ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVAN KERBRAT

Propriétés projectives des espaces symétriques affines

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 1 (1980), p. 193-219

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_1_193_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 1 (1980), 193-219

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES ESPACES SYMÉTRIQUES AFFINÉS

par Yvan KERBRAT

L'outil essentiel de cet article est la notion de domaine symétrique de l'espace projectif réel $P_n(\mathbf{R})$: ce sont les espaces symétriques affines (M, ∇) où M est un ouvert connexe de $P_n(\mathbf{R})$ et où la connexion linéaire ∇ est projectivement reliée à la connexion de Levi-Civita de la métrique de Fubini de $P_n(\mathbf{R})$. Ces domaines symétriques sont complètement déterminés (pour $n \geqslant 2$) dans le paragraphe II (théorème 1). On notera que, si (M, ∇) est un domaine symétrique de $P_n(\mathbf{R})$, M est l'image dans $P_n(\mathbf{R})$ d'un cône $Q(x) > 0$ où Q est une forme quadratique sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

Les résultats du paragraphe II sont utilisés dans le paragraphe III pour construire une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces symétriques affines connexes, simplement connexes, projectivement plats et de dimension $n \geqslant 2$, sur un ensemble d'orbites du groupe projectif $PGL(n+1, \mathbf{R})$ (théorème 3) ; on en déduit, en particulier, que cet ensemble de classes d'isomorphisme est de cardinal égal à $(n+1)(n+2)/2$.

En utilisant la bijection ci-dessus, on fournit, dans le théorème 4, une classification complète des espaces symétriques affines connexes, projectivement plats et de dimension $n \geqslant 2$.

Le paragraphe IV est consacré à l'existence de transformations projectives non affines pour un espace symétrique affine. La proposition 7 établit qu'un espace symétrique satisfaisant cette condition est nécessairement projectivement plat et, utilisant les résultats du paragraphe III, le théorème 5 donne la liste exhaustive des espaces symétriques affines connexes dont le groupe des transformations projectives n'est pas réduit à un groupe de transformations affines.

I. RAPPELS – NOTATIONS

1. Applications projectives.

a) Les variétés, les connexions linéaires et les applications sont toutes supposées de classe C^∞. On note $C(M)$ l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur une variété M et $\chi(M)$ le $C(M)$-module des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M.

Si ϕ est une application d'une variété M dans une variété M', on note $\chi(\phi)$ le $C(M)$-module des applications de M dans le fibré tangent $T(M')$ qui relèvent ϕ. On désigne par $\chi_p^*(\phi)$ l'ensemble des applications $p - C(M)$-linéaires de $(\chi(M))^p$ dans $\chi(\phi)$. En particulier, l'application tangente $T\phi$ de ϕ définit $\phi_* \in \chi_1^*(\phi)$ par : $\phi_*(X) = T\phi \circ X$.

Soient M et M' deux variétés munies de connexions linéaires sans torsion ∇ et ∇' et soit $\phi : M \longrightarrow M'$. Pour tout $\lambda \in \chi_p^*(\phi)$, on définit sa différentielle covariante $\overline{\nabla}\lambda \in \chi_{p+1}^*(\phi)$ par :

$$\overline{\nabla}\lambda(X_0, X_1, \ldots, X_p) = \nabla'_{\phi_*(X_0)}(\lambda(X_1, \ldots, X_p)) \\ - \sum_{j=1}^{p} \lambda(X_1, \ldots, X_{j-1}, \nabla_{X_0} X_j, X_{j+1}, \ldots, X_p). \tag{1}$$

On pose généralement $\overline{\nabla}\lambda(X_0, \ldots, X_p) = \overline{\nabla}_{X_0}\lambda(X_1, \ldots, X_p)$.

La *forme fondamentale* (relativement aux connexions ∇ et ∇') de l'application ϕ est alors définie par

$$\beta(\phi) = \overline{\nabla}\phi_* \in \chi_2^*(\phi). \tag{2}$$

Les connexions ∇ et ∇' étant sans torsion, il est clair que $\beta(\phi)$ est symétrique : $\beta(\phi)(X, Y) = \beta(\phi)(Y, X)$.

En dérivant (2), on obtient, au moyen de (1),

$$\overline{\nabla}_X \beta(\phi)(Y, Z) - \overline{\nabla}_Y \beta(\phi)(X, Z) \\ = R'(\phi_*(X), \phi_*(Y))\,\phi_*(Z) - \phi_*(R(X, Y)Z) \tag{3}$$

où R et R' sont les tenseurs de courbure respectifs de ∇ et ∇'.

En outre, si M'' est une troisième variété munie d'une connexion linéaire sans torsion ∇'' et si ϕ' est une application de M' dans

M'', on a

$$\beta(\phi' \circ \phi)(X,Y) = \phi'_*(\beta(\phi)(X,Y)) + \beta(\phi')(\phi_*(X), \phi_*(Y)). \qquad (4)$$

b) Soient M et M' deux variétés munies de connexions linéaires sans torsion ∇ et ∇'. On dit qu'une application $\phi : (M, \nabla) \longrightarrow (M', \nabla')$ est *projective* si sa forme fondamentale s'exprime par :

$$\beta(\phi)(X,Y) = \alpha(X)\phi_*(Y) + \alpha(Y)\phi_*(X), \quad \forall X, Y \in \chi(M), \qquad (5)$$

où α est une 1-forme sur M.

On voit que l'image de toute géodésique de (M, ∇) par une application projective ϕ est une géodésique de (M', ∇') (les paramètres canoniques n'étant généralement pas conservés). Réciproquement, on démontre [8] qu'un difféomorphisme de M sur M' qui transforme toute géodésique de (M, ∇) en une géodésique de (M', ∇') est une application projective.

Une *transformation projective* de (M, ∇) est un difféomorphisme ϕ de M tel que l'application $\phi : (M, \nabla) \longrightarrow (M, \nabla)$ soit projective. Une *transformation affine* de (M, ∇) est une transformation projective ϕ pour laquelle la 1-forme α de la formule (5) est nulle $(\beta(\phi) = 0)$.

Si M est connexe, l'ensemble $\mathscr{P}(M, \nabla)$ des transformations projectives de (M, ∇) est un groupe de Lie de transformations de M et l'ensemble $\mathscr{A}(M, \nabla)$ des transformations affines de (M, ∇) est un sous-groupe fermé de $\mathscr{P}(M, \nabla)$.

Si, en outre, $\dim M = n \geqslant 2$, on a

$$\dim \mathscr{P}(M, \nabla) \leqslant n^2 + 2n, \quad \dim \mathscr{A}(M, \nabla) \leqslant n^2 + n \, [3].$$

Soient ∇ et ∇' deux connexions linéaires sans torsion sur une variété M. On dit que ∇ et ∇' sont *projectivement reliées* si l'application $Id_M : (M, \nabla) \longrightarrow (M, \nabla')$ est projective.

Il revient au même de dire qu'il existe une 1-forme α sur M telle que : $\nabla'_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X) Y + \alpha(Y) X, \ \forall X, Y \in \chi(M)$.

Il résulte des définitions que, si ∇ et ∇' sont projectivement reliées, alors $\mathscr{P}(M, \nabla') = \mathscr{P}(M, \nabla)$.

c) Soit ∇ une connexion linéaire sans torsion sur une variété M de dimension $n \geqslant 2$. On dit que (M, ∇) est *projectivement plate* si, pour tout point $m \in M$, il existe une voisinage ouvert U de m et un difféomorphisme projectif ϕ de $(U, \nabla|_U)$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ muni de la connexion linéaire (plate) triviale.

On désigne par R le tenseur de courbure de (M, ∇) et par S son tenseur de Ricci :

$$S_m(\xi, \eta) = \operatorname{Tr}\{\zeta \longrightarrow R_m(\zeta, \eta)\xi\}, \quad m \in M, \quad \xi, \eta \in T_m(M),$$

et on note Q le champ de tenseurs 2-fois covariant défini sur M par :

$$Q(X, Y) = \frac{n}{n^2 - 1} S(X, Y) + \frac{1}{n^2 - 1} S(Y, X).$$

Le tenseur (de Weyl) projectif de (M, ∇) s'exprime alors par :

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z + [Q(Y, X) - Q(X, Y)]Z + Q(Z, X)Y - Q(Z, Y)X.$$

Si $n = \dim M = 2$, $P = 0$.

