ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BOBO SEKE

Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension un

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 1 (1980), p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_1_1_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 1 (1980), 1-29

SUR LES STRUCTURES TRANSVERSALEMENT AFFINES DES FEUILLETAGES DE CODIMENSION UN

par BOBO SEKE

Le présent article est un prolongement des travaux de Reeb [1] et de Tischler [2] sur les feuilletages de codimension 1 avec structure transversalement de translation (feuilletages définis par la donnée d'une forme de Pfaff fermée sans singularités). On y étudie les feuilletages C^∞ de codimension 1 avec structure transversalement affine. Par commodité technique, les feuilletages considérés sont transversalement orientables (c'est toujours le cas à un revêtement à deux feuillets près), les variétés ambiantes sont connexes.

De façon précise on s'intéresse aux questions suivantes :

1) Caractériser les structures transversalement affines en termes de formes de Pfaff.

2) Examiner les conséquences topologiques et géométriques de l'existence d'une structure transversalement affine sur un feuilletage F.

3) Classifier les structures transversalement affines de F.

4) Etudier le «tourbillonnement» d'une structure transversalement affine le long d'une transversale fermée.

Les points 1 et 2 ont été abordés partiellement par Fedida et Furness dans [3], [4].

Signalons aussi que les feuilletages de codimension 1 avec structure transversalement affine constituent une classe particulière des feuilletages avec structure transverse homogène considérés par R.A. Blumenthal [5].

On a divisé le travail en cinq paragraphes :

– le premier paragraphe concerne les préliminaires (structure transverse de modèle donné, «tourbillonnement», exemples propriétés élémentaires des feuilletages de codimension 1 avec structure transversalement affine) ;

– le paragraphe 2 est consacré aux équations de structure (caractérisation des structures transversalement affines en termes de formes de Pfaff, conséquences immédiates – isomorphisme, holonomie, invariant de Godbillon-Vey, invariant d'une structure transversalement affine);

– le paragraphe 3 donne la classification des structures transversalement affines en codimension 1 (sur une variété compacte il y a unicité lorsque le feuilletage a de l'holonomie ; dans le cas général il y a unicité lorsque l'adhérence de toute feuille contient une feuille avec holonomie ; en dimension 1, le problème revient à classifier les structures affines de la variété ambiante, notre méthode permet de retrouver les résultats classiques sur les structures affines de $\mathbf{R}$ et de S^1 [6]) ;

– le paragraphe 4 examine quelques constructions (variétés produit, «tourbillonnement», construction de Furness généralisée) permettant d'obtenir des feuilletages ayant des feuilles partout denses avec holonomie, des feuilletages presque sans holonomie dont les feuilles n'ont pas toutes même revêtement universel ; des feuilletages dont la variété ambiante est fermée et non fibrée sur S^1 (dimension $n \geqslant 6$) ;

– le paragraphe 5 établit quelques propriétés (topologiques et géométriques) découlant de l'existence d'une structure transversalement affine sur un feuilletage F (on considère l'holonomie de cette structure transversalement affine : dans le cas abélien, toute feuille non fermée est sans holonomie, si en plus la variété ambiante est compacte, il n'existe pas de feuilles exceptionnelles ; sur une variété compacte, on peut se ramener au cas transversalement de translation lorsque les feuilles sont sans holonomie et que le feuilletage admet une structure transversalement affine, ou bien lorsque le feuilletage admet au moins deux structures transversalement affines).

Signalons que Gilbert Hector (Lille) vient d'obtenir les résultats suivants pour la dimension 3 :

1) Il existe des variétés fermées non fibrées sur S^1 admettant un feuilletage de codimension 1 transversalement affine.

2) Il existe des feuilletages de codimension 1 transversalement affines admettant un minimal exceptionnel.

Le dernier résultat confirme la remarque de Claude Lamoureux selon laquelle la démonstration de Fedida et Furness [4] de la non existence des feuilles exceptionnelles est incomplète.

Nous remercions Monsieur Godbillon pour ses encouragements, ses critiques et suggestions.

I. PRELIMINAIRES

1. Structure transverse de modèle (N, Π).

Soit F un feuilletage de classe C^∞ et de codimension q $(q \geqslant 1)$ sur une variété connexe V^n. Désignons par Π le groupoïde des germes d'éléments d'un pseudo-groupe transitif de difféomorphismes locaux C^∞ d'une variété N de dimension q.

DEFINITION 1. – *Une structure transverse de modèle* (N, Π) *sur* F *est un cocycle régulier maximal* c *de* V^n *qui définit* F *et prend ses valeurs dans* Π. *En pratique, la donnée de* c *correspond à celle d'un atlas distingué maximal* $A = \{(U_i, k_i)_{i \in I}\}$ *définissant* F, *où les germes des changements de la coordonnée transverse* $k_i : U_i \longrightarrow N$ *appartiennent à* Π.

Dans la terminologie de Haefliger [7], c est une Γ-structure régulière de V^n dont le feuilletage sous-jacent est F (on identifie Γ à Π).

On appelle feuilletage de modèle transverse (N, Π) un feuilletage admettant au moins une structure transverse de modèle (N, Π).

2. Tourbillonnement d'une structure transverse de codimension 1.

DEFINITION 2. – *En codimension 1 on dira que la structure* c *«tourbillonne» le long d'une transversale fermée* γ *si le feuilletage déduit de* F *par un tourbillon le long de* γ *admet au moins une structure transverse de modèle* (N, Π) *qui ne diffère de* c *que dans le domaine du tourbillon.*

3. Quelques exemples.

1) *Structure transversalement de translation en codimension 1*

En codimension 1 la donnée d'une forme de Pfaff ω fermée sans singularités définissant le feuilletage F équivaut à celle d'une structure transversalement de translation sur F (i.e. structure transverse de modèle $(\mathbf{R}, T)$, où T désigne le groupoïde des germes de translations de $\mathbf{R}$). On appelle feuilletage de codimension 1 transversalement de translation un feuilletage de codimension 1 admettant au moins une structure transversalement de translation. Un tel feuilletage est transversalement orientable, transversalement analytique et sans holonomie. De plus on a les résultats suivants :

1) Si la variété ambiante est compacte, elle admet un groupe à un paramètre de transformations qui échange transitivement les feuilles de F, on a alors toutes les feuilles partout denses ou bien toutes les feuilles compactes auquel cas le feuilletage est une fibration sur $I = [0, 1]$ ou sur S^1 (Reeb).

2) Une variété fermée admet un feuilletage de codimension 1 avec structure transversalement de translation si et seulement si elle est fibrée sur S^1 (Tischler).

3) Les structures transversalement de translation sur F ne «tourbillonnent» pas le long des transversales fermées.

2) *Structures transverses de Lie* [8], [9]

Lorsque Π est le groupoïde des germes de translations à gauche d'un groupe de Lie G, les structures transverses correspondantes sont appelées structures transverses de Lie de modèle G. La notion de feuilletage de Lie (feuilletage avec structure transverse de Lie) a été introduite par Robert Hermann en généralisation des feuilletages de codimension 1 définis par une forme de Pfaff fermée sans singularités (feuilletages de Lie de modèle le groupe additif $\mathbf{R}$). Lorsque le groupe G est connexe, les structures transverses de Lie de modèle G sont caractérisées par les 1-formes $\Omega : TV^n \longrightarrow \mathfrak{g}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de G telles que :

1) $\Omega_x : T_x V^n \longrightarrow \mathfrak{g}$ est surjective quel que soit x appartenant à V^n ;

2) $d\Omega + 1/2\,[\Omega, \Omega] = 0$ (condition de Maurer-Cartan) ;

3) $\Omega = 0$ est un système de Pfaff définissant F.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème suivant :

THEOREME (de Lie). – *Une 1-forme* $\Omega : TV^n \longrightarrow \mathfrak{g}$ *sur* V^n *à valeurs dans l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe* G *telle que* $d\Omega + 1/2\,[\Omega, \Omega] = 0$ *s'écrit localement* $\Omega | U = k^*\omega$, *où,* ω *est la forme de Maurer-Cartan sur* G *et* $k : U \longrightarrow G$ *une application différentiable ; cette écriture est unique, à une translation à gauche de* G *près, au voisinage de tout point de* V^n ; *lorsque* V^n *est simplement connexe, l'écriture est globale.*

Signalons que les feuilletages de Lie ont été étudiés par Fedida [9].

