ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES CHAUMAT

ANNE-MARIE CHOLLET

Ensembles pics pour $A^{\infty}(D)$

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 3 (1979), p. 171-200

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_171_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 171-200

ENSEMBLES PICS POUR $A^{\infty}(D)$

par J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET

Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$, à frontière régulière. Soit A(D) la classe des fonctions analytiques dans D, continues dans $\overline{D}$ et $A^{\infty}(D)$ la classe des fonctions analytiques dans D dont toutes les dérivées sont continues dans $\overline{D}$. On note N une sous-variété du bord ∂D de D dont l'espace tangent $T_p(N)$ est, en chaque point p de N, contenu dans le sous espace complexe maximal de $T_p(\partial D)$.

Indépendamment A. Nagel [11], G. Henkin et A. Tumanov [8] ont prouvé, en supposant N de classe C^3, que tout sous ensemble compact de N est un ensemble pic pour A(D). Peu après, W. Rudin [12] a obtenu le même résultat sous l'hypothèse plus faible, N de classe C^1.

Récemment, M. Hakim et N. Sibony [6] ont obtenu une version locale de ce résultat pour $A^{\infty}(D)$: si N est de classe C^{∞}, pour tout point p de N, il existe un voisinage ω de p tel que tout compact K de $\omega \cap N$ est un ensemble pic pour $A^{\infty}(D)$. Dans le même travail, ils montrent que la réunion de deux ensembles pics pour $A^{\infty}(D)$ n'est pas nécessairement un ensemble pic pour $A^{\infty}(D)$. On ne peut, de ce fait, obtenir un résultat global par un argument simple de compacité, comme dans le cas de A(D).

Dans ce papier, nous montrons que tout compact d'une telle sous-variété N de ∂D est un ensemble pic pour $A^{\infty}(D)$. C'est le théorème 21.

Définitions et notations.

1. D désigne un domaine borné de $\mathbf{C}^n$, strictement pseudo-convexe, à frontière ∂D de classe C^∞. Il existe donc une fonction r, à valeurs réelles, de classe C^∞ dans un voisinage de $\overline{D}$ l'adhérence de D telle que

(1.1) $D = \{z \,;\, r(z) < 0\}$,

(1.2) $\operatorname{grad} r \neq 0$ sur ∂D,

(1.3) r est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D, c'est-à-dire, la forme de Levi de r

$$4 \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \, \partial \overline{z}_k} (z) \, w_j \, \overline{w}_k$$

est définie positive pour tout z dans un voisinage de ∂D.

2. On note

A(D) la classe des fonctions analytiques dans D, continues dans $\overline{D}$,

$A^\infty(D)$ la classe des fonctions analytiques dans D, continues ainsi que leurs dérivées de tous ordres dans $\overline{D}$.

Dans tout ce qui suit, E est un sous-ensemble fermé de ∂D.

3. Un sous ensemble E de ∂D est un ensemble pic pour une classe donnée s'il existe une fonction f de cette classe telle que l'on ait

$$f = 1 \text{ sur } E \qquad \text{et} \qquad |f| < 1 \text{ dans } \overline{D} \backslash E$$

ou, ce qui est équivalent,

$$f = 0 \text{ sur } E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} f > 0 \text{ dans } \overline{D} \backslash E .$$

4. Sauf mention explicite du contraire, les fonctions, variétés, champs de vecteurs étudiés dans la suite seront de classe C^∞.

5. On identifiera naturellement $\mathbf{C}^n$ à $\mathbf{R}^{2n}$ en posant

$$(z_1, \ldots, z_n) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

si on note $z_j = x_j + iy_j$ pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Les vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y_n}$ forment une base de $T_z(\mathbf{C}^n)$ l'espace tangent en z à $\mathbf{C}^n$ considéré comme espace vectoriel réel de dimension $2n$. On définit sur cet espace une structure presque complexe J de la manière suivante. J est un opérateur $\mathbf{R}$-linéaire tel que l'on ait

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Si on identifie, comme on le fera assez fréquemment, les vecteurs tangents en z à $\mathbf{C}^n$ à des vecteurs de $\mathbf{C}^n$, on voit que cet opérateur agit comme la multiplication par i.

On note $CT_z(\mathbf{C}^n)$ le complexifié de $T_z(\mathbf{C}^n)$ c'est-à-dire $T_z(\mathbf{C}^n) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$; c'est un espace vectoriel complexe de dimension $2n$ dont les vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial z_n}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$ forment une base.

On a
$$\overline{\frac{\partial}{\partial z_j}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

On rappelle que $T_z(\mathbf{C}^n)$ n'est autre que l'ensemble des éléments réels de $CT_z(\mathbf{C}^n)$ c'est-à-dire des éléments égaux à leurs conjugués.

J s'étend en un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire sur $CT_z(\mathbf{C}^n)$ tel que l'on ait

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = i\,\frac{\partial}{\partial z_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = -i\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Si on note $(\ ,\ )_{\mathbf{C}}$ le produit scalaire hermitien induit par $\mathbf{C}^n$ sur $CT_z(\mathbf{C}^n)$ et $(\ ,\ )$ le produit scalaire euclidien sur $T_z(\mathbf{C}^n)$, on a

$$(\ ,\ )_{\mathbf{C}} = (\ ,\ ) \tag{5.1}$$

sur $T_z(\mathbf{C}^n)$ considéré comme l'ensemble des éléments réels de $CT_z(\mathbf{C}^n)$.

Le symbole $\|\ \|$ représentera la norme euclidienne dans $T_z(\mathbf{C}^n)$.

6. $\partial D = \{z \in \mathbf{C}^n ; r(z) = 0\}$ est une hypersurface de $\mathbf{C}^n$. On note $T_z(\partial D)$ l'espace tangent en z à ∂D de dimension réelle $2n-1$ et grad $r(z)$ le gradient de r évalué en z.

On pose, pour tout z de ∂D,

$$\chi_z = \operatorname{grad} r(z) \tag{6.1}$$

et on note

$$\tau_z = J\chi_z . \tag{6.2}$$

τ_z appartient à $T_z(\partial D)$ et, puisque r est de classe C^∞, on peut, sans restreindre la généralité, supposer $\|\chi_z\| = \|\tau_z\| = 1$ pour tout z de ∂D.

On désigne par $T_z^c(\partial D)$ le sous espace complexe maximal de l'espace tangent réel $T_z(\partial D)$. Il est de dimension complexe $n-1$ et on a la décomposition orthogonale réelle, en tout point z de ∂D,

$$T_z(\partial D) = \mathbf{R}[\tau_z] \oplus T_z^c(\partial D), \tag{6.3}$$

où $\mathbf{R}[\tau_z]$ est le sous espace vectoriel réel engendré par τ_z. On vérifie en identifiant $T_z^c(\partial D)$ à un sous espace de $\mathbf{C}^n$ que l'on a

$$T_z^c(\partial D) = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n ; \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) = 0 \right\}. \tag{6.4}$$

On note

$\mathbf{C}T_z(\partial D)$ le complexifié de $T_z(\partial D)$,

$$T_z^{1,0}(\partial D) = \left\{ X \in \mathbf{C}T_z(\mathbf{C}^n) ; X = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} ; a_j \in \mathbf{C}, \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) = 0 \right\},$$

$$T_z^{0,1}(\partial D) = \left\{ X \in \mathbf{C}T_z(\mathbf{C}^n) ; X = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} ; a_j \in \mathbf{C}, \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial r}{\partial \overline{z}_j}(z) = 0 \right\}.$$

$T_z^{1,0}(\partial D)$ et $T_z^{0,1}(\partial D)$ sont des sous espaces de $\mathbf{C}T_z(\partial D)$ de dimension complexe $n-1$.

$T_z^c(\partial D)$ est un sous espace réel de dimension $2n-2$ de $T_z(\partial D)$. Il s'identifie donc naturellement à un sous espace réel de $\mathbf{C}T_z(\partial D)$. On a plus précisément $T_z^c(\partial D) = \{\operatorname{Re} X ; X \in T_z^{1,0}(\partial D)\}$. En effet l'inclusion est évidente et les dimensions réelles sont égales. Si X appartient à $T_z^{1,0}$, $\overline{X}$ appartient à $T_z^{0,1}$ donc tout vecteur ξ de $T_z^c(\partial D)$ peut s'écrire

$$\xi = X + \overline{X}, \quad X \in T_z^{1,0}(\partial D), \quad \overline{X} \in T_z^{0,1}(\partial D) \tag{6.5}$$

c'est-à-dire

$$\xi = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^n \overline{a_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial r}{\partial z_j} = 0. \tag{6.6}$$

7. On note $[X, Y]$ le crochet de Lie $XY - YX$ de deux champs de vecteurs tangents à ∂D et on définit sur $T_z^c(\partial D)$ une forme hermitienne en posant

$$L_z(\xi, \eta) = ([X, \overline{Y}]_z, \tau_z)_{\mathbf{C}} \tag{7.1}$$

si $\xi = X + \overline{X}$ et $\eta = Y + \overline{Y}$.

Si η s'écrit

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{n} \overline{b_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \text{ avec } \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial r}{\partial z_j} = 0, \tag{7.2}$$

un calcul simple permet de vérifier que l'on a, d'après (6.2), (6.6) et (7.2),

$$L_z(\xi, \eta) = -2i \sum_{j,k} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \, \partial \overline{z}_k} (z)\, a_j \overline{b}_k . \tag{7.3}$$

On reconnait là, à un coefficient près, la forme de Levi de r évaluée au point z.

Remarques classiques sur la forme de Levi [3], [4], [8].

8. *Remarque.* – Soit ξ et η deux champs de vecteurs de $T^c(\partial D)$ le sous fibré du fibré $T(\partial D)$. Si on pose,

$$F_z(\xi, \eta) = ([J\xi, \eta]_z, \tau_z)$$

et

$$G_z(\xi, \eta) = ([\xi, \eta]_z, \tau_z),$$

on a alors

$$F_z(\xi, \eta) + iG_z(\xi, \eta) = 2i\, L_z(\xi, \eta).$$

Preuve. – $F_z(\xi, \eta) + iG_z(\xi, \eta) = ([J\xi, \eta]_z + i\, [\xi, \eta]_z, \tau_z)$.