Si $n \geqslant 3$, on sait [8] que P est un invariant projectif, c'est-à-dire que le tenseur projectif de toute connexion linéaire projectivement reliée à ∇ est égal à P. Il en résulte que toute transformation projective $\phi \in \mathscr{P}(M, \nabla)$ laisse P invariant :

$$\phi_*(P(X, Y)Z) = P(\phi_*(X), \phi_*(Y))\phi_*(Z). \tag{6}$$

PROPOSITION 0. [8] – *Soit* M *une variété de dimension* $n \geqslant 2$ *munie d'une connexion linéaire sans torsion* ∇. *Alors* (M, ∇) *est projectivement plate si et seulement si* $P = 0$, *pour* $n \geqslant 3$

$$\nabla_X Q(Z, Y) = \nabla_Y Q(Z, X), \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M), \quad \textit{pour } n = 2.$$

2. Espaces symétriques affines.

a) On appelle *espace symétrique affine* une variété M munie d'une connexion linéaire sans torsion ∇ telle que, pour tout $m \in M$, il existe une transformation affine involutive $s_m \in \mathscr{A}(M, \nabla)$ admettant m comme point fixe isolé. s_m est nécessairement unique et est appelée *symétrie* de (M, ∇) en m. Pour un espace symétrique affine (M, ∇), la connexion ∇ est complète et son tenseur de courbure est parallèle $(\nabla R = 0)$. Réciproquement, si ∇ est une connexion linéaire sans torsion complète et à tenseur de courbure parallèle sur une variété M connexe et simplement connexe, alors (M, ∇) est un espace symétrique affine [5].

Le *groupe des transvections* de l'espace symétrique (M, ∇) est le sous-groupe distingué $\mathscr{G}(M, \nabla)$ de $\mathscr{A}(M, \nabla)$ engendré par les produits $s_m \circ s_{m'}$ $(m, m' \in M)$. En outre, si M est connexe, $\mathscr{G}(M, \nabla)$ est un sous-groupe fermé connexe de $\mathscr{A}(M, \nabla)$ et il opère transitivement dans M [6].

Soient (M, ∇) et (M', ∇') deux espaces symétriques affines connexes. Un *isomorphisme* de (M, ∇) sur (M', ∇') est une difféomorphisme $\phi : M \longrightarrow M'$ tel que $\beta(\phi) = 0$.

b) Soit M une variété munie d'une connexion linéaire sans torsion ∇ et soit $M' \xrightarrow{p} M$ un revêtement de M. Il existe sur M' une unique connexion linéaire sans torsion ∇' telle que $\beta(p) = 0$. On dit que (M', ∇') est un *revêtement affine* de (M, ∇). Un revêtement affine d'un espace symétrique affine (M, ∇) est lui-même un espace symétrique et, si $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ est le revêtement universel affine de l'espace symétrique (M, ∇), alors $\pi_1(M)$ est un sous-groupe (nécessairement discret) du centralisateur du groupe des transvections de $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ dans le groupe des transformations affines $\mathscr{A}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ [6].

Un espace symétrique affine (M, ∇) est dit *pseudo-riemannien* (resp. *riemannien*) si ses symétries sont des isométries d'une métrique pseudo-riemannienne (resp. riemannienne) g sur M $(s_m^* g = g$ $\forall m \in M)$. Dans ce cas, ∇ est la connexion de Lévi-Civita de g.

II. DOMAINES SYMETRIQUES DE L'ESPACE PROJECTIF $P_n(\mathbf{R})$

1. L'espace projectif $P_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$.

a) On note $x.y$ le produit scalaire euclidien usuel de x et $y \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\|x\| = \sqrt{x.x}$ la norme euclidienne de x,

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathrm{P}_n(\mathbf{R})$$

la submersion naturelle. On désigne par

$$\pi_0 : \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R}) \sim \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R})/\mathbf{R}^*\mathrm{I}_{n+1}$$

l'homomorphisme canonique du groupe linéaire de $\mathbf{R}^{n+1}$ sur le groupe projectif $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ qui opère effectivement et transitivement dans $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ par

$$\pi_0(\mathrm{B}) \circ \pi = \pi \circ \mathrm{B}\,, \ \mathrm{B} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R})\,.$$

b) Soit $\overline{g}$ la métrique de Fubini de $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$(\pi^*\overline{g})_x(y,z) = \frac{y\,.\,z}{\|x\|^2} - \frac{(x\,.\,y)\,(x\,.\,z)}{\|x\|^4}\,, \quad \forall x \in \mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}\,, y, z \in \mathbf{R}^{n+1} \tag{7}$$

On sait [9] que, pour $n \geqslant 2$, $(\mathrm{P}_n(\mathbf{R}), \overline{g})$ est un espace symétrique riemannien à courbure sectionnelle constante $= +1$ et, par conséquent, il est projectivement plat (proposition 0).

Ses symétries sont données par $s_m = \pi_0(\mathrm{C}_m)$ avec $\mathrm{C}_m \in 0(n+1)$ défini par :

$$\mathrm{C}_m(x) = 2\,\frac{x\,.\,y}{\|y\|^2}\,y - x \qquad (\text{où } y \in \pi^{-1}(m))\,.$$

En dérivant (7), on obtient facilement que la submersion π est une application projective de $\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ muni de la connexion plate triviale sur $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ muni de la connexion de Lévi-Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{g}$. Plus précisément, on a :

$$\beta(\pi)_x(y\,,z) = -\,\frac{x\,.\,y}{\|x\|^2}\,\mathrm{T}_x\pi(z) - \frac{x\,.\,z}{\|x\|^2}\,\mathrm{T}_x\pi(y)\,, \tag{8}$$
$$\forall x \in \mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}\,, \quad y\,, z \in \mathbf{R}^{n+1}\,.$$

$\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ est le groupe des transformations projectives de $(\mathrm{P}_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$ [3]. En fait, si $\phi = \pi_0(\mathrm{B}) \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$, on a

$$\beta(\phi)\,(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \alpha_\phi(\mathrm{X})\,\phi_*(\mathrm{Y}) + \alpha_\phi(\mathrm{Y})\,\phi_*(\mathrm{X}) \tag{9}$$

où α_ϕ est la 1-forme exacte sur $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$\alpha_\phi = d\,\mathrm{Log}\,h\,, \ h \circ \pi(x) = \frac{\|x\|}{\|\mathrm{B}(x)\|} \quad \forall x \in \mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}\,. \tag{10}$$

Il en résulte que le groupe des transformations affines de $(P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$ est

$$\mathscr{A}(P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla}) = PO(n+1) = \pi_0(O(n+1)) \sim O(n+1)/\{\pm I_{n+1}\}.$$

En utilisant la propriété, pour un difféomorphisme local projectif $\psi : (M, \nabla) \longrightarrow (M', \nabla')$ d'être déterminé par son jet d'ordre 2 en un point lorsque M est connexe, on montre facilement le

LEMME 1. – *Pour tout difféomorphisme local projectif* $\psi : (U, \overline{\nabla}|_U) \longrightarrow (P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$ *où* U *est un ouvert connexe de* $P_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$, *il existe un unique* $\phi \in PGL(n+1, \mathbf{R})$ *tel que* $\psi = \phi|_U$.

LEMME 2. – *Soient* M_1 *et* M_2 *deux ouverts connexes de* $P_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$, $(\widetilde{M}_1, \widetilde{\nabla}_1) \xrightarrow{p_1} (M_1, \overline{\nabla}|_{M_1})$ *et* $(\widetilde{M}_2, \widetilde{\nabla}_2) \xrightarrow{p_2} (M_2, \overline{\nabla}|_{M_2})$ *les revêtements universels affines. Pour tout difféomorphisme projectif* $\psi : (\widetilde{M}_1, \widetilde{\nabla}_1) \longrightarrow (\widetilde{M}_2, \widetilde{\nabla}_2)$, *il existe un unique* $\phi \in PGL(n+1, \mathbf{R})$ *tel que* $p_2 \circ \psi = \phi|_{M_1} \circ p_1$.

Démonstration. – Soit $\psi : (\widetilde{M}_1, \widetilde{\nabla}_1) \longrightarrow (\widetilde{M}_2, \widetilde{\nabla}_2)$ un difféomorphisme projectif et soit $\widetilde{U}$ un ouvert connexe de $\widetilde{M}_1$ tel que $p_1|_{\widetilde{U}}$ soit un difféomorphisme de $\widetilde{U}$ sur l'ouvert $p_1(\widetilde{U}) = U$ de M_1. Alors $(p_2 \circ \psi)|_{\widetilde{U}} \circ (p_1|_{\widetilde{U}})^{-1}$ est un difféomorphisme local projectif de $(U, \overline{\nabla}|_U)$ dans $(P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$. Par conséquent (lemme 1), il existe $\phi \in PGL(n+1, \mathbf{R})$ tel que :

$$\phi|_U = (p_2 \circ \psi)|_{\widetilde{U}} \circ (p_1|_{\widetilde{U}})^{-1}.$$

$p_2 \circ \psi$ et $\phi|_{M_1} \circ p_1$ sont des difféomorphismes locaux projectifs de $(\widetilde{M}_1, \widetilde{\nabla}_1)$ dans $(P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$ coïncidant sur l'ouvert $\widetilde{U}$. Comme $\widetilde{M}_1$ est connexe, on a donc : $p_2 \circ \psi = \phi|_{M_1} \circ p_1$. L'unicité de ϕ est triviale.

La proposition suivante se déduit aisément du lemme 2.