3) *Structures transverses homogènes* [5]

Lorsque Π est obtenu par localisation de l'action canonique d'un groupe de Lie G sur un espace homogène G/K les structures transverses correspondantes sont appelées structures transverses homogènes de modèle G/K. Le cas particulier où $K = \{e\}$ donne les structures transverses de Lie de modèle G. On appelle feuilletage transversalement homogène de modèle G/K un feuilletage admettant au moins une structure transverse homogène de modèle G/K. L'étude de tels feuilletages est faite par Blumenthal dans [5].

4) *Structures transversalement affines de codimension 1*

En codimension 1, les structures transverses homogènes de modèle G/K, où G est le groupe des transformations affines de la droite réelle ($G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ opère sur $\mathbf{R}$ par $(u, v) . t = ut + v$) et $K = \mathbf{R}^* \times \{0\}$ le sous-groupe d'homothéties fixant l'origine, sont appelées structures transversalement affines. Une structure transversalement affine est orientable si son groupoïde structural (groupoïde des germes de transformations affines de $\mathbf{R}$) est réductible au sous-groupoïde des germes de transformations affines croissantes de $\mathbf{R}$.

On appelle feuilletage de codimension 1 transversalement affine un feuilletage de codimension 1 admettant au moins une structure transversalement affine. Si F est un tel feuilletage, on a alors les propriétés suivantes :

1) F est transversalement analytique ;

2) l'holonomie des feuilles est abélienne et caractérisée par sa partie linéaire ;

3) si $\varphi : V' \longrightarrow V$ est transverse à F, une structure transversalement affine (orientable) sur F induit une structure transversalement affine (orientable) sur φ^*F ;

4) si V est de dimension 1, une structure transversalement affine sur F est une structure affine de V ;

5) si F est transversalement orientable, toute structure transversalement affine sur F est orientable, dans ce cas, holonomie finie est synonyme d'holonomie nulle ; les feuilles fermées avec holonomie sont isolées dans l'ensemble des feuilles fermées, et lorsque V est compacte, toutes les feuilles sont compactes (et sans holonomie) ou il existe au plus un nombre fini de feuilles compactes (toutes avec holonomie) ;

6) si V est simplement connexe, toute structure transversalement affine sur F est définie par une submersion de V dans $\mathbf{R}$; deux submersions définissent la même structure transversalement affine si et seulement si elles se déduisent l'une de l'autre par une transformation affine de $\mathbf{R}$ (la transformation affine est croissante si on oriente la structure).

II. EQUATIONS DE STRUCTURE

On donne la caractérisation des structures transversalement affines de codimension 1 en termes de formes de Pfaff. Quelques conséquences immédiates sont établies.

1) Soit σ une structure transversalement affine orientable de F correspondant à un atlas $A = \{(U_i, k_i)_{i \in I}\}$ où les k_i vérifient la condition (*) $k_i = a_{ij} k_j + b_{ij}$ ($a_{ij} > 0$, b_{ij} localement constantes sur $U_i \cap U_j$).

Si $\omega = 0$ est une équation de Pfaff définissant F, l'écriture locale de ω en fonction des k_i détermine une 1-forme fermée ω_1 telle que $d\omega = \omega \wedge \omega_1$. Quand on remplace ω par $\alpha = f\omega$, il faut remplacer ω_1 par $\alpha_1 = \omega_1 - df/f$. En effet, l'écriture locale $\omega | U_i = dk_i/f_i$ et la condition (*) montrent que l'on a $f_i = a_{ij} f_j$ ou encore $df_i/f_i = df_j/f_j$. Si l'on pose $\omega_1 | U_i = df_i/f_i$, on détermine une forme de Pfaff globale ω_1 fermée telle que $d\omega = \omega \wedge \omega_1$. Si $\alpha = dk_i/s_i$ et $\alpha = fdk_i/f_i$, on obtient $\alpha_1 = ds_i/s_i = df_i/f_i - df/f$.

2) Soit $\omega = 0$ une équation de Pfaff définissant F. La donnée d'une forme de Pfaff fermée ω_1 vérifiant la condition (**) $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ détermine via le théorème de Lie l'écriture locale $\omega | U_i = dk_i/f_i$, $\omega_1 = df_i/f_i$ unique aux identifications suivantes près $(f_i, k_i) \sim (a_i f_i, a_i k_i + b_i)$ ($a_i > 0$, b_i localement constantes). Comme ω est sans singularités, les k_i sont des submersions qui déterminent une structure transversalement affine orientable sur F. Pour appliquer le théorème de Lie, on observe que ω et ω_1 sont les composantes d'une 1-forme $\Omega : TV^n \longrightarrow \mathfrak{g}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe affine positif $G_+ = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ vérifiant la condition de Maurer-Cartan $d\Omega + 1/2\, [\Omega, \Omega] = 0$. On peut faire l'économie du théorème de Lie en utilisant le lemme de Poincaré sur les formes de Pfaff fermées.

Si ω_2 est une autre forme de Pfaff fermée vérifiant (**), on a $\omega | U_i = dk_i'/f_i'$ et $\omega_2 = df_i'/f_i'$. Lorsque les structures transversalement affines orientées données par k_i et k_i' coïncident, on a les relations $k_i = a_i k_i' + b_i$ ($a_i > 0$, b_i localement constantes) ; ceci implique $f_i = a_i f_i'$ ou encore $\omega_1 = \omega_2$.

Si on remplace ω par $\alpha = f\omega$ ($f > 0$), une forme de Pfaff fermée α_1 telle que $d\alpha = \alpha \wedge \alpha_1$ détermine la même structure transversalement affine orientée de F que celle donnée par ω_1 si et seulement si $\alpha_1 = \omega_1 - df/f$. En effet, on a localement $\alpha = dh_i/s_i = fdk_i/f_i$, $\alpha_1 = ds_i/s_i$, $\omega_1 = df_i/f_i$. Lorsque les h_i déterminent la même structure orientée que les k_i, on a les relations $h_i = a_i k_i + b_i$ $(a_i > 0)$. On en déduit l'égalité $ds_i/s_i = df_i/f_i - df/f$ ou encore $\alpha_1 = \omega_1 - df/f$. Réciproquement les couples (ω, ω_1) et $(f\omega, \omega_1 - df/f)$ déterminent la même structure transversalement affine orientée de F si $f > 0$. On peut aussi voir que les couples obtenus au point 1 donnent la structure σ dont on est parti. (Pour $f < 0$, $(f\omega, \omega_1 - df/f)$ donne la même structure avec l'orientation opposée que (ω, ω_1).)

3) Les points 1 et 2 donnent le théorème suivant :

THEOREME 1. – *Les structures transversalement affines orientables de* F *sont caractérisées par les couples* (ω, ω_1) *de formes de Pfaff de* V^n *telles que :*

(i) ω *est sans singularités* ;

(ii) $d\omega = \omega \wedge \omega_1$;

(iii) $d\omega_1 = 0$;

(iv) $\omega = 0$ *est une équation de Pfaff définissant* F ,

modulo les identifications $(\omega, \omega_1) \sim (f\omega, \omega_1 - df/f)$.

