la fonction caractéristique d'une cube de côté b choisi convenablement. On a alors, à la place de (II.4.6) :

$$|D^n \psi_{k,j}(x)| \leqslant A_2^{|n|} B_2^k M_{|n|}^{(k)} \frac{1}{d(x, S)^{|n|}} \tag{II.4.7}$$

La suite $\phi_j(x) = \psi_j(x)/\sum_{\ell} \psi_\ell(x)$ utilisée par Whitney est remplacée par : $\phi_{k,j}(x) = \psi_{k,j}(x) \prod_{\ell=1}^{j=1} (1 - \psi_{k,\ell}(x))$ qui au voisinage de chaque point n'a qu'un nombre N au plus de facteurs différents de 1. En effet, il existe $N \in \mathbf{N}_+$ tel que tout $x \notin S$ possède un voisinage qui n'intersecte que N supports de $\psi_{k,j}$. La formule de Leibniz donne alors iii) avec $F_0 = B_2^N$.

Définissons la suite des $x_j \in S$ et pour $x \notin S$ le point $x^* \in S$ par :

$$d(S, \operatorname{Supp} \phi_{k,j}) = d(x_j, \operatorname{Supp} \phi_{k,j})$$
$$d(x, S) = d(x, x^*)$$

Comme conséquence du point iv) du lemme (II.4.5) on a [7] :

PROPOSITION (II.4.8). – *Il existe deux constantes* C_1 *et* C_2 *indépendantes de* j, k, S *telles que* $\forall x \in \operatorname{Supp} \phi_{k,j}$

$$d(x, x_j) \leqslant C_1\, d(x, S) \quad \text{et} \quad d(x^*, x_j) \leqslant C_2\, d(x, S) .$$

III. SUR DEUX PROPRIETES DE REGULARITE D'ENSEMBLES DE $\mathbf{R}^\nu$

On expose ici deux propriétés de régularité d'ensembles (que nous prendrons fermés) de $\mathbf{R}^\nu$, introduites respectivement par Lojasiewicz [3], [4] et Whitney [5], [16] p. 98, [17] p. 19.

1. Définitions et propriétés.

DEFINITION (III.1.1). – *Soient* S^+, S^-, Λ *des ensembles fermés de* $\mathbf{R}^\nu$; $\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$ *une suite positive* $(M_n \geqslant n!)$. *On dit que* S^+ *et* S^- *sont* M-*régulièrement séparés par* Λ *si* $S^+ \cap S^- = \phi$ *et* $\Lambda = \phi$ *ou bien si : pour tous compacts* $K^+ \subset S^+$, $K^- \subset S^-$ *et toute constante positive* E, *il existe des constantes positives* C *et* F *telles que pour tout* $x \in K^+$ *on ait :*

$$\operatorname*{Inf}_{n\in\mathbf{N}_+} \left(E^n d(x, \Lambda)^n \frac{M_n}{n!}\right) \leqslant C \operatorname*{Inf}_{m\in\mathbf{N}_+} \left(F^m d(x, K^-)^m \frac{M_m}{m!}\right).$$

Cette propriété est symétrique par rapport à S^+ et S^- (voir [18]).

Dans ce qui suit, on prendra $\Lambda = S^+ \cap S^-$ et $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$; Notons que la propriété (III.1.1) est vérifiée par tout couple d'ensembles de $\mathbf{R}^\nu$ si M_n est la suite analytique $n!$.

DEFINITION (III.1.2). – *Soient* S *un ensemble fermé de* $\mathbf{R}^\nu$, $\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$ *une suite positive* $(M_n \geqslant n!)$. S *est dit* M-*régulier si :*

(i) $\forall y \in S$, *il existe un nombre* $\rho > 0$ *tel que tout couple de points* (x_1, x_2) *de* S *appartenant à* $\mathcal{B}(y, \rho)$ *puisse être joint par une courbe rectifiable située dans* S.

(ii) $\forall E > 0$, *il existe des constantes positives* D, G *telles que, pour tout couple* (x_1, x_2) *appartenant à un* $\mathcal{B}(y, \rho)$:

$$\operatorname*{Inf}_{n\in\mathbf{N}_+} \left(E^n l(x_1, x_2)^n \frac{M_n}{n!}\right) \leqslant D \operatorname*{Inf}_{m\in\mathbf{N}_+} \left(G^m d(x_1, x_2)^m \frac{M_m}{m!}\right)$$

où $l(x_1, x_2)$ *est la longueur de la courbe joignant* x_1 *à* x_2 *et* $\mathcal{B}(y, \rho)$ *la boule fermée dans* $\mathbf{R}^\nu$ *de centre* y *et de rayon* ρ.

On peut faire les remarques suivantes :

(i) Tout ensemble convexe est M-régulier pour toute suite M_n positive.

(ii) Tout ensemble localement connexe par arc rectifiable est M-régulier pour la suite analytique $M_n = n!$. Plus bas, on utilise la M-régularité d'un ensemble fermé S pour obtenir des majorations des dérivées d'une fonction $W_S \phi$ (qui est un prolongement hors de S d'une fonction ϕ de classe M_n) en fonction des dérivées de ϕ *dans* S. Si l'on tient compte de ii), il n'est pas surprenant de constater que cette opération est réalisable indépendamment de la forme de S si ϕ est analytique dans S et que l'on prenne pour $W_S \phi$ son prolongement analytique en dehors de S.

(iii) Si S est un ensemble M-régulier et (S^+, S^-) une partition de S $(S = S^+ \cup S^-)$, alors S^+ et S^- sont M-régulièrement séparés par $\Lambda = S^+ \cap S^-$ et l'on pourra vérifier qu'une ultradistribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ $(\{M_n\} \in \mathfrak{F})$ dont le support S est M-régulier peut être décomposée $T = T^+ + T^-$ avec $T^\pm \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ et $\operatorname{Supp} T^\pm \subset S^\pm$; la propriété de M-régularité réduisant cette vérification à la décomposition du support d'une mesure.

2. Application de la propriété de séparation M-régulière.

LEMME (III.2.1). – *Soient* S^+ *et* S^- *deux ensembles fermés de* $\mathbf{R}^\nu$, M-*régulièrement séparés par* $\Lambda = S^+ \cap S^-$ *et* $\{M_n\}$ *une suite* $\in \mathfrak{F}$; *on peut construire deux voisinages* U^+ *ouvert et* V^+ *fermé de* $S^+ \backslash \Lambda$ *dans* $\mathbf{R}^\nu \backslash \Lambda$ *tels que* :

(i) $U^- = \mathbf{R}^\nu \backslash V^+$ *soit un voisinage ouvert de* $S^- \backslash \Lambda$ *dans* $\mathbf{R}^\nu \backslash \Lambda$;

(ii) $V^+ \cup \Lambda$ *et* S^- *soient* M-*régulièrement séparés par* Λ ; *et une suite de fonctions* $\{ш_k\}$ *qui satisfasse à* :

(iii) $\forall k \in \mathbf{N}_+$ $ш_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^\nu \backslash \Lambda)$ *et* $0 \leqslant ш_k(x) \leqslant 1$;

$$ш_k(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in U^- \\ 1 & \forall x \in U^+ \end{cases}$$

(iv) *Il existe* $b > 0$ *ne dépendant que de* $\{M_n\}$ *et pour tout compact* $K \subset \mathbf{R}^\nu$ *des constantes positives* c *et* a *telles que* : $\forall x \in K \backslash \Lambda$ *et* $n \in \mathbf{N}_+^\nu$

$$|D^n ш_k(x)| \leqslant c\, a^{|n|}\, b^k\, d(x, S^-)^{-|n|} . M_{|n|}^{(k)} .$$

Démonstration. – Sans nuire à la généralité, on peut supposer que pour tout $x \in S^+$: $d(x, S^-) \leqslant 1$.

DEFINITION. – *On désigne par* S_p^+ *les ensembles suivants* :

$$S_p^+ = \left\{ x \in S^+ \mid \frac{1}{\beta^p} \leqslant d(x, S^-) \leqslant \frac{1}{\beta^{p-1}} \; ; \; \beta \geqslant 3 \right\}$$

et, posant $\epsilon_p = \dfrac{1}{2} d(S_p, S^-)$:

H_p (resp^t : H_p', H_p'')

$$= \left\{ x \in \mathbf{R}^\nu \mid d(x, S_p^+) \leqslant \epsilon_p \left(\text{resp}^t : \leqslant \frac{2}{3}\epsilon_p \; ; \; < \frac{\epsilon_p}{3}\right) \right\}.$$

On a : $d(S_p^+, S^-) = \operatorname*{Inf}_{x \in S_p} d(x, S^-) = \dfrac{1}{\beta^p}$; d'où $\epsilon_p = \dfrac{1}{2\beta^p}$ et : $\bigcup_{p \in \mathbf{N}_+} S_p^+ = S^+ \backslash \Lambda$; $S_p^+ \subset H_p'' \subset H_p' \subset H_p$.

Si l'on définit : $V^+ = \bigcup_p H_p$, on construit ainsi un voisinage fermé de $S^+ \backslash \Lambda$ dans $\mathbf{R}^\nu \backslash \Lambda$ qui satisfait à i). En effet, pour tout $p \in \mathbf{N}_+$ et tout $x \in H_p$, on a : $d(x, S^-) \geqslant \dfrac{1}{2\beta^p} > 0$.

– Pour montrer ii), il suffit de trouver deux constantes positives θ et η telles que, pour tout $x \in V^+$, il existe un $x' \in S^+$ donnant lieu aux relations : $d(x, \Lambda) \leqslant \theta \, d(x', \Lambda)$ et $d(x', S^-) \leqslant \eta \, d(x, S^-)$.

• Soit $x \in V^+$, $\exists p$ tel que $x \in H_p$. Prenons alors $x' \in S^+$ tel que $d(x, x') = d(x, S_p^+)$, alors :

$$d(x, \Lambda) \leqslant d(x, S_p^+) + d(x', \Lambda) \leqslant \frac{1}{2} d(S_p^+, S^-) + d(x', \Lambda)$$
$$\leqslant \frac{1}{2} d(x', S^-) + d(x', \Lambda) \leqslant \frac{3}{2} d(x', \Lambda) .$$

D'autre part,

$$d(x', S^-) \leqslant d(x, S_p^+) + d(x, S^-) \leqslant \frac{1}{2} d(S_p^+, S^-) + d(x, S^-)$$
$$\leqslant \frac{1}{2} d(x', S^-) + d(x, S^-)$$

d'où : $d(x', S^-) \leqslant 2d(x, S^-)$.