PROPOSITION 1. – *Soit* M *un ouvert connexe de* $P_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$, *et soit* $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}) \xrightarrow{p} (M, \overline{\nabla}|_M)$ *le revêtement universel affine. Il existe un unique homomorphisme* $j : \mathscr{P}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}) \longrightarrow \mathscr{P}(M, \overline{\nabla}|_M)$ *tel que :*

$$j(\psi) \circ p = p \circ \psi, \quad \forall \psi \in \mathscr{P}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}). \tag{11}$$

En outre, la suite $0 \longrightarrow \pi_1(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathscr{P}(\widetilde{\mathrm{M}}, \widetilde{\nabla}) \xrightarrow{j} \mathscr{P}(\mathrm{M}, \overline{\nabla}|_{\mathrm{M}}) \longrightarrow 0$ *est exacte.*

Démonstration. – Soit $\psi \in \mathscr{P}(\widetilde{\mathrm{M}}, \widetilde{\nabla})$ et soit $\phi \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ associé à ψ par le lemme 2. On vérifie facilement que $\phi|_{\mathrm{M}}$ est un difféomorphisme de M. On peut donc prendre $j(\psi) = \phi|_{\mathrm{M}} \in \mathscr{P}(\mathrm{M}, \overline{\nabla}|_{\mathrm{M}})$. Les propriétés de j sont évidentes.

2. Espaces symétriques associés à certains endomorphismes de $\mathbf{R}^{n+1}$.

a) Pour tout endomorphisme A de $\mathbf{R}^{n+1}$, on note ${}^t\mathrm{A}$ son adjoint $({}^t\mathrm{A}(x) \,.\, y = x \,.\, \mathrm{A}(y))$. On désigne par H_{n+1}, $n \geqslant 2$, l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints A de $\mathbf{R}^{n+1}$ $({}^t\mathrm{A} = \mathrm{A})$ ayant au moins une valeur propre strictement positive. E_n est l'ensemble quotient de H_{n+1} par la relation d'équivalence

$$\mathrm{A}' \sim \mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{A}' = \lambda \mathrm{A}, \ \lambda > 0 .$$

$\rho : \mathrm{H}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{E}_n$ est la surjection canonique.

Le groupe projectif $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ opère naturellement à gauche dans E_n par

$$\pi_0(\mathrm{B}) \,.\, \rho(\mathrm{A}) = \rho({}^t\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{B}^{-1}), \quad \mathrm{B} \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R}), \quad \mathrm{A} \in \mathrm{H}_{n+1} .$$

Il y a exactement $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ orbites de $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ dans E_n, qu'il est commode de repérer au moyen d'un couple d'entiers comme suit : pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{H}_{n+1}$, la dimension du noyau de A et l'indice de la forme quadratique $\mathrm{A}(x) \,.\, x$ ne dépendent que de $\rho(\mathrm{A}) = a \in \mathrm{E}_n$. On les note respectivement $c(a)$ et $i(a)$ ($i(a)$ est égal à la somme des multiplicités des valeurs propres strictement négatives de A) :

$$\text{Pour tout } a \in \mathrm{E}_n, \text{ on a } 0 \leqslant i(a) \leqslant n - c(a) \leqslant n .$$

Il est facile de vérifier que, pour tout couple (k, ℓ) d'entiers vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant n - k \leqslant n$, l'ensemble

$$\mathrm{E}_n(k, \ell) = \{a \in \mathrm{E}_n \mid c(a) = k \ ; \ i(a) = \ell\}$$

est une orbite du groupe projectif $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ dans E_n et que

$$\mathrm{E}_n = \bigcup_{0 \leqslant \ell \leqslant n-k \leqslant n} \mathrm{E}_n(k, \ell) .$$

b) Soit $a \in E_n$. On note M^a l'ouvert de $P_n(\mathbf{R})$ défini par :

$$\pi^{-1}(M^a) = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid A(x) \,.\, x > 0 \; ; \; \rho(A) = a\}.$$

Il est clair que M^a est connexe. En outre, on a :

LEMME 3. – *Soit* $a \in E_n(k, \ell)$, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \ell \leqslant n - k \leqslant n$.

(i) *Si* $k + \ell = n$, M^a *est difféomorphe à* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Si* $k + \ell = n - 1$, $\pi_1(M^a)$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}$.

(iii) *Si* $0 \leqslant k + \ell \leqslant n - 2$, $\pi_1(M^a)$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}_2$.

Démonstration. – Soit $(e_i)_{i=1,\dots,n+1}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^{n+1}$ telle que, pour $A \in \rho^{-1}(a)$, on ait $A(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i = 0$ si $i = 1, \dots, k$; $\lambda_i < 0$ si $i = k+1, \dots, k+\ell$; $\lambda_i > 0$ si $i = k + \ell + 1, \dots, n+1$.

Soit ψ le difféomorphisme de $\mathbf{R}^{n+1}$ défini par

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{x_i}{\sqrt{-\lambda_i}} e_i + \sqrt{1 + \sum_{j=k+1}^{k+\ell} (x_j)^2} \sum_{i=k+\ell+1}^{n+1} \frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}} e_i$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Un calcul élémentaire montre que, pour

$$x \in \mathbf{R}^{k+\ell} \times S^{n-(k+\ell)} \subset \mathbf{R}^{n+1},$$

on a : $A(\psi(x)) \,.\, \psi(x) = 1$.

Soit ψ_0 la restriction de ψ à la sous-variété $\mathbf{R}^{k+\ell} \times S^{n-(k+\ell)}$. Alors $\pi \circ \psi_0 : \mathbf{R}^{k+\ell} \times S^{n-(k+\ell)} \longrightarrow M^a$ est un revêtement à deux feuillets et le résultat s'en déduit immédiatement.

c) Soit $a \in E_n$ quelconque. On considère, sur M^a, la 1-forme exacte :

$$\gamma_a = -\frac{1}{2}\, d \operatorname{Log} u_A \; ; \; A \in \rho^{-1}(a) \; ; \; \pi^* u_A(x) = \frac{A(x) \,.\, x}{\|x\|^2} > 0, \quad \forall x \in \pi^{-1}(M^a), \tag{12}$$

qui définit une connexion linéaire sans torsion ∇^a sur M^a, projectivement reliée à $\overline{\nabla}|_{M^a}$:

$$\nabla^a_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \gamma_a(X) Y + \gamma_a(Y) X. \tag{13}$$

LEMME 4. — $\pi^a = \pi|_{\pi^{-1}(M^a)}$ *est une application projective de* $\pi^{-1}(M^a)$, *munie de la connexion plate triviale, sur* (M^a, ∇^a) *et,* $\forall x \in \pi^{-1}(M^a)$, $\forall y, z \in \mathbf{R}^{n+1}$, *on a :*

$$\beta(\pi^a)_x(y, z) = -\frac{A(x).y}{A(x).x}\, T_x\pi(z) - \frac{A(x).z}{A(x).x}\, T_x\pi(y) \quad (A \in \rho^{-1}(a)).$$

Ce lemme se déduit aisément de (8), (12) et (13).

PROPOSITION 2. — *Pour tout* $a \in E_n$, $n \geqslant 2$, (M^a, ∇^a) *est un espace symétrique affine projectivement plat.*

Démonstration. — A tout $m \in M^a$, on associe l'endomorphisme C_m de $\mathbf{R}^{n+1}$ donné par :

$$C_m(x) = 2\,\frac{A(y).x}{A(y).y}\, y - x \quad \text{où} \quad A \in \rho^{-1}(a) \quad \text{et} \quad y \in \pi^{-1}(m).$$

Il est clair que $C_m(y) = y$ et que

$$AC_m(x).C_m(x') = A(x).x', \quad \forall x, x' \in \mathbf{R}^{n+1}. \tag{14}$$

On en déduit aisément que C_m est un automorphisme involutif de $\mathbf{R}^{n+1}$.

On pose $s_m = \pi_0(C_m)|_{M^a}$. En utilisant (4), (14) et le lemme 4, on montre que s_m est une transformation affine de (M^a, ∇^a) et elle est involutive car C_m l'est. En outre, on vérifie que m est l'unique point fixe de s_m appartenant à l'ouvert

$$M^a \cap \{\pi(x) \mid x \in \mathbf{R}^{n+1}\,;\, A(y).x > 0\}.$$

Par conséquent, (M^a, ∇^a) est bien un espace symétrique affine. Comme $(P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$ est projectivement plat, il résulte trivialement de (13) que (M^a, ∇^a) l'est également.

PROPOSITION 3. — *Soient* a *et* $b \in E_n$, $n \geqslant 2$. *Les espaces symétriques* (M^a, ∇^a) *et* (M^b, ∇^b) *sont isomorphes si et seulement si* a *et* b *appartiennent à une même orbite de* $PGL(n+1, \mathbf{R})$ *dans* E_n. *Dans l'affirmative, les isomorphismes de* (M^a, ∇^a) *sur* (M^b, ∇^b) *sont les applications* $\phi|_{M^a}$ *où* $\phi \in PGL(n+1, \mathbf{R})$ *vérifie* $b = \phi.a$.

Démonstration.

(i) Supposons que $b = \phi.a$ où $\phi \in PGL(n+1, \mathbf{R})$.