D'après (5.1), on a

$$\begin{aligned} F_z(\xi, \eta) + iG_z(\xi, \eta) &= ([J\xi, \eta]_z + i\,[\xi, \eta]_z, \tau_z)_{\mathbf{C}} \\ &= ([iX - i\overline{X}, Y + \overline{Y}]_z + i\,[X + \overline{X}, Y + \overline{Y}]_z, \tau_z)_{\mathbf{C}} \\ &= 2i\,([X, Y]_z, \tau_z)_{\mathbf{C}} + 2i\,([X, \overline{Y}]_z, \tau_z)_{\mathbf{C}} \\ &= 2i\, L_z(\xi, \eta). \end{aligned}$$

On a en effet $([X,Y]_z, \tau_z)_{\mathbf{C}} = 0$. Car le crochet $[X,Y]_z$ de deux champs de vecteurs de $T^{1,0}(\partial D)$ est dans $T^{1,0}(\partial D)$ et si Z est un tel champ on a

$$
\begin{aligned}
(Z_z\,,\tau_z)_{\mathbf{C}} &= (\operatorname{Re} Z_z\,,\tau_z)_{\mathbf{C}} + i(\operatorname{Im} Z_z\,,\tau_z)_{\mathbf{C}}\\
&= (\operatorname{Re} Z_z\,,\tau_z) + i(\operatorname{Im} Z_z\,,\tau_z) = 0\,.
\end{aligned}
$$

9. *Remarque.* – Il existe deux constantes C_0 et c_0, $C_0 \geqslant 1$ et $0 < c_0 \leqslant 1$, ne dépendant que de D, telles que, pour tout champ de vecteurs η de $T^c(\partial D)$, en tout point z de ∂D, on ait

$$C_0 \,\|\eta_z\|^2 \geqslant ([J\eta\,,\eta]_z\,,\tau_z) \geqslant c_0\,\|\eta_z\|^2\,.$$

Preuve. – Puisque D est un domaine strictement pseudoconvexe, à frontière de classe C^∞, il s'agit là d'une conséquence de (1.3), (7.3) et de la remarque 8.

10. *Remarque.* – La partie réelle $([J\xi\,,\eta]_z\,,\tau_z)$ de la forme de Levi définit sur $T_z^c(\partial D)$ un produit scalaire réel que l'on note $\langle\ ,\ \rangle_L$. On peut prolonger ce produit scalaire à $T_z(\mathbf{C}^n)$ en posant, pour tout vecteur ξ_z de $T_z^c(\partial D)$,

$$
\begin{aligned}
&\langle \tau_z\,,\xi_z\rangle_L = 0 \qquad \langle \tau_z\,,\tau_z\rangle_L = 1\,,\\
&\langle \chi_z\,,\xi_z\rangle_L = 0 \qquad \langle \chi_z\,,\chi_z\rangle_L = 1\,,
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

et $$\langle \tau_z\,,\chi_z\rangle_L = 0\,.$$

On a alors, pour tout vecteur ξ_z de $T_z(\mathbf{C}^n)$

$$C_0\,\|\xi_z\|^2 \geqslant \|\xi_z\|_L^2 \geqslant c_0\,\|\xi_z\|^2 \tag{10.2}$$

avec $$\|\xi_z\|_L^2 = \langle \xi_z\,,\xi_z\rangle_L \quad \text{et} \quad \|\xi_z\|^2 = (\xi_z\,,\xi_z)\,.$$

Preuve. – $\langle \xi_z\,,\eta_z\rangle_L = ([J\xi\,,\eta]_z\,,\tau_z) = \operatorname{Re}\, 2i\, L_z(\xi\,,\eta)$. C'est la partie réelle d'une forme hermitienne définie positive puisque D est strictement pseudoconvexe. Elle définit donc un produit scalaire sur $T^c(\partial D)$ et la relation (9.2) est vérifiée d'après la remarque 9.

11. DEFINITIONS. – *Soit* W *un sous espace de* $T_z(\mathbf{C}^n)$. *On note* W^L *le* L*-orthogonal de* W *dans* $T_z(\mathbf{C}^n)$ *c'est-à-dire l'orthogonal de* W *pour le produit scalaire* L *et* P_W *le projecteur* L*-orthogonal de* $T_z(\mathbf{C}^n)$ *sur* W.

Soit f *une fonction de classe* C^1 *au voisinage d'un point* z *de* ∂D *et* df *sa différentielle. On désigne par* $\operatorname{grad}_L f(z)$ *le vecteur de* $T_z(\mathbf{C}^n)$ *tel que l'on ait*

$$df(\xi)(z) = \xi_z f = \langle \mathrm{grad}_L f(z), \xi_z \rangle_L \tag{11.1}$$

pour tout vecteur ξ_z *de* $T_z(\mathbf{C}^n)$.

Variétés totalement réelles.

12. DEFINITION. – *Une sous-variété* V *de* $\mathbf{C}^n$ *est totalement réelle si, en tout point* p *de* V, *on a*

$$T_p(V) \cap JT_p(V) = \{0\}. \tag{12.1}$$

13. *Remarque.* – La dimension réelle maximale d'une sous variété totalement réelle de $\mathbf{C}^n$ est n.

On fera fréquemment usage dans la suite de la proposition suivante due à F.R. Harvey et R.O. Wells [7].

14. PROPOSITION. – *Soit* V *une sous variété de classe* C^∞, *totalement réelle, définie dans un ouvert* ω *de* $\mathbf{C}^n$, *et soit* f *une fonction de classe* C^∞ *sur* V, *alors il existe une fonction* F *de classe* C^∞ *dans* ω *telle que l'on ait*

a) $F = f$ *sur* V,

b) $\bar\partial F$ *s'annule à l'ordre infini sur* V, *c'est-à-dire, pour tout entier* α, *les dérivées d'ordre* α *de* $\bar\partial F$ *sont nulles sur* V.

De plus, si f *est à support compact dans* V, F *est également à support compact dans* ω.

15. On s'intéresse particulièrement dans ce travail aux sous-variétés N de classe C^∞ de ∂D qui vérifient, en chaque point p de N,

$$T_p(N) \subset T_p^c(\partial D). \tag{15.1}$$

D. Burns et L. Stout [2] ont montré qu'une telle sous-variété est nécessairement totalement réelle. De là, puisque $JT_p(N)$ est aussi inclus dans $T_p^c(\partial D)$, la dimension réelle d'une telle sous variété est inférieure ou égale à $n-1$.

Plus précisément, on a la remarque suivante.

16. *Remarque.* – Soit N une sous variété de ∂D vérifiant (15.1) ; alors $T_p(N)$ et $JT_p(N)$ sont L-orthogonaux en chaque point p de N.

Preuve. – Soit ξ_p un vecteur de $JT_p(N)$ et η_p un vecteur de $T_p(N)$. Il existe localement des champs de vecteurs ξ' et η de $T(\partial D)$ tangents à N le long de N tels que, au point p, η_p soit la valeur de η et ξ_p celle de $J\xi'$. On a alors

$$([\xi', \eta]_p, \tau_p) = 0. \tag{16.1}$$

En effet, le crochet de deux champs de vecteurs ξ' et η tangents à N est tangent à N. D'après (15.1), il est dans $T_p^c(\partial D)$; il est donc orthogonal à τ_p et l'on a (16.1). De la définition 10 du produit scalaire L, on déduit

$$\langle \xi_p, \eta_p \rangle_L = 0. \tag{16.2}$$

Le résultat suivant est utilisé par G. Henkin et A. Tumanov [8]. On donne ici quelques indications sur sa preuve.

17. Proposition. – *Soit* N *une sous variété de dimension réelle k de ∂D de classe C^∞ telle que, pour chaque point p de* N, *on ait* $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$.

Alors, pour tout point p_0 de N, *il existe un voisinage ω de p_0 dans $\mathbf{C}_n$ et deux sous-variétés* M *et* $\widetilde{M}$ *de $\partial D \cap \omega$, de classe C^∞, totalement réelles, de dimension réelle respective $n-1$ et n telles que l'on ait*

a) $N \subset M \subset \widetilde{M}$ *dans* ω,

b) $T_p(M) \subset T_p^c(\partial D)$ *pour tout point p de* $M \cap \omega$,

c) $\tau_p \in T_p(\widetilde{M})$ *pour tout point p de* $\widetilde{M} \cap \omega$.