• Pour la construction des fonctions $ш_k$, on a besoin des quelques résultats élémentaires suivants :

– Soit x un point quelconque de H_p , $x' \in S_p^+$ tel que $d(x, x') = d(x, S_p^+)$; on a :

$$d(x, S^-) \leqslant d(x, S_p^+) + d(x', S^-) \leqslant (2\beta + 1)\,\epsilon_p \, . \qquad \text{(III.2.2)}$$

– D'autre part, pour $x \in \mathrm{H}_p$, on a : $d(x\,,\mathrm{S}^-) \geqslant \dfrac{1}{2\beta^p}$.

Soit, alors, $x_1 \in \mathrm{H}_p$, $x_2 \in \mathrm{H}_{p+q}$. On a :

$$d(x_1\,,x_2) \geqslant d(x_1\,,\mathrm{S}^-) - d(x_2\,,\mathrm{S}^-) \geqslant \frac{\beta(\beta^{q-1} - 2) - 1}{2\beta^{p+q}}$$

$d(\mathrm{H}_p\,,\mathrm{H}_{p+q})$ est donc > 0 pour $q > 1$ puisque $\beta \geqslant 3$.

– Soit $\{e_k\}$ la suite de fonctions construites au théorème (II.1). Définissons alors :

$$e_{k,p}(x) = \left(\frac{3}{\epsilon_p}\right)^\nu e_k\left(\frac{3x}{\epsilon_p}\right) \;;\; f_{k,p}(x) = 1 - (\chi_p * e_{k,p})\,(x)$$

où χ_p est la fonction caractéristique de H'_p . Et :

$$Ш_k(x) = 1 - \prod_{p=1}^{\infty} f_{k,p}(x)\,.$$

Les fonctions $f_{k,p}$ sont égales à 1 sur $\mathbf{R}^\nu \backslash \mathrm{H}_p$, à zéro sur H''_p et indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^\nu$. Puisque $d(\mathrm{H}_p\,,\mathrm{H}_{p+q}) > 0$ pour $q > 1$, tout point $x \in \mathbf{R}^\nu \backslash \Lambda$ possède un voisinage dans lequel tous les $f_{k,p}$ sont identiques à 1 , sauf deux consécutifs au plus. Les $Ш_k$ sont donc indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^\nu \backslash \Lambda$.

• La partie iii) du lemme (III.2.1) est évidente, montrons la partie iv) :

– Soit x appartenant à un H_p quelconque. Il existe un voisinage ω de x dans lequel on a, pour tout $n \in \mathbf{N}^\nu_+$:

$$\mathrm{D}^n Ш_k(x) = \mathrm{D}^n(f_{k,p-1}(x)\,.\,f_{k,p}(x)\,.\,f_{k,p+1}(x))\;.$$

Or, d'après le théorème (II.1). pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathbf{R}^\nu$, il existe des constantes positives $\mathrm{C}\,,\,\mathrm{A}_0$, telles que $x \in \mathrm{K}$, $n \in \mathbf{N}^\nu$:

$$|\mathrm{D}^n f_{k,p}(x)| \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{A}_0^{|n|}\,\mathrm{B}^k \left(\frac{3}{\epsilon_p}\right)^{|n|} \mathrm{M}_{|n|}^{(k)}\,.$$

L'estimation iv) est alors obtenue par la formule de Leibniz, la convexité logarithmique de $\{\mathrm{M}_n\}$ et la relation $\dfrac{1}{\epsilon_p} \leqslant \dfrac{2\beta + 1}{d(x\,,\mathrm{S}^-)}$ pour $x \in \mathrm{H}_p$.

3. Application de la propriété de M-régularité.

$\{M_n\}$ étant une suite non quasi-analytique, "stable par convolution" et S un ensemble fermé ($\subset \mathbf{R}^\nu$) M-régulier ; soient L un compact de $\mathbf{R}^\nu$ et μ_1, μ_2 deux constantes ($\geqslant 1$) telles qu'à tout $x \in L$ on puisse associer deux points $x_1, x_2 \in S$ satisfaisant à : $d(x, x_2) \leqslant \mu_1\, d(x, S)$ et $d(x_1, x_2) \leqslant \mu_2\, d(x, S)$.

Ces conditions étant données, on se propose de démontrer le lemme suivant :

LEMME (III.3.1). – *Quels que soient le compact* $L \subset \mathbf{R}^\nu$ *et* $A > 0$, *il existe un compact* $K \subset S$ *et des constantes positives* A_0, B_0, C_0 *telles que, si* $\phi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$ *alors* $\forall x \in L$, $k \in \mathbf{N}_+$:

$$|D^n \{(T^k_{x_2}\phi)(x) - (T^k_{x_1}\phi)(x)\}| \leqslant C_0\, \|\phi\|_{K,A}\, \frac{A_0^{|n|}\, B_0^k\, M_k\, d(x, S)^{k-|n|}}{(k-|n|)!}$$

pour $|n| \leqslant k$; *et* $= 0$ *pour* $|n| > k$.

Les notations concernant la formule de Taylor sont rappelées en (I.5 à 9) ; montrons d'abord un lemme préliminaire.

LEMME (III.3.2). – *Soient* K_0 *un compact de* S *et* $A > 0$. *Il existe un compact* $K \subset S$ *et des constantes* A_1, B_1, C_1 *positives telles que* : $\forall$ *le couple de points* $(x_1, x_2) \in K_0$, $\phi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$, $s \in \mathbf{N}^\nu_+$; $|s| \leqslant k$, *on ait* :

$$|D^s(R^k_{x_1}\phi)(x_2)| \leqslant C_1\, \|\phi\|_{K,A}\, \frac{A_1^{|s|}\, B_1^k\, M_k\, d(x_1, x_2)^{k-|s|}}{(k-|s|)!}.$$

D'après une démonstration due à Whitney [5] (pour les détails voir [18]), il suffit de montrer (III.3.2) dans le cas où x_1 et x_2 appartiennent à un même $\mathcal{B}(y, \rho)$ (les boules qui interviennent dans la définition (III.1.2)).

Ces deux points peuvent être joints par une courbe rectifiable $\mathcal{C}(x_1, x_2)$ de longueur $l(x_1, x_2)$ située dans S et pour laquelle Whitney [5] a aussi montré la formule suivante :

Si $p \geqslant |s|$ et u désigne l'abscisse curviligne de $\mathcal{C}(x_1, x_2)$:

$$D^s(R^p_{x_1}\phi)(x_2) = \sum_{|\delta|=p-|s|} \frac{1}{\delta!} \int_{c(x_1,x_2)} (x_2 - x(u))^\delta \, d(D^{\delta+s}\phi(x(u))) \qquad \text{(III.3.3)}$$

et : $$|D^s(R^p_{x_1}\phi)(x_2)| \leqslant \frac{a^{p-|s|}\, l(x_1, x_2)^{p-|s|+1}}{(p-|s|)!} \sup_{\substack{x\in K\\ |q|=p+1}} |D^q\phi(x)|$$

où a est une constante qui ne dépend que de la dimension ν de l'espace et K un compact de S qui contient les lacets reliant les couples de points (x_1, x_2) de K_0 d'une même boule $\mathcal{B}_j$.

Prenant alors $p = q + |s|$ $(q \in \mathbf{N}_+)$ et utilisant la relation $M_{n+p} \leqslant B^{n+p} M_n M_p$, on obtient, pour $\phi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$:

$$|D^s(R^{q+|s|}_{x_1}\phi)(x_2)| \leqslant C(AB^2)^{|s|} M_{|s|} \, \|\phi\|_{K,A} \left\{ \frac{(aAB^2)^q \, l(x_1, x_2)^q \, M_q}{q!} \right\} \qquad \text{(III.3.4)}$$

La décomposition de Taylor $\phi(x) = (T^p_y\phi)(x) + (R^p_y\phi)(x)$ étant indépendante de p, on a :

$$(R^k_y\phi)(x) = (R^p_y\phi)(x) + \{(T^p_y\phi)(x) - (T^k_y\phi)(x)\}.$$

Donc, avec $p = |s| + q$:

$$|D^s(R^k_{x_1}\phi)(x_2)| \leqslant \operatorname*{Inf}_{q\in\mathbf{N}_+} \{|D^s(R^{q+|s|}_{x_1}\phi)(x_2)| + |D^s(T^{q+|s|}_{x_1}\phi - T^k_{x_1}\phi)(x_2)|\} \qquad \text{(III.3.5)}$$

on a, pour le dernier terme de (III.3.5) :

$$|D^s(T^{q+|s|}_{x_1}\phi - T^k_{x_1}\phi)(x_2)| = \left| \sum_{\min(q,k-|s|)<|l|<\max(q,k-|s|)} \frac{(x_1-x_2)^l}{l!} D^{l+s}\phi(x_1) \right| \qquad \text{(III.3.6)}$$

$$\leqslant (AB)^{|s|} M_{|s|} \, \|\phi\|_{K,A} \sum_{\min(q,k-|s|)<l\leqslant\max(q,k-|s|)} \frac{(aAB)^l \, d(x_1, x_2)^l \, M_l}{l!}$$

Le dernier facteur de (III.3.6) est de la forme : $\displaystyle\sum_{r_1<r\leqslant r_2} \frac{t^r M_r}{r!}$; pour $t > 0$ la suite $r \longrightarrow \dfrac{t^r M_r}{r!}$ est convexe :

$$\sum_{r_1<r\leqslant r_2} \frac{t^r M_r}{r!} \leqslant \sup_{r_1<r\leqslant r_2} \left\{\frac{(2t)^r M_r}{r!}\right\} \sum_{r_1<r\leqslant r_2} \left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$\leqslant C' \left\{ \frac{(2t)^{r_1} M_{r_1}}{r_1!} + \frac{(2t)^{r_2} M_{r_2}}{r_2!} \right\}$$

et, par conséquent (avec $d(x_1, x_2) \leqslant l(x_1, x_2)$) on a, pour (III.3.5) :

$$|D^s(R^k_{x_1}\phi)(x_2)| \leqslant C''(AB^2)^{|s|} M_{|s|} \|\phi\|_{K,A}$$
$$\left\{ \frac{(2aAB\, d(x_1, x_2))^{k-|s|} M_{k-|s|}}{(k-|s|)!} + \inf_{q\in \mathbf{N}_+} \left(\frac{(4aAB^2)^q\, l(x_1, x_2)^q M_q}{q!} \right) \right\}$$

D'après la définition de la M-régularité (III.1.2), il existe des constantes D et G indépendantes de x_1 et x_2 telles que :

$$\inf_{q\in \mathbf{N}_+} \left(\frac{(4aAB^2)^q\, l(x_1, x_2)^q M_q}{q!} \right) \leqslant D\, \frac{G^p\, d(x_1, x_2)^p M_p}{p!} \quad \forall p \in \mathbf{N}_+$$

Prenant $p = k - |s|$ et utilisant la relation $M_{|s|} M_{k-|s|} \leqslant M_k$, on arrive à l'estimation du lemme (III.3.2) dont la démonstration se trouve ainsi achevée.