Soient $A \in \rho^{-1}(a)$ et $C \in (\pi_0)^{-1}(\phi)$. Alors

$$B = {}^t C^{-1} A C^{-1} \in \rho^{-1}(b).$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^{n+1}$,

$$x \in \pi^{-1}(M^a) \Longleftrightarrow A(x).x > 0 \Longleftrightarrow BC(x).C(x) > 0 \Longleftrightarrow C(x) \in \pi^{-1}(M^b).$$

Donc, $\psi = \phi|_{M^a}$ est bien un difféomorphisme de M^a sur M^b.

En appliquant la formule (4) aux deux membres de l'égalité : $\psi \circ \pi^a = \pi^b \circ C|_{\pi^{-1}(M^a)}$, on obtient, pour $x \in \pi^{-1}(M^a)$, $y \in \mathbf{R}^{n+1}$, $z \in \mathbf{R}^{n+1}$,

$$\beta(\psi)_{\pi(x)}(T_x\pi(y), T_x\pi(z)) = \beta(\pi^b)_{C(x)}(C(y), C(z)) - T_{\pi(x)}\psi(\beta(\pi^a)_x(y, z))$$

d'où l'on déduit, au moyen du lemme 4, $\beta(\psi) = 0$, ce qui exprime que $\phi|_{M^a}$ est un isomorphisme de (M^a, ∇^a) sur (M^b, ∇^b).

(ii) Soit $\psi : (M^a, \nabla^a) \longrightarrow (M^b, \nabla^b)$ un isomorphisme. Alors ψ est un difféomorphisme projectif de $(M^a, \overline{\nabla}|_{M^a})$ sur $(M^b, \overline{\nabla}|_{M^b})$. Le lemme 1 assure qu'il existe $\phi \in PGL(n+1, \mathbf{R})$ tel que $\psi = \phi|_{M^a}$. Soient $A \in \rho^{-1}(a)$, $B \in \rho^{-1}(b)$, $C \in (\pi_0)^{-1}(\phi)$.

Comme ψ est un isomorphisme, on déduit du lemme 4 que

$$\frac{BC(x).C(y)}{BC(x).C(x)} = \frac{A(x).y}{A(x).x}, \quad \forall (x, y) \in \pi^{-1}(M^a) \times \mathbf{R}^{n+1}.$$

Il en résulte que $B = \lambda\, {}^t C^{-1} A C^{-1}$, $\lambda > 0$.

Par conséquent, $b = \rho(B) = \phi . a$.

Corollaire 1. – *Pour tout* $a \in E_n$, $n \geqslant 2$, *le groupe des transformations affines de* (M^a, ∇^a) *est donné par :*

$$\mathscr{A}(M^a, \nabla^a) = \{\phi|_{M^a} \mid \phi \in PGL(n+1, \mathbf{R}) ; \phi . a = a\}.$$

3. Domaines symétriques de l'espace projectif $P_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$.

Dans tout ce qui suit, on appellera *domaine symétrique de l'espace projectif* $P_n(\mathbf{R})$, un espace symétrique affine (M, ∇) où M est un ouvert connexe de $P_n(\mathbf{R})$ et la connexion linéaire ∇ est projectivement reliée à la restriction à M de la connexion $\overline{\nabla}$ de Lévi-Civita de la métrique de Fubini de $P_n(\mathbf{R})$. Il résulte de la définition que tout domaine symétrique de $P_n(\mathbf{R})$ est projectivement plat. En outre, les espaces symétriques affines (M^a, ∇^a), $a \in E_n$, construits plus haut sont des domaines symétriques de $P_n(\mathbf{R})$ au sens ci-dessus. On montrera plus loin (théorème 1) que ce sont les seuls.

PROPOSITION 4. – *Soit M un ouvert connexe de $P_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$, muni d'une connexion linéaire sans torsion ∇, projectivement reliée à $\overline{\nabla}|_M$ et dont le tenseur de courbure est parallèle. Alors, il existe un unique $a \in E_n$ tel que :*

– $M \subset M^a$,

– $\nabla = \nabla^a|_M$.

Démonstration.

(i) *unicité* : supposons que $M \subset M^a \cap M^b$ et $\nabla = \nabla^a|_M = \nabla^b|_M$ et fixons $A \in \rho^{-1}(a)$, $B \in \rho^{-1}(b)$. Alors les fonctions u_A et u_B définies par (12) sont telles que le rapport u_B/u_A soit constant sur l'ouvert connexe M. On en déduit $B = \lambda A$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$, d'où $b = a$.

(ii) *existence* : la connexion ∇ étant projectivement reliée à $\overline{\nabla}|_M$, on a, pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs différentiables sur M : $\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X$, où α est un 1-forme différentiable sur M.

Par dérivation, on en déduit le tenseur de courbure R de (M, ∇) :

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = \overline{g}(Y,Z)X - \overline{g}(X,Z)Y + (\overline{\nabla}_X\alpha(Y) - \overline{\nabla}_Y\alpha(X))Z \\ + \overline{\nabla}_X\alpha(Z)Y - \overline{\nabla}_Y\alpha(Z)X + \alpha(Z)(\alpha(Y)X - \alpha(X)Y) \end{aligned}$$

d'où l'expression du tenseur de Ricci S de (M, ∇)

$$S(X,Y) = (n-1)\overline{g}(X,Y) + \overline{\nabla}_X\alpha(Y) - n\,\overline{\nabla}_Y\alpha(X) + (n-1)\alpha(X)\alpha(Y).$$

Le tenseur Q qui se déduit de S par la formule donnée en I.1.c) est alors égal à :

$$Q(X,Y) = \overline{g}(X,Y) - \overline{\nabla}_Y\alpha(X) + \alpha(X)\alpha(Y). \tag{15}$$

En exprimant que $\nabla Q = 0$, on obtient, par un calcul direct, l'équation :

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_Z \overline{\nabla}_Y - \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_Z Y})\, \alpha(X) = 2\,\alpha(Z)\, \overline{\nabla}_Y \alpha(X) + 2\,\alpha(Y)\, \overline{\nabla}_Z \alpha(X) \\ \qquad + \alpha(X)\,(\overline{\nabla}_Z \alpha(Y) + \overline{\nabla}_Y \alpha(Z)) - 2\,\alpha(Z)\, \overline{g}(X, Y) - \alpha(X)\,\overline{g}(Y, Z) \\ \qquad - \alpha(Y)\,\overline{g}(X, Z) - 4\alpha(X)\,\alpha(Y)\,\alpha(Z). \end{cases} \tag{16}$$

On déduit de (16) que la différentielle $d\alpha$ de la 1-forme α vérifie, compte tenu de $d\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}\,(\overline{\nabla}_X \alpha(Y) - \overline{\nabla}_Y \alpha(X))$,

$$\overline{\nabla}_Z\, d\alpha(X, Y) = 2\ \alpha(Z)\, d\alpha(X, Y) + \alpha(X)\, d\alpha(Z, Y) + \alpha(Y)\, d\alpha(X, Z)$$

d'où :

$$\overline{\nabla}_X\, d\alpha(X, Y) = 3\ \alpha(X)\, d\alpha(X, Y) \quad \text{et} \quad \overline{\nabla}_Y\, d\alpha(X, Y) = 3\ \alpha(Y)\, d\alpha(X, Y). \tag{17}$$

En dérivant (17), on obtient :

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X - \overline{\nabla}_{[X,Y]})\, d\alpha(X, Y) &= 6\,(d\alpha(X, Y))^2 \\ = -\, d\alpha(\overline{R}(X, Y)\, X, Y) - d\alpha(X, \overline{R}(X, Y) Y) &= d\alpha(\overline{g}(X, X) Y \\ - \overline{g}(X, Y) X, Y) + d\alpha(X, \overline{g}(X, Y) Y &- \overline{g}(Y, Y) X) = 0. \end{aligned}$$

La 1-forme α est donc fermée et on peut recouvrir M par des ouverts connexes $(U_j)_{j \in J}$ tels que les 1-formes $\alpha|_{U_j}$ soient exactes.

On pose $\alpha|_{U_j} = -\frac{1}{2}\, d\ \mathrm{Log} f_j$, $f_j : U_j \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$.

En reportant dans (16), on trouve que f_j est solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_Z \overline{\nabla}_Y - \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_Z Y})\, df_j(X) + 2Z(f_j)\, \overline{g}(X, Y) + X(f_j)\, \overline{g}(Y, Z) \\ + Y(f_j)\, \overline{g}(X, Z) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Considérons la fonction réelle h_j définie sur l'ouvert $V_j = \pi^{-1}(U_j)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ par :

$$h_j(x) = \|x\|^2\,(f_j \circ \pi)\,(x) > 0, \quad \forall x \in V_j.$$

En utilisant (8) et (7), on montre que la dérivée troisième de h_j s'exprime par :

$$\begin{aligned} (D^3 h_j)_x(t, y, z) = \|x\|^2\ [\overline{\nabla}\,\overline{\nabla} df_j(T_x\pi(t), T_x\pi(y), T_x\pi(z)) \\ + 2(\pi^*\overline{g})_x(y, z)\, D(f_j \circ \pi)_x(t) + (\pi^*\overline{g})_x(y, t)\, D(f_j \circ \pi)_x(z) \\ + (\pi^*\overline{g})_x(z, t)\, D(f_j \circ \pi)_x(y)] \end{aligned}$$

et, compte tenu de (18) et de la connexité de U_j, il en résulte que h_j est la restriction à V_j d'un polynôme homogène de degré 2, c'est-à-dire qu'il existe $A_j \in H_{n+1}$ tel que $f_j \circ \pi(x) = \frac{A_j(x) \,.\, x}{\|x\|^2}$, $\forall x \in V_j$. Posons $a_j = \pi_1(A_j) \in E_n$. Il est clair que $U_j \subset M^{a_j}$ et que $\nabla|_{U_j} = \nabla^{a_j}|_{U_j}$. En utilisant la partie (i) de la démonstration et la connexité de M, on vérifie aisément que $a_j (= a)$ est indépendant de $j \in J$.