Preuve. – On considère sur ∂D la 1-forme Ω définie par $\Omega(V)(p) = \langle \tau_p, V \rangle_L$, pour tout V de $T_p(\partial D)$. On a $\Omega(V)(p) = 0$ si et seulement si V appartient à $T_p^c(\partial D)$. On peut vérifier que la 2-forme $d\Omega$ est non dégénérée en restriction à $T_p^c(\partial D)$ parce que D est strictement pseudoconvexe. On dit, dans cette situation, [1], [9] que Ω définit une structure de contact sur ∂D. Puisque $\Omega_{|N}$ est nulle, N est une variété intégrale de cette structure de contact et, d'après le paragraphe 15, sa dimension réelle est inférieure ou égale à $n-1$. On montre tout d'abord qu'une telle sous variété est localement contenue dans une sous variété intégrale maximale de dimension réelle $n-1$. Pour cela, on applique le théorème de Darboux [1], [9] : il existe un voisinage ouvert U de p_0 dans ∂D, un voisinage ouvert convexe U_1 de 0 dans $\mathbf{R}^{2(n-1)+1}$ et un difféomorphisme Φ de classe C^∞ de U sur U_1 tels que l'on ait

$$\Phi(p_0) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi^{-1*}(\Omega) = dt + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, dy_i\,, \tag{17.1}$$

avec sur $\mathbf{R}^{2(n-1)+1}$ le système de coordonnées

$$(x_1\,, y_1\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, y_{n-1}\,, t)\,.$$

On pose

$$N_1 = \Phi(N \cap U) \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \Phi^{-1*}(\Omega)\,. \tag{17.2}$$

La sous variété N_1 est de dimension k dans U_1 et vérifie $\Omega_{1|N_1} = 0$. On en déduit

$$d\Omega_{1|N_1} = 0\,. \tag{17.3}$$

Soit π la projection orthogonale de $\mathbf{R}^{2(n-1)+1}$ sur $\mathbf{R}^{2(n-1)}$. On note $\pi(N_1) = N_2$. Puisque $\Omega_{1|N_1}$ est nulle, on peut réduire U de sorte que π soit un difféomorphisme de N_1 sur N_2 ; N_2 est alors une sous variété de dimension réelle k de $U_1 \cap \{t=0\}$. Puisque d'après (17.1) et (17.2) la 2 forme $d\Omega_1$ ne fait pas intervenir la variable t on a, d'après (17.3),

$$d\Omega_{1|N_2} = 0\,. \tag{17.4}$$

La forme $d\Omega_1 = \sum_{i=1}^{n-1} dx_i \wedge dy_i$ restreinte à $\mathbf{R}^{2(n-1)}$ n'est autre que sa 2-forme symplectique naturelle [1], [9], [13]. D'après (17.4), N_2 est une sous-variété isotrope de $U_1 \cap \{t=0\}$. Alors, quitte à restreindre U, il existe une sous-variété lagrangienne M_2 de $U \cap \{t=0\}$ contenant la variété isotrope N_2 [5]. On rappelle qu'une variété lagrangienne est une variété isotrope de dimension réelle maximale.

On restreint U pour que M_2 soit simplement connexe. Il existe alors une sous-variété unique M_1 de U_1 qui vérifie $\Omega_{1|M_1} = 0$ et $0 \in M_1$ et telle que π soit un difféomorphisme de M_1 sur M_2. La sous-variété M_1 est de dimension $n-1$ et contient N_1.

On pose $\Phi^{-1}(M_1) = M$. M est une sous variété de dimension $n-1$ dans un voisinage ouvert U de p_0 dans ∂D et vérifie $M \supset N$ et $\Omega_{|M} = 0$.

Pour conclure la preuve de la proposition il reste à construire la sous variété $\widetilde{M}$. On remarque pour cela qu'en chaque point p de M le vecteur τ_p est transverse à M. Alors, quitte à restreindre à nouveau U, on en déduit que les courbes intégrales du champ τ_p qui rencontrent M définissent dans U une sous-variété $\widetilde{M}$ de dimension n. En p_0, on a évidemment $T_{p_0}(\widetilde{M}) \cap JT_{p_0}(\widetilde{M}) = \{0\}$. On peut donc, quitte à restreindre encore U, s'assurer que $\widetilde{M}$ est totalement réelle. On choisit alors pour ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ dont l'intersection avec ∂D est égale à U.

18. *Remarque.* – Soit N une sous-variété de ∂D telle que, en chaque point p de N, on ait $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ et soit p_0 un point de N. Il existe, au voisinage de p_0, une sous variété M vérifiant 17 a) et 17 b). On a donc, d'après la remarque 16, en tout point p de N voisin de p_0, une décomposition L-orthogonale de $T_p(\partial D)$,

$$T_p(\partial D) = \mathbf{R}\,[\tau_p] \oplus T_p(N) \oplus T_p(N)^L \cap T_p(M) \oplus JT_p(M). \quad (18.1)$$

Soit ζ un champ de vecteurs de $T(\partial D)$ défini au voisinage de p_0. D'après (18.1), on peut écrire, le long de N, au voisinage de p_0, $\zeta = t\tau + \delta + \beta + \eta$, avec δ dans $T(N)$, β dans $T(N)^L \cap T(M)$ et η dans $JT(M)$. On prolonge ensuite ces champs de vecteurs, au voisinage de p_0, sur M, puis sur ∂D en des champs de vecteurs tangents à ∂D, de sorte que l'on ait, de plus, le long de M, δ et β dans $T(M)$ et η dans $JT(M)$.

Si N est de dimension réelle maximale, β est identiquement nul.

La remarque suivante relève des mêmes idées.

19. *Remarque.* – Soit p_0 un point de N, M et $\widetilde{M}$ deux sous variétés de ∂D vérifiant dans un voisinage ω de p_0 dans $\mathbf{C}^n$ les conclusions de la proposition 17. Alors quitte à réduire ω, il existe des champs de vecteurs (ξ_i), $i = 1, \ldots, n-1$, tangents à ∂D, tels que

a) pour tout p de $N \cap \omega$, $\{(\xi_i),\ i = 1, \ldots, k\}$ constituent une base L-orthonormée de $T_p(N)$,

b) pour tout p de $M \cap \omega$, $\{(\xi_i), i = 1, \ldots, n-1\}$ constituent une base L-orthonormée de $T_p(M)$,

c) pour tout p de $\widetilde{M} \cap \omega$, $\{\tau, (\widetilde{\xi_i}), i = 1, \ldots, n-1\}$ constituent une base L-orthonormée de $T_p(\widetilde{M})$,

d) pour tout p de $\partial D \cap \omega$, $\{\tau, (\xi_i), (J\xi_i), i = 1, \ldots, n-1\}$ constituent une base L-orthonormée de $T_p(\partial D)$.

Proposition fondamentale et théorème.

20. PROPOSITION. – *Soit* N *une sous variété de classe* C^∞ *de* ∂D *telle que, en chaque point* p *de* N, *on ait* $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ *et soit* K *un compact de* N, *alors, il existe* Ω *un voisinage de* K *dans* $\mathbf{C}^n$, *une fonction* G *de classe* C^∞ *dans* Ω *et une constante* c *strictement positive, tel que*

a) $G(z) = 0$ *si et seulement si* z *appartient à* K

b) $\bar\partial G$ *s'annule à l'ordre infini sur* $\Omega \cap N$

c) $\operatorname{Re} G(z) \geqslant c\, d(z, N)^2$ *pour tout* z *de* $\Omega \cap \overline{D}$

où $d(z, N)$ *désigne la distance euclidienne de* z *à* N.

La preuve de cette proposition nécessite plusieurs étapes et constitue l'essentiel de cet article (paragraphes 22 à 32). Le théorème 21 s'en déduit aisément ; la proposition nous permet en effet de formuler un problème de $\bar\partial$ à données C^∞ qui, d'après J.J. Kohn [10], a une solution C^∞. M. Hakim et N. Sibony ont utilisé la même méthode antérieurement dans [6].

21. THEOREME. – *Soit* D *un domaine borné strictement pseudoconvexe de* $\mathbf{C}^n$ *à frontière de classe* C^∞. *Soit* N *une sous-variété de classe* C^∞ *de* ∂D *telle que, en chaque point* p *de* N, *on ait* $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$, *alors, tout compact* K *de* N *est un ensemble pic pour* $A^\infty(D)$.

Preuve du théorème. – Soit K un compact de N. Soit Ω un voisinage de K et G une fonction qui vérifient les conclusions de la proposition 20.

Soit t une fonction à valeurs réelles, de classe C^∞ et à support dans Ω. On suppose de plus
$$0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{21.1}$$
et
$$t = 1 \quad \text{dans un voisinage } \Omega_1 \text{ de } K. \tag{21.2}$$
Soit h la $(0,1)$ forme définie dans $\overline{D}\backslash K$ par
$$h = \begin{cases} \overline{\partial}\left(t \dfrac{1}{G}\right) & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{ailleurs}. \end{cases}$$
La forme h est de classe C^∞ dans $\overline{D}\backslash K$. On peut la prolonger, ainsi que toutes ses dérivées, par 0 sur K. On obtient alors une forme de classe C^∞ dans $\overline{D}$.

En effet, dans Ω, on a $\overline{\partial} h = \overline{\partial} t \cdot \dfrac{1}{G} - t \dfrac{\overline{\partial} G}{G^2}\cdot$ D'après (21.2), $\overline{\partial} t$ est nul au voisinage de l'ensemble des points où $\dfrac{1}{G}$ n'est pas défini. La forme $\overline{\partial} t \cdot \dfrac{1}{G}$ est donc de classe C^∞ dans Ω et à support dans $\Omega\backslash K$. On a, par ailleurs, $\left| t \dfrac{\overline{\partial} G}{G^2} \right| \leqslant \dfrac{\overline{\partial} G}{(\operatorname{Re} G)^2}$, avec, d'après b) et c) de la proposition 20, au voisinage de $N \cap \Omega$, pour tout entier k, $\overline{\partial} G = o\,[d(z, N)]^k$ et $\operatorname{Re} G(z) \geqslant c\, d(z, N)^2$. On déduit de là que la forme $t \dfrac{\overline{\partial} G}{G^2}$ peut être prolongée continuement par 0 sur K et qu'il en est de même pour toutes ses dérivées.

D'après un théorème de J.J. Kohn [10], puisque $\overline{\partial} h$ est nulle dans $\overline{D}$, il existe une fonction u de classe C^∞ dans $\overline{D}$ telle que l'on ait $\overline{\partial} u = h$. Soit v la fonction définie par $v = t \dfrac{1}{G} - u$. Elle est holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\overline{D}\backslash K$, et l'on a $\operatorname{Re} v = t \dfrac{\operatorname{Re} G}{|G|^2} - \operatorname{Re} u$. Puisque u est de classe C^∞ dans $\overline{D}$, $\operatorname{Re} u$ est bornée. D'après c) de la proposition 20, $\operatorname{Re} G$ est positive ou nulle dans $\overline{D} \cap \Omega$ donc, quitte à rajouter une constante, on peut supposer que l'on a
$$\operatorname{Re} v > 0 \quad \text{dans } \overline{D}\backslash K. \tag{21.3}$$
On déduit de là que la fonction $\dfrac{1}{v}$ est holomorphe dans D, de classe C^∞ dans $\overline{D}\backslash K$.

Sur Ω_1, on a

$$\frac{1}{v} = \frac{G}{1 - uG}. \tag{21.4}$$

Le dénominateur $1 - uG$ ne s'annule pas dans $\overline{D}$ au voisinage de K ; donc $\dfrac{1}{v}$ est de classe C^∞ dans $\overline{D}$. La fonction $\dfrac{1}{v}$ appartient à $A^\infty(D)$; d'après (21.3) et (21.4), elle est nulle sur K et sa partie réelle est positive dans $\overline{D}\backslash K$. L'ensemble K est donc un ensemble pic pour $A^\infty(D)$.

Preuve de la proposition fondamentale.

22. La démonstration de la proposition 24 s'inspire d'une construction faite par G. Henkin et A. Tumanov dans le cas de $A(D)$. Cette preuve utilise le lemme suivant.

23. LEMMME. – *Il existe une constante* C *strictement positive ne dépendant que de* D *telle que, pour tout champ de vecteurs* η *de* $T^c(\partial D)$, *en tout point* z *de* ∂D, *on ait*

$$|\langle [\tau, \eta]_z, \tau_z \rangle_L| \leqslant C \, \|\eta_z\|_L.$$

Preuve. – Soit z_0 un point de ∂D ; il existe un voisinage de z_0 dans ∂D et des champs de vecteurs (ξ_j), $j = 1, \dots, n-1$, tels que, pour tout z dans ce voisinage, $(\xi_j)_z$ et $(J\xi_j)_z$, $j = 1, \dots, n-1$, constituent une base de $T^c_z(\partial D)$. On a alors

$$\eta = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \, \xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \, J\xi_j,$$

et donc

$$[\tau, \eta] = \sum_{j=1}^{n-1} \tau a_j \, \xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} \tau b_j \, J\xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \, \tau\xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \, \tau J\xi_j$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1} a_j \, \xi_j \tau - \sum_{j=1}^{n-1} b_j \, J\xi_j \tau.$$

On a alors, puisque τ est L-orthogonal à $T^c(\partial D)$,

$$\langle [\tau, \eta], \tau \rangle_L = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \, \langle [\tau, \xi_j], \tau \rangle_L + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \, \langle [\tau, \xi_j], \tau \rangle_L.$$

Le lemme s'en déduit alors en utilisant la régularité et la compacité de ∂D.

24. PROPOSITION. – *Soit* N *une sous-variété de dimension réelle* $k \leqslant n-1$ *de* ∂D *telle que, en chaque point* p *de* N, *on ait* $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$. *Soit* M *et* $\widetilde{M}$ *deux sous-variétés vérifiant dans un voisinage* ω *de* $\mathbf{C}^n$ *les conclusions de la proposition 17. Alors, il existe une fonction* u *de classe* C^∞ *dans* ω *telle que l'on ait*

a) $u(z) = 0$ *si* z *appartient à* $M \cap \omega$,

b) $\overline{\partial} u$ *s'annule à l'ordre infini sur* $\widetilde{M} \cap \omega$,

c) *pour tout* p *de* $M \cap \omega$, $(\mathrm{grad}_L \operatorname{Re} u)(p) = -\chi_p$,

d) *pour tout* p *de* $N \cap \omega$ *et pour tout champ de vecteurs* ζ *de* $T(\partial D)$ *qui s'écrit dans un voisinage de* p, *d'après la remarque 18,* $\zeta = t\tau + \delta + \eta$ *avec* δ *et* η *dans* $T(\partial D)$, δ *et* η *respectivement dans* $T(M)$ *et* $JT(M)$ *le long de* M

$$(\zeta^2 \operatorname{Re} u)(p) = ((t\tau + \eta)^2 \operatorname{Re} u)(p) \geqslant \frac{1}{2} \|t\tau_p + \eta_p\|_L^2 .$$

Preuve. – Soit $\widetilde{u}$ une fonction à valeurs complexes de classe C^∞ sur $\widetilde{M} \cap \omega$, telle que, pour tout p dans $M \cap \omega$, on ait

$$\widetilde{u}(p) = 0, \tag{24.1}$$

$$(\tau \operatorname{Re} \widetilde{u})(p) = 0, \tag{24.2}$$

$$(\tau \operatorname{Im} \widetilde{u})(p) = -1 \tag{24.3}$$

et

$$(\tau^2 \operatorname{Re} \widetilde{u})(p) = \frac{1}{2} + 2C^2 \tag{24.4}$$

où C est la constante strictement positive ne dépendant que de D introduite dans le lemme 23.

D'après la proposition 14, il existe une fonction u de classe C^∞ dans ω telle que l'on ait

$$u = \widetilde{u} \quad \text{sur} \quad \widetilde{M} \cap \omega, \tag{24.5}$$

$$\overline{\partial} u \quad \text{s'annule à l'ordre infini sur} \quad \widetilde{M} \cap \omega. \tag{24.6}$$

Il reste donc à prouver que u vérifie les conditions b) et c) de la proposition. Ce sont des conséquences des propriétés (24.1) à (24.6) et de la stricte pseudoconvexité de D.

Dans cette partie de la preuve, pour alléger l'écriture, on omettra systématiquement l'indice p de ζ_p la valeur d'un champ de vecteurs ζ de $T(\partial D)$ au point p. On agira de même pour $T_p(N)$, $T_p(M)$, $T_p^c(\partial D)$ et $T_p(\partial D)$.

Des équations de Cauchy-Riemann vérifiées par u sur $\widetilde{M} \cap \omega$, on déduit, si on note ξ un champ de vecteurs de $T^c(\partial D)$ et si on pose $\eta = J\xi$, que l'on a, en tout point de $\widetilde{M} \cap \omega$,

$$\begin{aligned} \chi \operatorname{Re} u &= \tau \operatorname{Im} u, & \xi \operatorname{Re} u &= \eta \operatorname{Im} u, \\ \tau \operatorname{Re} u &= -\chi \operatorname{Im} u, & \eta \operatorname{Re} u &= -\xi \operatorname{Im} u. \end{aligned} \tag{24.7}$$

On remarque maintenant que si ξ est un champ de vecteurs de $T^c(\partial D)$, on a

$$\xi \operatorname{Re} u = \xi \operatorname{Im} u = 0 \quad \text{sur} \quad M \cap \omega. \tag{24.8}$$

En effet, puisque u est nulle sur M, la relation (24.8) est vérifiée si ξ est un champ de vecteurs tangent à M. Mais, puisque M est totalement réelle et de dimension maximum $n-1$, si ξ appartient à $JT(M)$, $J\xi$ est tangent à M et, d'après (24.7), la relation (24.8) est encore vérifiée.

On a donc montré en utilisant (24.1), (24.5) et (24.6) que $\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u$ et $\operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u$ évalués en un point p de $M \cap \omega$ n'ont pas de composantes dans $T_p^c(\partial D)$.

On déduit alors de (24.2), (24.3) et (24.7)

$$\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u = -\chi, \quad \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u = -\tau \quad \text{sur} \quad M \cap \omega. \tag{24.9}$$

Pour établir d), on remarque que si on pose, pour tout point p de $M \cap \omega$ et pour tout couple de champs de vecteurs ζ et ζ' définis au voisinage de p et tangents à ∂D,

$$H_p(\zeta, \zeta') = (\zeta' \zeta \operatorname{Re} u)(p), \tag{24.10}$$

H_p est une forme bilinéaire symétrique sur $T_p(\partial D)$ dont le noyau contient $T_p(M)$.

Il s'agit là d'une conséquence de (24.9).

La forme H_p est symétrique ; en effet, si ζ et ζ' sont deux champs de vecteurs tangents à ∂D, on a sur $M \cap \omega$

$$[\zeta, \zeta'] \operatorname{Re} u = \langle [\zeta, \zeta'], \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u \rangle_L = \langle [\zeta, \zeta'], -\chi \rangle_L = 0 \tag{24.11}$$

puisque le crochet de deux champs de vecteurs tangents à ∂D est tangent à ∂D et que χ est L-orthogonal à ∂D d'après (9.1).

De plus, la forme H_p est linéaire en ζ'; puisqu'elle est symétrique, elle est donc bilinéaire.

Si ζ est un champ de vecteurs tangent à ∂D, tangent à M le long de $M \cap \omega$, il appartient au noyau de la forme H_p. En effet, pour tout champ de vecteurs ζ' tangent à ∂D, on a sur $M \cap \omega$

$$\zeta' \operatorname{Re} u = \langle \zeta', \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u \rangle_L = \langle \zeta', -\chi \rangle_L = 0. \tag{24.12}$$

Puisque ζ est tangent à M, on a pour tout ζ' de $T(\partial D)$

$$\zeta\zeta' \operatorname{Re} u = 0 \quad \text{sur} \quad M \cap \omega. \tag{24.13}$$

De là, pour tout champ de vecteurs ζ de $T(\partial D)$ on a, en utilisant sa décomposition en chaque point p de $M \cap \omega$, donc de $N \cap \omega$,

$$\zeta^2 \operatorname{Re} u = (t\tau + \eta)^2 \operatorname{Re} u = t^2\, \tau^2 \operatorname{Re} u + 2t\, \tau\eta \operatorname{Re} u + \eta^2 \operatorname{Re} u. \tag{24.14}$$

On va donc évaluer chacun des termes de cette somme.

Sur $\widetilde{M} \cap \omega$, d'après (24.7), on a, parce que τ est tangent à $\widetilde{M}$, $\tau(\eta \operatorname{Re} u - J\eta \operatorname{Im} u) = 0$ et donc

$$\tau\eta \operatorname{Re} u = \tau J\eta \operatorname{Im} u = [\tau, J\eta] \operatorname{Im} u + J\eta\, \tau \operatorname{Im} u.$$

$\tau \operatorname{Im} u$ est égal à -1 sur $M \cap \omega$ d'après (24.3) et (24.5) ; $J\eta$ est tangent à M ; on a donc $J\eta\, \tau \operatorname{Im} u = 0$ sur $M \cap \omega$. De là, on déduit en utilisant (24.9) que, sur $M \cap \omega$, on a

$$\tau\eta \operatorname{Re} u = \langle [\tau, J\eta], \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u \rangle_L = -\langle [\tau, J\eta], \tau \rangle_L. \tag{24.15}$$

Mais, d'après le lemme 23, on a pour tout champ de vecteurs η de $T^c(\partial D)$

$$|\langle [\tau, J\eta], \tau \rangle_L| \leqslant C \|\eta\|_L. \tag{24.16}$$

On déduit de (24.15) et (24.16), sur $M \cap \omega$,

$$|\tau\eta \operatorname{Re} u| \leqslant C \|\eta\|_L. \tag{24.17}$$

Sur $\widetilde{M} \cap \omega$, d'après (24.6), $\bar\partial u$ s'annule à l'ordre infini, on a donc $\eta(\eta \operatorname{Re} u - J\eta \operatorname{Im} u) = 0$ et ainsi

$$\eta^2 \operatorname{Re} u = \eta\, J\eta \operatorname{Im} u = \langle [\eta, J\eta], \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u \rangle_L + J\eta\, \eta \operatorname{Im} u.$$

D'après (24.7) et (24.8), sur $M \cap \omega$, $\eta \operatorname{Im} u$ est nul. Il en est donc de même de $J\eta\, \eta \operatorname{Im} u$ puisque $J\eta$ est tangent à M. De là, d'après

(24.9), on a sur $M \cap \omega$

$$\eta^2 \operatorname{Re} u = \langle [\eta, J\eta], -\tau\rangle_L = \langle [J\eta, \eta], \tau\rangle_L .$$

On déduit donc du lemme 9 que, pour tout champ de vecteurs η de $T^c(\partial D)$, on a sur $M \cap \omega$

$$\eta^2 \operatorname{Re} u \geqslant \|\eta\|_L^2 . \tag{24.18}$$

On va maintenant vérifier que l'on a sur $M \cap \omega$, donc sur $N \cap \omega$,

$$\zeta^2 \operatorname{Re} u \geqslant \frac{1}{2} \|t\tau + \eta\|_L^2 . \tag{24.19}$$

Puisque τ est L-orthogonal à η et que sa L-norme est égale à 1, il suffit pour établir (24.19) de vérifier que le trinome en t

$$t^2\left(\tau^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2}\right) + 2t\,\tau\eta \operatorname{Re} u + \eta^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2}\|\eta\|_L^2$$

est toujours positif sur $M \cap \omega$.

Or on a sur $M \cap \omega$, d'après (24.4), $\tau^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2} = 2C^2 > 0$ et, d'après (24.17) et (24.18),

$$(\tau\eta \operatorname{Re} u)^2 - 2C^2(\eta^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2}\|\eta\|_L^2) \leqslant C^2\|\eta\|_L^2 - 2C^2 \frac{1}{2}\|\eta\|_L^2 = 0$$

ce qui établit (24.19) et la proposition 24.

25. Definition. – *Soit f une fonction de classe C^2 dans un ouvert ω de $\mathbf{C}^n$. On note*

$$\|f\|_2 = \sup_{z\in\omega} |f(z)| + \sup_{z\in\omega} \sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y_i} f(z)\right|\right)$$
$$+ \sup_{z\in\omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} f(z)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i\,\partial y_j} f(z)\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial y_j} f(z)\right| .$$

26. Proposition. – *Soit* N *une sous variété de dimension réelle k de ∂D telle que, en chaque point p de* N, *on ait $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$. Alors, pour tout point p_0 de* N, *il existe un voisinage ω de p_0 dans $\mathbf{C}^n$,* M *et* $\widetilde{M}$ *deux sous variétés vérifiant les conclusions de la proposition 17 et une fonction f, non identiquement nulle, de classe C^∞ dans ω tel que l'on ait*

a) *$f(z) = 0$ si z appartient à $N \cap \omega$,*

b *$\bar\partial f$ s'annule à l'ordre infini sur $\widetilde{M} \cap \omega$,*

c) *pour tout* p *de* $N \cap \omega$,

$$(\mathrm{grad}_L \operatorname{Re} f)(p) = (\mathrm{grad}_L \operatorname{Im} f)(p) = 0,$$

d) *pour tout* p *de* $N \cap \omega$ *et pour tout champ de vecteurs* ζ *de* $T(\partial D)$ *qui s'écrit dans un voisinage de* p, *d'après la remarque 18,* $\zeta = t\tau + \delta + \beta + \eta$, *avec* δ, β *et* η *dans* $T(\partial D)$ *tels que, le long de* M, δ *et* β *appartiennent à* $T(M)$ *et* η *à* $JT(M)$ *et, le long de* N, δ *appartienne à* $T(N)$ *et* β *à* $T(M) \cap T(N)^L$,

$$(\zeta^2 \operatorname{Re} f)(p) \geqslant \|\beta_p\|_L^2 - \frac{1}{c_0} \|t(p)\,\tau_p + \eta_p\|_L^2 \, \|f\|_2 \\ - \frac{2}{c_0} \|t(p)\,\tau_p + \eta_p\|_L \, \|\beta_p\|_L \, \|f\|_2$$

avec c_0 *la constante introduite dans la remarque 9.*

Preuve. – Soit p_0 un point de N et (ξ_i) $i = 1, \ldots, n-1$ des champs de vecteurs tangents à ∂D vérifiant dans un voisinage de p_0 les conclusions de la remarque 19.

Soit $\widetilde{f}$ une fonction de classe C^∞ sur $\widetilde{M} \cap \omega$, à valeurs réelles, telle que l'on ait sur $N \cap \omega$

$$\widetilde{f} = 0, \tag{26.1}$$

$$\xi_i \widetilde{f} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{26.2}$$

$$\tau \widetilde{f} = 0. \tag{26.3}$$

D'après la proposition 14, il existe une fonction f de classe C^∞ dans ω telle que l'on ait

$$f = \widetilde{f} \qquad \text{sur} \qquad \widetilde{M} \cap \omega, \tag{26.4}$$

$$\bar\partial f \text{ s'annule à l'ordre infini sur } \widetilde{M} \cap \omega. \tag{26.5}$$

La fonction f vérifie donc les conclusions a) et b) de la proposition. Comme dans la preuve de la proposition 24, on déduit des équations de Cauchy Riemann vérifiées par f sur $\widetilde{M} \cap \omega$ que l'on a, en tout point de $\widetilde{M} \cap \omega$,

$$\begin{aligned} &\chi \operatorname{Re} f = \tau \operatorname{Im} f, && \xi_i \operatorname{Re} f = J\xi_i \operatorname{Im} f \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ &\tau \operatorname{Re} f = -\chi \operatorname{Im} f, && J\xi_i \operatorname{Re} f = -\xi_i \operatorname{Im} f. \end{aligned} \tag{26.6}$$

Puisque $\widetilde{f}$ est à valeurs réelles sur $\widetilde{M} \cap \omega$, $\operatorname{Im} f$ est nulle sur $\widetilde{M} \cap \omega$ d'après (26.4). Les champs de vecteurs τ et (ξ_i),

$i = 1, \dots, n-1$, sont tangents à $\widetilde{M} \cap \omega$; on a donc sur $\widetilde{M} \cap \omega$

$$\tau \operatorname{Im} f = \xi_i \operatorname{Im} f = 0, \qquad i = 1, \dots, n-1. \tag{26.7}$$

De (26.2), (26.3), (26.4), (26.6) et (26.7) on déduit donc que, sur $N \cap \omega$, on a

$$\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} f = 0 \;, \quad \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} f = 0, \tag{26.8}$$

ce qui établit c).

Pour établir d), on remarque comme dans la preuve de la proposition 24 que si on pose, pour tout point p de $N \cap \omega$ et pour tout couple de champs de vecteurs ζ et ζ' définis au voisinage de p et tangents à ∂D,

$$K_p(\zeta, \zeta') = (\zeta' \zeta \operatorname{Re} f)(p), \tag{26.9}$$

K_p est une forme bilinéaire symétrique sur $T_p(\partial D)$ dont le noyau contient $T_p(N)$.

La preuve de ce résultat reprend les idées développées dans le paragraphe 24 en utilisant (26.8) au lieu de (24.9). Elle n'est pas redonnée ici.

Si on pose

$$\zeta = t\tau + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i J\xi_i,$$

$$\zeta' = t'\tau + \sum_{i=1}^{n-1} a_i' \xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i' J\xi_i,$$

on a, sur $N \cap \omega$, dans le cas particulier où ζ et ζ' sont tangents à $\widetilde{M}$, c'est-à-dire où b_i et b_i' sont nuls, $i = 1, \dots, n-1$,

$$\zeta'\zeta \operatorname{Re} f = tt'\tau^2 \operatorname{Re} f + \sum_{j=1}^{n-1} t a_j' \xi_j \tau \operatorname{Re} f + \sum_{j=1}^{n-1} t' a_j \tau \xi_j \operatorname{Re} f + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_i a_j' \xi_i \xi_j \operatorname{Re} f.$$

On voit donc que l'on peut imposer à $\widetilde{f}$, en sus des conditions (26.1), (26.2) et (26.3), de vérifier des conditions du second ordre au point p_0 de N, à savoir

$$\tau^2 \widetilde{f}(p_0) = \tau \xi_j \widetilde{f}(p_0) = 0 \;, \quad k+1 \leqslant j \leqslant n-1, \tag{26.11}$$

$$\xi_i \xi_j \widetilde{f}(p_0) = \begin{cases} 0, & k+1 \leqslant i < j \leqslant n-1, \\ 2, & i = j,\ k+1 \leqslant i \leqslant n-1. \end{cases} \tag{26.12}$$

La forme bilinéaire symétrique K_{p_0} en restriction à $T_{p_0}(\widetilde{M})$ a pour noyau $T_{p_0}(N)$ et sa matrice est une matrice diagonale.

On peut donc conclure, quitte à restreindre le voisinage ω de p_0, que l'on a, sur $N \cap \omega$, pour tout champ de vecteur β tangent à M et L-orthogonal à T(N) le long de N

$$\beta^2 \operatorname{Re} f \geqslant \|\beta\|_L^2 \tag{26.13}$$

et pour tout couple ζ, ζ' de champs de vecteurs tangents à ∂D

$$|\zeta'\zeta \operatorname{Re} f| \leqslant \frac{1}{c_0} \|\zeta\|_L \, \|\zeta'\|_L \, \|f\|_2 . \tag{26.14}$$

Soit p un point de $N \cap \omega$ et ζ un champ de vecteurs tangent à ∂D. On sait, d'après la remarque 18, qu'il s'écrit au voisinage de p $\zeta = t\tau + \delta + \beta + \eta$ avec δ, β et η tangents à ∂D tels que, le long de M, δ et β appartiennent à T(M) et η à JT(M) et, le long de N, δ appartienne à T(N) et β à $T(M) \cap T(N)^L$.

On a donc, en chaque point p de $N \cap \omega$, puisque δ est tangent à N le long de N $\zeta^2 \operatorname{Re} f = (t\tau + \beta + \eta)^2 \operatorname{Re} f$ et de là, d'après (26.13) et (26.14),

$$\zeta^2 \operatorname{Re} f \geqslant \|\beta\|_L^2 - \frac{1}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L^2 \, \|f\|_2 - \frac{1}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L \, \|\beta\|_L \, \|f\|_2$$

ce qui achève la preuve de la proposition 26.

27. PROPOSITION. – *Soit* N *une sous-variété de dimension réelle* k *de* ∂D *telle que, en chaque point* p *de* N, *on ait* $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$. *Alors, pour tout point* p_0 *de* N, *il existe un voisinage* ω *de* p_0 *dans* $\mathbf{C}^n$, *une fonction* F *de classe* C^∞ *dans* ω *et une constante* c_ω *strictement positive tels que l'on ait*

a) $F(z) = 0$ *si* z *appartient à* $N \cap \omega$,

b) $\bar\partial F$ *s'annule à l'ordre infini sur* $\widetilde{M} \cap \omega$,

c) *pour tout* p *de* $N \cap \omega$, $(\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} F)(p) = -\chi_p$, $(\operatorname{grad}_L \operatorname{Im} F)(p) = -\tau_p$,

d) *pour tout* p *de* $N \cap \omega$ *et pour tout champ de vecteurs* ζ *de* $T(\partial D)$ *défini au voisinage de* p *on a*

$$(\zeta^2 \operatorname{Re} F)(p) \geqslant c_\omega \, \|P_{T(N)^L}(\zeta_p)\|_L^2 .$$

On rappelle que $P_{T(N)^L}$ a été défini dans le paragraphe 11.

Preuve. – Soit p_0 un point de N. D'après les propositions 24 et 26, il existe un voisinage ω de p_0 dans $\mathbf{C}^n$ et deux fonctions u et f de classe C^∞ dans ω telles que, si on pose

$$F = u + \lambda f \ , \quad \lambda \in \mathbf{R}^+$$

les conclusions a), b) et c) de la proposition soient vérifiées quel que soit le choix de λ.

Soit p un point de $N \cap \omega$ et ζ un champ de vecteurs tangent à ∂D défini au voisinage de p. On a, au voisinage de p, d'après la remarque 18,

$$\zeta = t\tau + \delta + \beta + \eta \tag{27.1}$$

avec δ, β et η tangents à ∂D tels que, le long de M, δ et β appartiennent à T(M) et η à JT(M) et, le long de N, δ appartienne à T(N) et β à $T(M) \cap T(N)^L$. D'après les propositions 24 et 26, on a, sur $N \cap \omega$

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geqslant \frac{1}{2} \|t\tau + \eta\|_L^2 + \lambda \left(\|\beta\|_L^2 - \frac{1}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L^2 \|f\|_2 - \frac{2}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L \|\beta\|_L \|f\|_2 \right).$$

On rappelle que c_0 est une constante ne dépendant que de D.

On pose $\qquad a = \|t\tau + \eta\|_L \ , \quad b = \|\beta\|_L \ .$

Alors, pour tout ϵ strictement positif, d'après l'inégalité $2ab \leqslant \epsilon^2 a^2 + \dfrac{b^2}{\epsilon^2}$, on peut écrire

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{c_0} \|f\|_2 - \lambda \frac{\epsilon^2}{c_0} \|f\|_2\right) \|t\tau + \eta\|_L^2 + \lambda \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2 c_0} \|f\|_2\right) \|\beta\|_L^2 \ .$$

On choisit maintenant ϵ pour que l'on ait

$$\left(1 - \frac{1}{\epsilon^2 c_0} \|f\|_2\right) \geqslant \frac{1}{2},$$

et, ϵ étant fixé, on choisit $\lambda > 0$ pour que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{c_0} \|f\|_2 - \frac{\lambda\epsilon^2}{c_0} \|f\|_2\right) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Alors on a

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geqslant \frac{1}{4} \|t\tau + \eta\|_L^2 + \frac{\lambda}{2} \|\beta\|_L^2 \ .$$

Si on pose maintenant

$$c_\omega = \inf\left(\frac{1}{4}, \frac{\lambda}{2}\right)$$

on a donc

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geqslant c_\omega \left(\|t\tau + \eta\|_L^2 + \|\beta\|_L^2\right)$$

et, puisque la décomposition (27.1) de ζ est L orthogonale,

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geqslant c_\omega \|t\tau + \eta + \beta\|_L^2$$

où $t\tau + \eta + \beta$ n'est autre que $P_{T(N)^L}(\zeta)$.

28. Proposition. – *Soit* K *un compact de* N *et* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$ *des ouverts dans* $\mathbf{C}^n$ *qui vérifient les conditions de la remarque 19 et qui forment un recouvrement fini de* K. *Alors, il existe des fonctions* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_g$ *de classe* C^∞ *dans* $\mathbf{C}^n$, *à valeurs complexes, telles que*

a) *pour tout entier* ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant g$, $\mathfrak{A}_\ell$ *soit à support compact dans* ω_ℓ,

b) $\operatorname{Im} \mathfrak{A}_\ell = 0$ *sur* $\widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$ *et* $0 \leqslant \operatorname{Re} \mathfrak{A}_\ell \leqslant 1$ *sur* $N \cap \omega_\ell$,

c) $\sum_{\ell=1}^{g} \mathfrak{A}_\ell = 1$ *sur* K,

d) $\bar\partial \mathfrak{A}_\ell$ *s'annule à l'ordre infini sur* $\widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$,

e) $\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \mathfrak{A}_\ell$ *appartient à* T(N) *en tout point de* $N \cap \omega_\ell$.

Preuve. – Pour construire ces fonctions, on recouvre K par une famille finie d'ouverts ω_ℓ de $\mathbf{C}^n$, $1 \leqslant \ell \leqslant g$ vérifiant les conditions de la remarque 19. Il existe alors des fonctions (h_ℓ), $1 \leqslant \ell \leqslant g$, de classe C^∞ sur N, à valeurs rélles dans l'intervalle $[0,1]$, à support dans $\omega_\ell \cap N$ qui vérifient

$$\sum_{\ell=1}^{g} h_\ell = 1 \quad \text{sur } K. \tag{28.1}$$

On désigne, pour chaque entier ℓ, par $\widetilde{h}_\ell$ une fonction à valeurs réelles, de classe C^∞ sur $\widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$, à support dans $\widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$ telle que l'on ait, sur $N \cap \omega_\ell$,

$$\widetilde{h}_\ell = h_\ell, \tag{28.2}$$

$$\xi_i \widetilde{h}_\ell = 0, \quad i = k+1, \ldots, n-1, \tag{28.3}$$

$$\tau \widetilde{h}_\ell = 0.$$

D'après la proposition 14, il existe une fonction $\mathcal{A}_\ell$ à valeurs complexes, de classe C^∞ dans ω_ℓ, à support dans ω_ℓ telle que l'on ait

$$\mathcal{A}_\ell = \widetilde{h}_\ell \quad \text{sur} \quad \widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell\,, \tag{28.5}$$

$$\bar{\partial}\mathcal{A}_\ell \ \text{ s'annule à l'ordre infini sur } \ \widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell\,. \tag{28.6}$$

On a donc, sur $\widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$,

$$\begin{aligned} &\chi \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell = \tau \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell\,, \quad \xi_i \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell = J\xi_i \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell\,, \\ &\tau \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell = -\chi \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell\,, \ J\xi_i \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell = -\xi_i \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell\,. \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, n-1\,, \tag{28.7}$$

Puisque $\operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell$ est nulle sur $\widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$, on a

$$\tau \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell = \xi_i \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,, \tag{28.8}$$

et, puisque $\operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell$ est égale à $\widetilde{h}_\ell$ sur $\widetilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$, on a sur $N \cap \omega_\ell$

$$\xi_i \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell = 0 \qquad i = k+1, \ldots, n-1\,, \tag{28.9}$$

$$\tau \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell = 0\,. \tag{28.10}$$

On déduit de là que le long de $N \cap \omega_\ell$, $\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell$ appartient à $T(N)$.

29. Proposition. – *Soit* ω_ℓ *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$ *et* $\mathcal{A}_\ell$ *une fonction de classe* C^∞ *dans* $\mathbf{C}^n$, *à valeurs complexes, vérifiant les conclusions a), b), d) et e) de la proposition 18. Soit* F_ℓ *une fonction vérifiant dans* ω_ℓ *les conclusions de la proposition 27. Alors*

a) $\mathcal{A}_\ell F_\ell$ *est de classe* C^∞ *dans* $\mathbf{C}^n$ *à support dans* ω_ℓ,

b) $\bar{\partial}\mathcal{A}_\ell F_\ell$ *s'annule à l'ordre infini sur* $N \cap \omega_\ell$,

c) *pour tout* p *de* $N \cap \omega_\ell$, *on a*

$$\operatorname{grad}_L (\operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell F_\ell)(p) = -\mathcal{A}_\ell(p)\,\chi_p\,,$$

d) *pour tout* p *de* $N \cap \omega_\ell$ *et pour tout champ de vecteurs* ζ *de* $T(\partial D)$ *défini au voisinage de* p *on a*

$$(\zeta^2 \operatorname{Re}(\mathcal{A}_\ell F_\ell))(p) = \mathcal{A}_\ell(p)\,(\zeta^2 \operatorname{Re} F_\ell)(p) - 2\,\langle \zeta_p\,, \tau_p \rangle_L\, P_{T(N)}(J\zeta_p) \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell\,.$$

Preuve. – Puisque $\mathcal{A}_\ell$ est à support dans ω_ℓ, on peut prolonger $\mathcal{A}_\ell F_\ell$ par 0 en dehors de ω_ℓ. $\bar{\partial}\mathcal{A}_\ell$ et $\bar{\partial}F_\ell$ s'annulent à l'ordre infini sur $N \cap \omega_\ell$, on a donc

$$\bar{\partial}\mathcal{A}_\ell F_\ell = 0 \text{ à l'ordre infini sur } N \cap \omega_\ell . \tag{29.1}$$

On a $\operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell F_\ell = \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Re} F_\ell - \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Im} F_\ell$ et, en tout point de $N \cap \omega_\ell$,

$$\operatorname{Re} F_\ell = \operatorname{Im} F_\ell = \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell = \mathcal{A}_\ell . \tag{29.2}$$

On déduit donc de là que l'on a, sur $N \cap \omega_\ell$, d'après c) de la proposition 27,

$$\operatorname{grad} \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell F_\ell = \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{grad} \operatorname{Re} F_\ell = - \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \chi = - \mathcal{A}_\ell . \chi .$$

Soit p un point de $N \cap \omega_\ell$ et ζ un champ de vecteurs tangent à ∂D défini au voisinage de p. On a

$$\zeta^2 (\operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell F_\ell) = \zeta^2 (\operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Re} F_\ell) - \zeta^2 (\operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Im} F_\ell) . \tag{29.3}$$

On évalue tout d'abord le premier terme de cette différence

$$\begin{aligned}\zeta^2 (\operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Re} F_\ell) = \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \zeta^2 \operatorname{Re} F_\ell + 2 \zeta \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \zeta \operatorname{Re} F_\ell \\ + \operatorname{Re} F_\ell . \zeta^2 \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell .\end{aligned} \tag{29.4}$$

Mais, sur $N \cap \omega_\ell$, on a

$$\zeta \operatorname{Re} F_\ell = \langle \zeta , \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} F_\ell \rangle_L = \langle \zeta , - \chi \rangle_L = 0 . \tag{29.5}$$

On déduit donc de (29.2) et de (29.5) que, sur $N \cap \omega_\ell$, on a

$$\zeta^2 (\operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Re} F_\ell) = \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell . \zeta^2 \operatorname{Re} F_\ell = \mathcal{A}_\ell . \zeta^2 \operatorname{Re} F_\ell . \tag{29.6}$$

Le deuxième terme dans (29.3) donne

$$\begin{aligned}\zeta^2 (\operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Im} F_\ell) = \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell . \zeta^2 \operatorname{Im} F_\ell + 2 \zeta \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell . \zeta \operatorname{Im} F_\ell \\ + \operatorname{Im} F_\ell . \zeta^2 \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell\end{aligned}$$

et donc, d'après (29.2),

$$\zeta^2 (\operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell . \operatorname{Im} F_\ell) = 2 \zeta \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell . \zeta \operatorname{Im} F_\ell . \tag{29.7}$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann vérifiées par $\mathcal{A}_\ell$ sur $N \cap \omega_\ell$ et e) de la proposition 28, on a

$$\begin{aligned}\zeta \operatorname{Im} \mathcal{A}_\ell = J\zeta \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell &= \langle J\zeta , \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell \rangle_L \\ &= \langle P_{T(N)}(J\zeta) , \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell \rangle_L = P_{T(N)}(J\zeta) \operatorname{Re} \mathcal{A}_\ell .\end{aligned} \tag{29.8}$$

D'après le c) de la proposition 27, on a

$$\zeta \operatorname{Im} F_\ell = - \langle \zeta , \tau \rangle_L . \tag{29.9}$$

On déduit de (29.7), (29.8) et (29.9) que l'on a

$$\zeta^2(\operatorname{Im}\mathfrak{A}_\ell \,.\, \operatorname{Im} F_\ell) = -2\langle \zeta, \tau\rangle_L \,.\, P_{T(N)}(J\zeta)\operatorname{Re}\mathfrak{A}_\ell \tag{29.10}$$

et donc

$$\zeta^2(\operatorname{Re}\mathfrak{A}_\ell F_\ell) = \mathfrak{A}_\ell \zeta^2 \operatorname{Re} F_\ell - 2\langle \zeta, \tau\rangle_L \,.\, P_{T(N)}(J\zeta)\operatorname{Re}\mathfrak{A}_\ell$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

30. PROPOSITION. — *Soit* N *une sous-variété de dimension réelle* k *de* ∂D *telle que, en chaque point* p *de* N, *on ait* $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ *et* W *un ouvert relativement compact de* N.

Alors il existe un ouvert Ω_1 *dans* $\mathbf{C}^n$, *une fonction* $\mathfrak{F}$ *de classe* C^∞ *dans* Ω_1, *à valeurs complexes et une constante* c_1 *strictement positive tels que l'on ait*

a) $\Omega_1 \cap N = W$,

b) $\mathfrak{F} = 0$ *sur* $\Omega_1 \cap N$,

c) $\overline{\partial}\mathfrak{F}$ *s'annule à l'ordre infini sur* $\Omega_1 \cap N$,

d) $\operatorname{Re}\mathfrak{F}(z) \geqslant c_1\, d(z, N)^2$ *pour tout* z *de* $\Omega_1 \cap \overline{D}$.

Preuve. — On applique à $\overline{W}$ la proposition 28 et à chaque ouvert ω_ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant g$ du recouvrement de $\overline{W}$ ainsi obtenu la proposition 29. On peut supposer en outre que chaque ω_ℓ vérifie les conclusions de la proposition 27.

Alors, si on note $\mathfrak{F}$ la fonction définie dans $\mathbf{C}^n$ par

$$\mathfrak{F} = \sum_{\ell=1}^{g} \mathfrak{A}_\ell F_\ell\,, \tag{30.1}$$

par construction, $\mathfrak{F}$ vérifie b) et c).

Il reste donc à vérifier d).

D'après c) de la proposition 28, et d'après c) et d) de la proposition 29, on a

$$\operatorname{grad}_L \operatorname{Re}\mathfrak{F} = -\chi \quad \text{sur} \quad W \tag{30.2}$$

et, pour tout point p de W et pour tout champ de vecteurs ζ tangent à ∂D défini au voisinage de ce point;

$$\begin{aligned}\zeta^2 \operatorname{Re}\mathfrak{F} &= \sum_{\ell=1}^{g} \zeta^2 \operatorname{Re}\mathfrak{A}_\ell F_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{g} \mathfrak{A}_\ell \,.\, \zeta^2 \operatorname{Re} F_\ell - 2\langle \zeta \,.\, \tau\rangle_L \sum_{\ell=1}^{g} P_{T(N)}(\zeta)\operatorname{Re}\mathfrak{A}_\ell\,.\end{aligned}$$

Mais, puisque $P_{T(N)}(\zeta)$ ne dépend pas de ℓ, on a, sur W,

$$\sum_{\ell=1}^{g} P_{T(N)}(\zeta) \operatorname{Re} \mathfrak{A}_\ell = P_{T(N)}(\zeta) \Big(\sum_{\ell=1}^{g} \operatorname{Re} \mathfrak{A}_\ell \Big) = 0$$

car $P_{T(N)}(\zeta)$ est tangent à N et $\sum_{\ell=1}^{g} \operatorname{Re} \mathfrak{A}_\ell$ est égale à 1 sur W.

On déduit donc, d'après d) de la proposition 27, que l'on a sur W,

$$\zeta^2 \operatorname{Re} \mathcal{F} = \sum_{\ell=1}^{g} \mathfrak{A}_\ell \cdot \zeta^2 \operatorname{Re} F_\ell \geqslant \sum_{\ell=1}^{g} c_{\omega_\ell} \mathfrak{A}_\ell \, \| P_{T(N)^L}(\zeta) \|_L^2 .$$

De là, si on pose

$$d = \inf_{1 \leqslant \ell \leqslant g} c_{\omega_\ell} ,$$

on a, sur W,

$$\zeta^2 \operatorname{Re} \mathcal{F} \geqslant d \, \| P_{T(N)^L}(\zeta) \|_L^2 . \tag{30.3}$$

On revient maintenant au produit scalaire et à la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{C}^n$ identifié à $\mathbf{R}^{2n}$.

D'après (30.2), (30.3) et la remarque 10 qui définit le produit scalaire $\langle \ , \ \rangle_L$, on a, en tout point de W,

$$\operatorname{grad} \operatorname{Re} \mathcal{F} = \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \mathcal{F} = -\chi \tag{30.4}$$

et

$$\zeta^2 \operatorname{Re} \mathcal{F} \geqslant d\, c_0 \, \| P_{T(N)^L}(\zeta) \|^2 \geqslant d\, c_0 \, \| \Pi_{T(N)^\perp}(\zeta) \|^2 \tag{30.5}$$

où $\Pi_{T(N)^\perp}$ désigne le projecteur orthogonal de $T(\mathbf{C}^n)$ sur $T(N)^\perp$, l'orthogonal de $T(N)$.

Soit Ω_1 un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et Π une application de classe C^∞ de Ω_1 dans $\mathbf{C}^n$ tels que l'on ait

$$\Omega_1 \cap N = W , \tag{30.6}$$

(30.7) pour chaque z de Ω_1, $\Pi(z)$ est une projection orthogonale de z sur ∂D et appartient à $\Omega_1 \cap \partial D$,

(30.8) $\Pi(z) = z$ si z appartient à $\Omega_1 \cap \partial D$.

On applique la formule de Taylor sur ∂D le long d'une courbe intégrale d'un champ de vecteurs ζ tangent à ∂D et orthogonal à N sur W. Alors, d'après (30.4) et (30.5), quitte à restreindre Ω_1 en conservant la propriété $\Omega_1 \cap N = W$, on a, en tout point z de $\Omega_1 \cap \partial D$,

$$\operatorname{Re} \mathcal{F}(z) \geqslant \frac{1}{2} \, d\, c_0 \, d(z \,.\, N)^2 . \tag{30.9}$$

Maintenant, quitte à restreindre à nouveau Ω_1 avec la même précaution $\Omega_1 \cap N = W$, on peut, toujours d'après (30.4), supposer que l'on a, en tout point z de $\Omega_1 \cap \partial D$,

$$(\operatorname{grad} \operatorname{Re} \mathfrak{F}(z), -\chi_z) \geqslant \frac{1}{2} \cdot$$

De cette inégalité, on déduit, en appliquant la formule de Taylor et en réduisant éventuellement Ω_1 que l'on a, pour tout z de $\Omega_1 \cap \overline{D}$,

$$\operatorname{Re} \mathfrak{F}(z) \geqslant \operatorname{Re} \mathfrak{F}(\Pi(z)) + \frac{1}{4} \|z - \Pi(z)\| . \tag{30.10}$$

De (30.9) et (30.10), on conclut, pour tout z de $\Omega_1 \cap \overline{D}$,

$$\operatorname{Re} \mathfrak{F}(z) \geqslant \frac{1}{2}\, d\, c_0\, [d(\Pi(z), N)]^2 + \frac{1}{4} \|z - \Pi(z)\| .$$

Il existe donc une constante c_1 telle que, pour tout z de $\Omega_1 \cap \overline{D}$, on ait $\operatorname{Re} \mathfrak{F}(z) \geqslant c_1\, d(z, N)^2$.

31. PROPOSITION. – *Soit* N *une sous variété de dimension réelle* k *de* ∂D *telle que, en chaque point* p *de* N, *on ait* $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ *et soit* K *un compact de* N. *Alors il existe un voisinage ouvert* Ω_2 *de* K *dans* $\mathbf{C}^n$, *une fonction* $\mathfrak{S}$ *de classe* C^∞ *dans* Ω_2, *à valeurs complexes et une constante* c_2 *strictement positive tels que l'on ait*

a) $\mathfrak{S}(z) = 0$ *sur* $N \cap \Omega_2$ *si et seulement si* z *appartient à* K,

b) $\overline{\partial}\mathfrak{S}$ *s'annule à l'ordre infini sur* $N \cap \Omega_2$,

c) $\operatorname{Re} \mathfrak{S}(z) \geqslant -c_2\, d(z, N)^2$ *pour tout* z *de* Ω_2 .

Preuve. – Soit z un point de $\mathbf{C}^n$; on dit que z_0 est une L-projection de z sur N si et seulement si z_0 appartient à N et $z - z_0$ appartient à $T_{z_0}(N)^L$.

Une application du théorème des fonctions implicites, les remarques 9 et 10 et un argument de compacité montrent qu'il existe un voisinage ouvert Ω_2 de K dans $\mathbf{C}^n$, relativement compact, une application P_N de classe C^∞ de Ω_2 dans $N \cap \Omega_2$ et une constante e tels que l'on ait

(31.1) pour chaque z de Ω_2, $P_N(z)$ est une L-projection de z sur N et appartient à $\Omega_2 \cap N$,

(31.2) $P_N(z) = z$ si z appartient à $\Omega_2 \cap N$, (31.3) $d(z, \mathrm{N})^2 \geqslant e \quad \|z - \mathrm{P_N}(z)\|^2$ pour tout z de Ω_2.

Soit s une fonction de classe C^∞ sur N, positive, à support compact A telle que l'on ait

(31.4) $s(z) = 0$ sur $\Omega_2 \cap \mathrm{N}$ si et seulement si z appartient à K.

On utilise une partition h_ℓ de l'unité subordonnée à un recouvrement fini de A par des ouverts (ω_ℓ), $1 \leqslant \ell \leqslant g$ vérifiant les conditions de la remarque 19 et on pose $k_\ell = s\, h_\ell$ sur $\omega_\ell \cap \mathrm{N}$. On a alors $s = \sum_{\ell=1}^{g} k_\ell$. En reprenant les idées développées dans la preuve de la proposition 28 on prolonge chaque fonction k_ℓ en une fonction $\mathcal{K}_\ell$ à valeurs complexes de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$, à support dans ω_ℓ. On obtient alors une fonction $\mathcal{S} = \sum_{\ell=1}^{g} \mathcal{K}_\ell$ de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$, à support compact, telle que l'on ait

(31.5) $\mathcal{S} = s$ sur N,

(31.6) $\bar{\partial}\mathcal{S}$ s'annule à l'ordre infini sur N,

(31.7) $\mathrm{grad_L}\, \mathrm{Re}\, \mathcal{S}$ appartient à T(N) en chaque point de N.

Soit z un point de Ω_2. On applique la formule de Taylor à $\mathrm{Re}\, \mathcal{S}$ entre z et $\mathrm{P_N}(z)$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, \mathcal{S}(z) = {} & \mathrm{Re}\, \mathcal{S}(\mathrm{P_N}(z)) + \langle \mathrm{grad_L}\, \mathrm{Re}\, \mathcal{S}(\mathrm{P_N}(z)), z - \mathrm{P_N}(z)\rangle_{\mathrm{L}} \\ & + (\mathrm{Re}\, \mathcal{S})''\, [\mathrm{P_N}(z) + \theta(z - \mathrm{P_N}(z))]\, (z - \mathrm{P_N}(z), z - \mathrm{P_N}(z))\end{aligned}$$

où θ est un réel de $]0,1[$ et $(\mathrm{Re}\, \mathcal{S})''(x)$ désigne la 2-forme hessienne de $\mathrm{Re}\, \mathcal{S}$ évaluée au point x.

D'après (31.7) et (31.5) et parce que s est positive sur N on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, \mathcal{S}(z) \geqslant {} & (\mathrm{Re}\, \mathcal{S})'' \quad [\mathrm{P_N}(z) + \theta(z - \mathrm{P_N}(z))] \quad (z - \mathrm{P_N}(z), z - \mathrm{P_N}(z)) \\ & \geqslant - \|\mathrm{Re}\, \mathcal{S}\|_2 \, \|z - \mathrm{P_N}(z)\|^2 .\end{aligned}$$

De (31.3) et (31.8) on déduit

$$\mathrm{Re}\, \mathcal{S}(z) \geqslant - \frac{\|\mathrm{Re}\, \mathcal{S}\|_2}{e}\, d(z, \mathrm{N})^2 ,$$

ce qui achève la preuve de la proposition si on pose

$$c_2 = \frac{\|\mathrm{Re}\, \mathcal{S}\|_2}{e} + 1 .$$

32. FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION FONDAMENTALE. – Soit N une sous-variété de ∂D telle que, en chaque point p de N, on ait $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ et soit K un compact de N.

On applique la proposition 30 à un ouvert W relativement compact de N contenant K, puis, la proposition 31 au compact K. On considère alors la fonction G définie dans $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ par $G = \mathfrak{F} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{c_2}\mathcal{G}$. Si on pose $c = \frac{1}{2}c_1$, la fonction G, l'ouvert Ω et la constante c vérifient les conclusions de la proposition 20.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. ARNOLD, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions MIR (1976), Moscou.

[2] D. BURNS, and E.L. STOUT, Extending functions from submanifolds of the boundary, *Duke Math. J.*, 43 (1976), 391-404.

[3] G.B. FOLLAND and J.J. KOHN, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton University Press (1972).

[4] G.B. FOLLAND and E.M. STEIN, Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, *Com. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 429-522.

[5] W. GUILLEMIN, Géométrie symplectique et physique mathématique, Colloque Intern. C.N.R.S, Aix en Provence (1974).

[6] M. HAKIM et N. SIBONY, Ensembles pics dans des domaines strictement pseudoconvexes, *Duke Math. J.*, 45 (1978), 601-617.

[7] F.R. HARVEY and R.O. WELLS, Holomorphic approximation and hyperfunction theory on a C^1 totally real submanifold of a complex manifold, *Math. Ann.*, 197 (1972), 287-318.

[8] G.M. HENKIN, et A.E. TUMANOV, C.R. Ecole d'été à Drogobytch (1974).

[9] S. KOBAYASHI, Transformation groups in differential geometry, Springer-Verlag (1972), Appendice 1.

[10] J.J. KOHN, Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 181 (1973), 273-292.

[11] A. NAGEL, Smooth zero sets and interpolation sets for some algebras of holomorphic functions on strictly pseudoconvex domains, *Duke Math. J.,* 43 (1976), 323-348.

[12] W. RUDIN, Peak interpolation sets of classe C^1, *Pacific J. Math.,* 75 (1978), 267-279.

[13] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds, *Regional conference series in mathematics* 29, Amer. Math. Soc.

Manuscrit reçu le 26 juin 1978
révisé le 13 septembre 1978.

J. CHAUMAT & A.M. CHOLLET,
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.