ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRARD BESSON

Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes

Annales de l'institut Fourier, tome 30, n° 1 (1980), p. 109-128

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_1_109_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 1 (1980), 109-128

SUR LA MULTIPLICITÉ DE LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DES SURFACES RIEMANNIENNES

par Gérard BESSON

Introduction.

Ce travail est consacré à la première valeur propre des variétés riemanniennes compactes de dimension 2. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe, Δ son laplacien, le spectre de (M, g) est l'ensemble des valeurs propres de Δ agissant sur l'espace des fonctions différentiables sur M, il forme une suite de terme général λ_k telle que $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots$ On note enfin $m_k(g)$ la multiplicité de λ_k.

En 1975 S.Y. Cheng [8] démontrait le résultat suivant :

Si M *est une surface de Riemann compacte de genre* p *on a :* $m_k(g) \leqslant (2p + k + 1)(2p + k + 2)/2$ *pour toute métrique* g *sur* M.

En particulier :

– pour toute g sur $M = S^2$ on a toujours $m_1(g) \leqslant 3$ (notons que $m_1(\text{can}) = 3$, où $g = \text{can}$ désigne la structure riemannienne canonique de S^2)

– *pour toute* g *sur* T^2, $m_1(g) \leqslant 10$ *(notons que sur* T^2 *la plus grande multiplicité connue était 6).*

Dans le présent travail on améliore ces résultats par un raffinement de la technique de Cheng.

Dans la section 1 on rappelle les résultats de S.Y. Cheng.

Dans la section 2 on procède à une première amélioration des résultats énoncés ci-dessus. On utilise la méthode de Cheng qui consiste à borner l'ordre d'annulation d'une fonction propre du laplacien en un point quelconque de la variété par des considérations uniquement topologiques et de là à montrer que la multiplicité de la valeur propre considérée ne peut être arbitrairement grande. On remarque alors que, dans une carte locale, les dérivées partielles de la fonction d'ordre supérieur ou égal à 2 vérifient une relation, conséquence triviale de l'équation $\Delta\varphi = \lambda\varphi$. Ceci permet alors de montrer :

Si M *est une surface de Riemann compacte de genre* p, *pour toute métrique* g *sur* M, *alors* $m_k(g) \leqslant 4p + 2k + 1$.

Un théorème analogue peut être obtenu pour une variété compacte de dimension 2 non orientable, en considérant son revêtement des orientations :

(1) *Si* M *est compacte, non orientable, de dimension 2, pour toute* g *sur* M, $m_k(g) \leqslant 4p + 4k + 3$ *où* $p = 1 - \mathrm{X(M)}$.

Dans la section 3.A on étudie la cas particulier où $\mathrm{M} = \mathrm{S}^2$. Le théorème (1) fourni le résultat : $m_1(g) \leqslant 3$ pour toute g sur M. On montre le résultat suivant :

(2) *Il existe sur* $\mathrm{M} = \mathrm{S}^2$ *des métriques* $g \neq \mathrm{can}$ *telles que :* $m_1(g) = 3$.

La démonstration repose sur une idée suggérée par P. Deligne. Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\mathrm{S}^2, \mathrm{can})$ agissant irréductiblement dans le premier sous-espace propre de $(\mathrm{S}^2, \mathrm{can})$ et g une métrique sur S^2 invariante sous l'action de G, on montre que les métriques $g_t = tg + (1-t)\,\mathrm{can}$ sont telles que G agit irréductiblement dans le premier sous-espace propre de (S^2, g_t). On utilise une technique de perturbation d'opérateurs déjà utilisée dans «M. Berger. Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes, Compositio Math. Vol. 26 (1973), 129-149», mais dont la démonstration complète a été donnée par P. Bérard [3] qui permet de démontrer la continuité du caractère d'où le fait qu'il est constant.

Ainsi on montre que $m_1(g_t) = 3$. L'existence du groupe G est claire, le groupe tétraédral convient par exemple.

Dans la section 3.B on étudie la cas $\mathrm{M} = \mathrm{P}^2(\mathbf{R})$. D'après le théorème (2) on a : pour toute g sur M, $m_1(g) \leqslant 7$. Un argument topologique élémentaire ainsi qu'une méthode de perturbation analogue à celle de la section 2 permet de montrer :

Pour toute métrique g *sur* $P^2(\mathbf{R})$, $m_1(g) \leqslant 5$, *il existe des métriques* $g \neq \mathrm{can}$ *telles que* $m_1(g) = 5$.

Enfin dans la section 3.C on étudie le cas $M = T^2$. Le théorème (2) donne : $m_1(g) \leqslant 7$. On montre que l'éventualité $m_1(g) = 7$ ne se présente pas, elle conduit en effet à une contradiction basée sur les propriétés topologiques de T^2 et de l'ensemble des zéros d'une fonction propre φ du laplacien. Enfin l'argument de perturbation déjà utilisé permet de prouver :

Pour toute métrique g *sur* T^2 *on a* $m_1(g) \leqslant 6$. *Il existe des métriques* g *non identiques à celle héritée de* $(\mathbf{R}^2, \mathrm{can})$ *telles que* $m_1(g) = 6$.

1. Rappels de résultats.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe de dim 2, Δ son laplacien. Le spectre de (M, g) est l'ensemble des valeurs propres de Δ agissant sur l'espace des fonctions différentiables sur M, il forme une suite de terme général λ_k telle que $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots$ On note $m_k(g)$ la multiplicité de λ_k. Nous étudierons plus particulièrement les trois variétés suivantes [4, p. 138] :

a) $(M, g) = (S^2, \mathrm{can})$ où can désigne la structure riemannienne canonique :

On notera μ_k la *k-ième valeur propre distincte* ; on a alors :

$\mu_k = k(k+1)$, $k \geqslant 1$.

multiplicité de $\mu_k = 2k + 1$

sous-espaces propres associés à $\mu_k = \{$restrictions à S^2 des polynômes homogènes harmoniques de degré $k\}$.

b) Projectifs réels $(P^2(\mathbf{R}), \mathrm{can})$. Avec les mêmes notations :

$\mu_k = k(k+1)$, k pair.

multiplicité de $\mu_k = 2k + 1$

sous-espaces propres $= \{$fonctions induites sur $P^2(\mathbf{R})$ par les polynômes homogènes harmoniques de degré $k\}$.

c) Tores plats réels $T^2 = (\mathbf{R}^2/\Gamma)$ où Γ désigne un réseau de $\mathbf{R}^2$.

$\mu_k = 4\pi^2 \, |y|^2$; $y \in \Gamma^*$ réseau dual de Γ.

multiplicité de $\mu_k = \# \left\{ y / |y|^2 = \dfrac{\mu_k}{4\pi^2} \right\}$

sous-espaces propres engendrés par les fonctions

$$x \longrightarrow \exp[2i\pi(x\,|\,y)] .$$

Rappelons les résultats de S.Y. Cheng [8].

DEFINITION 1.1. – *Soit* f *une fonction solution d'une équation elliptique sur une variété riemannienne* (M, g). *On appelle ensemble nodal de* f*, l'ensemble* $f^{-1}(0)$. *Chaque composante connexe de* $M \setminus f^{-1}(0)$ *est appelée un domaine nodal de* f.

Le travail de S.Y. Cheng consiste à étudier l'ensemble nodal des fonctions propres du laplacien. Dans ce qui suit l'expression «domaines nodaux de la k-ième valeur propre» signifiera «domaines nodaux d'une fonction propre quelconque relative à la k-ième valeur propre». Le principal théorème concernant les domaines nodaux des fonctions propres du laplacien est le suivant [9, p. 452] :

THEOREME (R. Courant) 1.2. – *En dimension deux on a :*

$$\# \{\text{domaines nodaux de } \lambda_k\} \leqslant k + 1 .$$

Nous allons maintenant énoncer les théorèmes de S.Y. Cheng décrivant l'ensemble nodal d'une fonction propre du laplacien. Son étude est basée sur un résultat de L. Bers [5] qui décrit localement l'ensemble des zéros d'une fonction solution d'une équation elliptique dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^2$. Il conduit au résultat suivant :

THEOREME (S.Y. Cheng) 1.3. – *Soit* M *une variété de* dim 2 ; *alors pour toute solution de l'équation* $(\Delta + h(m))f = 0$, *où* $h \in C^\infty(M)$, *on a les propriétés suivantes :*

i) *Les points critiques de* f *sur l'ensemble nodal sont isolés.*

ii) *L'ensemble nodal de* f *est réunion de sous-variétés fermées de dimension 1,* C^2*-immergées. En particulier si* M *est compacte,* *l'ensemble nodal de* f *est réunion de cercles* C^2*-immergés (on convient d'appeler cercle* C^2*-immergé une courbe* $\Phi(S^1)$ *où* $\Phi : S^1 \longrightarrow M$ *est une* C^2*-immersion).*

iii) *Au voisinage d'un point critique* m *de* f *en lequel elle s'annule, l'ensemble nodal de* f *est réunion d'arcs de courbe* C^∞ *sécants en* m. *L'ensemble des tangentes en* m *à ces arcs forme un système équiangulaire. La courbure géodésique des arcs en* m *est nulle.*

De ce résultat local S.Y. Cheng tire le théorème suivant :

THEOREME (S.Y. Cheng) 1.4. – *Soit* M *une surface de Riemann compacte de genre* p *(surface compacte connexe de dimension 2 orientable) alors on a :* $m_k(g) \leqslant (2p+k+1)(2p+k+2)/2$.

La preuve du théorème repose sur une suite de lemmes dont la connaissance est indispensable pour ce qui suit :

DEFINITION 1.5. – *Si* f *est une fonction* C^∞ *sur* M, *on dit que* f *s'annule à l'ordre* N *en* m_0 *s'il existe un polynôme homogène de degré* N, p_N, *défini sur* $T_{m_0}M$, *tel que*

$$(f \circ \exp_{m_0})(x) = p_N(x) + 0(|x|^{N+1})$$

où x *désigne un point de* $T_{m_0}M$, *et* $|\cdot|$ *la norme de* $T_{m_0}M$ *induite par la structure riemannienne.*

THEOREME (S.Y. Cheng) 1.6. – *Soit* M *une surface de Riemann compacte de genre* p. *Soit* f *une fonction propre du laplacien de* M *correspondant à la kième valeur propre. Alors l'ordre d'annulation de* f *en un point* $m_0 \in M$ *quelconque est inférieur ou égal à* $2p+k$.

THEOREME (S.Y. Cheng) 1.7. – *Soit* M *une surface de Riemann compacte, et* f *une fonction propre du laplacien sur* M. *Supposons que* f *s'annule à l'ordre* N *en* m_0 *alors il existe* N *applications injectives,* C^1 *par morceaux* $\Phi_i : S^1 \longrightarrow M$, $1 \leqslant i \leqslant N$, *telles que si* $i \neq j$, $\Phi_i(S^1) \cap \Phi_j(S^1)$ *est constitué d'un nombre fini de points et que* $\Phi_i(S^1) \subset f^{-1}(0)$.

Enfin le lemme suivant est fondamental ; il fait intervenir la topologie de la variété :

LEMME (S.Y. Cheng) 1.8. – *Soit* M *une surface de Riemann compacte de genre* p. *Soit* $\Phi_i : S^1 \longrightarrow M$, $1 \leqslant i \leqslant 2p + k$, $k \geqslant 1$, *une famille d'applications injectives, telles que si* $i \neq j$, $\Phi_i(S^1) \cap \Phi_j(S^1)$ *est un ensemble fini, alors* $M \setminus \bigcup_{1}^{2p+k} \Phi_i(S^1)$ *a au moins* $k + 1$ *composantes connexes.*

La preuve de ce lemme repose sur le fait que les lacets Φ_i vérifient une relation d'homologie du type $\sum_{i=1}^{2p+k} n_i \Phi_i = 0$, $(n_i) \in \mathbf{Z}$, n_i non tous nuls.

D'autre part la condition $\Phi_i(S^1) \cap \Phi_j(S^1)$ est fini pour $i \neq j$ peut être affaiblie en :

$$\Phi_i(S^1) \neq \Phi_1(S^1) \cup \ldots \cup \Phi_{i-1}(S^1) \cup \Phi_{i+1}(S^1) \cup \ldots \cup \Phi_{2p+k}(S^1) .$$

Ces deux remarques permettent de prouver les lemmes suivants :

LEMME (S.Y. Cheng) 1.9. – *Soit* M *une surface de Riemann compacte de genre* p. *Soit* Φ_1 *et* Φ_2 *deux applications injectives* C^1 *par morceaux, telle que* $\Phi_1(S^1) \cap \Phi_2(S^1)$ *soit fini. S'il existe deux entiers, non tous deux nuls, tels que :* $n_1 \Phi_1 + n_2 \Phi_2 = 0$, *alors* $M \setminus (\Phi_1(S^1) \cup \Phi_2(S^1))$ *a au moins deux composantes connexes.*

LEMME (S.Y. Cheng) 1.10. – *Sous les mêmes hypothèses. Soit* $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2p+k}$ *des applications vérifiant les hypothèses de 1.8. Si de plus* $\Phi_1 \cap \ldots \cap \Phi_{p+k+1}$ *contient au moins deux points distincts alors* $M \setminus \cup \Phi_i(S^1)$ *a au moins* $2k + 2$ *composantes connexes.*

Preuve. – Considérons les $p + k + 1$ lacets Φ_i, et soit (m_0, n_0) deux points distincts de $\cap \Phi_j$. Chaque Φ_i se décompose en un chemin α_i allant de m_0 à n_0 et un chemin β_i allant de n_0 à m_0. Considérons la famille de lacets de point base m_0 :

$$(\alpha_i, \beta_{p+k+1}) \quad 1 \leqslant i \leqslant p + k + 1$$

$$(-\beta_i, \beta_{p+k+1}) \quad 1 \leqslant i \leqslant p + k ;$$

il y en a $2(p + k) + 1$ qui vérifient les hypothèses élargies du lemme 1.8.

C.Q.F.D.

2. Première réduction.

Ce paragraphe a pour but de donner une version améliorée de 1.4. On a

THEOREME 2.1. – *Soit* M *une surface de Riemann compacte connexe de genre* p. *Alors pour toute métrique* g *sur* M *on a :* $m_k(g) \leqslant 4p + 2k + 1$.

Preuve. – Soit $m_0 \in \mathrm{M}$, on désigne par $\mathrm{Ann}(\varphi, m_0)$ l'ordre d'annulation de φ en m_0. D'après 1.6 on a : $\mathrm{Ann}(\varphi, m_0) \leqslant 2p + k$.

Etudions le cas $p = k = 1$, par commodité. On utilise la carte exponentielle en m_0 pour se ramener à un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^2$. Soit (x, y) des coordonnées de $\mathbf{R}^2$. Le laplacien s'écrit [4, p. 126] :

$$\Delta = g^{11}(m) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2g^{12}(m) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + g^{22}(m) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a(m) \frac{\partial}{\partial x} + b(m) \frac{\partial}{\partial y}$$

où a et b sont des fonctions C^∞. Les propriétés de la carte exponentielle entraînent :

$$\Delta\varphi(0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0) = \lambda_1 \varphi(0).$$

Considérons le tableau

$$\begin{array}{ccccc}
 & \varphi(0) & & & \text{ordre } 1 \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) & & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0) & & \text{ordre } 2 \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0) & & \boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0)} & \text{ordre } 3 \\
\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(0) & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(0) & \boxed{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2}(0)} & \boxed{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}(0)} & \text{ordre } 4
\end{array}$$

Le théorème 1.6 permet donc d'affirmer que les dix termes écrits ci-dessus ne peuvent s'annuler simultanément. Si par conséquent la multiplicité de la valeur propre considérée était supérieure à 11, le système d'équation :

$$\sum_{i=1}^{m_1} a_i \frac{\partial^k \varphi_i}{\partial x^\ell \partial y^{k-\ell}}(0) = 0$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, \text{ et } 0 \leqslant \ell \leqslant k,$$

où $(\varphi_i)_i$ est une base de l'espace propre correspondant, aurait une solution (a_i) non triviale car il est homogène à dix équations et à $m_1 \geqslant 11$ inconnues.

On pourrait donc trouver une fonction propre $\varphi = \sum a_i \varphi_i$ qui s'annule à l'ordre au moins égal à 4 en m_0 ce qui est impossible, d'où : si $p = 1$ $m_1(g) \leqslant 10 = (2p + k + 1)$ $(2p + k + 2)/2$.

Soit alors l'équation : $\Delta\varphi(m) = \lambda\varphi(m)$; pour q entier, et $0 \leqslant \ell \leqslant q$ on a :

$$\left(\frac{\partial^q \Delta\varphi}{\partial x^\ell \partial y^{q-\ell}}\right)(m) = \lambda \frac{\partial^q \varphi}{\partial x^\ell \partial y^{q-\ell}}(m)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\left(\frac{\partial^q \Delta\varphi}{\partial x^\ell \partial y^{q-\ell}}\right)(m) = g^{11}(m) \frac{\partial^{q+2}\varphi}{\partial x^{\ell+2} \partial y^{q-\ell}}(m) + g^{12}(m) \frac{\partial^{q+2}\varphi}{\partial x^{\ell+1} \partial^{q-\ell+1}}(m)$$
$$+ g^{22}(m) \frac{\partial^{q+2}}{\partial x^\ell \partial y^{q-\ell+2}}(m) + \mathrm{L}(\varphi)(m)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire d'ordre inférieur ou égal à $q + 1$ sans termes constants. Si on suppose donc que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à $q + 1$ de φ s'annulent à l'origine, l'équation ci-dessus entraîne :

$$\frac{\partial^{q+2}\varphi}{\partial x^{\ell+2} \partial y^{q-\ell}}(0) + \frac{\partial^{q+2}\varphi}{\partial x^\ell \partial y^{q-\ell+2}}(0) = 0.$$

L'annulation des termes encadrés est donc une conséquence de celle des termes des lignes précédentes et de celui qui se trouve sur la même ligne à deux places à gauche de la dérivée considérée. Le nombre d'équations à réaliser pour annuler la fonction φ à un ordre au moins égal à quatre est donc 7.