THEOREME 1. – *Les espaces symétriques affines* (M^a, ∇^a), $a \in E_n$, *sont les seuls domaines symétriques de l'espace projectif* $P_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$.

Démonstration. – Ce théorème est une conséquence simple de la proposition 4. En effet, si (M, ∇) est un domaine symétrique de $P_n(\mathbf{R})$, il satisfait aux conditions de la proposition 4 qui assure qu'il existe un unique $a \in E_n$ tel que $M \subset M^a$ et $\nabla = \nabla^a|_M$. La connexion linéaire ∇ étant complète et M^a étant connexe, on a évidemment $M = M^a$.

Les calculs faits dans la démonstration de la proposition 4 peuvent être aussi utilisés pour prouver le théorème suivant.

THEOREME 2. – *Soit* $a \in E_n(k, \ell)$, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \ell \leqslant n - k \leqslant n$.

(i) *Si* $k = n$, *l'espace symétrique* (M^a, ∇^a) *est isomorphe à* $\mathbf{R}^n$ *muni de la connexion plate triviale.*

(ii) *Si* $k = 0$, (M^a, ∇^a) *est un espace symétrique pseudo-riemannien de signature* $(n - \ell, \ell)$, *à courbure sectionnelle constante* > 0.

(iii) *Si* $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, (M^a, ∇^a) *n'est pas un espace symétrique pseudo-riemannien.*

Démonstration. – Il résulte de (15) que

$$Q^a(X, Y) = \frac{1}{n-1} S^a(X, Y) = \overline{g}(X, Y) - \overline{\nabla}_Y \gamma_a(X) + \gamma_a(X)\gamma_a(Y)$$

où γ_a est la 1-forme donnée par (12).

On en déduit que, pour $x \in \pi^{-1}(M^a)$, $y, z \in \mathbf{R}^{n+1}$, on a

$$(\pi^*Q^a)_x(y, z) = (\pi^*\overline{g})_x(y, z) - D(\pi^*\gamma_a)_x(y, z) + \gamma_a(\beta(\pi)_x(y, z)) + (\pi^*\gamma_a)_x(y)\,(\pi^*\gamma_a)_x(z)$$

d'où, compte tenu de (7), (8) et (12) :

$$(\hat{Q}^a)_x(y, z) = (\pi^*Q^a)_x(y, z) = \frac{A(y).z}{A(x).x} - \frac{(A(x).y)(A(x).z)}{(A(x).x)^2} \qquad (19)$$

où $A \in \rho^{-1}(a)$.

Le champ de tenseurs Q^a étant parallèle sur (M^a, ∇^a) connexe, le rang et l'indice de la forme quadratique $Q^a(\xi, \xi)$ sont constants sur M^a. Pour les calculer, considérons un vecteur propre x de A pour une valeur propre $\lambda > 0$ et tel que $A(x).x = 1$. L'application tangente $T_x\pi$ induit un isomorphisme de $W = (\mathbf{R}x)^\perp$ sur l'espace tangent $T_{\pi(x)}(M^a)$ et, pour tout $y \in W$, on a :

$$(\hat{Q}^a)_x(y, y) = A(y).y.$$

Le rang de $Q^a(\xi, \xi)$ est donc égal à $n - k$ et son indice est égal à ℓ.

(i) Si $k = n$, $Q^a = 0$ et, comme (M^a, ∇^a) est également projectivement plat et simplement connexe (lemme 3), (M^a, ∇^a) est donc isomorphe à l'espace plat $\mathbf{R}^n$.

Plus précisément, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de Ker A et e_{n+1} un vecteur directeur de $(\mathrm{Ker}\,A)^\perp$. On vérifie alors aisément que la complétion projective

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \longmapsto \pi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + e_{n+1}\Big) \in P_n(\mathbf{R})$$

est un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur (M^a, ∇^a).

(ii) Si $k = 0$, Q^a est une métrique pseudo-riemannienne de signature $(n - \ell, \ell)$ sur M^a et sa connexion de Lévi-Civita est égale à ∇^a. Comme $S^a = (n-1)Q^a$, on en déduit que (M^a, ∇^a) est un espace symétrique pseudo-riemannien, de signature $(n - \ell, \ell)$ à courbure sectionnelle constante $= +1$ (pour la métrique Q^a).

On remarque que, si, en outre, $\ell = 0$, (M^a, ∇^a) est isomorphe à $(P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$.

(iii) Supposons $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors le tenseur Q^a est dégénéré en tout point de M^a. Cherchons les champs de tenseurs T sur (M^a, ∇^a) 2 fois covariants, symétriques et parallèles. L'équation $\nabla^a T = 0$ s'écrit également, en introduisant le champ de tenseur $\hat{T} = (\pi^a)^* T$ sur $\pi^{-1}(M^a)$,

$$D\hat{T}_x(t)\ (y, z) = T(\beta(\pi^a)_x(t, y),\ T_x\pi(z)) + T(T_x\pi(y), \beta(\pi^a)_x(t, z))$$
$$\forall x \in \pi^{-1}(M^a),\ \forall y, z, t \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

En appliquant le lemme 4, on en déduit :

$$D\hat{T}_x(t)(y, z) + 2\,\frac{A(x).t}{A(x).x}\,\hat{T}_x(y, z) + \frac{A(x).y}{A(x).x}\,\hat{T}_x(t, z) + \frac{A(x).z}{A(x).x}\,\hat{T}_x(y, t) = 0 \qquad (20)$$

où $A \in \rho^{-1}(a)$.

La condition d'intégrabilité de (20) s'écrit, compte tenu de (19),

$$(\hat{Q}^a)_x(t, u)\hat{T}_x(y, z) + (\hat{Q}^a)_x(y, u)\hat{T}_x(z, t) = (\hat{Q}^a)_x(z, t)\hat{T}_x(y, u) + (\hat{Q}^a)_x(y, z)\hat{T}_x(t, u). \qquad (21)$$

En échangeant, dans (21), les couples (y, t) et (z, u) et en comparant avec (21), on voit que cette condition d'intégrabilité est équivalente à

$$(\hat{Q}^a)_x(t, u)\hat{T}_x(y, z) = \hat{Q}^a(y, z)\hat{T}_x(t, u), \quad \forall x \in \pi^{-1}(M^a),$$
$$\forall y, z, t, u \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

Puisque $k \leqslant n-1$, on en déduit, compte tenu de (20) que : $T = \lambda Q^a$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Comme $k \geqslant 1$, T est donc dégénéré et l'espace symétrique (M^a, ∇^a) n'est pas pseudo-riemannien.

III. ESPACES SYMETRIQUES CONNEXES PROJECTIVEMENT PLATS

1. Cas simplement connexe.

Soit $a \in E_n$, $n \geqslant 2$. On note $(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a) \xrightarrow{p^a} (M^a, \nabla^a)$ le revêtement universel affine du domaine symétrique (M^a, ∇^a) de $P_n(\mathbf{R})$. $(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ est un espace symétrique affine projectivement plat.

La proposition suivante se déduit aisément de la proposition 3 et du lemme 2.

PROPOSITION 5. – *Soient* a *et* $b \in E_n$, $n \geqslant 2$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *a et b appartiennent à une même orbite de* $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ *dans* E_n.

(ii) *Les espaces symétriques* $(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ *et* $(\widetilde{M}^b, \widetilde{\nabla}^b)$ *sont isomorphes.*

THEOREME 3. – *L'application* $a \in E_n \longmapsto (\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ *définit, par passage aux quotients, une bijection de l'ensemble des orbites de* $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{R})$ *dans* E_n *sur l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces symétriques affines, connexes, simplement connexes, projectivement plats et de dimension* $n \geqslant 2$.

