

GABRIEL DEBS

Quelques propriétés des espaces α -favorables et applications aux convexes compacts

Annales de l'institut Fourier, tome 30, n° 2 (1980), p. 29-43

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_2_29_0

© Annales de l'institut Fourier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES α -FAVORABLES ET APPLICATIONS AUX CONVEXES COMPACTS

par Gabriel DEBS

Introduction.

Soient K un convexe compact et $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble de ses points extrémaux ; on sait que K est métrisable dès que $\mathcal{E}(K)$ est souslinien (i.e. image continue d'un polonais). Ce critère de métrisabilité dû à Corson [5] a été amélioré par Haydon [8] qui a montré qu'il suffit en fait que X soit cosmique (i.e. image continue d'un métrique séparable). La démonstration de Haydon repose sur un résultat d'intégration vectorielle ; mais à la fin de son article Haydon demande si son résultat ne découle pas du théorème de Corson. Il pose plus précisément la question suivante : Un espace topologique fortement α -favorable et cosmique X , est-il nécessairement souslinien ? En fait il est surprenant de constater que la plupart des auteurs qui se sont intéressés à l'étude de la structure de $\mathcal{E}(K)$ semblent avoir négligé la seule propriété topologique que l'on connaisse sur cet espace.

Nous allons donner une réponse positive à la question de Haydon et montrer même que sous ces hypothèses, X est alors lusinien. Ensuite nous examinerons ce qui se passe quand on remplace l'hypothèse que X est cosmique par l'hypothèse que X est Lindelöf et à diagonale G_δ (nous dirons alors que X est sous-cosmique) : Sous ces conditions plus faibles, nous montrerons que la structure borélienne de X est isomorphe à celle d'un espace lusinien, conclusion qui était suffisante pour montrer que dans le cas où $X = \mathcal{E}(K)$, alors K est métrisable, ce qui améliore le théorème de Haydon précité. On donne aussi (parallèlement à ce qui a lieu dans le cas métrisable) des conditions suffisantes pour qu'un espace fortement α -favorable soit un G_δ absolu, et on montrera que beaucoup de propriétés de l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact proviennent du seul fait que c'est un espace topologique fortement α -favorable.

1. Terminologie.

On note par \mathcal{I} l'ensemble des irrationnels qui sera muni de la topologie induite par celle de \mathbf{R} . Un espace topologique séparé est dit *souslinien* (resp. *lusinien*) s'il est image continue (resp. bijective continue) de l'espace \mathcal{I} . Un espace *analytique* est un espace souslinien métrisable. Un espace \mathcal{X} -*analytique* est un espace topologique séparé qui est l'image de \mathcal{I} par une application multivoque s.c.s. et à valeurs compactes. Un espace topologique X est dit de *Lindelöf* si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable ; il est dit *héréditairement de Lindelöf* si tout sous-espace ouvert est de Lindelöf.

Sur un espace topologique X on note par G (resp. F , resp. Z , resp. K) la famille des ouverts (resp. fermés, resp. fermés zéros de fonctions continues, resp. compacts) de X . La tribu engendrée par G ou F (resp. Z) est notée $B(X)$ (resp. $Ba(X)$) ; c'est la tribu borélienne (resp. de Baire) de X .

Si \mathcal{X} est une famille non vide de sous-ensembles d'un ensemble X , on dit qu'une partie A de X est \mathcal{X}_σ (resp. \mathcal{X}_δ , resp. \mathcal{X} -souslinienne) si A est obtenue comme réunion dénombrable (resp. intersection dénombrable, resp. noyau d'un schéma de Souslin) d'éléments de \mathcal{X} . Quand il n'y a pas de confusion sur X , on note A^c au lieu de $X \setminus A$ le complémentaire de A dans X . Si $B \subset X \times Y$ et $x \in X$, $B(x)$ désignera la coupe de B suivant le point x .

2. Structure borélienne des espaces fortement α -favorables.

2.1. *Rappels sur le jeu de Choquet.* — Soient X un espace topologique, \mathcal{C} l'ensemble de ses ouverts, et \mathcal{S} le graphe de la relation d'appartenance dans $X \times \mathcal{C}$:

$$\mathcal{S} = \{(x, V) \in X \times \mathcal{C} : x \in V\}.$$

Le jeu de Choquet sur X est un jeu infini dans lequel deux joueurs α et β choisissent à tour de rôle un élément de \mathcal{C} et \mathcal{S} respectivement. Le joueur β commence la partie. Les coups successifs d'une partie sont indexés par \mathbf{N} , de sorte que les coups à indice pair (resp. impair) sont relatifs à β (resp. α). La règle du jeu est la suivante : Si au coup $2n$ le joueur β choisit $(x_n, V_n) \in \mathcal{S}$, alors au coup $(2n+1)$ le joueur α doit choisir $U_n \in \mathcal{C}$ tel que $x_n \in U_n \subset V_n$; inversement si au coup $(2n+1)$ le joueur α choisit $U_n \in \mathcal{C}$,

au coup $(2n+2)$ le joueur β doit choisir $(x_{n+1}, V_{n+1}) \in \mathcal{S}$ tel que $V_{n+1} \subset U_n$. Ainsi au cours d'une partie les joueurs α et β forment deux suites emboîtées $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts ; le joueur α gagne la partie si

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset.$$

On dit que l'espace X (ou sa topologie) est *fortement α -favorable* si le joueur α possède une *stratégie gagnante*. Ici la notion de stratégie est celle des jeux infinis à *information parfaite* ; c'est-à-dire qu'à chaque étape du jeu le joueur α est supposé se souvenir de tous ses coups précédents ainsi que de ceux de β , et peut tenir compte de sa mémoire pour établir sa stratégie. Lorsque l'ensemble X est muni de plusieurs topologies on parlera de jeu dans \mathcal{C} .

Ainsi une *partie* dans \mathcal{C} est la donnée d'une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $J_{2n} \in \mathcal{S}$ et $J_{2n+1} \in \mathcal{C}$ qui vérifient les règles décrites ci-dessus ; la suite finie $(J_k)_{0 \leq k \leq n}$ est dite un *début de partie* dans \mathcal{C} . Soient \mathcal{J} et \mathcal{J}' deux débuts de partie, on dira que \mathcal{J}' *prolonge* \mathcal{J} si \mathcal{J} est une section commençante de \mathcal{J}' . On dit qu'une partie (ou qu'un début de partie) est *conforme à une α -stratégie* donnée, si le joueur α applique cette stratégie à chacun de ses coups.

THÉORÈME 2.2. — Soit X un ensemble muni de deux topologies \mathcal{C} et \mathcal{C}' ; on suppose que \mathcal{C} est moins fine que \mathcal{C}' et qu'il existe dans \mathcal{C}' une base \mathcal{B}' formée d'éléments qui sont G_δ pour \mathcal{C} . Alors si \mathcal{C} est fortement α -favorable, il en est de même pour \mathcal{C}' .

Démonstration. — Notons \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}') le graphe de la relation \in dans $X \times \mathcal{C}$ (resp. $X \times \mathcal{C}'$). D'après l'hypothèse, pour tout $B' \in \mathcal{B}'$ il existe une suite $(V_k(B'))_{k \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{C} telle que

$$B' = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k(B').$$

Si σ est une α -stratégie gagnante sur \mathcal{C} , on peut en déduire une α -stratégie gagnante sur \mathcal{C}' de la manière suivante :

Si β joue $J'_0 = (x_0, V'_0) \in \mathcal{C}'$, alors α choisit $B'_0 \in \mathcal{B}'$ tel que $x_0 \in B'_0 \subset V'_0$; comme $J_0 = (x_0, V_0(B'_0)) \in \mathcal{S}$, le joueur α peut former $J_1 = \sigma(J_0) \in \mathcal{C}$. Enfin α joue $J'_1 = J_1 \cap B'_0 \in \mathcal{C}'$ qui vérifie $x_0 \in J'_1 \subset V'_0$.

Si au coup suivant β joue $J'_2 = (x_1, V'_1) \in \mathcal{S}'$, alors α choisit $B'_1 \in \mathcal{B}'$ tel que $x_1 \in B'_1 \subset V'_1$; comme $J_2 = (x_1, V_1(B'_0) \cap V'_1(B'_1) \cap J_1) \in \mathcal{S}$, le joueur α peut former $J_3 = \sigma(J_0, J_1, J_2)$. Enfin α joue $J'_3 = J_3 \cap B'_1 \in \mathcal{C}'$ qui vérifie $x_1 \in J'_3 \subset V'_1$.

Ainsi au bout de $(2n+1)$ coups $(J'_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ avec $J'_{2k} = (x_k, V'_k)$, le joueur α aura construit en itérant le procédé précédent, des suites finies $(J_k)_{0 \leq k \leq 2n+1}$ et $(B'_k)_{0 \leq k \leq n}$ vérifiant :

- (1) $B'_k \in \mathcal{B}'$ et $x_k \in B'_k \subset V'_k$
- (2) $J_{2k+1} = \sigma(J_0, J_1, \dots, J_{2k})$
- (3) $J_{2k} = (x_k, J_{2k-1} \cap \bigcap_{i=0}^k V_k(B'_i))$.

Alors au $(2n+2)^{\text{ième}}$ coup, α joue $J'_{2n+1} = J_{2n+1} \cap B'_n$. Cette stratégie est clairement gagnante puisque :

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_{2n+1} &\subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \leq n}} V_n(B'_p) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq p}} V_n(B'_p) \\ &= \bigcap_{p \in \mathbb{N}} B'_p \subset \bigcap_{p \in \mathbb{N}} J'_{2p}. \quad \square \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.3 (voir [10]). – *Un espace topologique X est dit cosmique s'il est régulier et vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

- (i) X est image continue d'un espace métrisable séparable.
- (ii) il existe dans X une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés telle que pour tout ouvert U de X et tout $x \in U$, on ait $x \in F_n \subset U$ pour un certain n .

THÉORÈME 2.4. – *Tout espace cosmique fortement α -favorable est luslinien.*

Démonstration. – Soit (X, \mathcal{C}) un tel espace. Considérons une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés vérifiant la condition (ii) de la définition précédente. Si \mathcal{C}' désigne la topologie engendrée par

$$\mathcal{B}' = \{F_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{F_n^c; n \in \mathbb{N}\},$$

il est facile de voir que \mathcal{C} , \mathcal{C}' et \mathcal{B}' vérifient les conditions du théorème 2.2 (les F_n sont G_δ pour \mathcal{C} car un espace cosmique est héréditairement de Lindelöf). Par suite \mathcal{C}' est fortement α -favorable, de plus cette topologie est métrisable séparable puisqu'elle est régulière et à base dénombrable. Il résulte de ([3], p. 136, théorème 8.7) que (X, \mathcal{C}') est polonais et par suite que (X, \mathcal{C}) est luslinien puisque $\mathcal{C} < \mathcal{C}'$. \square

Nous allons maintenant étudier ce qui se passe quand on affaiblit, dans le théorème précédent, l'hypothèse que X est cosmique. Rappelons qu'un espace topologique est dit *submétrisable* si sa topologie est plus fine qu'une

topologie métrisable (voir [2], p. 97, ex. 27). Un espace cosmique est submétrisable et de Lindelöf.

LEMME 2.5. — *Pour un espace topologique régulier et de Lindelöf les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La diagonale dans $X \times X$ est un G_δ .*
- (ii) *Il existe sur X une suite de fonctions continues qui sépare les points.*
- (iii) *X est submétrisable.*

Démonstration. — (i) \Rightarrow (ii) Supposons que la diagonale Δ dans $X \times X$ s'écrive comme intersection de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts. L'espace X étant complètement régulier et Δ de Lindelöf on peut trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ une suite $(f_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur X telle que l'on ait

$$\Delta \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}} V_{n,p} \times V_{n,p} \subset U_n \quad \text{avec} \quad V_{n,p} = \{f_{n,p} > 0\}.$$

Il est immédiat alors que la famille $(f_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ sépare les points de X .

(ii) \Rightarrow (iii) Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur X vérifiant (ii); on supposera de plus $0 \leq g_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La distance sur X défini par $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |g_n(x) - g_n(y)|$ détermine alors sur X une topologie moins fine que la topologie initiale.

(iii) \Rightarrow (i) Immédiat. □

DÉFINITION 2.6. — *Un espace topologique sera dit sous-cosmique s'il est régulier, de Lindelöf et submétrisable.*

Nous allons maintenant démontrer une propriété fondamentale sur la structure des espaces sous-cosmiques fortement α -favorables. Cette démonstration reposera sur le théorème de sélection suivant établi dans [6].

THÉORÈME 2.7. — *Soient (X, \mathcal{X}) un espace mesurable, Y un espace polonais et F une application multivoque de X dans l'ensemble des parties non vides de Y vérifiant :*

1) *Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe $A_{n,p} \in \mathcal{X}$ et $V_{n,p}$ ouvert de Y tels que :*

$$\text{Gr}(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_{n,p} \times V_{n,p}.$$

2) Pour tout ouvert V de Y , $F^-(V) = \{x \in X; F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{X}$. Alors il existe une application $f: X \rightarrow Y$ mesurable et telle que $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$.

Rappelons qu'un espace mesurable (X, \mathcal{X}) est dit *standard* s'il est isomorphe à un espace lusinien (resp. $[0,1]$) muni de sa tribu borélienne.

THÉORÈME 2.8. — Soit X un espace topologique sous-cosmique et fortement α -favorable; alors l'espace mesurable $(X, \text{Ba}(X))$ est standard.

Fixons d'abord quelques notations : on désigne par \sum l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites (infinies) d'entiers. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n l'ensemble des suites finies d'entiers de longueur n , et on pose $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n$. Soit $s \in S$; on note par $|s|$ la longueur de la suite s ; si $\sigma \in S \cup \sum$ on écrira $s < \sigma$ si s est une section commençante de σ ; pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note (s, k) la suite de longueur $(|s|+1)$ qui prolonge s par l'entier k . On munit \sum de la topologie produit qui est engendrée par les îlots

$$\sum_s = \{\sigma \in \sum : s < \sigma\}$$

quand s décrit S ; l'espace \sum est alors homéomorphe à l'espace \mathcal{I} des irrationnels.

Pour démontrer le théorème 2.8 nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2.9. — Sous les hypothèses précédentes sur X il existe une application φ de \sum sur X vérifiant :

- a) φ est Baire mesurable.
- b) $\forall s \in S, \varphi(\sum_s) \in \text{Ba}(X)$.
- c) $\forall \sigma \in \sum, \varphi(\sigma) = \bigcap_{s < \sigma} \varphi(\sum_s)$.

Démonstration. — Notons par \mathcal{C} la topologie de X et soit \mathcal{C}' une topologie métrisable moins fine que \mathcal{C} , qui est définie par une distance d ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$G_n = \left\{ (x, y) \in X \times X : d(x, y) < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Dans la suite quand on parlera d'ouverts, sans plus de précision on entendra

des ouverts pour \mathcal{C} . L'espace X étant complètement régulier, l'ensemble \mathcal{L} des ouverts F_σ de X forme une base pour \mathcal{C} ; et par suite on peut trouver sur X une α -stratégie gagnante λ qui prend ses valeurs dans \mathcal{L} .

On peut alors construire par récurrence sur $n = |S|$ des familles $(U_s)_{s \in S}$ et $(V_s)_{s \in S}$ d'ouverts et une famille $(x_s)_{s \in S}$ de points de X vérifiant :

(0) Pour tout $k \in \mathbb{N} \approx S_1$, $V_k = X$; et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de X telle que les ouverts $U_k = \lambda(x_k, V_k)$, recouvrent X quand k décrit \mathbb{N} .

Et pour tout entier $n \geq 2$:

$$(1)_n \quad \forall s \in S_n, \quad x_s \in V_s \quad \text{et} \quad V_s \times V_s \subset G_n.$$

$$(2)_n \quad \forall t \in S_{n-1}, \quad U_t = \bigcup_{\substack{s \in S_n \\ t < s}} U_s = \bigcup_{\substack{s \in S_n \\ t < s}} V_s.$$

$$(3)_n \quad \forall s \in S_n, \quad U_s = \lambda(J_0, J_1, \dots, J_{2n})$$

avec

$$\begin{cases} J_{2k} &= (x_{\pi_k(s)}, V_{\pi_k(s)}) & \text{pour} & 0 \leq k \leq n \\ J_{2k+1} &= U_{\pi_k(s)} & \text{pour} & 0 \leq k \leq n - 1 \end{cases}$$

où π_k désigne la projection canonique de S_n sur S_k .

Cette construction que nous admettrons est immédiate; elle repose sur le fait que tout élément U de \mathcal{L} est lui-même un espace de Lindelöf. La stratégie λ étant gagnante, pour tout $\sigma \in \sum$ l'ensemble $\bigcap_{s < \sigma} V_s$ est non vide et réduit à un point d'après (1)_n; soit $\varphi(\sigma)$ ce point. L'application φ ainsi construite de \sum dans X est clairement surjective et continue pour \mathcal{C}' ; donc (X, \mathcal{C}') est analytique.

Considérons une partie A de X qui est ambiguë d'ordre 1 pour \mathcal{C} ; comme A est un G_δ d'un espace fortement α -favorable, il est lui-même fortement α -favorable (ceci est immédiat; mais découle aussi du théorème 2.2); comme A est un F_σ d'un espace de Lindelöf, il est lui-même de Lindelöf, enfin A est régulier et submétrisable. Donc en appliquant ce qui précède à l'espace A on voit que A est \mathcal{C}' -analytique et de même A^c ; il découle alors du premier théorème de séparation des ensembles analytiques que A est borélien pour \mathcal{C}' . On a par suite $Ba(\mathcal{C}) = Ba(\mathcal{C}') = B(\mathcal{C}')$; ce qui montre que φ est mesurable pour $Ba(\mathcal{C})$. D'autre part il est facile de vérifier que $\varphi(\sum_s) = U_s$; donc b) et c) découlent de ce qui précède. \square

Démonstration du théorème 2.8. — Considérons l'application multivoque F de X dans l'ensemble des parties de Σ définie par $F(x) = \varphi^{-1}(x)$; elle vérifie :

$$1) \quad Gr(F) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \bigcup_{s \in S_n} U_s \times \Sigma_s$$

$$2) \quad \forall s \in S, \quad F^{-1}(\Sigma_s) = \varphi(\Sigma_s) = U_s \in Ba(X, \tilde{\mathcal{C}}).$$

D'après le théorème 2.7 il existe une sélection f de X dans Σ mesurable pour $Ba(X, \tilde{\mathcal{C}})$. Remarquons alors que l'ensemble $Y = f(X)$ est borélien dans Σ puisque :

$$Y = \{f \circ \varphi = Id\}.$$

L'application φ restreinte à Y est bijective et mesurable; l'espace Y muni de sa tribu borélienne est standard et la tribu $Ba(\tilde{\mathcal{C}})$ sur X est séparable puisqu'elle est égale à $Ba(\tilde{\mathcal{C}}')$. Il découle alors du théorème des isomorphismes de Lusin (avec forme abstraite; voir [4], p. 35, théorème 2.4) que φ est un isomorphisme borélien de A sur X , d'où la conclusion. \square

Deux topologies sur un ensemble X sont dites *Baire-équivalentes* si leurs tribus de Baire respectives sont égales.

COROLLAIRE 2.10. — *Sous les mêmes hypothèses sur $(X, \tilde{\mathcal{C}})$, toute topologie métrisable et Baire-équivalente à $\tilde{\mathcal{C}}$ est lusinienne.*

Démonstration. — Ceci découle du fait qu'un espace topologique métrisable muni de sa tribu borélienne est standard si et seulement si il est lusilien ([4], p. 39, théorème 2.6). \square

COROLLAIRE 2.11. — *Sous les mêmes hypothèses sur $(X, \tilde{\mathcal{C}})$, toute topologie métrisable moins fine que $\tilde{\mathcal{C}}$ est lusinienne.*

Remarque 2.12. — Considérons sur \mathbf{R} la topologie $\tilde{\mathcal{C}}$ engendrée par les intervalles $[a, b[$; il est facile de voir que $\tilde{\mathcal{C}}$ est régulière de Lindelöf (même héréditairement de Lindelöf) et submétrisable (puisque plus fine que la topologie habituelle); de plus d'après le théorème 2.2, $\tilde{\mathcal{C}}$ est une topologie d'espace fortement α -favorable. Donc $(\mathbf{R}, \tilde{\mathcal{C}})$ vérifie toutes les hypothèses du théorème 2.8 mais $(\mathbf{R}, \tilde{\mathcal{C}})$ n'est pas lusilien; en fait il n'est même pas cosmique car $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}})$ n'est pas normal (voir [2], p. 113, ex. 15).

3. Une classe d'ensembles G_δ .

Il résulte du corollaire 2.4 qu'un espace cosmique fortement α -favorable X est un borélien absolu dans la catégorie des espaces réguliers (voir [2], p. 67, lemme 7). Le but de ce paragraphe est de montrer qu'en fait un tel X est un G_δ absolu dans la catégorie des espaces cosmiques. Pour cela nous avons besoin de la notion suivante :

DÉFINITION 3.1. — Une partie X dans un espace topologique Y est dite déterminée par A , si A est une partie de $Y \times Y$ qui vérifie :

- a) $\forall x \in X, \quad (x, x) \in A$
- b) $\forall x \in X, \quad \forall y \in X^c, \quad (x, y) \in A^c$.

On dira que X est G_δ -déterminée dans Y s'il existe un G_δ dans $Y \times Y$ qui détermine X .

3.2. — Voici quelques exemples de parties X qui sont G_δ -déterminées dans un espace Y :

- a) S'il existe sur Y une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues vérifiant

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in X^c, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad f_n(x) \neq f_n(y).$$

On dit alors que X est distinguable dans Y (voir [9]).

- b) Si la diagonale dans $Y \times Y$ est un G_δ et X quelconque.
- c) Si X est Z -souslinien dans Y .

- d) S'il existe une application continue f de Y dans un espace topologique Y' telle que $f(X) \cap f(Y \setminus X) = \emptyset$ et que $f(X)$ soit G_δ -déterminé dans $f(Y)$.

Notations 3.3. — Soit $(I_n, p_{n,m})_{\substack{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ m \geq n}}$ un système projectif dénombrable ; on note $I_\infty = \lim_{\leftarrow} I_n$. Pour plus de commodité on écrira p_n au lieu de $p_{n,m}$ quand $m \geq n$, sans préciser l'indice de l'ensemble de départ. On notera aussi par p_n la projection canonique de I_∞ sur I_n . Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in I_n$ on pose $q(i) = p_{n-1,n}(i) = p_{n-1}(i)$. Un système projectif dénombrable est parfaitement déterminé par la donnée de l'application q précédente.

THÉORÈME 3.4. — Soient Y un espace topologique et X un sous-espace de Y vérifiant :

- a) X est fortement α -favorable.

b) X est G_δ -déterminé dans Y .

c) Le filtre des voisinages de X dans Y admet une base formée de sous-espaces ouverts et paracompacts.

Alors X est un G_δ de Y .

Démonstration. — Soient σ une α -stratégie gagnante sur X , et $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $Y \times Y$ telle que $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ détermine X dans Y .

Tous les ouverts considérés dans la suite sont relatifs à la topologie de Y .

Nous allons définir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ un système projectif dénombrable d'ensembles $(I_n; p_n; q)$ (avec les notations 3.3), des familles $(V_i)_{i \in I_n}$ d'ouverts de Y et des familles $(J_i)_{i \in I_n}$ de débuts de parties sur X vérifiant :

$$(0) \quad I_0 = \{0\}; \quad V_0 = Y; \quad J_0 = Y;$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(1)_n $(V_i)_{i \in I_n}$ est une famille ponctuellement finie d'ouverts de Y qui recouvre X .

(2)_n Pour tout $i \in I_n$, $V_i \subset V_{q(i)}$ et $V_i \times V_i \subset G_n$.

(3)_n Pour tout $i \in I_n$, J_i est un début de partie sur X qui est conforme à σ et qui prolonge $J_{q(i)}$.

(4)_n Pour tout $i \in I_n$, le dernier coup A_i de J_i est relatif à α et vérifie : $X \cap V_i \subset A_i$.

Supposons la construction faite jusqu'à l'ordre n .

Soit $(U_x)_{x \in X}$ un recouvrement ouvert de X plus fin que le recouvrement $(V_i)_{i \in I_n}$ tel que pour tout $x \in X$ on ait :

$$x \in U_x \quad \text{et} \quad U_x \times U_x \subset G_{n+1}.$$

Notons $H = \{(i, x) \in I_n \times X : U_x \subset V_i\}$; d'après (4)_n, pour tout $(i, x) \in H$, $(J_i(x, X \cap U_x))$ est un début de partie sur X , et on peut trouver un ouvert $W_{i,x}$ de Y tel que :

$$\sigma(J_i(x, X \cap U_x)) = X \cap W_{i,x}$$

et

$$W_{i,x} \subset U_x.$$

Comme $X \subset \bigcup_{h \in H} W_h$, il résulte des hypothèses sur X qu'on peut trouver

une famille ponctuellement finie $(W_j)_{j \in J}$ d'ouverts de Y , qui recouvre X et telle que :

$$\forall j \in J, \quad \exists h \in H : W_j \subset W_h.$$

Pour tout $(i,j) \in I_n \times J$, posons :

$$B_{i,j} = \{x \in H(i) : X \cap W_j \subset W_{i,x}\}$$

on définit alors :

$$I_{n+1} = \{(i,j) \in I_n \times J : B_{i,j} \neq \emptyset\}.$$

Pour tout $(i,j) \in I_{n+1}$, on fixe $x_{i,j} \in B_{i,j}$ et on pose :

$$W_{i,j} = W_{i,x_{i,j}} \quad \text{et} \quad U_{i,j} = U_{x_{i,j}};$$

enfin on définit :

$$\begin{aligned} q(i,j) &= i \\ V_{i,j} &= W_j \\ J_{i,j} &= (J_p(x_{i,j}, X \cap U_{i,j}), X \cap W_{i,j}). \end{aligned}$$

La vérification de $(1)_{n+1}$ à $(4)_{n+1}$ est immédiate ; et la construction est alors achevée.

Considérons les ensembles :

$$X' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in I_n} V_i \quad \text{et} \quad X'' = \bigcup_{\bar{i} \in I_\infty} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{p_n(\bar{i})}.$$

Nous allons démontrer que : $X \subset X' \subset X'' \subset X$. La première inclusion $X \subset X'$ est évidente.

Soit $x \in X'$; la famille $(V_i)_{i \in I_1}$ étant ponctuellement finie, on peut trouver $i_1 \in I_1$ tel que :

$$(x \in V_{i_1}) \quad \text{et} \quad (\forall n \geq 1, \exists j \in I_n : p_1(j) = i_1 \quad \text{et} \quad x \in V_j).$$

De même on peut trouver $i_2 \in q^{-1}(i_1)$ tel que :

$$(x \in V_{i_2}) \quad \text{et} \quad (\forall n \geq 2, \exists j \in I_n : p_2(j) = i_2 \quad \text{et} \quad x \in V_j).$$

Ainsi de proche en proche on construit $\bar{i} \in I_\infty$ tel que

$$x \in V_{\bar{i}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{p_n(\bar{i})}.$$

Pour la dernière inclusion considérons $\bar{i} \in I_\infty$; l'espace X étant α -favorable il résulte de $(3)_n$ et $(4)_n$ que $X \cap V_{\bar{i}} \neq \emptyset$; d'autre part d'après

(2)_n on a $V_{\bar{i}} \times V_{\bar{i}} \subset G$. Comme X est déterminé par G dans Y , il est facile de voir alors que $V_{\bar{i}} \subset X$; ce qui montre que $X' \subset X$. Par suite $X = X'$ est un G_{δ} de Y . \square

Signalons que la condition c) du théorème 3.4 est réalisée dès que Y est héréditairement paracompact (par exemple dès que Y est métrisable ou cosmique). Elle est aussi réalisée si X est de Lindelöf et Y compact, car dans ce cas si U est ouvert de Y contenant X , on peut trouver (par le théorème d'Urysohn) un ouvert K_{σ} (donc paracompact) V tel que $X \subset V \subset U$.

COROLLAIRE 3.5. — *Dans un espace cosmique, tout sous-espace qui est fortement α -favorable est un G_{δ} .*

COROLLAIRE 3.6. — *Dans un espace compact, tout sous-espace Z -souslinien qui est fortement α -favorable est un G_{δ} .*

Rappelons qu'un espace topologique complètement régulier est dit topologiquement complet s'il est G_{δ} dans son compactifié de Stone-Čech (ou dans un compactifié, ou dans tout compactifié). On remarquera que dans le corollaire suivant l'hypothèse sur X implique que X est de Lindelöf et distinguable dans son compactifié de Stone-Čech (donc G_{δ} -déterminé).

COROLLAIRE 3.7. — *Soit X un espace topologique qui possède une image métrisable séparable par une application propre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) X est topologiquement complet.
- (ii) X est fortement α -favorable.

4. Applications.

Nous rappelons quelques points concernant la représentation intégrale dans les convexes compacts (pour plus de détail voir [1], p. 38). Soient K un convexe compact d'un espace localement convexe et $X = \mathcal{E}(K)$ l'ensemble de ses points extrémaux. On note par $Be(X)$ la trace sur X de la tribu de Baire $Ba(K)$ de K ; on a évidemment $Be(X) \subset Ba(X)$. Si μ est une mesure maximale sur K (pour l'ordre de Choquet), pour tout $B \in Ba(K)$, on pose : $\bar{\mu}(X \cap B) = \mu(B)$; et on montre que $\bar{\mu}$ définit bien une mesure (non nécessairement régulière) sur la tribu $Be(X)$, qui vérifie : $\int f d\bar{\mu} = \mu(f)$, pour

toute fonction f continue sur K . En particulier si la mesure μ est de barycentre $x \in K$, on aura $\int f d\bar{\mu} = f(x)$ pour tout $f \in A(K)$, où $A(K)$ désigne l'espace des fonctions affines continues sur K .

THÉORÈME 4.1. — Soient K un convexe compact et $X = \mathcal{E}(K)$ l'ensemble de ses points extrémaux; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) K est métrisable.
- (ii) $X \times X$ est héréditairement de Lindelöf.
- (iii) X est sous-cosmique.

Démonstration. — Les implications (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) étant immédiates, il suffit de montrer que (iii) \Rightarrow (i).

Remarquons d'abord que X étant de Lindelöf on a $Be(X) = Ba(X)$ (d'après [8], lemme 3.1). La tribu $Be(X)$ étant alors dénombrablement séparée puisque standard (théorème 2.8) on peut trouver une famille dénombrable F de fonctions continues sur K qui sépare les points de X ; de plus on peut supposer que F est stable par produits finis et que $(-F) = F$.

Pour tout $f \in F$, et tout $x \in X$, on a $f(x) = \text{Inf} \{g(x); g \in A(K) \text{ et } g \geq f \text{ sur } K\}$ (voir [1], proposition 1.3.5). L'espace X étant de Lindelöf, on peut alors trouver ([7], proposition 19) pour tout $f \in F$, une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $A(K)$ telle que :

- 1) $f_n \geq f$ sur K .
- 2) $\text{Inf}_{n \in \mathbf{N}} f_n = f$ sur X .

Nous allons alors démontrer que la famille

$$G = \{f_n; f \in F \text{ et } n \in \mathbf{N}\}$$

distingue X dans K (voir 3.2.a) ce qui est suffisant (d'après [9]) pour conclure que K est métrisable.

Soient alors $x \in X$ et $y \in K \setminus X$; désignons par μ une mesure maximale sur K qui représente y , et par $\bar{\mu}$ la mesure σ -additive qu'elle définit sur $Ba(X)$.

Considérons l'ensemble H des fonctions \mathcal{G} bornées et Baire-mesurables sur X qui vérifient $\int g d\bar{\mu} = g(x)$; c'est un espace vectoriel contenant les constantes et stable par limite monotone bornée et par limite uniforme et F

est stable par produits finis. Par suite si l'on supposait $F \subset H$ il résulterait du théorème de la classe monotone que H contient les fonctions caractéristiques des éléments de la tribu \mathcal{A} engendrée par F ; mais \mathcal{A} est par hypothèse une sous-tribu dénombrablement séparée de la tribu $Ba(X)$ qui est standard et on concluerait alors par le théorème des isomorphismes que $Ba(X) = \mathcal{A}$; donc que $\bar{\mu} = \varepsilon_x$ ce qui est faux. Donc il existe $f \in F$ tel que $\int f d\bar{\mu} \neq f(x)$ et comme $(-f) \in F$ on peut supposer $f(x) < \int f d\bar{\mu}$; d'où :

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x) < \int f d\bar{\mu} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\bar{\mu} = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(y)$$

et par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) < f_n(y)$. \square

Remarque 4.2. — On ignore si la seule condition que $(X, Ba(X))$ est standard, est suffisante pour que K soit métrisable. La démonstration précédente montre qu'elle est suffisante si l'on suppose de plus que toute fonction continue sur X admet un prolongement sur K en une fonction convexe de 1^{re} classe de Baire. En particulier un simplexe de Lion (voir [12]) est métrisable si et seulement si $(X, Ba(X))$ est standard.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des corollaires 3.6 et 3.7.

THÉORÈME 4.3. — *Sous l'une des deux hypothèses suivantes, l'ensemble X des points extrémaux du convexe compact K est G_δ dans \bar{X} :*

- a) *Il existe une application propre de X sur un espace métrisable séparable.*
- b) *X est Z -souslinien dans \bar{X} .*

Le a) améliore un résultat de M. Talagrand (voir [13], théorème 3) car dans un espace compact, tout sous-espace qui est G_δ et de Lindelöf est $K_{\sigma\delta}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. M. ALFSEN, Compact convex sets and boundary integrals, Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Ergebnisse der Mathematik*, 57).
- [2] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. 9, Paris, Hermann, 1974 (*Act. Scient. et Ind.*).
- [3] G. CHOQUET, Lectures on Analysis, vol. I, New-York, W.A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).
- [4] J. P. R. CHRISTENSEN, Topologie and Borel structure, North-Holland, 1974 (*Mathematics studies* 10).

- [5] H. H. CORSON, Metrizable compact convex sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151 (1970), 589-596.
- [6] G. DEBS, Sélection d'une multi-application à valeurs G_δ , *Bull. Acad. Royale de Belgique*, LXV (1979), 211-216.
- [7] A. GOULET DE RUGY, C. SCHOL-CANCELIER, B. TAYLOR-MAC GIBBON, Quelques résultats nouveaux sur les points extrémaux d'un simplexe compact, Séminaire Choquet (Initiation à l'Analyse), 10^e année, 1970-71, exposé n° 18.
- [8] R. HAYDON, An extreme point criterion for separability of a dual Banach space and a new proof of a Theorem of Corson, *Quarterly J. Math.*, 2d Series, 27 (1976), 379-380.
- [9] J. E. JAYNE, Metrization of compact convex sets, *Maths. Ann.*, 234 (1978), 109-115.
- [10] E. MICHAEL, \aleph -spaces, *J. Math. Mech.*, 15 (1966), 983-1002.
- [11] B. MAC GIBBON, A criterion for the metrizable of a compact convex set in terms of the set of extreme points, *J. Funct. Anal.*, 11 (1972), 385-392.
- [12] M. ROGALSKI, Opérateur de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques, *J. Funct. Anal.*, 2 (1968), 458-488.
- [13] M. TALAGRAND, Sur les convexes compacts dont l'ensemble des points extrémaux est K -analytique, *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 49-53.

Manuscrit reçu le 4 décembre 1979.

Gabriel DEBS,
Équipe d'Analyse
Tour 46, 4^e étage
Université Pierre et Marie-Curie
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.