Par un raisonnement identique au précédent on voit que si $p = 1$, $m_1(g) \leqslant 7 = 4p + 2k + 1$. Le cas général est analogue.

Dans le cas des surfaces non orientables on a :

THEOREME 2.2. – *Soit* M *une surface compacte connexe non orientable et* $\chi(\mathrm{M})$ *sa caractéristique d'Euler Poincarré. Alors pour toute métrique* g *sur* M : $m_k(g) \leqslant 4p + 4k + 3$ *où* $p = 1 - \chi(\mathrm{M})$.

Preuve. – Soit $r : \widetilde{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathrm{M}$ le revêtement canonique à deux feuillets de M [11, p. 116] ; $\widetilde{\mathrm{M}}$ est une surface de Riemann compacte de genre p.

Soit g la métrique sur M et $\widetilde{g}$ la métrique sur $\widetilde{\mathrm{M}}$ induite par r de telle sorte que le revêtement $r : (\widetilde{\mathrm{M}}, \widetilde{g}) \longrightarrow (\mathrm{M}, g)$ soit riemannien. Soit φ_k une fonction propre correspondant à la k-ième valeur propre du laplacien de (M, g) [4, p. 146] et $\widetilde{\varphi}_k = \varphi_k \circ r$. Alors $\widetilde{\varphi}_k$ est une fonction propre du laplacien de $(\widetilde{\mathrm{M}}, \widetilde{g})$.

Le théorème 2.2 résulte de 1.7, 1.8, et du lemme suivant :

LEMME 2.3. – $\neq$ $\{$*domaines nodaux de* $\widetilde{\varphi}_k\} \leqslant 2(k+1)$.

Preuve. – Notons D_i les domaines nodaux de φ_k et $\widetilde{\mathrm{D}}_i$ ceux de $\widetilde{\varphi}_k$. Sur l'ouvert connexe $\widetilde{\mathrm{D}}_{i_0}$, la fonction $\widetilde{\varphi}_k$ garde un signe constant. L'application r étant ouverte $r(\widetilde{\mathrm{D}}_{i_0})$ est un ouvert sur lequel φ_k garde un signe constant, donc il existe j_0 tel que $r(\widetilde{\mathrm{D}}_{i_0}) \subset \mathrm{D}_{j_0}$.

Donc si $\widetilde{\mathrm{D}}_{i_1} \cap r^{-1}(\mathrm{D}_{j_0}) \neq \emptyset$, on a $\widetilde{\mathrm{D}}_{i_1} \subset r^{-1}(\mathrm{D}_{j_0})$.

L'ouvert $r^{-1}(\mathrm{D}_{j_0})$ est donc réunion de domaines nodaux disjoints de $\widetilde{\varphi}_k$ qui en sont par conséquent les composantes connexes. Or r restreinte à $r^{-1}(\mathrm{D}_{j_0})$ est une application de revêtement qui a au plus deux feuillets.

3. Cas particuliers.

Dans ce paragraphe nous allons étudier la multiplicité de la première valeur propre des trois variétés mentionnées en a), b), c), du 1. Dans chacun des cas nous allons montrer que parmi toutes les métriques, la canonique correspond à la plus grande multiplicité de λ_1, mais que cette propriété n'est pas du tout caractéristique. On a d'abord le résultat suivant dont la démonstration repose sur une idée suggérée par Pierre Deligne :

PROPOSITION 3.1. – *Soit* M *une surface compacte connexe et* g_0 *une métrique sur* M *telle que pour toute métrique riemannienne* g, *on a* $m_1(g) \leqslant m_1(g_0)$. *Soit* G *un sous groupe fini de* $\mathrm{Isom}(M, g)$ *qui agit irréductiblement dans le premier sous-espace propre complexe de* (M, g_0), V_0. *Soit* g *une métrique invariante sous l'action de* G. *Alors :* $m_1(g) = m_1(g_0)$.

Preuve. – Considérons la famille à un paramètre de métriques sur M : $g_t = tg + (1-t)\,g_0$ et Δ_t le laplacien de (M, g_t) chacune d'elles est invariante sous l'action du groupe G. Par application du résultat de Pierre Bérard [3] on peut affirmer que :

a) il existe h fonctions scalaires $\Lambda_i(t)$

b) il existe h fonctions à valeurs dans $C^\infty(M)$ telles que :

i) $\Delta_t \Phi_i(t) = \Lambda_i(t)\, \Phi_i(t)$ pour tout t et $1 \leqslant i \leqslant h$

ii) $\Lambda_i(0) = \lambda_1(g_0)$ et $h = \dim V_0 \quad 1 \leqslant i \leqslant h$

iii) soit V_{Λ_i} le sous-espace propre associé à $\Lambda_i(t)$; alors pour t assez petit $V_t = V_{\Lambda_1} + V_{\Lambda_2} + \ldots + V_{\Lambda_h}$ est de dim h et $\{\Phi_i(t)\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant h\}$ en constitue une base orthonormée.

Le groupe G agit dans chacun des sous-espaces V_{Λ_i}, donc dans V_t. Désignons par π_t l'action de G sur V_t et χ_t son caractère défini par :

$$h \in G\,,\ \chi_t(h) = \mathrm{trace}(h) = \sum_1^k \int_M \Phi_i(m)\, \overline{\Phi_i(h^{-1}(m))}\, \mu_t$$

où μ_t désigne la mesure canonique de (M, g_t) [4, p. 10]. On voit que χ_t dépend continûment de t.

D'autre part : $\langle \chi_t, \chi_0 \rangle = + \dfrac{1}{\#G} \sum \chi_t(h)\, \chi_0(h^{-1})$ est entier [14, pp. 138-145] et est continu en t, il est donc constant. Or π_0 étant irréductible par hypothèse $\langle \chi_0, \chi_0 \rangle = 1$ [14, p. 140]. Par conséquent pour t assez petit : $\langle \chi_t, \chi_0 \rangle = 1$.

La multiplicité de π_0 dans π_t est donc 1 ; or ces deux actions ont même dimension, elles sont donc équivalentes [14, p. 141].

En particulier π_t est irréductible et V_t n'a pas de sous-espaces invariants non triviaux. Donc : $V_{\Lambda_1} = \ldots = V_{\Lambda_h}$ et $\Lambda_1 = \ldots = \Lambda_k$ pour t voisin de 0 $m_1(g_t) = m_1(g_0)$.

Soit alors $I = \{t_0 \in [0,1] : \ \forall t \in [0, t_0] \quad m_1(g_t) = m_1(g_0)$ et G opère irréductiblement dans $V_t\}$.

Le raisonnement précédent montre que I est non vide. Soit $b = \sup I$; pour tout $t < b$, il existe $t_0 \in I$, $t < t_0 < b$. Sur l'intervalle $[0, t_0[$ la propriété définition de I est vérifiée, donc en particulier en t ; elle l'est donc sur $[0, b[$. Supposons que $m_1(g_b) \neq m_1(g_0)$, alors elle est plus petite. Mais par application du résultat de P. Bérard [3] on voit que $m_1(g_t)$ devrait être plus petite que $m_1(g_b)$ pour t voisin de b et en particulier pour $t < b$ ce qui est impossible, donc $m_1(g_b) = m(g_0)$, et de même on montre que G agit irréductiblement dans V_b.

Le raisonnement qui a permis de montrer que $I \neq \emptyset$ appliqué au voisinage de $t = b$ montre que si $b < 1$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(b + \epsilon) \in I$, ce qui contredit la définition de b. On a donc $b = 1$ et $\forall t \in [0,1] \quad m_1(g_t) = m_1(g_0)$.

A. *Le cas de* S^2 :

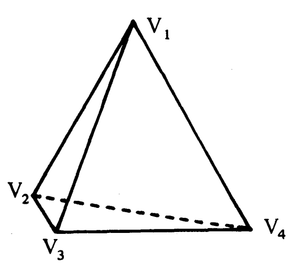
D'après 2.1, on sait que pour toute structure riemannienne sur S^2 on a $m_1(g) \leqslant m_1(\mathrm{can}) = 3$.

THEOREME 3.A.1. – *Il existe sur la sphère* S^2 *des métriques riemanniennes* g, *distinctes de la canonique telles que :* $m_1(S^2, g) = 3$.

Preuve. – D'après 3.1, il suffit en fait d'exhiber un sous-groupe fini G de $SO(3)$ agissant irréductiblement dans le premier sous-espace propre V_0 de (S^2, can) et une métrique non identique à can invariante sous l'action de G.

Rappelons que V_0 est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbf{C}^3$.

Considérons le groupe G des isométries positives du tétraèdre régulier. Il est isomorphe au groupe A_4 des permutations paires de quatre éléments. Il est défini par les générateurs :



P = rotation d'angle π autour de la droite joignant les milieux des segments $v_1 v_2$ et $v_3 v_4$,

Q = id avec $v_1 v_3$ et $v_2 v_4$,

A = rotation d'angle $2\pi/3$ autour de la droite joignant v_1 au milieu de la face opposée, et les relations :

$$A^3 = P^2 = Q^2 = I. \quad PQ = QP \quad APA^{-1} = Q \quad AQA^{-1} = PQ$$

[14, p. 85].

Le groupe G agit dans $\mathbf{R}^3$ donc dans V_0, dual de son complexifié. Un calcul immédiat du caractère de cette dernière action montre que celle-ci est irréductible.

Enfin l'existence de la métrique g repose sur le théorème suivant [6, p. 16].

THEOREME (J.P. Bourguignon) 3.A.2. – *Soit* D *le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte* M. *Si* H *est un sous groupe fini de* D, *alors* H *est le groupe d'isométries d'au moins une métrique.*

Remarque. – Signalons un résultat de Hajime Urakawa [12 page 223] qui exhibe sur S^2 une métrique g telle que $m_1(S^3, g) = 7$, alors que $m_1(S^3, \text{can}) = 4$; cela montre l'impossibilité d'une généralisation de 3.A.1 au cas de la dimension 3.

B. *Le cas de* $P^2(\mathbf{R})$:

D'après le théorème 2.1, pour toute structure riemannienne sur $P^2(\mathbf{R})$ on a $m_1(g) \leqslant 7$. Or, pour la structure canonique, $m_1(\text{can}) = 5$. Mais on a en fait le :

THEOREME 3.B.1. – *Pour toute métrique riemannienne* g *sur* $P^2(\mathbf{R})$ *on a :* $m_1(g) \leqslant 5$. *Il existe des métriques non identiques à la canonique, telles que* $m_1(g) = 5$.

LEMME 3.B.2. – *Une fonction propre relative a la première valeur propre de* $(P^2(\mathbf{R}), g)$ *ne peut s'annuler à un ordre supérieur ou égal à 3.*

Preuve de 3.B.2. – Soit $\widetilde{g}$ la métrique sur S^2 telle que $r : (S^2, \widetilde{g}) \longrightarrow (P^2(\mathbf{R}), g)$ soit un revêtement riemannien. Soit $\widetilde{\varphi}$

une fonction propre du laplacien de $(S^2, \widetilde{g})$. Si φ correspond à la première valeur propre de $(P^2(\mathbf{R}), g)$, alors elle a exactement deux domaines nodaux d'après 1.2. Supposons que φ s'annule en un point $m \in P^2(\mathbf{R})$ à un ordre supérieur ou égal à trois. D'après 1.6 $\mathrm{Ann}(\varphi) = 3$.

La fonction $\widetilde{\varphi}$ s'annule donc en deux points distincts $\widetilde{m}_1$ et $\widetilde{m}_2$ à l'ordre trois. D'après 1.7 et le fait qu'une fonction propre du laplacien change de signe au voisinage d'un zéro, l'ensemble nodal de $\widetilde{\varphi}$ est la réunion de trois lacets simples C^1 par morceaux de point base $\widetilde{m}_1$ et passant par $\widetilde{m}_2$. D'où d'après 1.10 il y a contradiction avec le théorème des domaines nodaux de Courant.

Par conséquent $\mathrm{Ann}(\varphi, m) \leqslant 2$, et par un raisonnement identique à celui utilisé dans la preuve de 2, on prouve la première partie de 3.B.

Pour la seconde, 3.1 et 3.2 permettront de conclure lorsqu'on aura exhibé un sous-groupe fini de SO(3) agissant irréductiblement dans l'espace V des polynômes homogènes harmoniques de degré 2.

Le groupe I des isométries positives de l'icosaèdre régulier convient. Il est isomorphe à A_5, groupe des permutations paires de cinq lettres. Il est défini par trois générateurs et les relations : $A^3 = B^2 = C^5 = ABC = 1$ et est d'ordre 60.

LEMME 3.B.3. – *Le groupe I agit irréductiblement dans* V.

Preuve. – Le groupe A_5 n'a de représentations irréductibles qu'en dimension 1, 3, 4 et 5 [7, p. 112]. Donc s'il n'agit pas irréductiblement dans V, l'action se décompose en une somme de représentations irréductibles dans laquelle figure nécessairement une action de dimension 1. Or I est simple, donc la seule action irréductible de dimension 1 est l'action triviale. Il suffit donc de prouver que V ne contient aucune fonction invariante.

Soit P un polynôme de $\mathbf{R}^3$ homogène et harmonique. Si sa restriction à S^2 est invariante par I, il l'est également. On peut supposer que I contient la rotation d'angle $2\pi/5$ autour de l'axe Oz. Le polynôme P devant être invariant par cette rotation, sa restriction au plan xOy, notée Q, doit l'être par la rotation correspondante dans ce plan. Or les lignes de niveau de Q sont des coniques de xOy. Les seules coniques invariantes par une rotation d'angle $2\pi/5$ autour de l'origine sont les cercles centrés en ce point. On a donc nécessairement : $Q(X, Y) = a(X^2 + Y^2)$, $a \in \mathbf{R}$. On peut supposer $a \neq 0$. Le polynôme P étant harmonique, on a : $P(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - 2Z^2$ ($a = 1$ par ex.). Or I contient des rotations d'angles $2\pi/5$ autour des droites distinctes de l'axe Oz, par rapport auxquelles le polynôme précédent n'est pas invariant. Le cas $a = 0$ se traite de manière analogue.

C. *Les tores de dimension 2 :*

Si Γ désigne un réseau de $\mathbf{R}^2$, considérons le tore $T = \mathbf{R}^2/\Gamma$. D'après 2.1, on a : pour toute g sur T, $m_1(T, g) \leqslant 7$.

Or parmi les métriques issues de la métrique canonique de $\mathbf{R}^2$ par passage au quotient sur $\mathbf{R}^2/\Gamma$, celle qui a la plus grande multiplicité de λ_1 est celle correspondant au réseau plat équilatéral. La multiplicité correspondante est 6.

THEOREME 3.C.1. – *Pour toute métrique g sur T on a : $m_1(T, g) \leqslant 6$. Il existe des structures riemanniennes sur M, non induites par la métrique canonique de $\mathbf{R}^2$, telles que : $m_1(T, g) = 6$.*

On utilisera comme précédemment une carte exponentielle autour d'un point de M. Soit φ une fonction propre de M relative à la première valeur propre du laplacien de M ; on rappelle que l'ordre d'annulation de φ en un point quelconque de M est inférieur ou égal à 3 d'après 1.6.

Si $m_1 = 7$ on peut, de même que dans la démonstration du théorème 2.1, construire une fonction propre φ_0 s'annulant en 0 à l'ordre trois, et telle que de plus : $\dfrac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^2 \partial y}(0) = 0$.

On a $\dfrac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3}(0) \neq 0$ car sinon φ_0 s'annule à l'ordre quatre en 0, ce qui est impossible. Pour la même raison elle est unique à une constante près.

De même on construit une fonction φ_1 s'annulant en 0 à l'ordre trois et telle que de plus $\dfrac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3}(0) = 0$.

Les fonctions φ_0 et φ_1 sont clairement indépendantes et l'on voit par un argument du même type que les précédents, que le sous-espace vectoriel des fonctions (relatives à la première valeur propre) qui s'annulent à l'ordre trois en 0 est de dimension 2, et donc engendré par φ_0 et φ_1.

D'après le théorème de L. Bers [5] φ_0 et φ_1 sont égales à un certain ordre au voisinage de 0, à un polynôme homogène harmonique de degré trois. On a donc, quitte à multiplier φ_0 et φ_1 par une constante,

$$\varphi_0(m) = 3xy^2 - x^3 + 0(|m|^4)$$

$$\varphi_1(m) = 3yx^2 - y^3 + 0(|m|^4).$$

L'ensemble nodal de φ_0, comme celui de φ_1, admet en 0 un point triple. Les tangentes aux différentes branches forment un système équiangulaire (cf. 1.3). Celui correspondant à φ_1 fait avec l'autre un angle égal à $\pi/6$.

Posons $\varphi_\theta = \cos(3\theta)\,\varphi_0 + \sin(3\theta)\,\varphi_1$. Le système équiangulaire correspondant φ_θ est décalé de θ par rapport a celui de φ_0.

D'après les lemmes 1.9, 1.10, le théorème 1.7, et le fait qu'une fonction propre du laplacien change de signe au voisinage d'un point où elle s'annule, on peut affirmer que :

i) l'ensemble nodal de φ_θ est réunion de trois lacets simples C^1 par morceaux.

ii) Deux d'entre eux ne sont jamais homotopes.

iii) Deux d'entre eux ne se recoupent jamais.

Donc en dehors du point 0, pour tout θ, l'ensemble nodal de φ_θ est une sous-variété C^∞ de dimension 1. En effet, d'après le théorème 1.3, les singularités de la ligne nodale ne surviennent qu'en des points multiples de celle-ci.

Dans tout ce qui suit l'expression «lacet partant de (resp. revenant en) O tangentiellement à la droite d'angle θ» signifie que le lacet en question, paramétré par un intervalle du type $[0, L]$, a en O une demi-tangente à droite (resp. en L une demi-tangente à gauche) d'équation $y = x \operatorname{tg} \theta$.

LEMME 3.C.2. – *Pour θ suffisamment petit le lacet de l'ensemble nodal de φ_θ partant de O tangentiellement à la droite d'angle θ est homotope au lacet correspondant pour $\theta = 0$.*

Preuve. – La preuve de ce lemme est longue et nécessite plusieurs étapes.

1ère étape : étude du point triple

Posons pour un point m de coordonnées (x, y) voisin de O, $f(x, y, \theta) = \varphi_\theta(x, y)$.

Par une méthode classique [13, pp. 254-255], on voit qu'il existe une fonction $Y(x, \theta)$ de classe C^1 telle que au voisinage de $(0,0)$:

$$Y(0,0) = 0$$

$$y = x \operatorname{tg}\theta + x\, Y(x, \theta)$$

soit solution de : $\varphi_\theta(x, y) = 0$.

Plaçons nous dans T_0M et considérons un carré de côté $2c$, C, centré en O. C'est un voisinage de O et on peut prendre c assez petit pour que le résultat précédent soit applicable. Soit de même un carré homothétique de côté $2d$, noté D, $d < c$. L'homotopie à l'intérieur de D est donnée par : $H(t, x) = (x, y(x, t\theta_0))$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $0 \leqslant x \leqslant d$.

2ème étape : recollement des homotopies

Nous aurons besoin de recoller des homotopies, en particulier celle que l'on a construite dans D et une que nous construirons ultérieurement à l'extérieur de C. L'homotopie H précédemment construite est telle que : $H(t, d) = (d, y(d, t\theta_0))$.

Soit (x_t, y_t), $t \in]0,1[$ une courbe incluse dans $C \backslash D$ qui coupe chaque $y(x, \theta)$ en un point et un seul :

$$y_0 = y(x, 0) \quad \text{et} \quad y_1 = y(x_1, \theta_0).$$

Alors l'application, $H(t, x) = (z(t, x), u(t, x))$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $d \leqslant x \leqslant x_0$ où :

$$z(t, x) = (1 - t)\left[\left(\frac{x - d}{x_0 - d}\right) x_t + \left(\frac{x_0 - x}{x_0 - d}\right) d\right] + t\left[\left(\frac{z(x) - d}{x_1 - d}\right) x_t + \left(\frac{x_1 - z(d)}{x_1 - d}\right) d\right],$$

$$u(t,x) = t\left[\frac{y(z(x),\theta_0) - y(d,\theta_0)}{y_1 - y(d,\theta_0)} y_t + \frac{y_1 - y(z(x),\theta_0)}{y_1 - y(d,\theta_0)} y(d, t\theta_0)\right]$$
$$+ (1-t)\left[\frac{y(x,0) - y(d,0)}{y_0 - y(d,0)} y_t + \frac{y_0 - y(x,0)}{y_0 - y(d,0)} y(d, t\theta_0)\right],$$
$$z(x) = \left(\frac{x_0 - x}{x_0 - d}\right) d + \left(\frac{x-d}{x_0 - d}\right) x_1$$

vérifie :

$$\begin{cases} H(0,x) = (x, y(x,0)) \\ H(1,x) = (z(x), y(z(x),\theta_0)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H(t,d) = (d, y(d, t\theta_\theta)) \\ H(t,x_0) = (x_t, y_t). \end{cases}$$

L'application H ainsi construite sur $[0,1]\times[0,x_0]$ est continue et réalise une homotopie entre le chemin $(x, y(x,0))$ et le chemin :

$$\begin{cases} (x, y(x,\theta_0)) & 0 \leqslant x \leqslant d \\ (z(x), y(z(x),\theta_0)) & d \leqslant x \leqslant x_0. \end{cases}$$

3ème étape : à l'extérieur de C

On désigne par Φ_θ le lacet de l'ensemble nodal de φ_θ correspondant à la branche de C définie par $0 \leqslant x \leqslant d$, $(x, y(x,\theta))$.

A l'extérieur de C, Φ_θ est une courbe C^∞. Posons :

$$V_0 = \{\exp_{\Phi_0(s)}(u.X_s) \,/\, s_0 \leqslant s \leqslant s_1 \;\text{ et }\; 0 \leqslant u \leqslant u_0\}$$

où : $X_s = \operatorname{grad}_{\Phi_0(s)} \varphi_\theta \neq 0$, et où s est un paramètre de Φ_θ hors de C.

Pour u assez petit, V_0 est un voisinage tubulaire de Φ_θ dans lequel on peut prendre (u, s) comme système de coordonnées.

On construit de même V_1, V_2, des voisinages tubulaires dans $M\setminus C$ des autres lacets de l'ensemble nodal de φ_0.

On peut les supposer deux à deux disjoints.

Soit alors : $a = \inf\{|\varphi_0(m)| \,/\, m \in M\setminus(V_0 \cup V_1 \cup V_2)\}$; on a $a > 0$.

D'autre part : $\|\varphi_\theta - \varphi_0\|_\infty \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$.

On peut donc choisir θ_0 assez petit de telle sorte que pour tout $\theta \leqslant \theta_0$: $\|\varphi_\theta - \varphi_0\|_\infty < a$; donc si $m \in M\setminus C$ est tel que $\varphi_{\theta_0}(m) = 0$, on a : $|\varphi_0(m)| < a$; donc $m \in V_0 \cup V_1 \cup V_2$.

En résumé pour θ_0 assez petit, l'ensemble nodal de φ_{θ_0} extérieur à C est dans la réunion des voisinages tubulaires ; en particulier Φ_{θ_0} appartient à V_0.

4ème étape : homotopie dans V_0

Rappelons que V_0 est un ouvert de carte dans lequel les coordonnées sont (s, u), $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ et $0 \leqslant u \leqslant u_0$.

Posons :

$$s_0 \leqslant s \leqslant s_1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u \leqslant u_0 \qquad f(s, u, \theta) = \varphi_\theta(\exp_{\Phi_0(s)}(u X_s)).$$

Le théorème des fonctions implicites appliqué à l'équation $f(s, u, \theta) = 0$ montre que si θ_0 est assez petit au voisinage de tout point $\Phi_0(s)$, l'ensemble nodal de φ_{θ_0} est donné par une fonction $u(s')$.

Quite à prendre V_0 assez petit on peut supposer qu'il existe une fonction C^1 $h : [s_0, s_1] \longrightarrow [0, u_0]$, telle que $(s, h(s))$ soit le lacet Φ_{θ_0} dans V_0.

On pose alors :

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \quad \text{et} \quad s_0 \leqslant s \leqslant s_1 \qquad H(t, s) = \exp_{\Phi_0(s)}(t h(s) . X_s) ;$$

on a $-$ $H(0, s) = \Phi_0(s)$,

$-$ $H(1, s) = \exp_{\Phi_0(s)}(h(s) . X_s)$ coïncide avec le lacet Φ_0.

Un argument analogue à l'étape 1 appliqué à la branche de Φ_{θ_0} rentrant dans D, ainsi qu'un recollement d'homotopie, permet de conclure.

CQFD

Preuve de 3.C.1. – Soit $I = \{\theta_0 \in \mathbf{R}_+ / \Phi_{\theta_0}$ est homotope à Φ_0 pour tout $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0\}$.

Le lemme précédent montre que I est ouvert. En effet ce qui a été fait pour θ voisin de 0 est valable pour θ voisin de θ_0 quelconque. En fait la même démonstration montre que le complémentaire de I est ouvert. On a donc $I = \mathbf{R}_+$.

En particulier, tous les lacets constituant l'ensemble nodal de Φ_0 sont homotopes, ce qui est impossible (lemme 1.10).

CQFD

Le seconde partie de 3.C.1 résulte de la proposition 3.1 et du théorème de Bourguignon. Il suffit d'exhiber un groupe fini satisfaisant aux hypothèses de cette proposition. Considérons le tore plat équilatéral, soit :

$$A = \text{rotation de } \pi/3 \text{ autour de } O.$$

$$T = \text{translation de vecteur } \left(-\frac{1}{3}, 0\right).$$

Les applications A et T sont des isométries de $(\mathbf{R}^2/\Gamma, \text{can})$ et engendre un sous-groupe fini de $\text{Isom}(\mathbf{R}^2/\Gamma, \text{can})$. Soit V l'espace propre considéré ; il est engendré par :

$$\varphi_1(x, y) = \exp\left(2i\pi\left(x + y\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) ; \quad \varphi_2(x, y) = \exp\left(4i\pi y\frac{\sqrt{3}}{3}\right) ;$$

$$\varphi_3(x, y) = \exp\left(2i\pi\left(-x + y\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

$$\varphi_4 = \overline{\varphi_1} \qquad \varphi_5 = \overline{\varphi_2} \qquad \varphi_6 = \overline{\varphi_3}.$$

Les isométries A et T agissent dans V et $A\varphi_i = \varphi_{i+1}$ (mod 6). T est diagonale et donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

Un argument élémentaire permet de montrer qu'il n'y a pas de sous-espace invariant sous l'action de A et T, non trivial.

CQFD

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, 1965.

[2] N. ARONSZAJN, A unique continuation theorem for solution of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *J. Math. Pure. Appl.*, 36 (1957), 235-249.

[3] P. BERARD, Sur un lemme de perturbation, à paraître.

[4] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lectures notes* n° 194, Springer.

[5] L. BERS, Local behaviour of solution of general linear elliptic equations, *Comm. Pure. Appl. Math.,* 8 (1955), 473-476.

[6] J.P. BOURGUIGNON, Stratification de l'espace des métriques, *Compositio Math.,* 30 (1975), 1-40.

[7] M. BURROW, Representation theory of finite groups, 1966, Academic Press.

[8] S.Y. CHENG, Eigenfunctions and nodal Sets, *Commentarii Math. Helv.,* 51 (1976), 43-55.

[9] R. COURANT et G. HILBERT, Methods of mathematical physics, Vol. 1, interscience.

[10] J. DIEUDONNE, Foundations of modern analysis, Academic Press, 1962.

[11] M. GREENBERG, Lectures on algebraic topology, Benjamin, 1967.

[12] H. URAKAWA, On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, *J. Math. Soc. Japan,* 31 (1979), 209-226.

[13] VALIRON, Théorie des fonctions, 1942, Masson.

[14] J. WOLF, Spaces of constant curvature, Publish or perish (1974).

Manuscrit reçu le 14 août 1979
révisé le 22 octobre 1979.

G. BESSON,
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
2, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.