Démonstration. – En raison de la proposition 5, il suffit de montrer que, pour tout espace symétrique affine (M, ∇) connexe, simplement connexe, projectivement plat et de dimension $n \geqslant 2$, il existe $a \in E_n$ tel que (M, ∇) soit revêtement affine de (M^a, ∇^a). Comme (M, ∇) est projectivement plat, il existe un ouvert U de M et un difféomorphisme projectif $\psi : (U, \nabla|_U) \longrightarrow (U', \overline{\nabla}|_{U'})$ où $U' = \psi(U)$ est un ouvert de $P_n(\mathbf{R})$. Soit ∇' l'image par ψ de $\nabla|_U$. La connexion linéaire ∇' est projectivement reliée à $\overline{\nabla}|_{U'}$ et son tenseur de courbure est parallèle. On déduit de la proposition 4 qu'il existe $a \in E_n$ tel que $U' \subset M^a$ et $\nabla' = \nabla^a|_{U'}$. L'espace symétrique affine connexe (M, ∇) étant simplement connexe, il en résulte qu'il existe un unique isomorphisme $\overline{\psi} : (\mathrm{M}, \nabla) \longrightarrow (\widetilde{\mathrm{M}}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ vérifiant $p^a \circ \overline{\psi}|_{\mathrm{U}} = \psi$ (cf. [4], théorème 7.8). En particulier, on obtient que (M, ∇) est isomorphe à $(\widetilde{\mathrm{M}}^a, \widetilde{\nabla}^a)$.

2. Cas général.

Dans la suite, pour alléger les notations, le centralisateur $\mathrm{Z}_{\mathscr{A}(\mathrm{M},\nabla)}\mathscr{G}(\mathrm{M}, \nabla)$ du groupe des transvections d'un espace symétrique affine (M, ∇) dans le groupe des transformations affines de (M, ∇) sera noté $\mathrm{Z}(\mathrm{M}, \nabla)$.

PROPOSITION 6. – *Soit* $a \in \mathrm{E}_n(k, \ell)$, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 \leqslant \ell \leqslant n-k$. *Alors* $\mathrm{Z}(\mathrm{M}^a, \nabla^a) = \{\mathrm{Id}_{\mathrm{M}^a}\}$.

Démonstration. – D'après la proposition 3, on peut supposer que $a = \rho(\mathrm{A})$ où A est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui s'exprime dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ par

$$\mathrm{A}(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

$$\mathrm{A}(e_i) = \epsilon_i e_i \quad \text{si} \quad k+1 \leqslant i \leqslant n+1$$

$$\text{avec } \epsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{pour } k+1 \leqslant i \leqslant k+\ell \\ +1 & \text{pour } k+\ell+1 \leqslant i \leqslant n+1. \end{cases}$$

Pour tout endomorphisme B de $\mathbf{R}^{n+1}$, on pose $\mathrm{B}(e_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{B}_i^j e_j$.

Il résulte du corollaire 1 que $\mathscr{A}(\mathrm{M}^a, \nabla^a) = \{\pi_0(\mathrm{B})|_{\mathrm{M}^a} \mid \mathrm{B} \in \mathrm{G}\}$ où G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R})$ dont les éléments vérifient :

$$\begin{cases} \sum_{p=k+1}^{n+1} \epsilon_p \mathrm{B}_i^p \mathrm{B}_j^p = \epsilon_i \delta_{ij} & \text{pour } i, j = k+1, \ldots, n+1 \\ \mathrm{B}_i^j = 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, k \quad \text{et} \quad j = k+1, \ldots, n+1. \end{cases}$$

En utilisant les propriétés classiques [6] de l'algèbre de Lie du groupe des transvections d'un espace symétrique, on vérifie que l'algèbre de Lie de $\mathscr{G}(\mathrm{M}^a, \nabla^a)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre de Lie L des endomorphismes C de $\mathbf{R}^{n+1}$ vérifiant $\epsilon_i \mathrm{C}_i^j + \epsilon_j \mathrm{C}_j^i = 0$ pour $i, j = k+1, \ldots, n+1$; $\mathrm{C}_i^j = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, n+1$. Le groupe des transvections $\mathscr{G}(\mathrm{M}^a, \nabla^a)$ étant connexe, on a :

$$Z(M^a, \nabla^a) = \{\pi_0(B)|_{M^a} \mid B \in G \; ; \; Ad(B)C = C, \quad \forall C \in L\}.$$

Un calcul direct facile montre que, pour $B \in GL(n+1, \mathbf{R})$,

$$Ad(B)C = C \quad \forall C \in L \iff B = \lambda I_{n+1}, \; \lambda \in \mathbf{R}^*.$$

Donc $Z(M^a, \nabla^a) = \{Id_{M^a}\}$.

Remarque. – Par la même méthode, on montre également que, si $k = n$, $Z(M^a, \nabla^a)$ est isomorphe à $\mathbf{R}^n$, ce qui se déduit aussi du théorème 2.

THEOREME 4. – *Soit* (M, ∇) *un espace symétrique affine connexe projectivement plat, de dimension* $n \geqslant 2$. *Alors* (M, ∇) *est*

– *soit un revêtement affine du tore plat* $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$

– *soit un revêtement affine de* (M^a, ∇^a) *avec* $a \in E_n(k, \ell)$, $0 \leqslant \ell \leqslant n - k - 1 \leqslant n - 1$.

– *soit isomorphe à* (M^a, ∇^a) *avec*

$$a \in E_n(k, n-k), \; 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Démonstration. – Le revêtement universel affine $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ de (M, ∇) est un espace symétrique affine connexe, simplement connexe, projectivement plat, de dimension $n \geqslant 2$. Il résulte du théorème 3 qu'il existe $a \in E_n$ tel que $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ soit isomorphe à $(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$.

(i) Si $a \in E_n(n, 0)$, $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ est isomorphe à $\mathbf{R}^n$ plat d'après le théorème 2 et (M, ∇) est donc un revêtement de T^n.

(ii) Si $a \in E_n(k, n-k)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on déduit du lemme 3 et de la proposition 6 que $(M, \nabla) = (\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ est isomorphe à (M^a, ∇^a).

(iii) Si $a \in E_n(k, \ell)$, $0 \leqslant \ell \leqslant n-k-1 \leqslant n-1$, $\pi_1(M)$ peut être considéré comme sous-groupe de $Z(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$. Soit

$$j : \mathscr{P}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a) \longrightarrow \mathscr{P}(M^a, \nabla^a)$$

l'homomorphisme surjectif construit dans la proposition 1. Il induit un homomorphisme surjectif, encore noté j, de $\mathscr{A}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ sur $\mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$. Comme $\operatorname{Ker} j = \pi_1(M^a)$ est discret, on obtient, en dérivant j, un isomorphisme j_* de l'algèbre de Lie de $\mathscr{A}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ sur celle de $\mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$. Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ de $\mathscr{G}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$

et $\mathfrak{g}(M^a, \nabla^a)$ de $\mathcal{G}(M^a, \nabla^a)$ sont alors reliées par

$$\mathfrak{g}(M^a, \nabla^a) = j_*(\mathfrak{g}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)).$$

Les groupes de transvections étant connexes et j_* étant un isomorphisme, on a, pour tout $\psi \in \mathcal{A}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$,

$$\psi \in Z(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a) \Longleftrightarrow Ad(\psi)\xi = \xi, \ \forall \xi \in \mathfrak{g}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$$
$$\Longleftrightarrow Ad(j(\psi))\, j_*\xi = j_*\xi, \ \forall \xi \in \mathfrak{g}(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a) \Longleftrightarrow j(\psi) \in Z(M^a, \nabla^a).$$

Compte tenu de la proposition 6 on a donc

$$Z(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a) = \operatorname{Ker} j = \pi_1(M^a).$$

Il en résulte que $\pi_1(M)$ est sous-groupe de $\pi_1(M^a)$, ce qui montre que (M, ∇) est bien revêtement affine de (M^a, ∇^a).

IV. TRANSFORMATIONS PROJECTIVES DES ESPACES SYMETRIQUES

1.

Soit M une variété munie d'une connexion linéaire sans torsion ∇. On dit qu'un sous-groupe $\mathcal{H}$ du groupe $\mathcal{P}(M, \nabla)$ des transformations projectives de (M, ∇) est *trivialisable* s'il existe une connexion linéaire ∇' sur M, projectivement reliée à ∇ et telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}(M, \nabla')$.

LEMME 5. – *Soit* (M, ∇) *un espace symétrique affine. Pour que* $\mathcal{P}(M, \nabla)$ *soit trivialisable il faut et il suffit que* $\mathcal{P}(M, \nabla) = \mathcal{A}(M, \nabla)$.

Démonstration. – La condition est évidemment suffisante. Supposons que $\mathcal{P}(M, \nabla) = \mathcal{A}(M, \nabla')$ avec

$$\nabla'_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X.$$

Pour tout $m \in M$, la symétrie s_m de (M, ∇) en m vérifie $s_m \in \mathcal{A}(M, \nabla)$ et $s_m \in \mathcal{A}(M, \nabla')$. D'où

$$\alpha(X) = \alpha((s_m)_* X), \quad \forall X \in \chi(M).$$

On aura donc, pour tout $\xi \in T_m(M)$,

$$\alpha_m(\xi) = \alpha_m(T_m s_m(\xi)) = \alpha_m(-\xi) = 0 .$$

D'où $\alpha = 0$, $\nabla' = \nabla$ et $\mathscr{P}(M, \nabla) = \mathscr{A}(M, \nabla)$.