Si l'on désigne par $(F, \{\omega, \omega_1\})$, la structure transversalement affine de F correspondant au couple (ω, ω_1), on a alors les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. – *La classe de cohomologie réelle* $[\omega_1] \in H^1(V, \mathbf{R})$ *est un invariant de la structure transversalement affine* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *(elle varie avec la structure transversalement affine).*

COROLLAIRE 2. – *Si* $\varphi : V' \longrightarrow V$ *est transverse à* F, *la structure transversalement affine* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *induit sur* φ^*F *la structure transversalement affine*

$$\varphi^*(F, \{\omega, \omega_1\}) = (\varphi^*F, \{\varphi^*\omega, \varphi^*\omega_1\}).$$

COROLLAIRE 3. – *Pour que* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *soit isomorphe à* $(F', \{\omega', \omega_1'\})$, *il faut et il suffit qu'il existe un difféomorphisme*

$\varphi : V' \longrightarrow V$ *des variétés ambiantes correspondantes et une fonction* f *sur* V' *tels que*

$$\varphi^*(\omega\,,\omega_1) = (\varphi^*\omega\,,\varphi^*\omega_1) = (f\omega'\,,\omega_1' - df/f)\,.$$

COROLLAIRE 4. – *L'invariant de Godbillon-Vey est nul pour les feuilletages de codimension 1 avec structure transversalement affine.*

COROLLAIRE 5. – *Pour toute feuille* L, *la forme* $\omega_1|L$ *détermine l'holonomie de cette feuille ; en particulier* L *est sans holonomie si et seulement si* $[\omega_1|L] = 0$.

Les corollaires 1 à 4 sont immédiats.

Etablissons le corollaire 5. Dans la théorie générale des feuilletages C^∞ de codimension 1, la forme $\omega_1|L$ détermine l'holonomie linéaire de L. De façon précise, on a $\int_\gamma \omega_1|L = \operatorname{Log} dH_\gamma$ pour tout élément γ de $\pi_1 L$, où dH désigne l'holonomie linéaire. Dans notre cas, l'holonomie est caractérisée par sa partie linéaire. D'où la conclusion.

III. QUELQUES CONSTRUCTIONS

1. Structures sous-jacentes à une structure transversalement de translation.

Une structure transversalement de translation correspondant à une forme de Pfaff fermée sans singularités ω détermine une infinité de structures transversalement affines correspondant aux couples $(\omega\,,g\omega)$, où g est une fonction constante sur les feuilles.

Lorsque la classe de cohomologie réelle $[\omega]$ n'est pas nulle, les structures transversalement affines provenant des couples $(\omega\,,\omega)$ et $(\omega\,,0)$ ne sont pas isomorphes.

Sur le tore T^2 le difféomorphisme d'Anosov provenant de l'application unimodulaire de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme entre les structures transversalement affines $(\mathrm{F}, \{\omega, a\omega\})$ et $(\mathrm{F}, \{\omega, \omega\})$, où $\omega = (1 + \sqrt{5})\,dx - 2dy$ et $a = (3 - \sqrt{5})/2$.

2. Variétés produit.

Soient $f : \mathrm{V}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction ayant zéro pour valeur régulière ($f(x) = 0$ implique $df_x \neq 0$) et ω une forme de Pfaff fermée sans singularités sur une variété N. Sur le produit $\mathrm{M} = \mathrm{V}^n \times \mathrm{N}$, la forme de Pfaff $\alpha = df + f\omega$ est intégrable et sans singularités, elle définit un feuilletage F avec structure transversalement affine $(\mathrm{F}, \{\alpha, \omega\})$. Lorsque ω n'est pas exacte, les feuilles fermées correspondent aux composantes connexes de $f^{-1}(0)$. On montrera au paragraphe 5 que lorsque M est compacte, F est presque sans holonomie (et sans feuilles exceptionnelles). Ce procédé sera appliqué au cas particulier où $\mathrm{N} = \mathrm{S}^1$ et $\mathrm{V}^n = \mathrm{S}^n$ $(n \geqslant 3)$ pour obtenir des feuilletages presque sans holonomie dont les feuilles n'ont pas même revêtement universel (§ V.).

3. Tourbillonnement.

Au paragraphe 4, on démontrera le théorème suivant :

THEOREME 2. – *La structure transversalement affine* $(\mathrm{F}, \{\omega, \omega_1\})$ *«tourbillonne» le long d'une transversale fermée* γ *si et seulement si l'intégrale* $\int_\gamma \omega_1$ *est non nulle.*

Le «tourbillonnement» nous a permis de mettre en évidence des feuilletages admettant à la fois des feuilles compactes, des feuilles propres non compactes, des feuilles localement denses.

4. Construction de Furness généralisée.

i) Soient ω une forme de Pfaff fermée sans singularités sur M et $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ un difféomorphisme tel que $f^*\omega = a\omega$, où a est un réel $\neq 1$ strictement positif. La forme $\alpha = a^{-t}\omega$ définit sur $M \times \mathbf{R}$ un feuilletage F admettant la structure transversalement affine $(F, \{\alpha, \operatorname{Log} a\, dt\})$ invariante par l'action de Z donnée par $n.(x, t) = (f^n(x), t+n)$. Le feuilletage induit par F sur la variété quotient $V = (M \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ hérite d'une structure transversalement affine induite par $(F, \{\alpha, \operatorname{Log} a\, dt\})$.

Dans l'exemple de Furness, on pose

$$M = T^2, \quad \omega = (1+\sqrt{5})\, dx - 2dy$$

et $f: T^2 \longrightarrow T^2$ provient de l'application unimodulaire

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 .$$

Le feuilletage induit sur $V = (T^2 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ a toutes ses feuilles partout denses, les feuilles sans holonomie sont difféomorphes à $\mathbf{R}^2$ et les feuilles avec holonomie sont des cylindres difféomorphes à $S^1 \times \mathbf{R}$. Le feuilletage n'est donc pas presque sans holonomie.

ii) Plus généralement, soient $H: \pi_1 W \longrightarrow \mathbf{Z}$ un homomorphisme surjectif et $\psi: \mathbf{Z} \longrightarrow \operatorname{Diff}(M)$ une représentation qui envoie 1 sur f (f étant le difféomorphisme donné en i). L'homomorphisme composé $H_f = \psi \circ H$ permet de construire un fibré en M dont l'espace total est muni d'un feuilletage de codimension 1 avec structure transversalement affine. On considère à cet effet le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W} \times M & \longrightarrow & (\widetilde{W} \times M)/\pi_1 W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{W} & \xrightarrow{\quad p \quad} & W \end{array}$$

(p revêtement universel), $\pi_1 W$ opère sur $\widetilde{W} \times M$ par

$$\gamma.(x, y) = (\gamma . x, H_f(\gamma). y),$$

cette action laisse invariante la structure transversalement affine $(F, \{\alpha, \operatorname{Log} a\, dh\})$, où $\alpha = a^{-h}\omega$, h est une fonction sur $\widetilde{W}$ vérifiant la condition $h(\gamma . x) = h(x) + H(\gamma)$.

Le feuilletage induit sur $V = (\widetilde{W} \times M)/\pi_1 W$ par F (feuilletage défini par α) hérite d'une structure transversalement affine induite par $(F, \{\alpha, \operatorname{Log} a\, dh\})$.

On montrera au paragraphe V que pour un choix convenable de W, la variété V ne peut pas être fibrée sur le cercle S^1.

On peut varier à loisir l'exemple de Furness en prenant $M = T^n$ $(n \geqslant 2)$, $\omega = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$, en choisissant f provenant d'une matrice unimodulaire $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de la transposée de A associé à une valeur propre $a > 0$ et différente de 1.

IV. CLASSIFICATION DES STRUCTURES TRANSVERSALEMENT AFFINES

(Cette classification ne tient pas compte de l'orientation.)

1. Dimension 1.

On retrouve par une méthode qui nous semble originale les résultats classiques selon lesquels la droite réelle a trois structures affines non isomorphes et le cercle S^1 une infinité de structures affines caractérisées par les réels positifs [6].

La droite réelle.

i) La structure affine canonique sur $\mathbf{R}$ (donnée par l'identité $t \longmapsto t$) correspond au couple $(dt, 0)$. Le groupe des automorphismes est le groupe affine. En effet, un tel automorphisme f doit vérifier les conditions suivantes :

a) f est un difféomorphisme de $\mathbf{R}$;

b) $df = f^* dt = \mathrm{L} dt$;

c) $f^* 0 = 0 - d\mathrm{L}/\mathrm{L}$.