Pour démontrer le lemme (III.3.1), on applique la formule de Taylor à $(R^k_{x_1}\phi)(x)$ et la relation : $R^k_{x_2}(R^k_{x_1}\phi) = R^k_{x_2}\phi$:

$$(R^k_{x_1}\phi)(x) = (T^k_{x_2}(R^k_{x_1}\phi))(x) + (R^k_{x_2}\phi)(x)$$

ce qui donne : $(T^k_{x_2}\phi)(x) - (T^k_{x_1}\phi)(x) = (T^k_{x_2}(R^k_{x_1}\phi))(x)$ c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbf{N}^\nu_+$:

$$|D^n\{(T^k_{x_2}\phi)(x) - (T^k_{x_1}\phi)(x)\}|$$
$$\leqslant \sum_{|s|\leqslant k} \frac{(a\, d(x, x_2))^{|s-n|}}{|s-n|!} |D^s(R^k_{x_1}\phi)(x_2)|$$

Il suffit alors d'utiliser les résultats du lemme (III.3.2) et les relations $d(x, x_2) \leqslant \mu_1\, d(x, S)$, $d(x_1, x_2) \leqslant \mu_2\, d(x, S)$.

IV. DECOMPOSITION EN MESURES DES ULTRADISTRIBUTIONS A SUPPORTS M-REGULIERS

1. Enoncé des résultats.

Le théorème principal de chapitre IV est le suivant, qu'on pourra rapprocher du théorème XXXIV de L. Schwartz [16] valable pour les distributions.

THEOREME (IV.1.1)

(i) *Si* $S \subset \mathbf{R}^\nu$ *est un ensemble fermé* M-*régulier,* $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$, *toute fonctionnelle* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *portée par* S *peut être décomposée en une série convergente de dérivées de mesures portées par* S :

$$(*)\quad \begin{cases} T = \sum\limits_{\substack{n \in \mathbf{N}_+^\nu \\ j \in \mathbf{N}_+}} D^n \mu_{j,n} \ ; \ \left(T = \sum\limits_{n \in \mathbf{N}_+^\nu} D^n \mu_n \ \textit{si S est compact}\right) \\ \operatorname{supp} \mu_{j,n} \subset S \end{cases}$$

(ii) *Réciproquement, si* S *satisfait à la condition i) de la définition (III.1.2) avec* $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$, *et que tout* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *porté par* S *admette la décomposition* $(*)$, *alors,* S *satisfait à la condition (ii) de (III.1.2), c'est-à-dire que* S *est* M-*régulier.*

Pour montrer la partie (i) du théorème (IV.1.1), il suffit, d'après le théorème de Hahn Banach, de montrer, sous les hypothèses admises, que : $\forall A > 0$, $\exists C$ tel que, lorsque ϕ parcourt $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$ on ait :

$$|T(\phi)| \leqslant C \, \|\phi\|_{S,A} \, . \qquad \text{(IV.1.2)}$$

Pour cela, on construira au paragraphe 4), à partir d'une méthode due à Whitney [5], [6], [7] complétée au paragraphe 3), une application $\phi \longrightarrow W_S \phi$ donnant lieu au théorème :

THEOREME (IV.1.3). – *Soit* S *un ensemble* M-*régulier,* $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$; *on peut construire une application linéaire et continue* $\phi \longrightarrow W_S \phi$ *de* $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *dans* $\mathcal{E}(\Omega_S, M_n)$ *(où* $\Omega_S = \{x \in \mathbf{R}^\nu | d(x, S) < 1\}$*) satisfaisant à :*

(i) $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu : D^n W_S \phi|_S = D^n \phi|_S$

(ii) *Si* $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu \ D^n \phi|_S = 0$, *alors* : $D^n W_S \phi \equiv 0$

(iii) $\forall$ *le compact* $L \subset \Omega_S$ *et la constante* $A > 0$, *il existe un compact* $K \subset S$ *et des constantes positives* A_0, C_0, *telles que, lorsque* ϕ *parcourt* $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$, *on ait* : $\|W_S \phi\|_{L,A_0} \leqslant C_0 \, \|\phi\|_{K,A}$

(iv) *Si* $\alpha_S \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *est telle que* :

$$\alpha_S(x) = \begin{cases} 0 & \textit{en dehors d'un ouvert } \Omega'_S \subset \Omega_S \\ 1 & \textit{dans un voisinage } \Omega''_S \textit{ de } S \end{cases}$$

alors, en remplaçant $(W_S\phi)(x)$ *par* $\alpha_S(x).(W_S\phi)(x)$, *l'application considérée est linéaire et continue de* $(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *dans* $\mathcal{D}(\Omega_S, M_n)$ *et vérifie (i), (ii), (iii).*

Alors, d'après le théorème (IV.1.4) suivant, démontré au paragraphe 2 :

THEOREME (IV.1.4). – *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ (*ou* $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$), $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$; *si* ϕ *est identiquement nulle sur le support* S *de* T, *alors* : $T(\phi) = 0$.

On obtient, lorsque ϕ parcourt $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$ (en désignant par L le support compact de $\alpha_S . W_S\phi$) : $T(\alpha_S.(W_S\phi - \phi)) = 0$ et donc :

$$|T(\phi)| = |T(\alpha_S\phi)| = |T(\alpha_S.W_S\phi)| \leqslant C_2 \, \|\alpha_S.W_S\phi\|_{L,A_2}$$
$$\leqslant C_2 C_3 \, \|W_S\phi\|_{L,A_1} \leqslant C_2 C_3 C_1 \, \|\phi\|_{S,A}\,, \quad \text{c'est-à-dire (IV.1.2)}$$

La partie (ii) du théorème (IV.1.1) sera démontrée au paragraphe 5).

2. Fonctions nulles sur un ensemble fermé, applications.

Soit F un ensemble fermé de $\mathbf{R}^\nu$, on s'intéresse ici au comportement dans $\Omega_F = \{x \in \mathbf{R}^\nu \,|\, d(x, F) < 1\}$ des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^p(\Omega_F)$ qui s'annulent ainsi que leurs k premières dérivées (plus bas : toutes leurs dérivées) sur F $(k < p)$.

Soit x un point de Ω_F, désignons par x^* un point de F tel que : $d(x, x^*) = d(x, F)$ et par $s(x, x^*)$ le segment de droite (contenu dans Ω_F) joignant x à x^*.

PROPOSITION (IV.2.1). – *Pour tous* $n \in \mathbf{N}_+^\nu$, $q \in \mathbf{N}_+$ *vérifiant* $|n| + q \leqslant k$ *et* $x \in \Omega_F$, *on a* :

$$|D^n\phi(x)| \leqslant \frac{\nu^q \, d(x, F)^{q+1}}{q!} \sup_{\substack{y \in s(x,x^*) \\ |r| = q+1}} |D^{n+r}\phi(y)|.$$

Pour la démontrer, posons $\lambda(t) = (D^n\phi)(x^* + t(x - x^*))$; $t \in \mathbf{R}$. On a donc pour $|n| + q \leqslant k$: $\left(\frac{d}{dt}\right)^q \lambda(0) = 0$ et $\left(\frac{d}{dt}\right)^q \lambda(1) = \sum_{|r|=q} (x - x^*)^r \, D^{n+r}\phi(x)$ et, à l'aide d'intégrations par parties successives :

$$|\lambda(t)| = \left| \frac{1}{q!} \int_0^t (1-u)^q \left(\frac{d}{du}\right)^{q+1} \lambda(u)\, du \right|$$
$$\leqslant \frac{\nu^q}{q!} \sum_{0 \leqslant u \leqslant 1} \left| \left(\frac{d}{du}\right)^{q+1} \lambda(u) \right| .$$

Le résultat cherché est donné par $|\lambda(1)| = |D^n \phi(x)|$.

• Soit K un compact inclus dans F,

$$K_\delta = \{x \in \mathbf{R}^\nu \,|\, d(x, K) \leqslant \delta \;;\; \delta < 1\} .$$

Appliquant (IV.2.1) pour q et n quelconques et $k = \infty$, aux $\phi \in \mathcal{E}(\Omega_F, M_n)$ $(\{M_n\} \in \mathcal{F})$ qui s'annulent avec toutes leurs dérivées sur F, et $M_{n+q+1} \leqslant B^{n+2q+1} M_n M_q$ (II.1.3), on obtient :

PROPOSITION (IV.2.2). – *Quels que soient le compact* $K \subset F$ *et la constante* $A > 0$, *il existe des constantes positives* A_1, C_1, E_1, *telles que : si* $\phi \in \mathcal{E}(\Omega_F, M_n)$, $\|\phi\|_{K_\delta, A} < \infty$, $D^n \phi|_F = 0$ $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$. *Alors* $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$ *et* $\forall x \in K_\delta$:

$$|D^n \phi(x)| \leqslant C_1 A_1^{|n|} M_{|n|} \operatorname*{Inf}_{q \in \mathbf{N}_+} \left(E_1^q \, d(x, K)^q \, \frac{M_q}{q!} \right) \|\phi\|_{K_\delta, A} .$$

LEMME (IV.2.3). – $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ (resp^t $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$) *de support* K, *identiquement nulle sur un ensemble fermé* F, *il existe une suite* ϕ_k^F *de fonctions égales à* ϕ *sur des voisinages de* F *et qui tende vers zéro dans* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ (resp^t $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$) *lorsque* $k \longrightarrow \infty$.

De ce lemme, suit le théorème (IV.1.4) ; en effet, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$, supp $T \subseteq F$, on a, pour tout

$$k \in \mathbf{N}_+ : T(\phi) = T(\phi_k^F) = 0 .$$

Pour montrer le lemme (IV.2.3), prenons pour ϕ_k^F la suite : $\phi_k^F(x) = \mathcal{W}_k^F(x) . \phi(x)$ où $\mathcal{W}_k^F$ est la suite définie en (II.4) et satisfait à la proposition (II.4.3). On a évidemment : $\phi_k^F(x) = \phi(x)$, $\forall x$ tel que $d(x, F) \leqslant \dfrac{\sigma_k}{2}$.

La partie (iii) de la proposition (II.4.3) et la proposition (IV.2.2) donnent :

$$|D^n(\mathcal{W}_k^F(x)\,\phi(x))| = \left|\sum_{\alpha+\beta=n} \binom{\alpha}{n} D^\alpha \mathcal{W}_k^F(x)\,.\,D^\beta\phi(x)\right|$$

$$\leqslant C_1 B_1^k \inf_{q\in\mathbf{N}_+}\left(E_1^q\, d(x,F)^q\, \frac{M_q}{q!}\right) \|\phi\|_{K,A} \sum_{\alpha+\beta=n} \binom{\alpha}{n} (G_1 H)^{|\alpha|} A_1^{|\beta|} M_{|\alpha|} M_{|\beta|}\,.$$

Or, $\mathcal{W}_k^F(x)$ n'est différent de zéro que si $d(x\,,F) > \delta_k$; on a donc, pour tout $x \in \operatorname{supp} \phi_k^F$:

$$\inf_{q\in\mathbf{N}_+}\left(E_1^q\, d(x\,,F)^q\, \frac{M_q}{q!}\right) \leqslant E_1^k\, d(x\,,F)^k\, \frac{M_k}{k!} \leqslant \left(\frac{E_1}{H}\right)^k$$

donc : $|D^n(\mathcal{W}_k^F(x)\,\phi(x))| \leqslant C_1 \left(\dfrac{B_1 E_1}{H}\right)^k (G_1 H + A_1)^{|n|} M_{|n|} \|\phi\|_{K,A}$.

Prenant alors H tel que $\eta = \dfrac{B_1 E_1}{H} < 1$, on obtient : $\exists A > 0\,, \exists A_2$ tel que : $\|\phi_k^F\|_{K,A_2} < C_1 \|\phi\|_{K,A}\, \eta^k$ ce qui démontre le lemme (IV.2.3) (la démonstration étant identique dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$) .

3. Prolongement de Whitney k fois différentiable.

THEOREME (IV.3.1). – *Soit* S *un ensemble fermé de* $\mathbf{R}^\nu$. *On peut, pour tout* $k \in \mathbf{N}_+$, *construire une application linéaire* $\phi \longrightarrow W_k^S\phi$ *de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ *dans* $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}^\nu)$ *qui satisfasse à :*

(i) *pour* $|n| \leqslant k$: $D^n W_k^S \phi|_S = D^n\phi|_S$ *et si, pour* $|n| < k$, $D^n\phi|_S = 0$, *alors :* $W_k^S\phi \equiv 0$

(ii) *Les dérivées de* $W_k^S\phi$ *sont majorées dans* $\mathbf{R}^\nu$ *par des quantités ne dépendant que des valeurs de* ϕ *et de ses dérivées dans* S.

Ce théorème est dû à Whitney [6], [7], [4] ; on explicite ici la partie (ii) dans le cadre des fonctions $\phi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$, prenant pour S un ensemble M-régulier, et $\{M_n\} \in \mathcal{F}$, en ne s'intéressant qu'à l'étude de $W_k^S\phi$ dans l'ouvert $\Omega_S = \{x \in \mathbf{R}^\nu | d(x\,,S) < 1\}$, ce qui est suffisant pour la suite de l'exposé.

– Soient $\phi_{k,j}$ les fonctions citées au lemme (II.4.5) et les $x_j \in S$ définis par : $d(\operatorname{Supp} \phi_{k,j}\,, S) = d(\operatorname{Supp} \phi_{k,j}\,, x_j)$.

– On construit $W_k^S\phi$ de la façon suivante, qui rend évidentes la linéarité de $\phi \longrightarrow W_k^S\phi$ ainsi que la partie i) du théorème (IV.3.1) :

$$(\mathrm{W}_k^{\mathrm{S}}\phi)(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in \mathrm{S} \\ \sum_j \phi_{k,j}(x)\,(\mathrm{T}_{x_j}^k\phi)(x) & x \notin \mathrm{S}. \end{cases} \qquad \text{(IV.3.2)}$$

La partie (ii) de (II.4.5) indique que la somme $\sum_j$ reste finie lorsque x parcourt un compact de $\mathbf{R}^\nu \backslash \mathrm{S}$.

– Associant à tout $x \in \mathbf{R}^\nu \backslash \mathrm{S}$ un point $x^* \in \mathrm{S}$ tel que $d(x, \mathrm{S}) = d(x, x^*)$, $\sum_j \phi_{k,j}(x) = 1$ implique, si $x \notin \mathrm{S}$:

$$(\mathrm{W}_k^{\mathrm{S}}\phi)(x) = (\mathrm{T}_{x*}^k\phi)(x) + \sum_j \phi_{k,j}(x)\,\{(\mathrm{T}_{x_j}^k\phi)(x) - (\mathrm{T}_{x*}^k\phi)(x)\} \qquad \text{(IV.3.3)}$$

que l'on note : $(\mathrm{W}_k^{\mathrm{S}}\phi)(x) = (\mathrm{T}_{x*}^k\phi)(x) + (\mathrm{Y}_k^{\mathrm{S}}\phi)(x)$. (IV.3.4)

Proposition (IV.3.5). – S *étant* M-*régulier* ($\{\mathrm{M}_n\} \in \mathfrak{F}$) *on a* : $\forall$ *le compact* $\mathrm{L} \subset \Omega_{\mathrm{S}}$ *et la constante* $\mathrm{A} > 0$, $\exists$ *un compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{S}$ *et des constantes positives* C_1, A_1, B_1 *telles que* : $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$, $k \in \mathbf{N}_+$ *et* $x \in \mathrm{L}\backslash\mathrm{S}$

$$|\mathrm{D}^n(\mathrm{Y}_k^{\mathrm{S}}\phi)(x)| \leqslant \mathrm{C}_1 \mathrm{A}_1^{|n|} \mathrm{B}_1^k\, d(x, \mathrm{S})^{k-|n|}\, \mathrm{M}_{|n|}^{(k)} \frac{\mathrm{M}_k}{k!} \|\phi\|_{\mathrm{K,A}}.$$

Démonstration. – D'après la partie (iii) du lemme (II.4.5), le lemme (III.3.1) et la proposition (II.4.8), on a : $\forall \mathrm{L} \subset \Omega_{\mathrm{S}}$, $\exists \mathrm{K} \subset \mathrm{S}$ tel que pour tous $x \in \mathrm{L}\backslash\mathrm{S}$, $n \in \mathbf{N}_+^\nu$ et $\mathrm{K} \in \mathbf{N}_+$

$$|\mathrm{D}^n(\mathrm{Y}_k^{\mathrm{S}}\phi)(x)| \leqslant \mathrm{C} \sum_{\substack{\alpha+\beta=n \\ |\beta|\leqslant k}} \binom{n}{\alpha} (\mathrm{F}_0\mathrm{B}_0)^k\, \mathrm{G}_0^{|\alpha|}\, \mathrm{A}_0^{|\beta|}\, \frac{d(x, \mathrm{S})^{k-|\beta|-|\alpha|}}{(k-|\beta|)!}\, \mathrm{M}_{|\alpha|}^{(k)}\, \mathrm{M}_k \|\phi\|_{\mathrm{K,A}}. \qquad \text{(IV.3.6)}$$

On obtient alors le résultat cherché en utilisant (II.1.10) et les relations $p!\,q! \leqslant (p+q)! \leqslant 2^{p+q}\, p!\,q!$ qui donnent :

$$\frac{\mathrm{M}_{|\alpha|}^{(k)}}{(k-|\beta|)!} \leqslant 2^k\, \mathrm{B}^{|n|+k-|\alpha|}\, \frac{\mathrm{M}_{|n|}^{(k)}}{k!}.$$

– En ce qui concerne la continuité des k premières dérivées de $\mathrm{W}_k^{\mathrm{S}}\phi$, la remarque suivante nous conduit à la proposition (IV.3.8) : Puisque les fonctions $\phi_{k,j}$ sont indéfiniment différentiables dans $\mathbf{R}^\nu\backslash\mathrm{S}$, il en est de même de $\mathrm{W}_k^{\mathrm{S}}\phi$. Pour montrer que $\mathrm{W}_k^{\mathrm{S}}\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^\nu)$, il suffit donc de montrer que les k premières dérivées de

$(Z_k^S\phi)(x) = \phi(x) - (W_k^S\phi)(x)$ tendent vers zéro lorsque $d(x, S) \longrightarrow 0$, [7]. Montrons-le sous la forme utilisée au paragraphe suivant :

PROPOSITION (IV.3.8). – *Soit* S *un ensemble fermé,* $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$: $\forall A > 0$, $\exists$ *des constantes positives* A_2, B_2, C_2 *telles que, lorsque* ϕ *parcourt* $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$ *on ait, pour tout* $x \subset \Omega_S \backslash S$ *et* $|n| \leqslant k$:

$$|D^n(Z_k^S\phi)(x)| \leqslant C_2\ A_2^{|n|}\ B_2^k\ M_{|n|}^{(k)}\ \frac{M_k}{k!}\ d(x, S)^{k-|n|+1}\ .$$

Pour $x \notin S$, on a :

$$(Z_k^S\phi)(x) = \sum_j \phi_{k,j}(x)\,(\phi(x) - (T_{x_j}^k\phi)(x)) = \sum_j \phi_{k,j}(x)\,(R_{x_j}^k\phi)(x) \tag{IV.3.9}$$

La proposition (IV.3.8) est obtenue en appliquant à $(R_{x_j}^k\phi)(x)$, dont les k premières dérivées s'annulent pour $x = x_j$, la proposition (IV.2.1), les relations (II.4.8) : $d(x, x_j) \leqslant C'_1\ d(x, S)$ ainsi que (IV.3.7).

Les calculs sont les mêmes que pour la proposition (IV.3.5).

4. Prolongement de Whitney indéfiniment différentiable.

On donne ici la démonstration du théorème (IV.1.3). A l'aide de la suite $\sigma_k = \dfrac{1}{H\left(\dfrac{M_k}{k!}\right)^{1/k}}$ $(H > 1)$ positive, décroissante et tendant vers zéro lorsque $k \longrightarrow \infty$, on définit les suites de voisinages emboités de S suivantes :

$$\omega_k(\text{resp}^t\ \omega'_k) = \left\{ x \in \mathbf{R}^\nu \,|\, d(x, S) \leqslant \sigma_k \left(\text{resp}^t \leqslant \frac{\sigma_k}{2}\right) \right\}\ .$$

Si l'on trouve une suite $\{R_k\}_{k\in\mathbf{N}_+}$ de fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^\nu$, nulles sur ω'_k, égales à $W_{k+1}^S\phi - W_k^S\phi$ en dehors de ω_k, et, pour tout compact $K \subset \Omega_S$ une suite positive $\{\epsilon_k\}$ dont la série converge, telle que

$$\sup_{\substack{|n|\leqslant k \\ x\in K}} |D^n\{(W_{k+1}^S\phi)(x) - (W_k^S\phi)(x) - R_k(x)\}| \leqslant \epsilon_k\ ,$$

alors, la fonction $W_S\phi$ définie par :

$$(W_S\phi)(x) = (W^S\phi)(x) + \sum_{k\geqslant 0} \{(W^S_{k+1}\phi)(x) - (W^S_k\phi)(x) - R_k(x)\}$$

est indéfiniment différentiable dans Ω_S ; en effet :

$$\begin{aligned}|D^n(W_S\phi)(x)| &= |D^n\{(W^S_{|n|}\phi)(x) - (R_0(x) + \ldots + R_{|n|-1}(x)) \\ &\qquad + \sum_{k\geqslant |n|} ((W^S_{k+1}\phi)(x) - (W^S_k\phi)(x) - R_k(x))\}| \\ &\leqslant |a_{|n|}| + |B_{|n|}| + \sum_{k\geqslant |n|} \epsilon_k \leqslant d_{|n|} < \infty .\end{aligned}$$

Prenons :

$$R_k(x) = (1 - \mathcal{W}^S_k(x))\,((W^S_{k+1}\phi)(x) - (W^S_k\phi)(x)) \qquad \text{(IV.4.1)}$$

où les fonctions $\mathcal{W}^S_k$ sont construites en (II.4.3).

On peut donc écrire $W_S\phi$ sous la forme :

$$\begin{aligned}(W_S\phi)(x) &= (W^S_0\phi)(x) \\ &\quad + \sum_{k\geqslant 0} \mathcal{W}^S_{k+1}(x)\,\{(W^S_{k+1}\phi)(x) - (W^S_k(\phi)(x)\}\end{aligned} \qquad \text{(IV.4.2)}$$

ou, en posant $\mathcal{W}_0(x) \equiv 1$ et réordonnant les p premiers termes :

$$\begin{aligned}(W_S\phi)(x) &= \sum_{k<p} \{\mathcal{W}^S_k(x) - \mathcal{W}^S_{k+1}(x)\}\,(W^S_k\phi)(x) \\ &\quad + \mathcal{W}^S_p(x)\,(W^S_p\phi)(x) + \sum_{k\geqslant p} \mathcal{W}^S_{k+1}(x)\,\{(W^S_{k+1}\phi)(x) - (W^S_k\phi)\}(x)\end{aligned} \qquad \text{(IV.4.3)}$$

La linéarité de $\phi \longrightarrow W_S\phi$, ainsi que les parties i) et ii) du théorème (IV.1.3) sont évidentes ; pour le reste, on montre d'abord la continuité des dérivées de $W_S\phi$ à la frontière de S, ensuite les parties iii) et iv).

– Comme au paragraphe précédent, on pose : $Z_S\phi = \phi - W_S\phi$, alors :

$$(Z_S\phi)(x) = (Z^S_0\phi)(x) + \sum_{k\geqslant 0} \mathcal{W}^S_{k+1}(x)\,\{(Z^S_{k+1}\phi)(x) - (Z^S_k\phi)(x)\}$$

Dans ω'_p on a : $\mathcal{W}^S_1(x) = \mathcal{W}^S_2(x) = \ldots = \mathcal{W}^S_p(x) = 1$.

Par conséquent, dans $\omega'_p\setminus S$:

$$(Z_S\phi)(x) = (Z^S_p\phi)(x) + \sum_{k\geqslant p} \mathcal{W}^S_{k+1}(x)\,\{(Z^S_{k+1}\phi)(x) - (Z^S_k\phi)(x)\} \qquad \text{(IV.4.4)}$$

et, de façon évidente :

$$|D^n(Z_S\phi)(x)| \leqslant |D^n(Z_p^S\phi)(x)| + \sum_{\substack{k\geqslant p\\ \alpha+\beta=n}} \binom{n}{\alpha} |D^\alpha \mathcal{W}_{k+1}^S(x)|\,|D^\beta(Z_{k+1}^S\phi)(x)|\,.$$

Chaque terme de la somme précédente $\left(\sum_{k\geqslant p}\ldots\right)$ n'est différent de zéro que pour $d(x, S) < \sigma_k$ (puisque $\operatorname{supp}\mathcal{W}_k^S \subset \omega_k$). Prenant $p \geqslant |n|$ on obtient, grâce à la proposition (IV.3.8), pour ϕ parcourant $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, A, M_n)$: $\exists$ des constantes positives C_2, A_2, B_2 telles que, pour tout $\beta \leqslant n$: $|D^\beta(Z_k^S\phi)(x)| \leqslant C_2(H A_2)^{|\beta|}\left(\frac{B_2}{H}\right)^k M_{|\beta|}$.

Utilisant la partie iii) de la proposition (II.4.3), on obtient dans ω'_p :

$$|D^n(Z_S\phi)(x)| \leqslant C_2(H A_2)^{|n|}\left(\frac{B_2}{H}\right)^p M_{|n|} + C_1 C_2 [H(A_2+G_1)]^{|n|} M_{|n|} \sum_{k\geqslant p}\left(\frac{B_1 B_2}{H}\right)^k \tag{IV.4.5}$$

Prenant alors H tel que $\eta = \dfrac{B_1 B_2}{H} < 1$ on obtient : $|D^n(Z_S\phi)(x)| \leqslant C_3 A_3^{|n|} M_{|n|} \sum_{k\geqslant p} \eta^k$ qui montre que lorsque $p \longrightarrow \infty$ (c'est-à-dire $d(x, S) \longrightarrow 0$) les dérivées de $Z_S\phi$ tendent vers zéro.

– Pour montrer la partie iii) du théorème (IV.1.4), écrivons pour $x \notin S$, $W_k^S\phi$ sous la forme : $(W_k^S\phi)(x) = (T_{x*}^k\phi)(x) + (Y_k^S\phi)(x)$.

Ceci donne, pour $W_S\phi$ $(x \notin S)$:

$$\begin{aligned}(W_S\phi)(x) = &\sum_{|q|\geqslant 0} \mathcal{W}_{|q|}^S(x)\,\frac{(x-x^*)^q}{q!}\,D^q\phi(x^*)\\ &+ \sum_{k<p} (\mathcal{W}_k^S(x) - \mathcal{W}_{k+1}^S(x))\,(Y_k^S\phi)(x) + \mathcal{W}_p^S(x)\,(Y_p^S\phi)(x)\\ &+ \sum_{k\geqslant p} \mathcal{W}_{k+1}^S(x)\,\{(Y_{k+1}^S\phi)(x) - (Y_k^S\phi)(x)\}\end{aligned} \tag{IV.4.6}$$

Désignons le premier terme de cette expression par $W_{\{x*\}}\phi$ (par abus de langage), par ϕ_p le deuxième, par ψ_p le reste ; et prenons $p \geqslant |n|$ pour estimer $D^n(W_S\phi)(x)$.

Puisque pour tout k la fonction $(\mathcal{W}_k^{\mathrm{S}} - \mathcal{W}_{k+1}^{\mathrm{S}})$ s'annule pour $d(x\,,\mathrm{S}) \geqslant \sigma_k$ et $d(x\,,\mathrm{S}) \leqslant \dfrac{\sigma_k}{2\mathrm{B}}$, on a, en appliquant la proposition (IV.3.5) à chaque terme de $\mathrm{D}^n \phi_p$: $\forall$ le compact $\mathrm{L} \subset \Omega_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{A} > 0$; $\exists$ un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{S}$ et des constantes positives C_2', A_2', B_2' telles que :

$$\sup_{x \in \mathrm{L}\setminus\mathrm{S}} |\mathrm{D}^\beta(\mathrm{Y}_k^{\mathrm{S}}\phi)\,(x)| \leqslant \mathrm{C}_2' \left(\frac{\mathrm{A}_2'\mathrm{H}}{2\mathrm{B}}\right)^{|\beta|} \left(\frac{\mathrm{B}_2'}{\mathrm{H}}\right)^k \mathrm{M}_{|\beta|}\, \|\phi\|_{\mathrm{K},\mathrm{A}}$$

qui, avec la proposition (II.4.4) donne :

$$\sup_{x \in \mathrm{L}\setminus\mathrm{S}} |\mathrm{D}^n \phi_p(x)|$$
$$\leqslant \mathrm{C}_1'\,\mathrm{C}_2' \left[\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{A}_1' + \mathrm{G}_1'}{2\mathrm{B}}\right)\right]^{|n|} \mathrm{M}_{|n|}\, \|\phi\|_{\mathrm{K},\mathrm{A}} \sum_{k \geqslant p} \left(\frac{\mathrm{B}_1'\,\mathrm{B}_2'}{\mathrm{H}}\right)^k \qquad \text{(IV.4.7)}$$

Pour ψ_p on a, comme pour l'expression (IV.4.4) : $\forall x \in \Omega_{\mathrm{S}}\setminus\mathrm{S}$

$$|\mathrm{D}^n \psi_p(x)| \leqslant a \sum_{\substack{k \geqslant p \\ \alpha+\beta=n}} \binom{n}{\alpha} |\mathrm{D}^\alpha \mathcal{W}_k^{\mathrm{S}}(x)|\; |\mathrm{D}^\beta(\mathrm{Y}_k^{\mathrm{S}}\phi)\,(x)|\,.$$

Puisque $p \geqslant |n|$, $d(x\,,\mathrm{S})$ n'intervient dans $\mathrm{D}^\beta(\mathrm{Y}_k^{\mathrm{S}}\phi)$ qu'à des puissances positives ; il suffit alors, dû au support des $\mathcal{W}_k^{\mathrm{S}}$, d'écrire dans chaque terme indexé par k : $d(x\,,\mathrm{S}) \leqslant \sigma_k$ pour obtenir, de la même façon qu'on a obtenu (IV.4.5) :

$$\sup_{x \in \mathrm{L}\setminus\mathrm{S}} |\mathrm{D}^n \psi_p(x)|$$
$$\leqslant \mathrm{C}_1\,\mathrm{C}_2'\,[\mathrm{H}(\mathrm{G}_1 + \mathrm{A}_2')]^{|n|}\, \mathrm{M}_{|n|}\, \|\phi\|_{\mathrm{K},\mathrm{A}} \sum_{k \geqslant p} \left(\frac{\mathrm{B}_1\,\mathrm{B}_2'}{\mathrm{H}}\right)^k. \qquad \text{(IV.4.8)}$$

Prenant alors H tel que : $\chi = \min\left(\dfrac{\mathrm{B}_1\,\mathrm{B}_2'}{\mathrm{H}}, \dfrac{\mathrm{B}_1'\,\mathrm{B}_2'}{\mathrm{H}}\right) < 1$ (condition qui s'ajoute à $\eta = \dfrac{\mathrm{B}_1\,\mathrm{B}_2}{\mathrm{H}} < 1$ imposé dans (IV.4.5)), on en conclut que : $\exists$ des constantes positives A_4, C_4 telles que, $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$ et $\forall p \in \mathbf{N}_+$:

$$\sup_{x \in \mathrm{L}\setminus\mathrm{S}} |\mathrm{D}^n(\phi_p(x) + \psi_p(x))| \leqslant \mathrm{C}_4\,\mathrm{A}_4^{|n|}\,\mathrm{M}_{|n|}\, \|\phi\|_{\mathrm{K},\mathrm{A}}\,. \qquad \text{(IV.4.9)}$$

De la même manière, on obtient des estimations analogues pour les dérivées de $\mathrm{W}_{\{x_*\}}\phi$, donc : $\forall \mathrm{A} > 0, \exists \mathrm{C}_0 > 0$ et $\mathrm{A}_0 > 0$ t.q. : $\|\mathrm{W}_{\mathrm{S}}\phi\|_{\mathrm{L}\setminus\mathrm{S},\mathrm{A}_0} \leqslant \mathrm{C}_0\, \|\phi\|_{\mathrm{K},\mathrm{A}}$.

Ce résultat – et la continuité des dérivées de $\mathrm{W}_{\mathrm{S}}\phi$ à la frontière de S, laquelle nous autorise à remplacer $\mathrm{L}\setminus\mathrm{S}$ par $\mathrm{L} \subset \mathrm{M}_{\mathrm{S}}$ – achève la démonstration de la partie iii) du théorème (IV.1.3) et démontre la continuité de l'application $\phi \longrightarrow W_S \phi$.

• Pour montrer la partie iv) du théorème (IV.1.3), il suffit de montrer que le support de $\alpha_S \times W_S \phi$ est compact ; or, ceci résulte immédiatement de ce que, pour tout $x \in \Omega_S \backslash S$ et tout j : $d(x, x_j) \leqslant c_1 \, d(x, S) \leqslant c_1$.

En effet, soit K_0 le support compact de ϕ, tout point $x \in \operatorname{supp} \alpha_S$ tel que $d(x, K_0) > c_1$ possède un voisinage dans lequel $W_S \phi = 0$, car dans ce voisinage, tous les $(T^k_{x_j} \phi)$ sont nuls. L'ensemble $\operatorname{supp} \alpha_S \cap \operatorname{supp} W_S \phi$ est donc compact.

5. Réciproque du théorème de décomposition.

Considérons les fonctions f_k définies en (II.3.2). On rappelle que : $f_k(x) = a_k \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \right)$ où les a_k sont définies sur R, analytiques dans le domaine $]-1, +1[\backslash\{0\}$, nulles pour $|x| \geqslant 1$ et paires ; de plus :

– $a_k(0) = 1$ et $a_k(x) > 0$ pour $|x| < 1$.

– les a_k décroissent lorsque x s'éloigne de l'origine et leurs dérivées satisfont les inégalités (II.3.1).

On définit la suite de fonctions $\{g_k\}_{k \in \mathbf{N}_+}$ par : $g_k(x) = f_k \left(\frac{x}{\sigma_k} \right)$ où $\sigma_k = \frac{1}{H} \left(\frac{k\,!}{M_k} \right)^{1/k}$, $H \geqslant 1$, dont les propriétés sont de manière évidente :

$$- g_k(0) = 1 \ ; \ g_k(x) \geqslant 0 \begin{cases} g_k(x) < 1 & \text{pour} \quad \|x\| \neq 0 \\ g_k(x) > 0 & \text{pour} \quad \|x\| < \sigma_k \\ g_k(x) = 0 & \text{pour} \quad \|x\| \geqslant \sigma_k \end{cases}$$

– g_k est analytique dans $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(0, \sigma_k)\backslash\{0\}$: pour tout ouvert inclus dans cet ensemble, il existe donc des constantes positives A, B, C donnant lieu pour tout $n \in \mathbf{N}_+^{\nu}$ aux relations :

$$|D^n g_k(x)| \leqslant C \, A^{|n|} \, B^k \, |n|\,! \qquad \text{(IV.5.1)}$$

– Par ailleurs, il existe des constantes positives A_1, B_1, C_1, telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}_+^{\nu}$, $k \in \mathbf{N}_+$ et $x \in \mathbf{R}^{\nu}$:

$$|D^n g_k(x)| \leqslant C_1 \, A_1^{|n|} \, B_1^k \, M_{|n|} \qquad \text{(IV.5.2)}$$

Soit x_2 un point de $\mathbf{R}^\nu$. On pose pour la suite

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k^{\{x_2\}}(x) &= 1 - g_k(x - x_2) \\ h_\epsilon^{\{x_2\}}(x) &= g_1\left(\frac{x - x_2}{2\epsilon}\right) \; ; \; \epsilon > 0 \end{aligned}\right\} \tag{IV.5.3}$$

PROPOSITION (IV.5.4). — *Il existe des constantes positives* A_0, C_0, E_0, *un nombre* $\mu > 0$ *et, pour tout* $x_1 \neq x_2$ *un entier* k_0 *tels que* : $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$:

$$|D^n \alpha_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)| \leqslant C_0 A_0^{|n|} M_{|n|} \inf_{q \in \mathbf{N}_+} \left(E_0^q \, d(x_1, x_2)^q \, \frac{M_q}{q!}\right)$$

et $\alpha_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1) \geqslant \mu$.

Pour la démonstration, on distingue les deux cas suivants :

α) $d(x_1, x_2) > 1$: On a alors, pour tout k, $d(x_1, x_2) > \sigma_k$ et, prenant $k_0 = 1$: $\forall q \in \mathbf{N}_+$:

$$\begin{aligned} |D^n \alpha_1^{\{x_2\}}(x_1)| &\leqslant C_1 \frac{d(x_1, x_2)^q}{q!} A_1^{|n|+q} M_{|n|+q} \\ &\leqslant C_1 (A_1 B)^{|n|} M_{|n|} \inf_{q \in \mathbf{N}_+} \left((A_1 B)^q \, d(x_1, x_2)^q \, \frac{M_q}{q!}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, $g_1(x_1 - x_2) \leqslant a_1 \left(\frac{1}{H}\right) \leqslant \eta_1 < 1$ donc

$$\alpha_1^{\{x_2\}}(x_1) \geqslant 1 - \eta_1 = \mu_1 > 0.$$

β) *Cas où* $d(x_1, x_2) \leqslant 1$: Il existe une constante $b > 0$ et, pour tout $x_1 \neq x_2$ un entier k_0 tel que : $b\,\sigma_{k_0} \leqslant d(x_1, x_2) \leqslant \sigma_{k_0}$.

Alors : $g_{k_0}(x_1 - x_2) = a_{k_0}\left(\dfrac{d(x_1, x_2)}{\sigma_{k_0}}\right) \leqslant a_{k_0}(b) = \eta_2 < 1$, donc :. $\alpha_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1) \geqslant 1 - \eta_2 = \mu_2 > 0$.

Estimons les dérivées de $\alpha_{k_0}^{\{x_2\}}$ au point x_1 ; pour tout $q \in \mathbf{N}_+$ et tout $n \in \mathbf{N}_+^\nu$:

$$|D^n \alpha_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)| \leqslant C_1 \frac{d(x_1, x_2)^q}{q!} B_1^{k_0} A_1^{|n|+q} M_{|n|+q} \tag{IV.5.5}$$

— pour n tel que $|n| \leqslant k_0$, il suffit, pour obtenir l'estimation recherchée, d'écrire que : $B_1^{k_0} \leqslant B_1^{|n|}$.

– pour n tel que $|n| > k_0$, on prend $q = k_0 + p$ où p est un entier quelconque, alors, avec (II.1.3) :

$$M_{|n|+p+k_0} \leqslant B^{2n+2p+k_0} M_{|n|} M_p M_{k_0}, \quad p!\,k_0! \leqslant p+k_0!$$

et $d(x_1, x_2) \leqslant \sigma_{k_0}$, on obtient :

$$|D^n \alpha_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)| \leqslant (A_1 B^2)^{|n|} M_{|n|}$$

$$\operatorname*{Inf}_{p \in \mathbf{N}_+} \left((A_1 B^2)^p \, d(x_1, x_2)^p \, \frac{M_p}{p!}\right) \cdot \left((A_1 B_1 B)^{k_0} \, \sigma_{k_0}^{k_0} \, \frac{M_{k_0}}{k_0!}\right)$$

Le résultat cherché est obtenu en prenant $H \geqslant A_1 B_1 B$.

Définissons enfin la suite $\phi_k^{\{x_2\}}$ par :

$$\phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x) = \alpha_k^{\{x_2\}}(x) \times h_\epsilon^{\{x_2\}}(x), \quad \text{où } \epsilon \geqslant d(x_1, x_2).$$

De la proposition (IV.5.4), il suit :

COROLLAIRE (IV.5.6). – $\forall F > 0$, *il existe des constantes positives* C, A, J *telles que,* $\forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$:

$$|D^n \phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)| \leqslant C\, A^{|n|} M_{|n|} \operatorname*{Inf}_{q \in \mathbf{N}_+} \left(J^q \, d(x_1, x_2)^q \, \frac{M_q}{q!}\right) \sup_{p \in \mathbf{N}_+} \left(\frac{p!}{F^p \epsilon^p M_p}\right)$$

et $\phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1) \geqslant \dfrac{\mu}{2}$.

La deuxième inégalité suit immédiatement la relation $\alpha_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1) \geqslant \mu$ et le fait que $h_\epsilon^{\{x_2\}}(x_1) \geqslant a_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ puisque $\epsilon \geqslant d(x_1, x_2)$.

Montrons les estimations sur les dérivées de $\phi_{k_0}^{\{x_2\}}$:

• Il existe un voisinage ω de x_1 dans lequel $h_\epsilon^{\{x_2\}}$ est analytique, ce qui se traduit par :

$$\forall \beta \in \mathbf{N}_+^\nu : |D^\beta h_\epsilon^{\{x_2\}}(x_1)| \leqslant \frac{C_2 A_2^{|\beta|} \, |\beta|!}{\epsilon^{|\beta|}} \quad \forall x \in \omega.$$

Ceci donne :

$$|D^n \phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)|$$

$$\leqslant C_0 C_2 \operatorname*{Inf}_q \left(E_0^q \, d(x_1, x_2)^q \, \frac{M_q}{q!}\right) \cdot \sum_{\alpha+\beta=n} \binom{n}{\alpha} A_0^{|\alpha|} A_2^{|\beta|} \frac{M_{|\alpha|} \, |\beta|!}{\epsilon^{|\beta|}}$$

Avec $M_{|\alpha|} \leqslant \dfrac{M_{|n|}}{M_{|\beta|}}$ et introduisant une constante arbitraire $F > 0$, on trouve :

$$|D^n \phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)| \leqslant C_0 C_2 (A_0 + A_2 F)^{|n|} M_{|n|}$$

$$\operatorname*{Inf}_{q \in \mathbf{N}_+} \left(E_0^q \, d(x_1, x_2)^q \frac{M_q}{q!} \right) \sup_{p \in \mathbf{N}_+} \left(\frac{p!}{F^p \epsilon^p M_p} \right).$$

Pour démontrer la réciproque du théorème de décomposition (IV.1.1), procédons par l'absurde : Supposons donc que, quelles que soient les constantes positives D, G, il existe $E > 0$ et un couple de points (x_1, x_2) de S joints par une courbe de longueur $l(x_1, x_2)$ tels que :

$$\operatorname*{Inf}_{n \in \mathbf{N}_+} \left(E^n \, l(x_1, x_2)^n \frac{M_n}{n!} \right) > D \operatorname*{Inf}_{m \in \mathbf{N}_+} \left(G^m \, d(x_1, x_2)^m \frac{M_m}{m!} \right) \quad \text{(IV.5.7)}$$

et prenons pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ portée par S la fonctionnelle suivante :

$$T = \sum_{n \in \mathbf{N}_+^\nu} a_n \{ \delta_{x_1}^{(n)} + \delta_{x_2}^{(n)} \} \quad \text{(IV.5.8)}$$

où la suite a_n satisfait à : $\forall A > 0 \; ; \; \sum_n A^{|n|} |a_n| M_{|n|} < \infty$.

Appliquons T à la fonction $\phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x)$ dans laquelle on prend $\epsilon = l(x_1, x_2)$ et posons : $a_0 = 1$, $a_n = (-1)^n |a_n| \operatorname{sgn}(D^n \phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1))$.

Comme $\phi_{k_0}^{\{x_2\}}$ et toutes ses dérivées s'annulent en x_2, $T(\phi_{k_0}^{\{x_2\}})$ se réduit à : $T(\phi_{k_0}^{\{x_2\}}) = \phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1) + \sum_{|n| \geqslant 1} |a_n| . |D^n \phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)|$. On a donc : $T(\phi_{k_0}^{\{x_2\}}) \geqslant \frac{\mu}{2}$. (IV.5.9)

D'autre part, appliquant (IV.5.7) aux estimations du corollaire (IV.5.6), on obtient pour un couple de points (x_1, x_2) et un entier k_0 : $|D^n \phi_{k_0}^{\{x_2\}}(x_1)| < \frac{C}{D} A^{|n|} M_{|n|}$ où A et C sont fixés et D arbitraire.

Si on prend alors $D = \frac{8}{\mu C}$ et $|a_n| \leqslant \frac{1}{2^{|n|} A^{|n|} M_n}$ (IV.5.10)

on obtient $T(\phi_{k_0}^{\{x_2\}}) < \frac{\mu}{4}$ (IV.5.11) ce qui est en contradiction avec (IV.5.9). La réciproque de (IV.1.1) est donc démontrée.

V. DECOUPAGE DU SUPPORT DES ULTRADISTRIBUTIONS

1. Enoncé des résultats.

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME (V.1.1). – *Soient* $S \subset \mathbf{R}^\nu$ *un ensemble fermé,* $\{M_n\} \in \mathfrak{F}$, *et* (S^+, S^-) *une partition à deux sous-ensembles fermés de* S.

(i) *une condition nécessaire et suffisante pour que tout élément* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *porté par* S *puisse être décomposé en* $T = T^+ + T^-$ *avec* $T^\pm \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *et* $\operatorname{supp} T^\pm \subset S^\pm$, *est que* S^+ *et* S^- *soient* M-*régulièrement séparés par* $\Lambda = S^+ \cap S^-$.

(ii) *cette décomposition n'est pas unique. Elle est déterminée à un élément de* $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ *porté par* $S^+ \cap S^-$ *près.*

Pour la démonstration, on a besoin des résultats qui suivent :

LEMME (V.1.2). – *Si* S^+ *et* S^- *sont deux ensembles fermés de* $\mathbf{R}^\nu$, M-*régulièrement séparés par* $\Lambda = S^+ \cap S^-$ $(\{M_n\} \in \mathfrak{F})$, *on peut construire une fonction* Ш *définie et indéfiniment différentiable sur* $\mathbf{R}^\nu \backslash \Lambda$ *satisfaisant à* :

(i) $$Ш(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{dans un voisinage } u^+ \textit{ de } S^+\backslash\Lambda \ (\textit{dans } \mathbf{R}^\nu\backslash\Lambda) \\ 0 \ \textit{dans un voisinage } u^- \textit{ de } S^-\backslash\Lambda \ (\textit{dans } \mathbf{R}^\nu\backslash\Lambda) \end{cases}$$

(ii) *quels que soient le compact* $K \subset \mathbf{R}^\nu$ *et la constante* $E > 0$, *il existe des constantes positives* A, C *telles que, pour tout* $n \in \mathbf{N}_+^\nu$ *et tout* $x \in K\backslash\Lambda$, *on ait* :

$$|D^n Ш(x)| \leqslant \frac{C\, A^{|n|}\, M_{|n|}}{\displaystyle\inf_{p \in \mathbf{N}_+} \frac{(E^p\, d(x, \Lambda)^p\, M_p)}{p!}} .$$

Soit F un ensemble fermé de $\mathbf{R}^\nu$. Désignons par $\mathcal{E}_F(\mathbf{R}^\nu, M_n)$, $\mathcal{D}_F(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ les sous-espaces de fonctions de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$ nulles avec toutes leurs dérivées sur F. Quitte à remplacer Ш par un prolongement quelconque à $\mathbf{R}^\nu$, on a :

PROPOSITION (V.1.3). – *La multiplication par* ш *est une application linéaire continue de* $\mathcal{E}_\Lambda(\mathbf{R}^\nu, \mathrm{M}_n)$ (resp^t $\mathcal{D}_\Lambda(\mathbf{R}^\nu, \mathrm{M}_n)$) *dans lui-même.*

(V.1.2) et (V.1.3) sont démontrés au paragraphe 2). En 3) et 5), on démontre le théorème (V.1.1) ; et en 4) on étudie l'ambiguité liée au découpage.

2. Construction de la fonction ш et multiplicateurs dans $\mathcal{E}_\Lambda(\mathbf{R}^\nu, \mathrm{M}_n)$.

Pour montrer le lemme (V.1.2), on utilise la suite $\{ш_k\}_{k\in\mathbf{N}_+}$ des fonctions construites précédemment (III.2.1) et à nouveau le procédé de sommation de Mittag Leffler ; on pose donc :

$$ш(x) = ш_0(x) + \sum_{k\geq 0} \mathcal{W}^{S^-}_{k+1}(x)\,\{ш_{k+1}(x) - ш_k(x)\}$$

et l'on réordonne cette expression (posant : $\mathcal{W}_0(x) \equiv 1$) :

$$ш(x) = \sum_{k<p} \{\mathcal{W}^{S^-}_k(x) - \mathcal{W}^{S^-}_{k+1}(x)\}\, ш_k(x) + ш_p(x)\,\mathcal{W}^{S^-}_p(x) + \sum_{k\geq p} \mathcal{W}^{S^-}_{k+1}(x)\,(ш_{k+1}(x) - ш_k(x)). \qquad (V.2.1)$$

La partie i) du lemme (V.1.2) est immédiate. En effet, d'après (III.2.1), $\forall k\in\mathbf{N}_+$ et $x\in u^+$, $ш_k(x) = 1$, (V.2.1) se réduit donc à : $ш(x) = ш_0(x) = 1$. Sur $u^- = \mathbf{R}^\nu\backslash \mathrm{V}^+$, on a : $ш(x) = 0$ car $\forall k\in\mathbf{N}_+$, $ш_k(x) = 0$.

Démontrons la partie ii) : d'après la partie iv) de (III.2.1) et la partie ii) de (II.4.4), on a, pour tous $k\in\mathbf{N}_+$, $n\in\mathbf{N}_+^\nu$ et $x\in \mathrm{K}\backslash\Lambda$:

$$|\mathrm{D}^n\{(\mathcal{W}^{S^-}_k(x) - \mathcal{W}^{S^-}_{k+1}(x))\, ш_k(x)\}| \leq \mathrm{C}_1 \sum_{\alpha+\beta=n} \binom{n}{\alpha} a^{|\alpha|}\, \mathrm{G}^{|\beta|}\, \frac{(b\mathrm{B}_1)^k\, \mathrm{M}^{(k)}_{|\alpha|}\, \mathrm{M}^{(k)}_{|\beta|}}{\sigma_k^{|\alpha|}\, d(x, \mathrm{S}^-)^{|\beta|}}.$$

Puisque $(\mathcal{W}^{S^-}_k(x) - \mathcal{W}^{S}_{k+1}(x))$ est nul pour $d(x, \mathrm{S}^-) \geq \sigma_k$ et $d(x, \mathrm{S}^-) \leq \frac{\sigma_k}{2\mathrm{B}}$, il existe une constante B_2 telle que, dans tous les termes, que $k - |\beta|$ soit positif ou négatif, on puisse poser :

$1 \leqslant \dfrac{(B_2 \sigma_k)^{k-|\beta|}}{d(x, S^-)^{k-|\beta|}}$ · Alors, pour toute constante $J > 0$:

$$|D^n \{(\wp_k^{S}(x) - \wp_{k+1}^{S^-}(x))\, ш_k(x)\}|$$

$$\leqslant C_1 H^{|n|} M_{|n|} \left(\frac{JbB_1B_2}{H}\right)^k \left(\frac{k!}{J^k d(x, S^-)^k M_k}\right) \times \sum_{\alpha+\beta=n} \binom{n}{\alpha} a^{|\alpha|} \left(\frac{G}{B_2}\right)^{|\beta|}.$$

Prenant H tel que $\left(\dfrac{JbB_1B_2}{H}\right) = \eta < 1$, et posant $H\left(a + \dfrac{G}{B_2}\right) = A_1$, on obtient, pour le premier terme de (V.2.1) :

$$|D^n \sum_{k<p} (\wp_k^{S^-}(x) - \wp_{k+1}^{S^-}(x))\, ш_k(x)| \leqslant \frac{C_1 A_1^{|n|} M_{|n|}}{\operatorname*{Inf}_{q \in \mathbf{N}_+} \dfrac{(J^q d(x, S^-)^q M_q)}{q!}} \sum_{k<p} \eta^k .$$

• Prenant alors, dans la décomposition (V.2.1) $p \geqslant |n|$ et utilisant le fait que $\wp_k^{S^-}(x)$ est nul pour $d(x, S^-) \geqslant \sigma_k$, on obtient des estimations analogues pour les dérivées de la somme des termes restants de $ш(x)$, c'est-à-dire avec $\sum_{k=0}^{\infty} \eta^k < \infty$: $\forall J > 0$, il existe C_2, A_2 tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}_+^\nu$ et $x \in K \backslash \Lambda$:

$$|D^n ш(x)| \leqslant \frac{C_2 A_2^{|n|} M_{|n|}}{\operatorname*{Inf}_{q \in \mathbf{N}_+} \left(\dfrac{J^q d(x, S^-)^q M_q}{q!}\right)} . \tag{V.2.2}$$

$ш$ étant nulle sur $u^- = \mathbf{R}^\nu \backslash V^+$, la propriété de séparation M-régulière de $V^+ \cup \Lambda$ et S^- par Λ ((partie ii) de (III.2.1)), permet alors de conclure.

Pour démontrer la proposition (V.1.3), on peut se limiter au voisinage de Λ : $\Omega_\Lambda = \{x \in \mathbf{R}^\nu\ d(x, \Lambda) < 1\}$. Utilisant les propositions (IV.2.1) et (IV.2.2) on a, pour $\phi \in \mathcal{E}_\Lambda(\Omega_\Lambda, M_n)$: Quels que soient le compact $K \subset \Omega_\Lambda$ et la constante $G > 0$, il existe un compact $K' \subset \Omega_\Lambda$ et des constantes A_1, C_1, E_1 telles que, pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbf{N}_+^\nu$:

$$|D^n \phi(x)| \leqslant C_1 A_1^{|n|} M_{|n|}\, d(x, \Lambda) \operatorname*{Inf}_{q \in \mathbf{N}_+} \left(E_1^q\, d(x, \Lambda)^q \frac{M_q}{q!}\right) \|\phi\|_{K', G} ,$$

ce qui donne, avec (V.1.2) point ii) dans lequel on prend $E \geqslant E_1$, et on pose $A_2 = A + A_1$ et $C_2 = CC_1$:

$$|D^n(\phi \times ш)(x)| \leqslant C_2 A_2^{|n|} M_{|n|}\, d(x, \Lambda)\, \|\phi\|_{K',G}, \quad \forall n \in \mathbf{N}_+^\nu$$

et $x \in K \backslash \Lambda$.

Ceci montre, d'une part, la continuité des dérivées de $(\phi \times ш)(x)$ à la frontière de Λ et, d'autre part : $\|\phi \times ш\|_{k\backslash\Lambda, A_2} \leqslant C_2 \|\phi\|_{K',G}$ et implique donc : $\forall K \subset \Omega_\Lambda$ et $G > 0$, $\exists K' \subset \Omega_\Lambda$ et C_2, A_2 tels que $\|\phi \times ш\|_{K,A_2} \leqslant C_2 \|\phi\|_{K',G}$ qui démontre (V.1.3).

3. Condition suffisante pour le découpage du support des ultradistributions.

Grâce à l'existence d'une partition de l'unité dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu, M_n)$, on peut supposer S inclus dans Ω_Λ. Soient $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\Lambda, M_n)$, $W_\Lambda \phi$ le prolongement de Whitney de ϕ construit en (V.4), et α_Λ une fonction indéfiniment différentiable, de classe M_n, égale à 1 dans un voisinage de Λ et à support dans Ω_Λ. L'application $\phi \longrightarrow \phi^+ = ш \times (\phi - \alpha_\Lambda \times W_\Lambda \phi)$ est donc une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega_\Lambda, M_n)$ dans lui-même. On définit T^+ et T^- par :

$$T^+(\phi) = T(\phi^+) \text{ et } T^- = T - T^+ \qquad \text{(V.3.1)}$$

T^+ et $T^- \in \mathcal{D}'(\Omega_\Lambda, M_n)$, montrons que : α) T^+ coïncide avec T sur $\Omega_\Lambda \backslash S^-$, β) le support de T^+ est inclus dans S^+.

α) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\Lambda \backslash S^-, M_n)$; ϕ et toutes ses dérivées s'annulent sur S^- et donc sur Λ, ce qui implique :

$$W_\Lambda \phi = 0 \quad \text{et} \quad T^+(\phi) = T(ш \times \phi).$$

D'autre part, $(ш - 1) \times \phi$ et toutes ses dérivées sont nulles sur S. Donc, d'après le théorème (IV.1.5) : $T((ш - 1) \times \phi) = 0$ d'où $T^+(\phi) = T(\phi)$.

β) De même, si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\Lambda \backslash S^+, M_n)$: $W_\Lambda \phi \equiv 0$ donc $T^+(\phi) = T(ш \times \phi)$.

D'autre part, $ш \times \phi$ et ses dérivées s'annulant sur S : $T^+(\phi) = 0$.

4. Ambiguité du découpage.

La décomposition (V.3.1) n'est pas unique. Soient α_Λ et α'_Λ deux fonctions à partir desquelles on construit T^+ et T'^+ ; posons

$\Delta T^+ = T'^+ - T^+$ et $\Delta\alpha_\Lambda = \alpha'_\Lambda - \alpha_\Lambda$. On a :

$$\Delta T^+(\phi) = - T(\text{ш} \times \Delta\alpha_\Lambda \times W_\Lambda \phi) \; ;$$

$\Delta\alpha_\Lambda$ étant nulle sur un voisinage de Λ, il existe un voisinage de S^+ sur lequel : $\text{ш} \times \Delta\alpha_\Lambda \times W_\Lambda \phi = \Delta\alpha_\Lambda \times W_\Lambda \phi$; d'où

$$\Delta T^+(\phi) = - T(\Delta\alpha_\Lambda \times W_\Lambda \phi)$$

ΔT^+ est porté par Λ. En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\Lambda \backslash \Lambda, M_n) : W_\Lambda \phi \equiv 0$ et donc : $\Delta T^+(\phi) = 0$. On a évidemment $\Delta T^+ = - \Delta T^-$.

Remarque. – Si Λ est M-régulier, le théorème (IV.1.1) s'applique à ΔT^+ , en particulier si $S^+ \cap S^- = \{0\}$. $\Delta T^+ = \sum\limits_n C_n \, \delta^{(n)}_{\{0\}}$.

5. Démonstration de la réciproque du théorème du découpage.

Procédant par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $E > 0$ et des compacts $K^+ \subset S^+$ et $K^- \subset S^-$ tels que, pour toutes constantes positives C et F, il existe un point $x_1 \in K^+$ pour lequel :

$$\operatorname*{Inf}_{n \in \mathbf{N}_+} \left(E^n \, d(x_1, \Lambda)^n \, \frac{M_n}{n!} \right) > C \operatorname*{Inf}_{m \in \mathbf{N}_+} \left(F^m \, d(x_1, K^-)^m \, \frac{M_m}{m!} \right) \qquad \text{(V.5.1)}$$

• Associé à un tel point x_1, considérons alors un point x_2 de K^- tel que : $d(x_1, K^-) = d(x_1, x_2)$, et prenons pour T une ultradistribution de la forme : $T = \sum\limits_{n \in \mathbf{N}^\nu_+} a_n \{\delta^{(n)}_{x_1} + \delta^{(n)}_{x_2}\}$, qui est de classe M_n si, $\forall A > 0 \; \sum\limits_n A^{|n|} \, |a_n| \, M_{|n|} < \infty$, et admet évidemment la décomposition $T = T^+ + T^-$ avec $\operatorname{supp} T^\pm \subset S^\pm$.

Appliquant alors T à la fonction $\phi^{\{x_2\}}_{k_0}(x)$ construite au paragraphe (IV.5) avec $\epsilon = d(x_1, \Lambda)$ (on a alors $\epsilon \geqslant d(x_1, x_2)$), on arrive, utilisant la proposition (IV.5.4) et son corollaire (IV.5.6), à la même contradiction que celle obtenue au paragraphe (IV.5) entre (IV.5.9) et (IV.5.11), ce qui démontre la nécessité de la séparation M-régulière de S^+ et S^- par Λ.

REMERCIEMENTS

Les problèmes dont il est question ici ont été discutés lors d'un séminaire organisé à Strasbourg dans le cadre de la RCP n° 25 (CNRS) par J.M. Kantor et R. Stora.

Je remercie vivement ce dernier pour l'aide fructueuse qu'il m'a apportée dans l'élaboration de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ch. ROUMIEU, *Ann. Scient. E.N.S.*, 3e série, 77 (1960), 41.

[2] Ch. ROUMIEU, *J. Analyse Math.*, 10 (1962-63), 153-192.

[3] LOJASIEWICZ, *Studia Mathematica*, XVIII (1959), 87-136.

[4] B. MALGRANGE, Séminaire Schwartz (59-60) n° 21 et : Ideals of differentiable Functions, Oxford University Press, (1966).

[5] H. WHITNEY, *Annals of Math.*, 35 (1934), 482 & *Bull. Amer Math. Soc.*, 50-2 (1944).

[6] H. WHITNEY, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1934), 63-89.

[7] L. HORMANDER, *Arkiv för Math.*, 3 (1958), 555-568.

[8] G.A. DZANASIJA, *Soviet Math.*, 3 (1962), 969-972.

[9] H. EPSTEIN, V. GLASER, Preprint TH. 1400 CERN (1971) et *Comm. Math. Phys.*, 27 (1972), 181-194.

[10] A. JAFFE, *Phys. Rev.*, 158, 5 (1967), 1454.

[11] CHIN-CHENG CHOU, *Lecture Notes in Math.*, 325 Springer (1973).

[12] H. KOMATSU (ed.), *Lecture Notes in Math.*, 287 Springer (1973) p. 164.

[13] F. PHAM (ed.), *Lecture Notes in Math.*, vol 449 Springer (1975).

[14] GELFAND, SHILOV, Théorie des Distributions, tome 2 (Dunod).

[15] S. MANDELBROJT, Séries adhérentes – Régularisation des suites – Applications, Gauthier-Villars (1952).

[16] L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions, Hermann (1966).

[17] V.S. VLADIMIROV, Les fonctions de plusieurs variables complexes, Dunod (1967).

[18] A. LAMBERT, Preprint C.P.T. Marseille.

Manuscrit reçu le 13 juillet 1977
révisé le 28 juin 1978.

André LAMBERT,
U.E.R. de Luminy
Groupe de Physique Théorique
Case 907
13288 Marseille Cedex 2.