PROPOSITION 7. – *Soit* (M, ∇) *un espace symétrique affine connexe de dimension* $n \geqslant 2$. *Une condition nécessaire d'existence d'une transformation projective non affine de* (M, ∇) *est que* (M, ∇) *soit projectivement plat.*

Démonstration.

(i) Il résulte de la proposition 0 que tout espace symétrique de dimension 2 est projectivement plat.

(ii) Pour $n \geqslant 3$, le tenseur de courbure de (M, ∇) étant parallèle, il en est de même de son tenseur projectif P. La proposition est donc une conséquence triviale du lemme suivant :

LEMME 6. – *Soit* M *une variété connexe de dimension* $n \geqslant 3$ *munie d'une connexion linéaire sans torsion* ∇ *dont le tenseur projectif* P *est parallèle. Si* $\mathscr{P}(M, \nabla) \neq \mathscr{A}(M, \nabla)$, *alors* (M, ∇) *est projectivement plate.*

Démonstration. – Soit $\phi \in \mathscr{P}(M, \nabla)$, $\phi \notin \mathscr{A}(M, \nabla)$.

$$\beta(\phi)(X, Y) = \alpha(X)\,\phi_*(Y) + \alpha(Y)\,\phi_*(X), \quad \alpha \not\equiv 0 .$$

Pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs différentiables sur M, on a donc $\nabla_{\phi_* X}(\phi_* Y) = \phi_*(\nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X)$ et, en dérivant (7), on obtient, en raison de $\nabla P = 0$,

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_* W}(\phi_*(P(X,Y)Z)) &= \phi_*(\nabla_W(P(X,Y)Z) + \alpha(W)P(X,Y)Z \\ &+ \alpha(P(X,Y)Z)W) = \phi_*(\nabla_W(P(X,Y)Z) + 3\alpha(W)P(X,Y)Z \\ &+ \alpha(X)P(W,Y)Z + \alpha(Y)P(X,W)Z + \alpha(Z)P(X,Y)W)\end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$2\alpha(W)P(X,Y)Z + \alpha(X)P(W,Y)Z + \alpha(Y)P(X,W)Z + \alpha(Z)P(X,Y)W = \alpha(P(X,Y)Z)W . \tag{22}$$

On en déduit, compte tenu de

$$\mathrm{Tr}\{W \longrightarrow P(W,Y)Z\} = \mathrm{Tr}(P(Y,Z)) = 0 \ [8],$$

$$2\alpha(P(X,Y)Z) = n\alpha(P(X,Y)Z) = 0 .$$

La relation (22) est donc équivalente à

$$2\alpha(W)P(X,Y)Z + \alpha(X)P(W,Y)Z + \alpha(Y)P(X,W)Z + \alpha(Z)P(X,Y)W = 0. \qquad (23)$$

Soit $m \in M$ un point tel que $\alpha_m \neq 0$ et soit $\tau \in T_m(M)$ tel que $\alpha_m(\tau) = 1$. Il résulte de (23) que, pour $\xi, \eta, \zeta \in T_m(M)$, on a

$$2P_m(\xi,\eta)\zeta + \alpha_m(\xi)P_m(\tau,\eta)\zeta + \alpha_m(\eta)P_m(\xi,\tau)\zeta + \alpha_m(\zeta)P_m(\xi,\eta)\tau = 0. \qquad (24)$$

Si, en outre, $\xi, \eta, \zeta \in \operatorname{Ker} \alpha_m$, la relation (24) entraîne

$$P_m(\xi,\eta)\zeta = P_m(\xi,\eta)\tau = P_m(\tau,\eta)\zeta = P_m(\tau,\eta)\tau = 0.$$

Comme $T_m(M) = \mathbf{R}\tau \oplus \operatorname{Ker} \alpha_m$, on a bien $P_m = 0$.

Le champ de tenseurs P étant, en outre, parallèle sur (M, ∇) connexe, il est donc identiquement nul sur M. Il suffit alors d'appliquer la proposition 0.

2.

PROPOSITION 8. – *Soit* $a \in E_n$, $n \geqslant 2$. *Il existe une transformation projective non affine de* (M^a, ∇^a) *si et seulement si* $a \in E_n(k, 0)$ *avec* $0 \leqslant k \leqslant n-1$. *Dans ce cas,*

$$\dim \mathscr{P}(M^a, \nabla^a) - \dim \mathscr{A}(M^a, \nabla^a) = \frac{(n-k)(n-k+3)}{2} \geqslant 2. \qquad (25)$$

Démonstration. – Soit $a \in E_n(k, \ell)$, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \ell \leqslant n-k \leqslant n$. On note ∂M^a le bord de M^a dans $P_n(\mathbf{R})$.

On vérifie facilement que

– si $k = \ell = 0$, $\partial M^a = \emptyset$,

– si $\ell = 0$ et $k \geqslant 1$, ∂M^a est difféomorphe à $P_{k-1}(\mathbf{R})$ et $P_n(\mathbf{R}) = M^a \cup \partial M^a$,

– si $\ell \geqslant 1$, $P_n(\mathbf{R}) = M^a \cup \partial M^a \cup M^{-a}$ où $-a = \rho(-A) \in E_n$ avec $A \in \rho^{-1}(a)$.

On pose $\mathscr{H}^a = \{\phi \in PGL(n+1, \mathbf{R}) \mid \phi(\partial M^a) = \partial M^a\}$

$\Sigma^a = \pi^{-1}(\partial M^a) \cup \{0\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$

$\mathscr{K}^a = \{B \in GL(n+1, \mathbf{R}) \mid B(\Sigma^a) = \Sigma^a\} = (\pi_0)^{-1}(\mathscr{H}^a)$.

En outre, il résulte du lemme 1 que le groupe des transformations projectives de (M^a, ∇^a) est donné par

$$\mathscr{P}(M^a, \nabla^a) = \{\phi|_{M^a} \mid \phi \in \mathscr{H}^a\} \qquad \text{si } \ell = 0 .$$

$$\mathscr{P}(M^a, \nabla^a) = \{\phi|_{M^a} \mid \phi \in \mathscr{H}^a \; ; \; \exists m \in M^a : \phi(m) \in M^a\} \quad \text{si } \ell \geqslant 1 .$$

(i) On suppose $\ell \geqslant 1$. On pose $V = \operatorname{Ker} A$ (où $A \in \rho^{-1}(a)$) et $W = V^{\perp}$. On note $\Gamma = \{x \in W \mid A(x) . x = 0\}$ le cône d'isotropie de la forme quadratique non dégénérée obtenue en prenant la restriction à W de la forme quadratique $A(x) . x$. Alors

$$\Sigma^a = \{x = x_v + x_w \mid x_v \in V , \; x_w \in \Gamma \subset W\} .$$

Soient $\phi|_{M^a} \in \mathscr{P}(M^a, \nabla^a) \subset \mathscr{H}^a$ et $B \in (\pi_0)^{-1}(\phi) \subset \mathscr{K}^a$. Comme $V \subset \Sigma^a$ et $\Gamma \subset \Sigma^a$, on a

$$AB(x_v) . B(x_v) = 0 , \quad \forall x_v \in V \tag{26}$$

$$AB(x_w) . B(x_w) = 0 , \quad \forall x_w \in \Gamma . \tag{27}$$

Soit C l'endomorphisme auto-adjoint de W défini par

$$C(x_w) . x_w = AB(x_w) . B(x_w) , \quad \forall x_w \in W .$$

La relation (27) entraîne que, pour tout $x_w \in \Gamma \setminus \{0\}$ et tout $y_w \in W$

$$A(x_w) . y_w = 0 \Longrightarrow C(x_w) . y_w = 0 .$$

Comme Γ engendre linéairement W, on en déduit que $C = \lambda A|_W$, $\lambda \in \mathbf{R}$, d'où

$$AB(x_w) . B(x_w) = \lambda A(x_w) . x_w , \quad \forall x_w \in W . \tag{28}$$

Il résulte de (26) et (28) que, pour tout $x = x_v + x_w \in \mathbf{R}^{n+1}$, on a

$$AB(x) . B(x) = \lambda A(x) . x + 2\, AB(x_v) . B(x_w) . \tag{29}$$

Pour tout $x_v \in V$ et tout $x_w \in \Gamma$, $x_v + x_w = x$ appartient à Σ^a et, en reportant dans (29), on a

$$AB(x_v) . B(x_w) = 0 . \tag{30}$$

Par linéarité, (30) est encore vrai pour tout $x_v \in V$ et tout $x_w \in W$. Par conséquent, (29) implique ${}^tB\, AB = \lambda A$ et, comme $\phi|_{M^a} \in \mathscr{P}(M^a, \nabla^a)$, on a nécessairement $\lambda > 0$, d'où $\phi . a = a$.

Il en résulte que $\mathscr{P}(M^a, \nabla^a) = \mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$ (d'après le corollaire 1).

(ii) Si $\ell = k = 0$, (M^a, ∇^a) est isomorphe à $(P_n(\mathbf{R}), \overline{\nabla})$. Par conséquent, $\mathscr{P}(M^a, \nabla^a)$ et $\mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$ sont respectivement isomorphes à $PGL(n+1, \mathbf{R})$ et $PO(n+1)$.