On en déduit que f est une transformation affine. Les isomorphismes locaux sont les restrictions de transformations affines (Cf. I).

ii) La demi-droite $]0, +\infty[$ avec la structure induite par i) a pour groupe d'automorphismes le sous-groupe des homothéties positives $\mathrm{H}_+ = \mathbf{R}_+^* \times \{0\}$.

iii) L'intervalle $]-1,+1[$ avec la structure induite par i) a pour groupe d'automorphismes le sous-groupe $\{\pm \mathrm{I}d\}$.

Les structures i), ii) et iii) sont deux à deux non isomorphes. Pour les structures induites par i), les intervalles $]a,+\infty[$, $]-\infty, b[$, $]0,+\infty[$ sont isomorphes, $]a,b[$ est isomorphe à $]-1,+1[$.

La structure ii) correspond à (dt, dt) sur $\mathbf{R}$ et la structure iii) à $(dt, -2th(t)\,dt)$, où th désigne la tangente hyperbolique.

THEOREME 3. — *Toute structure affine sur* $\mathbf{R}$ *est isomorphe à l'une des trois structures précédentes.*

Preuve. — Comme $\mathbf{R}$ est simplement connexe, toute structure affine provient d'une submersion $k:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, donc d'un difféomorphisme sur l'un des intervalles $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]a,b[$, $]-\infty,+\infty[$ et correspond au couple $(dk,0) = k^*(dt,0)$. D'où la conclusion.

Le cercle S^1

Le cercle $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est orientable, donc toute structure affine sur S^1 est orientable et provient d'un couple $(d\theta, \omega_1)$, où $d\theta$ est la forme canonique sur S^1.

Le nombre $\left|\int_{S^1}\omega_1\right|$ est un invariant de la structure affine. Les structures affines provenant des couples $(d\theta, \mathrm{A}d\theta)$, A réel positif, sont deux à deux non isomorphes. Par ailleurs l'application $\theta\longmapsto -\theta$ est un isomorphisme entre les structures affines provenant des couples $(d\theta, \mathrm{A}d\theta)$ et $(d\theta, -\mathrm{A}d\theta)$.

On va démontrer le théorème suivant :

THEOREME 4. — *La structure affine sur* S^1 *déterminée par le couple* $(d\theta, \omega_1)$ *est isomorphe à celle provenant de* $(d\theta, \mathrm{A}d\theta)$, *où* $\mathrm{A} = \left|\int_{S^1}\omega_1\right|$.

Preuve. — La structure affine correspondante sur $\mathbf{R}$ est déterminée par le couple (dt, dh) où h vérifie la condition $h(t+1) = h(t) + \int_{S^1}\omega_1$.

Si l'intégrale $\int_{S^1}\omega_1$ est nulle, la fonction h est périodique et l'application $\varphi : t\longmapsto \left[\int_0^t \exp(h(s))\,ds\right]\Big/\left[\int_0^1 \exp(h(s))\,ds\right]$

est un isomorphisme de cette structure sur celle déterminée sur $\mathbf{R}$ par $(dt, 0)$ tel que $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1$. D'où l'existence d'un isomorphisme entre les structures affines de S^1 données par les couples $(d\theta, \omega_1)$ et $(d\theta, 0)$.

Si l'intégrale $A = \int_{S^1} \omega_1$ n'est pas nulle, on peut la supposer positive. L'expression $\psi(t) = \frac{1}{A}\, ln \left[\int_0^t \exp(h(s))\, ds\right]$ définit un difféomorphisme de $\mathbf{R}$ qui est un isomorphisme de la structure considérée sur celle donnée par le couple $(dt, A dt)$ tel que $\psi(t+1) = \psi(t) + 1$. D'où l'existence d'un isomorphisme entre les structures affines de S^1 données par les couples $(d\theta, \omega_1)$ et $(d\theta, A d\theta)$.

Remarques

1) Le groupe des automorphismes de la structure affine de S^1 correspondant à $(d\theta, A d\theta)$, $A > 0$, (resp. $(d\theta, 0)$) est le groupe des rotations (resp. le groupe engendré par les rotations de la symétrie $\theta \longmapsto -\theta$).

2) On peut donner une démonstration plus conceptuelle du théorème 4 utilisant la classification des structures affines de $\mathbf{R}$, comme nous l'a fait remarquer M. Godbillon.

2. Dimension quelconque.

Soit $\omega = 0$ une équation de Pfaff définissant un feuilletage F. Si ω est fermée, toute 1-forme ω_1 telle que $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ s'écrit $\omega_1 = L\omega$, où L est une fonction constante sur les feuilles de F. Lorsqu'il existe une feuille partout dense, L est une constante. Lorsque F est une fibration sur le cercle S^1, la projection établit une correspondance biunivoque entre les structures transversalement affines de F et les structures affines de S^1. Lorsque ω est fermée, les structures transversalement affines correspondant aux couples $(\omega, a\omega)$ et $(\omega, b\omega)$, a et b réels, sont isomorphes si et seulement si il existe un difféomorphisme φ de la variété ambiante tel que $\varphi^*\omega = \frac{a}{b}\, \omega$.

THEOREME 5. – *Dans chacun des trois cas suivants, le feuilletage* F *admet au plus une structure transversalement affine* :

1) *La variété ambiante est compacte et le feuilletage a de l'holonomie.*

2) *La réunion des feuilles avec holonomie est partout dense.*

3) *L'adhérence de toute feuille contient une feuille avec holonomie.*

Ce théorème découle des lemmes suivants :

LEMME 1. – *Soit* α *une forme de Pfaff fermée sur une variété* N *et* g *une fonction telle que* $dg - g\alpha = 0$. *Si* α *n'est pas exacte, la fonction* g *est identiquement nulle ; si* α *est exacte ou bien* g *est identiquement nulle, ou bien* g *n'a pas de zéro.*

LEMME 2. – *Soit* $\alpha = 0$ *une équation de Pfaff définissant* F *sur une variété* N. *Si* g *est une fonction vérifiant* $d(g\alpha) = 0$, *alors* :

1) $g^{-1}(0)$ *est un fermé saturé par des feuilles de* F.

2) g *est identiquement nulle au voisinage de toute feuille ayant de l'holonomie contractante.*

3) *Lorsque* N *est compacte,* F *a de l'holonomie et* g *n'est pas identiquement nulle, le feuilletage admet un ouvert non vide saturé par des feuilles compactes.*

Preuves

A. *Comment déduire le théorème des lemmes ?*

Si les couples (ω, ω_1), (ω, ω_2) déterminent deux structures transversalement affines distinctes sur F, il existe une fonction g telle que $\omega_1 = \omega_2 + g\omega$ avec $d(g\omega) = 0$. Il s'agit de montrer dans les conditions du théorème que g est identiquement nulle.

a) S'il y a holonomie et si la variété ambiante est compacte, le feuilletage F admet seulement un nombre fini non nul de feuilles compactes. Dans ce cas, g s'annule identiquement en vertu du lemme 2 (point 3). Ceci établit le point 1 du théorème.

b) S'il y a au moins une structure transversalement affine orientable sur F, l'holonomie des feuilles est contractante. En vertu du lemme 2 (point 2), g est identiquement nulle dès que l'on est dans l'une ou l'autre des situations 2 et 3 du théorème. D'où la conclusion.

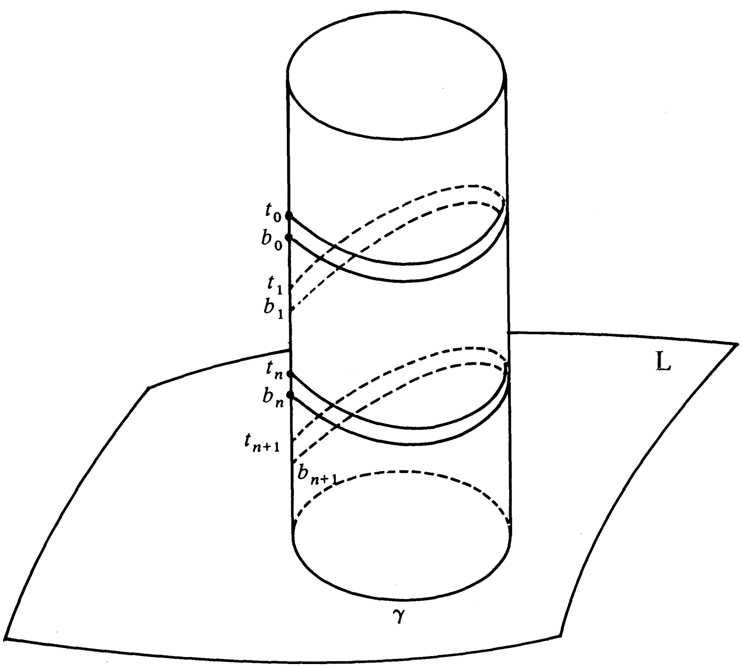
B. *Lemme 1*

Soit $p : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}$ le revêtement universel de N. On a $p^*(dg - g\alpha) = dg \circ p - g \circ p\, dh = 0$ ou encore $d(e^{-h} g \circ p) = 0$. Par conséquent $e^{-h} g \circ p = \mathrm{Cte}$. Si α n'est pas exacte, il est clair que g s'annule. D'où la conclusion.

C. *Lemme 2*

1) Soit α_1 une forme de Pfaff telle que $d\alpha = \alpha \wedge \alpha_1$. La condition $d(g\alpha) = 0$ implique l'égalité $dg - g\alpha_1 | \mathrm{L} = 0$, quelle que soit la feuille L. En vertu du lemme 1, $g^{-1}(0)$ est un fermé saturé.

2) Soit L une feuille ayant de l'holonomie contractante. Désignons par γ un lacet dans L de base x_0 dont le difféomorphisme d'holonomie est contractant. Considérons en x_0 un segment transverse au feuilletage, et sur ce segment un point t_0 tel que $g(t_0) \neq 0$. Alors $g \neq 0$ au voisinage de t_0. On peut supposer qu'on a la figure suivante :



On a $\int_{[t_0,b_0]} g\alpha = \int_{[t_1,b_1]} g\alpha = \ldots = \int_{[t_n,b_n]} g\alpha$. Comme $|t_n - b_n| \longrightarrow 0$, on a $\int_{[t_0,b_0]} g\alpha = 0$. Donc g a des zéros dans $[t_0, b_0]$. D'où la contradiction.

3) Désignons par U une composante connexe de l'ouvert saturé où $g \neq 0$. Comme N est compacte, $\overline{\mathrm{U}} - \mathrm{U}$ contient un ensemble minimal qui est une feuille compacte ; un minimal exceptionnel contiendrait une feuille avec holonomie contractante (10), ce qui impliquerait l'existence des zéros de g dans U. Par ailleurs, la feuille compacte obtenue est sans holonomie du côté de U ; en effet, ou bien l'holonomie est contractante, ou bien arbitrairement près de L, il y a une feuille de U avec holonomie contractante ; dans les deux cas, il y a contradiction. Le théorème de stabilité locale donne alors le résultat.

COROLLAIRE. – *Sur une variété compacte* V^n $(n \geqslant 2)$, *un feuilletage de codimension 1 admettant au moins deux structures transversalement affines orientables peut être défini par une forme de Pfaff fermée sans singularités.*

Preuve. – En vertu du théorème 5, le feuilletage est sans holonomie. Si toutes les feuilles sont denses, la fonction g est sans zéro. Si toutes les feuilles sont compactes, le feuilletage est une fibration sur S^1 ou sur $\mathrm{I} = [0,1]$.

3. Application : «tourbillonnement».

On va démontrer le théorème 2 annoncé au paragraphe III en utilisant la classification des structures affines de S^1.

i) *Condition suffisante.*

Soit γ une transversale fermée telle que $\int_\gamma \omega_1 \neq 0$. Désignons par U un voisinage tubulaire feuilleté de γ, difféomorphe à $\mathrm{S}^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$. Quitte à remplacer (ω, ω_1) par un couple équivalent, on peut supposer que $\omega = d\theta$. Les conditions $d(d\theta) = d\theta \wedge \omega_1$ et $d\omega_1 = 0$ impliquent l'écriture $\omega_1 = f(\theta)\, d\theta$, de sorte que F/U provient d'une structure affine de S^1. Modulo un difféomorphisme de $S^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$ de la forme $h \times Id|\mathbf{R}^{n-1}$, on peut prendre $(d\theta, \omega_1) = (d\theta, \mathrm{A}d\theta)$, où l'on a $\mathrm{A} = \left| \int_\gamma \omega_1 \right|$. En posant $V_1 = U$ et $V_2 = V^n - (S^1 \times \{x \in \mathbf{R}^{n-1}, \|x\| > 2\})$, on obtient un recouvrement ouvert de V^n. Soit alors $f : \mathbf{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction ayant zéro pour valeur régulière et telle que $f = 1/\mathrm{A}$ pour $\|x\| > 2$. Les couples $(\alpha, \alpha_1)|V_1 = (df + f\mathrm{A}d\theta, \mathrm{A}d\theta)$ et $(\omega, \omega_1)|V_2$ coïncident sur $V_1 \cap V_2$ et définissent un couple global (β, β_1) sur V^n donnant un nouveau feuilletage $\mathcal{H}$ ayant une feuille compacte difféomorphe à $S^1 \times S^{n-2}$ et admettant la structure transversalement affine $(\mathcal{H}, \{\beta, \beta_1\})$. On observe que

$$(\mathrm{F}, \{\omega, \omega_1\})|V_2 = (\mathcal{H}, \{\beta, \beta_1\})|V_2 .$$

ii) *Condition nécessaire*

Supposons que le feuilletage $\mathcal{H}$ déduit de F par un «tourbillonnement» le long d'une transversale fermée γ soit muni d'une structure transversalement affine $(\mathcal{H}, \{\alpha, \alpha_1\})$. Le «tourbillon» ne modifie F que dans un voisinage U de γ difféomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$. Si $\int_\gamma \omega_1 = 0$, on peut trouver un lacet contenu dans $V^n - U$ tel que $\int_\gamma \alpha_1 = 0$ aussi. Ceci implique que $\alpha_1|U$ est exacte et $\mathcal{H}|U$ est sans holonomie avec une infinité de feuilles compactes. D'où la contradiction car $\mathcal{H}$ a de l'holonomie et V^n est compacte.

Le théorème de «tourbillonnement» a pour conséquences les propositions suivantes :

PROPOSITION 1. – *Toute variété compacte* V^n $(n \geqslant 2)$ *fibrée sur* S^1 *admet un feuilletage de codimension 1 avec holonomie muni d'une structure transversalement affine.*

Preuve. – La fibration $p : V \longrightarrow S^1$ détermine un feuilletage ayant des transversales fermées γ telles que $\int_\gamma p^*d\theta \neq 0$, ce qui permet de tourbillonner la structure transversalement affine provenant du couple $(p^*d\theta, p^*d\theta)$.

PROPOSITION 2. – *Il existe des variétés fermées de dimension* n $(n \geqslant 3)$ *admettant un feuilletage* F *de codimension 1 transversalement affine ayant à la fois des feuilles compactes, des feuilles localement denses, des feuilles propres non compactes.*

Preuve. — Il suffit de considérer un feuilletage transversalement affine avec holonomie dont les feuilles sont toutes partout denses (exemples donnés par la construction de Furness et d'appliquer le «tourbillonnement» aux transversales fermées qui sont homologues à des lacets avec holonomie contenus dans certaines feuilles.

V. QUELQUES PROPRIETES (GEOMETRIQUES ET TOPOLOGIQUES)

1. Préliminaires.

i) *Holonomie d'une structure transversalement affine*

PROPOSITION 3. — *Un couple* (ω, ω_1) *définissant une structure transversalement affine de* F *détermine un homomorphisme* $H: \pi_1(V, x_0) \longrightarrow G_+ = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$; *l'homomorphisme correspondant à un couple équivalent s'obtient en composant* H *avec un automorphisme intérieur de* G_+ .

Preuve. — Si $p : (V, x_0) \longrightarrow (V, x_0)$ est le revêtement universel avec points de base, on peut choisir deux fonctions $k : (V, x_0) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$ et $h : (V, x_0) \longrightarrow (\mathbf{R}_+^*, 1)$ telles que $p^*(\omega, \omega_1) = (dk/h, dh/h)$. Tout élément γ de $\pi_1(V, x_0)$ vérifie la condition $\gamma^*(dk/h, dh/h) = (dk/h, dh/h)$. On en déduit l'existence d'un élément (a, b) de G_+ tel que $k \circ \gamma = ak + b$, $h \circ \gamma = ah$. L'homomorphisme cherché envoie γ sur (a, b). De plus, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{V} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "k"'] & \widetilde{V} \arrow[d, "k"] \\ R \arrow[r, "H(\gamma)"] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{V} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "h"'] & \widetilde{V} \arrow[d, "h"] \\ R_+^* \arrow[r, "H'(\gamma)"] & R_+^* \end{tikzcd}$$

($H'(\gamma)$ dérivée de $H(\gamma)$).

Quand on remplace (ω, ω_1) par un couple équivalent $(f\omega, \omega_1 - df/f)$, on a les relations

$$p^*(f\omega, \omega_1 - df/f) = (dk'/h', dh'/h') = (fdk/h, dh/h - df/f).$$

En posant $A = f(x_0)$, on obtient $h' = Ah/f$ et $k' = Ak$. Les conditions $k' \circ \gamma = a'k' + b'$ et $h' \circ \gamma = a'h'$ impliquent alors $a' = a$ et $b' = Ab$. D'où la conclusion.

Calcul de $H(\gamma) = (a, b)$:

Si $q : (W, z_0) \longrightarrow (V, x_0)$ est le revêtement galoisien de V associé à ω_1, alors p se factorise à travers q :

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{V}, \widetilde{x}_0) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & (W, z_0) \arrow[dl, "q"] \\
& (V, x_0) &
\end{tikzcd}$$

de sorte que

$$p^*(\omega, \omega_1) = (dk/h, dh/h) = r^*(q^*\omega, q^*\omega_1) = r^*(q^*\omega, ds/s).$$

Les relations $k \circ \gamma = ak + b$ et $h \circ \gamma = ah$ montrent que l'on a $a = \exp\left(\int_\gamma \omega_1\right)$ et $b = \int_{\overline{\gamma}} sq^*\omega$ où $\overline{\gamma}$ est la classe d'homotopie (avec extrémités fixes) des chemins δ tels que $[(p(\delta)] = \gamma$. Le noyau de H est formé d'éléments γ vérifiant les conditions $\int_\gamma \omega_1 = 0$ et $\int_{\overline{\gamma}} sq^*\omega = 0$.

ii) *Observations*

1) Le noyau de H ne dépend que de la structure transversalement affine définie par (ω, ω_1) ; de plus ce noyau ne contient aucun élément qui soit la classe d'homotopie d'une transversale fermée, *ceci exclut en particulier l'existence de transversales fermées d'ordre fini.*

2) Si $i_L : L \longrightarrow V$ est l'inclusion canonique de la feuille passant par x_0 l'homomorphisme induit sur $\pi_1(L, x_0)$

$$H_L : \pi_1(L, x_0) \xrightarrow{i_{L*}} \pi_1(V, x_0) \longrightarrow G_+$$

envoie un élément γ de $\pi_1(L, x_0)$ sur $\left(\exp\left(\int_\gamma \omega_1 | L\right), 0\right)$. Par conséquent H_L ne dépend pas de la structure transversalement affine particulière considérée (et détermine l'holonomie de L).

3) A un automorphisme intérieur de G_+ près, on peut parler de l'holonomie d'une structure transversalement affine (orientable).

4) Le revêtement galoisien de (V, x_0) associé au noyau de H s'obtient aussi en composant les revêtements associés à ω_1 et à $sq^*\omega$ respectivement.

5) Le caractère abélien (resp. non abélien) de $H(\pi_1(V, x_0)) = K$ est une propriété de la structure transversalement affine définie par (ω, ω_1).

iii) *Définitions.*

La dernière observation de ii) justifie les définitions suivantes :

La structure $(F, \{\omega, \omega_1\})$ est abélienne (resp. non abélienne) si le groupe $K = H(\pi_1(V, x_0))$ est abélien (resp. non abélien).

Dans le cas abélien, une et une seule des situations se présente :

a) Le groupe K est de rang zéro, dans ce cas on dira que la structure $(F, \{\omega, \omega_1\})$ est triviale.

b) Le groupe K est un sous-groupe de translations de rang au moins 1, la structure correspondante sera dite additive.

c) Le groupe K est un sous-groupe d'homothéties de même centre et de rang au moins 1, dans ce cas on dira que la structure correspondante est multiplicative.

2. Quelques propriétés.

PROPOSITION 4. – *L'homomorphisme associé à un couple* (ω, ω_1) *détermine un fibré* $\pi : P \longrightarrow V$ *en* $\mathbf{R}$ *dont l'espace total* P *est muni d'un feuilletage* F′ *de codimension 1 avec structure transversalement affine* $(F', \{\omega', \omega'_1\})$ *telle qu'il existe une section* $s : V \longrightarrow P$ *de* π *vérifiant la condition* $s^*(\omega', \omega'_1) = (\omega, \omega_1)$.

PROPOSITION 5. – *Lorsque l'holonomie de* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *est abélienne et de rang 1, toutes les feuilles de* F *sont propres.*

THEOREME 6. – *Soit* $q:(W, z_0) \longrightarrow (V, x_0)$ *le revêtement galoisien de* V *associé au noyau de* H. *Si* L *et* L′ *sont respectivement la feuille de* F *passant par* x_0, *la feuille de* $F' = q^*F$ *passant par* z_0, *dans le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, hook, "i_{L'}"] \arrow[d, "q|L'"'] & W \arrow[d, "q"] \\ L \arrow[r, hook, "i_L"] & V \end{tikzcd}$$

$q|L' : L' \longrightarrow L$ *est le revêtement galoisien associé à* $\omega_1|L$ *(ou encore au noyau de* H_L), *en particulier* $q|L'$ *est un difféomorphisme si et seulement si* L *est sans holonomie.*

*PROPOSITION 6. – *Dans chacune des situations suivantes, toute structure transversalement affine orientable sur* F *est abélienne :*

1) *Le groupe fondamental de* V^n *est abélien.*

2) *Le groupe des commutateurs de* $\pi_1(V, x_0)$ *est contenu dans le groupe* $i_{L*}(\pi_1(L, x_0))$, *où* L *est la feuille passant par* x_0.

PROPOSITION 7. – *La structure transversalement affine* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *est triviale si et seulement si* $(\omega, \omega_1) = (dk/h, dh/h)$ *(elle peut être définie par une submersion auquel cas* V *n'est pas compacte).*

PROPOSITION 8. – *Si* V^n *est compacte, la structure transversalement affine* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *est additive (i.e. l'holonomie de cette structure est un sous-groupe de translations de rang au moins 1) si et seulement si* ω_1 *est exacte (auquel cas* F *peut être défini par une forme de Pfaff fermée).*

*PROPOSITION 9. – *La structure transversalement affine* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *est multiplicative (i.e. l'holonomie de la structure transversalement affine est un groupe d'homothéties de rang au moins 1 et de même centre) si et seulement si :*

1) *La forme* ω_1 *n'est pas exacte.*

2) *Il existe une fonction* $f: V \longrightarrow \mathbf{R}$ *telle que* $\omega = df + f\omega_1$.

THEOREME 7. – *Sur une variété compacte* V^n, *un feuilletage* F *ayant une structure transversalement affine multiplicative* $(F, \{df + f\omega_1, \omega_1\})$ *est presque sans holonomie ; si toutes les feuilles ne sont pas compactes, il existe un groupe à un paramètre de transformations de* V *qui échange transitivement les feuilles contenues dans chaque composante connexe de l'ouvert saturé par les feuilles non-compactes (dans une composante connexe, les feuilles sont toutes propres ou toutes localement denses, il n'existe pas de feuilles exceptionnelles).*

THEOREME 8. – *Sur une variété compacte* V, *toute structure transversalement affine* $(F, \{\omega, \omega_1\})$, *où* F *est sans holonomie, est abélienne et provient d'une structure transversalement de translation sous-jacente* (F *peut être défini par une forme de Pfaff fermée sans singularités).*

PROPOSITION 10. – *Sur* V^n *fermée, la structure transversalement affine* $(F, \{\omega, \omega_1\})$ *est additive si toute transversale fermée* γ *vérifie la condition* $\int_\gamma \omega_1 = 0$; *si* $\int_\gamma \omega_1 \neq 0$ *pour toute transversale fermée* γ, *il n'existe pas de feuille non propre avec holonomie (en particulier pas de minimal exceptionnel).*

THEOREME 9. – *Sur une variété fermée* V^n, *un feuilletage* F *ayant une structure transversalement affine multiplicative* $(F, \{df + f\omega_1, \omega_1\})$ *peut être approché par un feuilletage* F' *avec structure transversalement affine multiplicative* $(F', \{df + f\omega'_1, \omega'_1\})$ *dont toutes les feuilles sont propres.*

Contrairement au cas des formes de Pfaff fermées sans singularités, la présence d'un couple (ω, ω_1) sur une variété fermée n'assure pas l'existence d'une fibration de cette variété sur le cercle S^1. On a le théorème suivant :

THEOREME 10. – *Pour tout entier* $n \geqslant 6$, *il y a une variété fermée au moins* V^n *non fibrée sur* S^1 *admettant un feuilletage de codimension 1 transversalement affine orientable.*

Observation. – Les structures transversalement affines qui interviennent dans le théorème 10 ne sont pas abéliennes. On peut se demander s'il y a fibration dans le cas abélien.

3. Retour aux exemples.

i) *Variétés produit* $M = V \times N$:

Dans ces exemples, les structures transversalement affines $(F, \{df + f\omega, \omega\})$ sont abéliennes (multiplicatives si ω n'est pas exacte), l'holonomie de la structure est donnée par le groupe des périodes de ω. Dans le cas particulier où $N = S^1$, l'holonomie de la structure est de rang 1, par conséquent toutes les feuilles de F sont propres.

Considérons le cas où $V = S^{n-1}$ $(n \geqslant 4)$. En posant $M = S^{n-1} \times S^1$, $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_n$, le feuilletage F défini par la forme de Pfaff $\alpha = df + fd\theta$ a une seule feuille compacte (difféomorphe à $S^{n-2} \times S^1$), les feuilles non compactes sont difféomorphes à $\mathbf{R}^{n-1}$. Par conséquent, les feuilles n'ont pas même revêtement universel.

ii) *Construction de Furness généralisée :*

Lorsque M est compacte, le feuilletage sur $V = (M \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ donné par la construction de Furness admet une structure transversalement affine non abélienne ; les feuilles ont même revêtement universel. Par exemple, le feuilletage de Furness sur $(T^2 \times \mathbf{R})/\mathbf{Z}$ a toutes ses feuilles denses et admet une structure transversalement affine $(F, \{\alpha, \alpha_1\})$ pour laquelle il existe des transversales fermées γ telles que $\int_\gamma \alpha_1 \neq 0$. Le tourbillonnement donne un feuilletage avec feuille compacte, feuilles propres non compactes, feuilles localement denses.

4. Démonstrations.

PROPOSITION 4 : On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{V} \times \mathbf{R} & \longrightarrow & P = (\widetilde{V} \times \mathbf{R})/\pi_1 V \\
{\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\widetilde{V} & \xrightarrow{\quad p \quad} & V
\end{array}$$

où p est le revêtement universel, p_1 la première projection, π la fibration cherchée, $\pi_1 V$ opère sur $\widetilde{V} \times \mathbf{R}$ par

$$\gamma \, . \, (x \, , t) = (\gamma \, . \, x \, , \mathrm{H}(\gamma) \, . \, t) \, .$$

Sur le produit $\widetilde{V} \times \mathbf{R}$, le couple $(dt/h \, , dh/h)$ est invariant par l'action de $\pi_1 V$ et détermine par conséquent un couple $(\alpha \, , \alpha_1)$ sur la variété quotient P (on a $(dk/h, \, dh/h) = p^*(\omega \, , \omega_1))$. Par ailleurs, l'application $\mathrm{K} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V} \times \mathbf{R} : x \longmapsto (x \, , k(x))$ est une section de p_1 telle que

$$\mathrm{K}^*(dt/h \, , dh/h) = (dk/h \, , dh/h) \, , \, \mathrm{K}(\gamma \, . \, x) = \gamma \, . \, \mathrm{K}(x) \, .$$

On en déduit une section $s : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{P}$ de π vérifiant

$$s^*(\alpha \, , \alpha_1) = (\omega \, , \omega_1) \, .$$

La Proposition 5 est une conséquence immédiate de la construction utilisée dans la démonstration de la Proposition 4. Les feuilles de F sont en effet toutes propres lorsque l'holonomie de $(\mathrm{F} \, , \{\omega \, , \omega_1\})$ est abélienne et de rang 1.

THEOREME 6 : Dans la théorie générale des variétés feuilletées q/L' est un revêtement tel que $q/\mathrm{L}'_*(\pi_1(\mathrm{L}' \, , z_0)) = i_{\mathrm{L}*}^{-1}(q_*(\pi_1(\mathrm{W} \, , z_0)))$. Dans notre cas, nous avons $\gamma \in i_{\mathrm{L}*}^{-1}(q_*(\pi_1(\mathrm{W} \, , z_0)))$ si et seulement si $\int_\gamma \omega_1 | \mathrm{L} = \int_{i_{\mathrm{L}*}\gamma} \omega_1 = 0$. D'où la conclusion.

PROPOSITION 6 : Dans cette proposition, le point 1 est évident. Démontrons le point 2. On sait que $\mathrm{H}(i_{\mathrm{L}*}(\pi_1(\mathrm{L} \, , x_0)))$ est contenu dans le groupe d'homothéties de centre zéro. Par ailleurs, l'image d'un commutateur est une translation puisque dans G_+ un commutateur est une translation. Mais une translation qui est en même temps une homothétie fixant un point coïncide avec l'identité. Par conséquent le groupe des commutateurs est contenu dans le noyau de H. D'où la conclusion.

La PROPOSITION 7 est évidente.

PROPOSITION 8 :

i) Supposons $(\mathrm{F} \, , \{\omega \, , \omega_1\})$ additive. Sur le revêtement universel $\widetilde{V}$, on a $p^*(\omega \, , \omega_1) = (dk/h \, , dh/h)$ avec les relations

$k \circ \gamma = k + b$, $h \circ \gamma = h$ quel que soit l'élément γ de $\pi_1(\mathrm{V}, x_0)$. Par conséquent ω_1 est exacte, la fonction h est un facteur intégrant pour ω.

ii) Si ω_1 est exacte, il est clair que $\mathrm{H}(\pi_1(\mathrm{V}^n, x_0))$ est un sous-groupe de translations puisque si l'on écrit $p^*(\omega, \omega_1) = (dk/k, dh/h)$, la fonction h est invariante dans les relations $h \circ \gamma = ah$. Donc $a = 1$.

PROPOSITION 9 :

i) Supposons $(\mathrm{F}, \{\omega, \omega_1\})$ multiplicative. Sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{V}}$, nous avons $p^*(\omega, \omega_1) = (dk/h, dh/h)$. Les éléments (a, b) de $\mathrm{H}(\pi_1(\mathrm{V}, x_0))$ ont même centre t_0. En posant $f = (k - t_0)/h$, on obtient une fonction invariante par l'action de $\pi_1(\mathrm{V}, x_0)$ telle que $p^*\omega = df + fp^*\omega_1$. On en déduit l'égalité $\omega = df + f\omega_1$.

ii) Si l'on suppose $\omega = df + f\omega_1$, on obtient sur le revêtement universel $p^*(\omega, \omega_1) = (dk/h, dh/h) = (d(fh)/h, dh/h)$. Si $f(x_0) \neq 0$, on peut prendre $k = fh - f(x_0)$. Les conditions $k \circ \gamma = ak + b$ et $h \circ \gamma = ah$ montrent que l'on a $b = f(x_0)(a - 1)$. De sorte que les (a, b) sont des homothéties de même centre $f(x_0)$.

THEOREME 7 : Soit $(\mathrm{F}, \{df + f\omega_1, \omega_1\})$ une structure transversalement affine multiplicative sur F. Si f est sans zéro, le théorème est évident. On va donc supposer que $\mathrm{E} = f^{-1}(0)$ est non-vide. Posons $\mathrm{U} = \mathrm{V} - \mathrm{E}$. Alors aucune feuille de $\mathrm{F}|\mathrm{U}$ n'est compacte, les feuilles compactes de F correspondent aux composantes connexes de E. Considérons un champ de vecteurs X tel que $(df + f\omega_1)(\mathrm{X}) = 1$. Comme V est compacte, le champ de vecteurs $\mathrm{Y} = f\mathrm{X}|\mathrm{U}$ est complet ; il vérifie par ailleurs la condition $\mathrm{L_Y}(df/f + \omega_1) = 0$ sur U. En utilisant un résultat de Reeb, on en déduit que le groupe à un paramètre engendré par Y échange transitivement les feuilles de $\mathrm{F}|\mathrm{U}$ contenues dans chaque composante connexe de U ; de plus, dans un telle composante connexe, les feuilles sont toutes propres ou toutes localement denses.

THEOREME 8 : Un feuilletage sans holonomie sur une variété compacte vérifie la condition suivante : pour tout $x_0 \in \mathrm{V}$, la feuille L passant par ce point est telle que l'inclusion induit un monomorphisme $i_{L*} : \pi_1(L, x_0) \longrightarrow \pi_1(V, x_0)$ dont l'image contient le groupe des commutateurs de $\pi_1(V, x_0)$. En vertu de la proposition 5, toute structure transversalement affine orientable sur F est abélienne ; si $(F, \{\omega, \omega_1\})$ est multiplicative, on a $\omega = df + f\omega$; comme F est sans holonomie, la fonction f n'a pas de zéro, la forme $\alpha = \frac{1}{f}\omega$ est fermée sans singularités.

PROPOSITION 10 :

i) S'il y a des feuilles avec holonomie, il existe des transversales fermées γ telles que $\int_\gamma \omega_1 \neq 0$. Par conséquent, le feuilletage est sans holonomie si toute transversale fermée vérifie $\int_\gamma \omega_1 = 0$; si en plus V est compacte, la forme ω a un facteur intégrant, on peut alors supposer $\omega_1 = L\omega$, où L est une fonction constante sur les feuilles ; L est nulle dans chacun des cas suivants :

1) Les feuilles sont partout denses,

2) F est une fibration sur le cercle S^1.

ii) Si F admet une feuille non propre avec holonomie, il existe une transversale fermée γ homologue à zéro (γ vérifie alors $\int_\gamma \omega_1 = 0$). Par conséquent, lorsque toute transversale fermée γ vérifie $\int_\gamma \omega_1 \neq 0$, toute feuille non propre est sans holonomie.

THEOREME 9 : Ce théorème découle des arguments utilisés dans la démonstration du théorème de Tischler [2]. Pour une structure transversalement affine $(F, \{df + f\omega_1, \omega_1\})$, on peut approcher la forme ω_1 aussi près qu'on veut par une forme $\omega_1' = Ah^*d\theta$, où A est une réel et $h : V \longrightarrow S^1$ une fonction différentiable. On obtient ainsi la structure transversalement affine cherchée $(F', \{df + f\omega_1', \omega_1'\})$ où F' est défini par $df + f\omega_1'$.

THEOREME 10 : On utilise la construction ii) expliquée au paragraphe III. On pose $W = S^{n-1} \times S^1 \# S^2 \times S^{n-2}$ (somme connexe), $M = T^2$, $\omega = (1 + \sqrt{5})\,dx - 2dy$, $f : T^2 \longrightarrow T^2$ provenant de l'application unimodulaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. La variété quotient $V = (\widetilde{W} \times T^2)/\mathbf{Z}$ admet un feuilletage de codimension 1 avec structure transversalement affine orientable ; on va montrer que pour $n \geqslant 4$, la variété V ne peut être fibrée sur S^1.

Supposons l'existence d'une fibration de V sur S^1. Alors V admet un revêtement galoisien $V' \longrightarrow V$ de groupe $\mathbf{Z}$ où V' a le type d'homologie d'une variété compacte. Comme les revêtements galoisiens de V sont classifiés par les sous-groupes distingués de $\pi_1 V$, le théorème sera démontré si l'on établit les deux points suivants :

1) $\widetilde{W} \times T^2 \longrightarrow V$ est à un isomorphisme près le seul revêtement galoisien de V de groupe $\mathbf{Z}$;

2) $\widetilde{W}$ n'a pas le type d'homologie d'une variété compacte.

Pour établir le point 1, on regarde le groupe fondamental de V. C'est un groupe à trois générateurs : deux générateurs a et b provenant de $\pi_1 T^2$ et un générateur c provenant de l'action de $\mathbf{Z}$. Comme $\pi_1 T^2$ est abélien, on a la relation $a.b = b.a$. Par ailleurs, on a aussi les relations suivantes : $c^{-1}.a.c = a.b$ et $c^{-1}.b.c = a.b^2$. Ces relations montrent que a et b sont des commutateurs qui engendrent $[\pi_1 V, \pi_1 V]$ $(a = b.c.b^{-1}c^{-1}$, $b = a^{-1}.c^{-1}.a.c)$. Mais un sous-groupe distingué D tel que $(\pi_1 V)/D \simeq \mathbf{Z}$ contient le groupe des commutateurs et ne contient pas c. Par conséquent $D = [\pi_1 V, \pi_1 V]$. Pour établir le point 2, on interprète $\widetilde{W}$ comme le produit $S^{n-1} \times \mathbf{R}$ sur lequel on greffe par l'opération de somme connexe un élément $S^2 \times S^{n-2}$ à chaque tronçon $I_p =]p, p+1[\times S^{n-1}$. Le calcul de l'homologie entière de W montre qu'il y a une infinité de générateurs indépendants en dimension 2 et en dimension $n-2$ $(n \geqslant 4)$.

BIBLIOGRAPHIE

[0] BOBO SEKE, Sur les feuilletages transversalement affines de codimension 1, Thèse 3ème Cycle, Strasbourg, 1977.

[1] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Hermann, Paris 1952.

[2] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1, *Topology,* 9 (1970), 153-154.

[3] E. FEDIDA et D. FURNESS, Transversally affine foliations, *Glasgow Math. J.,* (February 1975).

[4] E. FEDIDA et D. FURNESS, Feuilletages transversalement affines de codimension 1, *C.R. Acad. Sci.,* Paris, t. 282 (avril 1976).

[5] R.A. BLUMENTHAL, Transversally homogeneous foliations, Thesis Washington University, Saint-Louis, May 1978.

[6] N. KUIPER, Sur les surfaces localement affines, *Colloque de Géométrie différentielle de Strasbourg,* Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, p. 79-87.

[7] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïde, *Comm. Math. Helv.,* 32 (1958), 249-329.

[8] R. HERMANN, On differential geometry of foliations, *Ann. Math.,* 72 (1960), 445-457.

[9] E. FEDIDA, Feuilletage du plan. Feuilletages de Lie, Thèse, Strasbourg, 1973.

[10] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudogroups, *Amer. J. of Math.,* 87 (1965), 79-102.

[11] C. GODBILLON et J. VEY, Un invariant des feuilletages de codimension 1, *C.R. Acad. Sci.,* Paris, 273 (1971), 92-95.

Manuscrit reçu le 12 avril 1979.

BOBO SEKE,

Université de Strasbourg
Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 1
7, rue René Descartes
67084 Stransbourg Cedex.

Université Nationale
du Zaïre
Campus Universitaire
de Kinshasa
Faculté Polytechnique
Kinshasa XI (Zaïre).