D'où : $\dim \mathscr{P}(M^a, \nabla^a) - \dim \mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$

$$= n(n+2) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}.$$

(iii) Si $\ell = 0$ et $k \geqslant 1$, $\Sigma_a = \operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ où $A \in \rho^{-1}(a)$.

En appliquant la proposition 3, on peut supposer que A est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui s'exprime dans la base naturelle $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ par

$$A(e_i) = 0 \text{ si } i = 1, \ldots, k \,;\; A(e_i) = e_i \text{ si } i = k+1, \ldots, n+1.$$

On construit alors un difféomorphisme naturel de $\mathscr{P}(M^a, \nabla^a)$ sur le produit $(GL(k, \mathbf{R}) \times GL(n-k+1, \mathbf{R}))/\mathbf{R}^* I_{n+1} \times \mathbf{R}^{k(n-k+1)}$ et, en raison du corollaire 1, l'image de $\mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$ par ce difféomorphisme est $(GL(k, \mathbf{R}) \times CO(n-k+1))/\mathbf{R}^* I_{n+1} \times \mathbf{R}^{k(n-k+1)}$ où $CO(n-k+1) = \{C \in GL(n-k+1, \mathbf{R}) \mid {}^tCC = \lambda^2 I_{n-k+1}\}$ [3].

Il en résulte que, pour $k = n$, $\mathscr{P}(M^a, \nabla^a) = \mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$ (on retrouve que toute transformation projective de l'espace plat $\mathbf{R}^n$ est affine) et que, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\mathscr{P}(M^a, \nabla^a) \neq \mathscr{A}(M^a, \nabla^a)$ avec

$$\dim \mathscr{P}(M^a, \nabla^a) = (n-k)(n-k+2) + k(n+1)$$

$$\dim \mathscr{A}(M^a, \nabla^a) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + k(n+1)$$

d'où :

$$\dim \mathscr{P}(M^a, \nabla^a) - \dim \mathscr{A}(M^a, \nabla^a) = \frac{(n-k)(n-k+3)}{2}.$$

THEOREME 5. – *Soit* (M, ∇) *un espace symétrique affine connexe de dimension* $n \geqslant 2$.

1. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (M, ∇) *est revêtement affine de* (M^a, ∇^a) *pour* $a \in E_n(k, 0)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

(ii) (M, ∇) *possède un groupe à un paramètre de transformations projectives non affines.*

(iii) $\mathscr{P}(\mathrm{M}, \nabla) \neq \mathscr{A}(\mathrm{M}, \nabla)$.

2. Le normalisateur de l'ensemble des symétries de (M, ∇) *dans* $\mathscr{P}(\mathrm{M}, \nabla)$ *est* $\mathscr{A}(\mathrm{M}, \nabla)$.

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : il résulte de (25) que, pour $a \in \mathrm{E}_n(k, 0)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, (M^a, ∇^a) possède un groupe à un paramètre de transformations projectives non affines. Le champ de vecteurs qui engendre un tel groupe à un paramètre, se relève canoniquement sur le revêtement M de M^a en un champ de vecteurs complet dont le flot définit un groupe à un paramètre de transformations projectives non affines du revêtement affine (M, ∇).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : c'est évident.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : si $\mathscr{P}(\mathrm{M}, \nabla) \neq \mathscr{A}(\mathrm{M}, \nabla)$, il résulte de la proposition 7 que (M, ∇) est projectivement plat. En raison du théorème 3, il existe donc $a \in \mathrm{E}_n$ tel que $(\widetilde{\mathrm{M}}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ soit revêtement affine de (M, ∇). $\mathscr{P}(\mathrm{M}, \nabla) \neq \mathscr{A}(\mathrm{M}, \nabla)$ entraîne $\mathscr{P}(\widetilde{\mathrm{M}}^a, \widetilde{\nabla}^a) \neq \mathscr{A}(\widetilde{\mathrm{M}}^a, \widetilde{\nabla}^a)$ et, compte tenu de la proposition 1, on voit que $\mathscr{P}(\mathrm{M}^a, \nabla^a) \neq \mathscr{A}(\mathrm{M}^a, \nabla^a)$. La proposition 8 et le théorème 4 assurent que $a \in \mathrm{E}_n(k, 0)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et que (M, ∇) est revêtement affine de (M^a, ∇^a).

La dernière partie du théorème est un cas particulier du lemme :

LEMME 7. – *Soit* $\mathscr{H}$ *un groupe de difféomorphismes d'un espace symétrique affine connexe* (M, ∇), *contenant les symétries de* (M, ∇). *Alors le normalisateur* $\mathscr{N}(\mathrm{S})$ *de l'ensemble des symétries de* (M, ∇) *dans* $\mathscr{H}$ *est égal à* $\mathscr{H} \cap \mathscr{A}(\mathrm{M}, \nabla)$.

Démonstration. – Il résulte de l'unicité de la symétrie en un point que $\mathscr{A}(\mathrm{M}, \nabla)$ normalise les symétries.

Réciproquement, soit $\psi \in \mathscr{N}(\mathrm{S})$. Alors pour tout $m \in \mathrm{M}$, $\psi \circ s_m \circ \psi^{-1}$ est une symétrie de (M, ∇) admettant $\psi(m)$ comme point fixe isolé. On a donc $\psi \circ s_m = s_{\psi(m)} \circ \psi$ d'où l'on déduit, compte tenu de (4) et de $s_m \in \mathscr{A}(\mathrm{M}, \nabla)$,

$$\beta(\psi)\,((s_m)_*(\mathrm{X}), (s_m)_*(\mathrm{Y})) = (s_{\psi(m)})_*(\beta(\psi)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})), \qquad \forall m \in \mathrm{M}, \quad \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \chi(\mathrm{M}). \tag{31}$$

En utilisant la propriété des symétries : $(s_m)_*(X)(m) = -X(m)$, on obtient, en évaluant les deux membres de (31) au point m :

$$\beta(\psi)_m(\xi, \eta) = -\beta(\psi)_m(\xi, \eta) = 0, \quad \forall m \in M, \quad \forall \xi, \eta \in T_m(M).$$

Donc $\psi \in \mathscr{A}(M, \nabla)$.

Le corollaire suivant se déduit trivialement du théorème 5 et du théorème 2.

COROLLAIRE 2. – *Soit* (M, g) *un espace symétrique pseudo-riemannien connexe, de dimension* $n \geqslant 2$ *et de signature* $(p, n-p)$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, *et soit* ∇ *la connexion de Lévi-Civita de* g. *Alors, toute transformation projective de* (M, ∇) *est une transformation affine.*

Remarque. – Le théorème 5 fournit des contre-exemples simples à une conjecture d'Ochiai [7] (voir aussi [1]).

On déduit de résultats d'Ishihara [2] que, si M est une variété connexe de dimension $n \geqslant 5$ munie d'une connexion linéaire sans torsion ∇ telle que $\mathscr{P}(M, \nabla)$ soit non trivialisable, et $\dim \mathscr{P}(M, \nabla) \geqslant n^2 + 5$, alors (M, ∇) est localement projectivement difféomorphe à (M^a, ∇^a), $a \in E_n(k, 0)$, $k = 0$ ou 1. Cela conduit naturellement à la conjecture :

CONJECTURE. – *Soit* M *une variété connexe, simplement connexe, de dimension* $n \geqslant 3$, *munie d'une connexion linéaire sans torsion* ∇. *Si le groupe* $\mathscr{P}(M, \nabla)$ *des transformations projectives est non trivialisable, il existe un entier* $k \in [0, n-1]$ *et un difféomorphisme projectif de* (M, ∇) *sur* $(\widetilde{M}^a, \widetilde{\nabla}^a)$, $a \in E_n(k, 0)$.

Remarque. – Il est possible qu'il soit nécessaire d'ajouter l'hypothèse de transitivité du groupe $\mathscr{P}(M, \nabla)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. CAHEN, Y. KERBRAT, *Transformations conformes des espaces symétriques pseudo-riemanniens,* à paraître.

[2] S. ISHIHARA, *Groups of projective transformations on a projectively connected manifold,* Jap. J. Math., 25 (1955), 37-80.

[3] S. KOBAYASHI, *Transformation groups in differential geometry,* Springer-Verlag, 1972.

[4] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry,* vol. I, Interscience, 1963.

[5] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations,* Dunod, 1958.

[6] O. LOOS, *Symmetric Spaces,* vol. I, Benjamin, 1969.

[7] T. OCHIAI, *Geometry associated with semi-simple flat homogeneous spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., 152 (1970), 159-193.

[8] S. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus,* Second edition, Springer-Verlag, 1954.

[9] J. WOLF, *Spaces of constant curvature,* Mc Graw-Hill, 1967.

Manuscrit reçu le 8 juin 1979
révisé le 3 octobre 1979.

Yvan KERBRAT,
Département de Mathématiques
Université de Lyon 1
43, bd. du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex.