ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

# Une classe de symboles new-look

*Annales de l'institut Fourier*, tome 30, nº 3 (1980), p. 199-217

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_199_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 3 (1980), 199-217

# UNE CLASSE DE SYMBOLES NEW-LOOK

par André HIRSCHOWITZ

## Introduction.

L'objet de ce travail est assez banal. Il s'agit de définir des classes de symboles, de distributions intégrales de Fourier et d'opérateurs pseudo-différentiels, appelées à contenir les paramétrix d'opérateurs dont le symbole principal s'annule à l'ordre au moins trois sur un cône $C^\infty$ (et vérifiant une condition portant sur le symbole sous-principal).

La méthode pour définir les symboles a pour point de départ la remarque suivante : si $\overline{\mathbf{R}}_r^+$ désigne la demi-droite achevée $]0, +\infty]$ un symbole de degré $m$ sur $U_x \times \overline{\mathbf{R}}_r^+$ est de la forme $r^m\, g(x, r)$ où $g$ est une fonction $C^\infty$ sur $U_x \times \overline{\mathbf{R}}_r^+$. On peut faire une remarque analogue de façon intrinsèque en associant à toute variété conique $V$ le complété analogue $\overline{V}$.

Dans les cas qui nous occupent, on considère un complété $\overline{V}$ de $V$, plus compliqué, qui n'est plus une variété à bord mais une variété à coins et grosso modo on prend comme symboles de degrés 0 les fonctions sur $V$ qui se prolongent de façon $C^\infty$ à $\overline{V}$. Dans l'exemple traité ci-dessous, les symboles obtenus sont de type $(\rho, \delta)$ avec $\rho + \delta = 1$ $\rho > 1/2$ au sens de Hörmander. Le calcul symbolique obtenu dans ce cas est aussi «bon» que dans le cas classique lorsqu'on l'exprime sur $\overline{V} - V$ (pour les symboles) ou $\overline{\Lambda} - \Lambda$ (pour les distributions de Fourier portées par $\Lambda$, $\overline{\Lambda}$ désignant le complété adéquat de $\Lambda$).

A titre d'illustration, on redémontre au § 5 l'hypoellipticité de certains opd dont le symbole principal s'annule à l'ordre au moins trois sur un cône $C^\infty$. Cette hypoellipticité a déjà été démontrée par Helffer [6] en utilisant le critère d'hypoellipticité de Hörmander [7]. Ici l'hypoellipticité de l'opérateur résulte du fait que son symbole principal ne s'annule pas. Naturellement la paramétrix, dont Helffer démontre que c'est un opd de type $(\rho, \delta)$ avec $\rho + \delta = 1$, $\rho > 1/2$, appartient à l'une des classes très restreintes d'opd introduites ci-dessous.

Les symboles présentés ici sont initialement destinés à la description des singularités (en tant qu'OIF) du noyau du problème mixte hyperbolique extérieur et ont été inspirés par la lecture de l'article [1] de Boutet de Monvel et d'une réflexion [5] de Guillemin sur cet article.

## 1. Complété d'une variété conique et symboles associés (construction locale).

*Introduction* 1.0. – On peut vérifier que les symboles classiques d'ordre 0 sur une variété conique $\Lambda$ sont les fonctions qui se prolongent différentiablement au complété obtenu en ajoutant à $\Lambda$ de la façon naturelle un point à l'infini sur chaque demi-droite radiale. Ici on part de cette idée pour construire des symboles plus compliqués ; l'objet de ce paragraphe est la construction locale du complété voulu et des symboles correspondants.

*Notations* 1.1. – On pose $\overline{\Sigma} = \mathbf{R}^s_\sigma$, $\overline{\Lambda} = \overline{\Sigma} \times \mathbf{R}^m_x$, ce sont des variétés ; $\Lambda = \overline{\Lambda} \times \mathbf{R}^+_{r'}$, $\Sigma = \overline{\Sigma} \times \mathbf{R}^+_{r'}$, ce sont des variétés à bord. On identifie $\overline{\Lambda}$ au bord de $\Lambda$ et $\Sigma$ à une sous-variété de $\Lambda$. On se donne encore un entier $\alpha \geqslant 3$. On pose $\Gamma = (\mathring{\Lambda}, \mathring{\Sigma}, \alpha)$. On définit la sous-variété à bord $S_\alpha$ de $\mathbf{R}^m_{x'} \times \mathbf{R}^+_{r''}$ par l'équation $r''^2 + \Sigma\, x_i'^{2\alpha} = 1$. On pose $\Lambda_\Gamma = \Sigma \times S_\alpha \times \mathbf{R}^+_\rho$ et on définit $\pi : \Lambda_\Gamma \longrightarrow \Lambda$ par $\pi(\sigma, x', r'', \rho) = (\sigma, \rho x', \rho^\alpha r'')$. On pose $\mathring{\Lambda} = \Lambda - \overline{\Lambda}$ et $\overline{\Gamma} = \pi^{-1}\overline{\Lambda}$. Comme $\pi$ induit un isomorphisme entre $\Lambda_\Gamma - \Gamma$ et $\mathring{\Lambda}$, on identifie ces variétés. Remarquons que $\Lambda_\Gamma$ est une variété à coins et que son bord $\overline{\Gamma}$ est réunion de deux variétés à bord, $\overline{\Gamma}_1 = \overline{\Sigma} \times \partial S_\alpha \times \mathbf{R}^+_\rho$ et $\overline{\Gamma}_2 = \overline{\Sigma} \times S_\alpha \times \{0\}$. Enfin on munit $\mathring{\Lambda}$ de la structure de variété conique pour laquelle $r = \dfrac{1}{r'}$ est homogène de degré 1, de sorte que les symboles classiques d'ordre 0 sont les fonctions se prolongeant différentiablement à $\Lambda$.

DEFINITION 1.2. – *Pour $p$ et $q$ dans $\mathbf{R}$, on note $S_\Gamma^{p,q}$ l'espace des fonctions $f$ $C^\infty$ sur $\mathring{\Lambda}$ telles que $r''^p \rho^q f$ se prolonge en une fonction $C^\infty$ sur $\Lambda_\Gamma$. On note de la même façon les faisceaux correspondant sur $\Lambda_\Gamma$ et $\Lambda$ et leurs restrictions respectives à $\overline{\Gamma}$ et à $\overline{\Lambda}$.*

PROPOSITION 1.3. – *Si $d$ est un champ homogène de degré 0 sur $\mathring{\Lambda}$, alors*

1) *$d$ se prolonge à $\overline{\Lambda}$ en un champ tangent à $\overline{\Lambda}$.*

2) *$dS_\Gamma^{p,q}$ est contenu dans $S_\Gamma^{p,q+1}$.*

*Démonstration.* – Si $d$ est homogène de degré 0 vis-à-vis de $r$, il l'est aussi vis-à-vis de $r'$. Il suffit donc de démontrer les deux résultats pour

$$d = \frac{\partial}{\partial \sigma_i}, \quad d = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad d = r' \frac{\partial}{\partial r'}.$$

Dans ces cas 1) devient évident et pour $\dfrac{\partial}{\partial \sigma_i}$, 2) est aussi évident. Pour le reste on va calculer les changements de coordonnées, ce qui permettra de conclure.

LEMME 1.4. – 1) *Dans le système de coordonnés $\sigma, x', \rho$, on a*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = x_j'^{2\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j'} - \frac{x_j'^{2\alpha-1}}{\rho} \sum_i x_i' \frac{\partial}{\partial x_i'}$$

et

$$r' \frac{\partial}{\partial r'} = \frac{\rho r''^2}{n} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{r''^2}{n} \sum_i x_i' \frac{\partial}{\partial x_i'}.$$

2) *Dans le système de coordonnées $\sigma, (x_i')_{i \neq j}, r'', \rho$, on a :*

$$(i \neq j) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i'} - \frac{x_i'^{2\alpha-1}}{\rho} \sum_{k \neq j} x_k' \frac{\partial}{\partial x_k'} + x_i'^{2\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n r'' x_i'^{2\alpha-1}}{\rho} \frac{\partial}{\partial r''}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{x_j'^{2\alpha-1}}{\rho} \sum_{k\neq j} x_k' \frac{\partial}{\partial x_k'} + x_j'^{2\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{nr'' x_j'^{2\alpha-1}}{\rho} \frac{\partial}{\partial r''}.$$

$$r' \frac{\partial}{\partial r'} = -\frac{r''^2}{n} \sum_{k\neq j} x_k' \frac{\partial}{\partial x_k'} + \frac{\rho r''^2}{n} \frac{\partial}{\partial \rho} + r'' \frac{\partial}{\partial r''} - r''^3 \frac{\partial}{\partial r''}.$$

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier les formules sur les fonctions coordonnées, calcul que nous ne détaillons pas. Cqfd.

PROPOSITION 1.5. — *Si* $d$ *est un champ homogène de degré* $0$ *sur* $\mathring{\Lambda}$ *tangent à* $\Sigma$, *alors*

1) $d$ *se prolonge en un champ tangent aux strates de* $\Lambda_\Gamma$.

2) $d$ *envoie* $S_\Gamma^{p,q}$ *dans* $S_\Gamma^{p,q}$.

*Démonstration.* — 2) est une conséquence immédiate de 1). Pour démontrer 1), on remarque que $d$ est combinaison linéaire à coefficients homogènes de degré $0$ des champs $\frac{\partial}{\partial \sigma}$, $x_k \frac{\partial}{\partial x_i}$, $r' \frac{\partial}{\partial r'}$. Pour chacun de ces champs, on vérifie 1) en utilisant les formules du lemme 1.4. Cqfd.

PROPOSITION 1.6. — $S_\Gamma^{p,q}$ *est un sous-espace complet de l'espace de symboles* $S_{\rho,\delta}^m(\mathring{\Lambda})$ *avec* $\delta = 1 - \rho = 1/\alpha$ *et* $m = \sup(p, q/\alpha)$.

*Démonstration.* — Soit $f$ dans $S_\Gamma^{p,q}$. Pour $r' \leqslant 1$, $f$ vérifie au dessus de tout compact de $\Lambda$ une majoration de la forme $|f| \leqslant C r''^{-p} \rho^{-q}$ et comme $r''$ et $\rho$ sont majorés,

$$|f| \leqslant C'(r'' \rho^\alpha)^{-\sup(p,q/\alpha)} = C' r^{\sup(p,q/\alpha)}.$$

Les inégalités analogues pour les dérivées de $f$ résultent de la proposition 1.3 et de $\sup(p, (q+1)/\alpha) \leqslant \sup(p, q/\alpha) + 1/\alpha$. Voyons maintenant que $S_\Gamma^{p,q}$ est complet pour la filtration par les $(S_\Gamma^{p,q} \cap S_{\rho,\delta}^m)_{m\in \mathbf{Z}}$. On peut évidemment supposer pour simplifier que $p = q = 0$. Dans ce cas :

LEMME 1.7. — $S_\Gamma^{0,0} \cap S_{\rho,\delta}^{-m} = S_\Gamma^{-m,-\alpha m}$.

*Démonstration.* — D'après ce qui précède il suffit de montrer que $S_\Gamma^{0,0} \cap S_{\rho,\delta}^{-m}$ est contenu dans $S_\Gamma^{-m,-\alpha m}$. Soit donc $f$ dans

$S_\Gamma^{0,0} \cap S_{\rho,\delta}^{-m}$. Au voisinage d'un point $b_1$ de $\overline{\Gamma}_1$, $f$ se met sous la forme $r''^p g$, où l'entier $p$ est déterminé si on impose que la restriction de $g$ à $\overline{\Gamma}_1$ ait un germe non nul en $b_1$. Pour avoir $|r''^p g| \leqslant C\rho^{\alpha m} r''^m$ dans un voisinage de $b_1$ il faut $p \geqslant m$. Pour la même raison, au voisinage d'un point $b_2$ de $\overline{\Gamma}_2$, $f$ se met sous la forme $\rho^{\alpha m} h$. Si maintenant $b$ est un point de $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$, au voisinage de $b$, $f$ s'écrit $r''^m g$ et $\rho^{\alpha m} h$. En écrivant le développement de Taylor de $f$ en $b$, on voit que $f$ s'écrit $\rho^{\alpha m} r''^m k$.

Cqfd.

*Fin de la démonstration de la proposition 1.6.* – On va donc montrer que $S_\Gamma^{0,0}$ est complet pour la filtration par les $S_\Gamma^{-m,-\alpha m}$. Comme $S_\Gamma^{0,0}$ est un faisceau mou, la question est locale sur $\overline{\Gamma}$. Exprimons-la comme suit : étant donnée une suite de fonctions $h_p(\rho, r'', \sigma)$, trouver une fonction $f(\rho, r'', \sigma)$ telle que pour tout $p$, $f - \sum_{i \leqslant p} (\rho^\alpha r'')^i h_i$ soit divisible par $(\rho^\alpha r'')^{p+1}$.

D'après le théorème de Borel, il existe une fonction $\widetilde{f}(z, \rho, r'', \sigma)$ $C^\infty$ des quatre variables telle que pour tout $p$,

$$\widetilde{f}(z, \rho, r'', \sigma) - \sum_{i \leqslant p} z^i h_i(\rho, r'', \sigma)$$

soit divisible par $z^{p+1}$. On peut donc prendre :

$$f(\rho, r'', \sigma) = \widetilde{f}(\rho^\alpha r'', \rho, r'', \sigma). \qquad \text{Cqfd.}$$

*Constructions* 1.8. – On note $D_1$ le faisceau $S_\Gamma^{1,0}/S_\Gamma^{0-1}$ et $D_2$ le faisceau $S_\Gamma^{0,1}/S_\Gamma^{-1,0}$. On pose $D_1^p = S_\Gamma^{p,0}/S_\Gamma^{p-1,-1}$ et $D_2^q = S_\Gamma^{0,q}/S_\Gamma^{-1,q-1}$. Ce sont tous des faisceaux sur $\Gamma$ et la multiplication des fonctions induit un isomorphisme entre $D_i^{p'} \otimes D_i^{p''}$ et $D_i^{p'+p''}$. On vérifie sans difficultés que la multiplication des fonctions induit un isomorphisme entre $D_1^p \otimes D_2^q$ et $S_\Gamma^{p,q}/S_\Gamma^{p-1,q-1}$.

## 2. Modifications.

*Introduction* 2.0. – Le morphisme $\pi$ du § 1 est une modification de $\Lambda$. On va ici définir cette modification de façon invariante de sorte que la définition s'étende aux couples $(\Lambda, \Sigma)$ quelconques. On donne ensuite le comportement de cette modification par changement de base convenable.

DEFINITION 2.1. — *Dans une variété à coins* X *on dira qu'un faisceau d'idéaux est positivement inversible s'il admet en tout point un générateur positif non (identiquement) nul.*

PROPOSITION 2.2. — *Dans la situation décrite en 1.1, si on note* $J_\Sigma$ *et* $J_{\overline{\Lambda}}$ *les idéaux de* $\Sigma$ *et* $\overline{\Lambda}$ *respectivement alors : il existe un faisceau d'idéaux positivement inversibles* J *sur* $\Lambda_\Gamma$ *contenant* $\pi^* J_\Sigma$ *et tel que* $J^\alpha = \pi^*(J_\Sigma^\alpha + J_{\overline{\Lambda}})$ ; *en outre* $\pi$ *est universel pour cette propriété (dans la catégorie des variétés à coins).*

*Démonstration.* — La solution J est le faisceau engendré par $\rho$ : il est clair que $J^\alpha = \pi^*(J_\Sigma^\alpha + J_{\overline{\Lambda}})$ et que J contient $\pi^* J_\Sigma$.

Soit maintenant X une variété à coins, $J'$ un faisceau d'idéaux positivement inversible sur X, $\pi' : X \longrightarrow \Lambda$ un morphisme vérifiant $J' \supset \pi'^* J_\Sigma$ et $J'^\alpha = \pi'^*(J_\Sigma^\alpha + J_{\overline{\Lambda}})$. Montrons que $\pi'$ se factorise de manière unique à travers $\pi$ : localement dans X, soit $f$ un générateur positif de $J'$. Alors $\pi'$ s'écrit localement $x_i = f g_i$ et $r' = f^\alpha g$ (les coordonnées $\sigma$ ne jouent aucun rôle). Comme le germe de $f$ est non nul ($J'$ inversible), l'hypothèse $J'^\alpha = \pi'^*(J_\Sigma^\alpha + J_{\overline{\Lambda}})$ assure que $g^2 + \Sigma\, g_i^{2\alpha}$ ne s'annule pas. On a donc nécessairement

$$x_i' = g_i(g^2 + \Sigma\, g_i^{2\alpha})^{-1/2\alpha} \quad r'' = g(g^2 + \Sigma\, g_i^{2\alpha})^{-1/2}.$$

On vérifie que ces formules définissent bien une factorisation à travers $\pi$. Cqfd.

*Notations* 2.3. — Soit $\Gamma = (\mathring{\Lambda}, \mathring{\Sigma}, \alpha)$ où $\mathring{\Lambda}$ est une variété conique, $\mathring{\Sigma}$ une sous-variété conique et $\alpha$ un entier. On note $\Lambda$ la variété (à bord $\overline{\Lambda}$) obtenue en ajoutant à $\mathring{\Lambda}$ de la façon naturelle un point à l'infini sur chaque demi-droite ; on note $\Sigma$ l'adhérence de $\mathring{\Sigma}$ dans $\Lambda$.

DEFINITION 2.4. — *Appelons* $\Gamma$-*modification de* $\Lambda$ *tout morphisme* $\pi : \Lambda_\Gamma \longrightarrow \Lambda$ *tel qu'il existe un idéal positivement inversible* J *sur* $\Lambda_\Gamma$ *contenant* $\pi^* J_\Sigma$, *vérifiant* $J^\alpha = \pi^*(J_\Sigma^\alpha + J_{\overline{\Lambda}})$, *et universel pour cette propriété.*

PROPOSITION 2.5. — *Il existe une* $\Gamma$-*modification de* $\Lambda$, *unique à isomorphisme unique près ; on la notera* $\Lambda_\Gamma$.

*Démonstration.* – L'unicité résulte de l'universalité. L'existence locale (dans $\Lambda$) résulte de 2.2. La possibilité de recoller les solutions locales résulte de l'universalité. Cqfd.

PROPOSITION 2.6. – *Soit* $\Gamma = (\Lambda, \Sigma, \alpha)$ *et* $\varphi : \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ *une submersion homogène. On pose* $\Sigma' = \varphi^{-1}(\Sigma)$ *et* $\Gamma' = (\Lambda', \Sigma', \alpha)$. *Alors* $\Lambda'_{\Gamma'}$ *est le produit fibré de* $\Lambda_\Gamma$ *et de* $\Lambda'$ *au dessus de* $\Lambda$.

*Démonstration.* – L'assertion est locale ; on peut donc supposer que $\varphi$ est la première projection d'un produit et utiliser les formules données en 1.1. La vérification est alors immédiate. Cqfd.

PROPOSITION 2.7. – *Soit* $\Gamma$ *comme précédemment. Soit* $\Lambda'$ *une sous-variété conique de* $\Lambda$ *avec* $\Lambda' \cap \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}'$. *On pose* $\Sigma' = \Lambda' \cap \Sigma$. *Si l'intersection* $\Lambda' \cap \Sigma$ *est quasi-transverse (en anglais : clean) alors* $\Sigma'$ *est une sous-variété conique de* $\Lambda'$ *et si on pose* $\Gamma' = (\Lambda', \Sigma', \alpha)$, *alors* $\Lambda'_{\Gamma'}$ *est l'adhérence dans* $\Lambda_\Gamma$ *de* $\Lambda' - \overline{\Lambda}'$.

*Démonstration.* – Rappelons que l'intersection est quasi-transverse si $\Sigma'$ est une variété (ici à bord) et $T\Sigma' = T\Lambda' \cap T\Sigma$. Cela signifie que localement dans $\Lambda$, on peut choisir un système de coordonnées $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s, X_1, \ldots, X_m, r')$ de façon que $\Lambda'$ ait pour équation $\sigma_{s'+1} = \ldots = \sigma_s = X_{m'+1} = \ldots = X_m = 0$. Dans ce système de coordonnées, la vérification se fait sans difficulté sur les formules données en (1.1). Cqfd.

*Remarque* 2.8. – Si on éclate l'idéal $J^\alpha_\Sigma + J_{\overline{\Lambda}}$ de $\Lambda$, on obtient une variété à coins avec singularités. C'est pour éviter ces singularités qu'on a introduit la $\Gamma$-modification. La construction choisie est donc plus simple mais moins naturelle.

## 3. Symboles globaux.

*Introduction* 3.0. – On définit l'espace $S^{p,q}_\Gamma$ et on rassemble les propriétés qui se déduisent de ce qui précède.

*Notations* 3.1. – Soit $\Gamma = (\mathring{\Lambda}, \mathring{\Sigma}, \alpha)$ comme précédemment. Le bord $\overline{\Gamma}$ de $\Lambda_\Gamma$ est réunion de deux variétés à bord : $\overline{\Gamma}_1$ qui s'identifie à l'adhérence de $\overline{\Lambda} - \overline{\Sigma}$, et $\overline{\Gamma}_2$ qui est un fibré en demi-sphères sur $\overline{\Sigma}$. On note $I_1$ et $I_2$ les idéaux de $\overline{\Gamma}_1$ et $\overline{\Gamma}_2$. Soit $i$ l'injection de $\mathring{\Lambda}$ dans $\Lambda_\Gamma$. Pour $p$ dans $\mathbf{R}$ on définit $I_j^p = \{f \in i_* C^\infty_{\mathring{\Lambda}} \mid \forall g$ générateur local positif de $I_j$, $g^{-p} f \in C^\infty_{\Lambda_\Gamma}\}$.

DEFINITION 3.2. – *On pose* $S_\Gamma^{p,q} = I_1^{-p} I_2^{-q}$.

PROPOSITION 3.3. – *Si* $d$ *est un champ homogène de degré* 0 *sur* $\mathring{\Lambda}$ *alors* $d$ *envoie* $S_\Gamma^{p,q}$ *dans* $S_\Gamma^{p,q+1}$. *Si* $d$ *est en outre tangent à* $\mathring{\Sigma}$, *il envoie en fait* $S_\Gamma^{p,q}$ *dans lui-même.*

PROPOSITION 3.4. – $S_\Gamma^{p,q}$ *est un sous-espace complet de* $S^m_{\rho,\delta}$ *avec* $\delta = 1 - \rho = 1/\alpha$ *et* $m = \sup(p, q/\alpha)$.

PROPOSITION 3.5. – *Avec les notations 1.8, les faisceaux* $D_1$ *et* $D_2$ *sont localement libres de rang 1 et* $S_\Gamma^{p,q}/S_\Gamma^{p-1,q-1}$ *est naturellement isomorphe à* $D_1^p \otimes D_2^q$.

PROPOSITION 3.6. – *Si* $\varphi : \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ *est une submersion homogène, on pose* $\Gamma' = (\Lambda', \varphi^{-1}(\Sigma), \alpha)$, *alors* $\varphi^* S_\Gamma^{p,q} \subset S_{\Gamma'}^{p,q}$.

PROPOSITION 3.7. – *Si* $\Lambda'$ *est une sous-variété conique de* $\Lambda$ *coupant quasi-transversalement* $\Sigma$ *suivant* $\Sigma'$ *alors la restriction à* $\Lambda'$ *envoie* $S_\Gamma^{p,q}$ *dans* $S_{\Gamma'}^{p,q}$.

Toutes ces propositions résultent immédiatement des énoncés analogues des § 1 et 2.

## 4. Les Distributions de $I_\Gamma^{p,q}$.

*Introduction* 4.0. – On définit les distributions de $I_\Gamma^{p,q}$ auxquelles est consacré ce travail. On montre comment les obtenir avec phase et amplitude. On étudie aussi l'action des opérateurs pseudodifférentiels et la trace dans le cas transverse.

*Notations* 4.1. – X est une variété de dimension $n$, $T_0^*X$ son fibré cotangent privé de sa section nulle, $\mathring{\Lambda}$ une sous-variété lagrangienne conique de $T_0^*X$, $\mathring{\Sigma}$ une sous-variété conique de $\mathring{\Lambda}$. Soient

$u$ $C^\infty$ à support compact sur X et $\Psi(x, \lambda)$ une fonction homogène de degré 1 sur $X \times \mathring{\Lambda}$ telles que

(4.1.1) au-dessus du support de $u$, le graphe de $d_x\Psi$ coupe $\mathring{\Lambda}$ en un seul point, à savoir $\lambda$, et ce transversalement, et

(4.1.2) $\Psi(\pi(\lambda), \lambda) = 0$ où $\pi$ désigne la projection de $T_0^*X$ sur X.

Alors pour A dans $I^m_{\rho,\delta}(\mathring{\Lambda})$, $\langle A, ue^{-i\Psi(x,\lambda)}\rangle$ est un symbole de $S^{m-n/4}_{\rho,\delta}$ noté $\Sigma_{u,\Psi} A$ (cf. Duistermaat [2] p. 46).

DEFINITION 4.2. – *$I_\Gamma^{p,q}$ est le sous-espace de la réunion des espaces $I^m_{\rho,\delta}(\mathring{\Lambda})$ constitué par les distributions* A *telles que pour tout couple $(u, \Psi)$ vérifiant (4.1.1) et (4.1.2), $\Sigma_{u,\Psi}$* A *soit dans $S_\Gamma^{p-n/4,q-\alpha n/4}$.*

*Notations* 4.3. – Soit $\varphi$ une phase pour $\mathring{\Lambda}$ dans $X \times \mathbf{R}^N_\theta$ ; on identifie, à l'aide de $\varphi$, $\mathring{\Lambda}$ à une sous-variété conique de $X \times \mathbf{R}^N$. Soit M une sous-variété conique de $X \times \mathbf{R}^N$ coupant quasi-transversalement $\mathring{\Lambda}$ suivant $\mathring{\Sigma}$ ; on pose $\Gamma_M = (X \times \mathbf{R}^N, M, \alpha)$.

THEOREME 4.4. – *Pour tout symbole $a$ dans $S^{p,q}_{\Gamma_M}$, la distribution $\int e^{i\varphi} a d\theta$ est dans $I_\Gamma^{p+N/2-n/4, q+\alpha N/2-\alpha n/4}$.*

*Démonstration.* – On utilise essentiellement l'énoncé suivant (cf. Duistermaat [2] th. 2.3.1) :

Si on choisit une norme sur $\mathbf{R}^N$ et on pose $\tau = \|\lambda\|$, $\sigma = \dfrac{\lambda}{\|\lambda\|}$, alors $\langle A, ue^{-i\Psi(x,\lambda)}\rangle$ admet pour développement asymptotique

$$\tau^{1/2(N-n)} (2\pi)^{1/2(N+n)} |\det Q(\sigma)|^{-1/2} e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} Q(\sigma)} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} (R(\sigma)^k g)_{y=0} \tau^{-k}$$

où

$$Q(\sigma) = d^2_{(x,\theta)}(\varphi - \Psi)(x(\sigma), \theta(\sigma), \sigma),$$

$(x(\sigma), \theta(\sigma))$ étant la décomposition de $\sigma$ suivant $X \times \mathbf{R}^N$ ;

$g(x, \theta, \sigma, \tau) = a(x, \tau\theta)\, \widetilde{u}(x)\, |J^{-1}(x, \theta, \sigma)|$ avec $u(x) = \widetilde{u}(x)\,|dx|$,

J désignant le déterminant jacobien du changement de variables dépendant du paramètre $\sigma : (x, \theta) \longmapsto y(x, \theta, \sigma)$ qui vérifie

$$y(x(\sigma), \theta(\sigma), \sigma) = 0\,, \quad d_{(x,\theta)}\, y(x(\sigma), \theta(\sigma), \sigma) = I$$

et $$(\varphi - \Psi)(x, \theta, \sigma) = \frac{1}{2} \langle Q(\sigma) y, y \rangle$$

où enfin $$R(\sigma) = \frac{i}{2} \langle Q(\sigma)^{-1} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle .$$

Observons que $y$, et donc J, est homogène de degré 0 puisque la variable d'homogénéité est $\tau$ et que $R(\sigma)$ est homogène de degré 0 pour la même raison. Soit V la variété conique des variables $(x, \theta, \sigma, \tau)$ et W sa sous-variété définie par $(x, \theta) \in M$, et posons $\Gamma' = (V, W, \alpha)$. Alors $a(x, \tau\theta)$ est dans $S_{\Gamma'}^{p,q}$ d'après (3.6), donc aussi $g$. D'après (3.3), $R(\sigma)^k g$ est dans $S_{\Gamma'}^{p,q+2k}$ ; donc $R^k(\sigma)\, g\tau^{-k}$ est dans $S_{\Gamma'}^{p-k, q+(2-\alpha)k}$. Soit $\Delta$ la sous-variété de V définie par $\sigma = (x, \theta)$, c'est-à-dire par $y = 0$. On peut choisir un système de coordonnées dans lequel $\Delta$ et M sont des espaces vectoriels. Ils se coupent donc quasi-transversalement. D'après (3.7), $\tau^{\frac{1}{2}(N-n)} R^k(\sigma)\, g\tau^{-k}|_{y=0}$ considéré comme fonction de $(\sigma, \tau)$ est dans $S_{\Gamma}^{p-k+N/2-n/2, q-(\alpha-2)k+\alpha N/2-\alpha n/2}$ et (3.4) permet de conclure.
Cqfd.

THEOREME 4.5. – *Inversement*

1) *tout élément* A *de* $I_{\Gamma}^{p,q}$ *se met, modulo* $C^\infty$, *sous la forme* $\int e^{i\varphi} a d\theta$ *avec* $a$ *dans* $S_{\Gamma_M}^{p+n/4-N/2, q+\alpha n/4-\alpha N/2}$.

2) *plus précisément, si* $\gamma$ *est une projection sur* $\mathring{\Lambda}$, *homogène de degré 1, d'un voisinage conique de* $\mathring{\Lambda}$ *dans* $X \times \mathbf{R}^N$ *et si* M *désigne* $\gamma^{-1}(\mathring{\Sigma})$, *alors on peut en outre choisir* $a$ *se factorisant à travers* $\gamma$.

*Démonstration.* – D'après (2.7), $\Lambda_\Gamma$ est une sous-variété à coins fermée de la $\Gamma_M$-modification de $X \times \mathbf{R}^N$. Par suite, la restriction de $S_{\Gamma_M}^{p,q}$ à $S_{\Gamma}^{p,q}$ est surjective. Plus précisément, dans le cas 2), d'après (2.6), $\gamma$ se prolonge en un morphisme $\hat{\gamma}$ entre les deux modifications, c'est-à-dire que la composition avec $\gamma$ est une section de la restriction de $S_{\Gamma_M}^{p,q}$ dans $S_{\Gamma}^{p,q}$.

Choisissons alors $u$ et $\Psi$ comme dans (4.1). D'après (4.4) et sa démonstration, et d'après ce qui précède, on peut choisir $a_0$ dans $S_{\Gamma_M}^{p+n/4-N/2, q+\alpha n/4-\alpha N/2}$ (se factorisant à travers $\gamma$ dans le cas 2) tel que $\Sigma_{u,\Psi} A - \Sigma_{u,\Psi} \int e^{i\varphi} a_0 d\theta$ soit dans $S_{\Gamma}^{p-n/4-1, q-\alpha n/4-1}$. Par récurrence, on peut de même choisir $a_m$ dans

$$S_{\Gamma_M}^{p+n/4-N/2-m,\, q+\alpha n/4-\alpha N/2-m}$$

(se factorisant à travers $\gamma$ dans le cas 2)) de façon que

$$\Sigma_{u,\Psi} A - \Sigma_{u,\Psi} \int e^{i\varphi} \Big( \sum_{i \leqslant m} a_i \Big) \, d\theta$$

soit dans $S_\Gamma^{p-n/4-m-1,\, q-\alpha n/4-m-1}$. D'après (3.4) il existe donc $a$ tel que $\Sigma_{u,\Psi} A = \Sigma_{u,\Psi} \int e^{i\varphi} a d\theta$, ce qui signifie que $A = \int e^{i\varphi} a d\theta$ modulo $C^\infty$. Dans le cas 2), il faut d'abord utiliser (3.4) pour choisir la restriction $a'$ de $a$ à $\mathring{\Lambda}$ puis observer que $a' \circ \gamma$ a la propriété souhaitée. Cqfd.

*Notations* 4.6. – On note $\omega$ le volume canonique sur $T_0^* X$ ; $\omega^{1/2}$ est donc une demi-densité. On note toujours $\pi$ la projection de $T_0^* X$ sur $X$. Si $u$ est une demi-densité unité sur $X$ (localement), on peut, via $\pi$, diviser $\omega^{1/2}$ par $u$ : on obtient une demi-densité relative notée $\omega^{1/2}/u$. On note $M_\Psi(\lambda)$ l'espace tangent en $\lambda$ au graphe de $d_x \Psi(x, \lambda)$ et, comme d'habitude, $M'(\lambda)$ et $M''(\lambda)$ les espaces tangents respectifs en $\lambda$ à la fibre de $T_0^* X$ et à $\mathring{\Lambda}$. On note $p_\Psi$ la projection de $M''(\lambda)$ sur $M'(\lambda)$ parallèlement à $M_\Psi(\lambda)$ ; c'est un isomorphisme de fibrés sur $\mathring{\Lambda}$ puisque $M_\Psi(\lambda)$ est transverse à $M'(\lambda)$ et $M''(\lambda)$. On note $s$ l'indice de Hörmander (cf. [8]). Enfin on note $\Omega_{\Lambda,\Gamma}^{1/2}$ et $L_\Gamma$ le fibré des demi-densités sur $\mathring{\Lambda}$ homogènes de degré 0 et le fibré de Maslov remontés sur $\overline{\Gamma}$.

Pour les distributions demi-densités, on construit le symbole principal comme dans le cas classique :

THEOREME 4.7. – 1) *L'application qui à* $A$ *dans* $I_\Gamma^{p,q}$ *associe la partie principale (de bidegré* $(p + n/4,\, q + \alpha n/4)$*) de*

$$\lambda \longmapsto [M \longmapsto \langle A, u e^{-i\Psi(x,\lambda)} \rangle \, p_\Psi^* (\omega^{1/2}/u) \, i^{s(M'(\lambda), M''(\lambda), M, M_\Psi(\lambda))}]$$

*est indépendante du choix de* $u$ *et* $\Psi$ *vérifiant (4.1.1), (4.1.2) avec* $u(\pi(\lambda)) \neq 0$ *et établit un isomorphisme entre* $I_\Gamma^{p,q}/I_\Gamma^{p-1,q-1}$ *et l'espace des sections sur* $\overline{\Gamma}$ *du faisceau (de rang 1) :*

$$L_\Gamma \otimes \Omega_{\Lambda,\Gamma}^{1/2} \otimes D_1^{p+n/4} \otimes D_2^{q+\alpha n/4} .$$

2) *Si* $a$ *est dans* $S_{\Gamma_M}^{p+n/4-N/2,\, q+\alpha n/4-\alpha N/2}$, *alors l'image par cet isomorphisme de la classe de* $(2\pi)^{-\frac{n+2N}{4}} \int e^{i\varphi} a d\theta$ *est* $a' \otimes \sqrt{d\varphi} \otimes K\varphi$

*où* $a'$ *désigne la classe de la restriction de* $a$ *à* $\mathring{\Lambda}$, $d_\varphi$ *et* $K_\varphi$ *désignent les densité et section du fibré de Maslov associées à* $\varphi$ (cf. [8]).

*Démonstration.* – Le fait que la formule définit une section du faisceau annoncé résulte, grâce à (4.5), de la démonstration de (4.4), et du fait qu'une demi-densité homogène de degré $n/2$ définit une section de $\Omega^{1/2}_{\Lambda,\Gamma} \otimes D_1^{n/2} \otimes D_2^{\alpha n/2}$ . Le fait que cette section est indépendante du choix de $u$ et $\Psi$ résulte des mêmes arguments que dans le cas classique (cf. [2] p. 127-133). Le fait que le morphisme ainsi défini est surjectif résulte encore, après partition de l'unité (permettant d'utiliser des phases) de la démonstration de (4.4). Enfin ce morphisme est injectif par définition ce qui démontre 1).

2) se démontre comme dans le cas classique (cf. Duistermaat [3]). Cqfd.

*Remarque* 4.8. – Pour les distributions (0-courants) de $I_\Gamma^{p,q}$ , le symbole principal est donc une section de

$$\Omega^{-1/2}_{X,\Gamma} \otimes L_\Gamma \otimes \Omega^{1/2}_{\Lambda,\Gamma} \otimes D_1^{p+n/4} \otimes D_2^{q+\alpha n/4} ,$$

où $\Omega^{-1/2}_{X,\Gamma}$ désigne le fibré des densités d'ordre $-1/2$ sur X, remonté sur $\overline{\Gamma}$ .

THEOREME 4.9. – *Soit* P *un opérateur pseudo-différentiel classique de symbole principal* $p$ *homogène de degré* $\mu$. *Alors* P *définit un endomorphisme de* $I_\Gamma^{\infty,\infty}$ *de bidegré* $(\mu, \alpha\mu)$ *dont l'action sur les symboles principaux est la multiplication par* $p$, *considéré comme section de* $D_1^\mu \otimes D_2^{\alpha\mu}$ .

*Démonstration.* – D'après (4.5), et du fait que l'action des opérateurs pseudo-différentiels est microlocale, on peut supposer que A est de la forme $A(x) = \int e^{i(x.\xi - H(\xi))}\, a(\xi)\, d\xi$.

On a donc $P(x, D)\, A = \int e^{i(x.\xi - H(\xi))}\, P(x, \xi)\, a(\xi)\, d\xi$ et le symbole $P(x, \xi)\, a(\xi)$ est dans le même espace $S_\Gamma^{\infty,\infty}$ que $a(\xi)$ ce qui, grâce à (4.5), prouve que $P(x, D)\, A$ est dans $I_\Gamma^{\infty,\infty}$ ; cela permet aussi de voir que l'action sur les symboles principaux est la multiplication par $P(x, \xi)$ c'est-à-dire par son symbole principal. Cqfd.

*Notations* 4.10. – On note $T\overline{\Gamma}$ le faisceau des champs tangents à $\overline{\Gamma}$ (il n'est pas localement libre).

THEOREME 4.11. – *Dans la situation de (4.9), on suppose que* $p$ *s'annule sur* $\mathring{\Lambda}$ *et que le champ hamiltonien* $H_p$ *est tangent à* $\mathring{\Sigma}$. *Alors il existe une section* $\hat{H}_p$ *de* $D_1^{\mu-1} \otimes D_2^{\alpha(\mu-1)} \otimes T\overline{\Gamma}$ *telle que la partie principale de l'action de* P *sur* $I_\Gamma^{\infty,\infty}$ *en bidegré* $(\mu - 1, \alpha(\mu - 1))$ *soit un opérateur différentiel d'ordre 1 et de partie principale* $\hat{H}_p$.

*Démonstration.* – L'énoncé est microlocal. Ecrivons

$$H_p(x, \xi) = f(\xi)\, d(x, \xi)$$

où $f$ est homogène de degré $\mu - 1$ et $d$ est un champ homogène de degré 0. Alors, d'après (1.5), $d$ se prolonge en un champ tangent aux strates de $\Lambda_\Gamma$, dont on note $\hat{d}$ la restriction à $\overline{\Gamma}$. On pose $\hat{H}_p = f(\xi) \otimes \hat{d}$ : c'est une section de $D_1^{(\mu-1)} \otimes D_2^{\alpha(\mu-1)} \otimes T\overline{\Gamma}$ qui ne dépend évidemment pas du choix de $f$.

Choisissons maintenant une phase de la forme $x \,.\, \xi - H(\xi)$ pour $\mathring{\Lambda}$ et un symbole de la forme $a(\xi)$ pour A dans $I_\Gamma^{p,q}$. Le calcul classique (cf. [4] p. 191) montre que $P(x, D)\, A$ s'écrit

$$\int e^{i(x\xi - H(\xi))}\,(t(x, \xi) + r(x, \xi))\, a(\xi)\, d\xi$$

où $t(x, \xi)$ est un symbole-champ de vecteurs classique d'ordre $\mu - 1$, de partie principale $H_p(x, \xi)$ et $r(x, \xi)$ est un symbole classique d'ordre $\mu - 1$. Choisissons un générateur $a_0(\xi)$. Alors $a(\xi) = g(\xi)\, a_0(\xi)$, la restriction $\hat{g}$ de $g$ à $\overline{\Gamma}$ est bien définie, et l'application qui associe $\hat{g}$ au symbole principal de A constitue une trivialisation du faisceau des symboles principaux. Désignons par $r_{\mu-1}(x, \xi)$ la partie principale de $r(x, \xi)$. En ne retenant que la partie principale de PA, on voit que si le symbole principal de A est $\hat{g}$ dans la trivialisation précédente, celui de PA est

$$f(\xi)\, \hat{d}\hat{g} + f(\xi) \left[\frac{H_p(x, \xi)\, a_0(\xi)}{f(\xi)\, a_0(\xi)} + \frac{r_{\mu-1}(x, \xi)}{f(\xi)}\right] \hat{g}\,.$$

L'action de P sur $\hat{g}$ est donc bien celle d'un opérateur différentiel d'ordre 1 et de partie principale $f(\xi) \,.\, \hat{d}$.

Cqfd.

*Notations* 4.12. – Soit Y une sous-variété de codimension $k$ de X dont $\mathring{\Lambda}$ ne rencontre pas le fibré conormal. On suppose que $\mathring{H} = T_0^* X|_Y$ est transverse à $\mathring{\Lambda}$. On pose $\mathring{\Lambda}'' = \mathring{\Lambda} \cap \mathring{H}$ et on note $j$ l'injection de $\mathring{\Lambda} \cap \mathring{H}$ dans $\mathring{\Lambda}$ ainsi que celle de $\overline{\Lambda}'' = \overline{\Lambda} \cap \overline{H}$ dans $\overline{\Lambda}$. On note $\pi$ la projection de $\mathring{\Lambda} \cap \mathring{H}$ sur son image $\mathring{\Lambda}'$ dans $T_0^* Y$ ainsi que celle induite de $\overline{\Lambda}''$ sur $\overline{\Lambda}'$. Ce sont des revêtements finis. La trace des distributions intégrales de Fourier induit un isomorphisme $\underline{\mathrm{tr}}$ de fibrés sur $\overline{\Lambda}''$ (ou sur $\mathring{\Lambda}''$) entre $j^*(\Omega_X^{-1/2} \otimes \Omega_\Lambda^{1/2} \otimes L_\Lambda)$ et $\pi^*(\Omega_Y^{-1/2} \otimes \Omega_{\Lambda'}^{1/2} \otimes L_{\Lambda'})$. Soit maintenant $\mathring{\Sigma}$ une sous-variété conique de $\mathring{\Lambda}$ ; on suppose que $\mathring{H}$ est quasi-transverse à $\mathring{\Sigma}$ de sorte que $\mathring{\Sigma}'' = \mathring{\Sigma} \cap \mathring{H}$ est une variété dont on note $\mathring{\Sigma}'$ l'image par $\pi$. On pose $\Gamma = (\mathring{\Lambda}, \mathring{\Sigma}, \alpha)$, $\Gamma'' = (\mathring{\Lambda}'', \mathring{\Sigma}'', \alpha)$. On note encore $j$ l'injection de $\Lambda''_{\Gamma''}$ dans $\Lambda_\Gamma$ et de $\overline{\Gamma}''$ dans $\overline{\Gamma}$ (cf. prop. 2.7) et on note encore $\pi$ les projections de $\Lambda''_{\Gamma''}$ sur $\Lambda'_{\Gamma'}$ et de $\overline{\Gamma}''$ sur $\overline{\Gamma}'$. Le morphisme $\underline{\mathrm{tr}}$ induit un nouvel isomorphisme encore noté $\underline{\mathrm{tr}}$ entre les fibrés sur $\overline{\Gamma}''$ : $j^*(\Omega_X^{-1/2} \otimes \Omega_\Lambda^{1/2} \otimes L_\Lambda)$ et $\pi^*(\Omega_Y^{-1/2} \otimes \Omega_{\Lambda'}^{1/2} \otimes L_{\Lambda'})$.

THEOREME 4.13. – *Dans la situation ci-dessus, la restriction envoie* $I_\Gamma^{p,q}$ *dans* $I_\Gamma^{p+k/4, q+\alpha k/4}$ *et sa partie principale est le produit tensoriel de l'isomorphisme* $\underline{\mathrm{tr}}$ *par l'identification naturelle entre* $j^*(D_1^{p+n/4} \otimes D_2^{q+\alpha n/4})$ et $\pi^*(D_1'^{p+n/4} \otimes D_2'^{q+\alpha n/4})$.

*Démonstration.* – L'énoncé est microlocal : soit donc $(x_0, \xi_0)$ dans $\mathring{\Lambda} \cap \mathring{H}$. Soit $x_1$ une fonction sur X telle que le graphe de $dx_1$ coupe $\mathring{\Lambda}$ transversalement en $(x_0, \xi_0)$. On peut choisir un système de coordonnées

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{n-k} = y_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n$$

tel que $x_{n-k+1} = \ldots = x_n = 0$ soit un système d'équations de Y. Soit $\varphi(x, \xi)$ la phase de la forme $x.\xi - H(\xi)$ pour $\mathring{\Lambda}$ correspondant à ce système de coordonnées (cf. [8]). Comme $\mathring{\Lambda}$ ne rencontre pas le fibré conormal à Y, $\varphi(y, \xi) = y.\xi - H(\xi)$ est aussi une phase, dont la variété lagrangienne associée est $\mathring{\Lambda}'$ ; et l'hypothèse de transversalité assure que cette phase est non dégénérée. On pose $\Gamma_1 = (X \times \mathbf{R}^n, \mathring{\Sigma}, \alpha)$ (où $\mathring{\Sigma}$ est considérée comme une sous-variété de l'ensemble critique $C_\varphi$) et $\Gamma_2 = (Y \times \mathbf{R}^n, \mathring{\Sigma}'', \alpha)$. Soit A dans $I_\Gamma^{p,q}$. On sait que A s'écrit $(2\pi)^{-3n/4} \int e^{i\varphi(x,\xi)} a(x, \xi)\, d\xi$

avec $a$ dans $S_{\Gamma_1}^{p-n/4,q-\alpha n/4}$. Alors la trace de A, tr A, s'écrit $(2\pi)^{-3n/4}\int e^{i\varphi(y,\xi)}\,a(y,\xi)\,d\xi$ avec $a(y,\xi)$ dans $S_{\Gamma_2}^{p-n/4,q-\alpha n/4}$ d'après (3.7). On en déduit (cf. 4.4) que tr A est dans $I_{\Gamma'}^{p+k/4,q+\alpha k/4}$. Si on écrit le symbole principal de A sous la forme

$$a(x,\xi)\ |\xi|^{n/2}\otimes\left[\frac{\sqrt{d_\varphi}}{|\xi|^{n/2}}\otimes|dx|^{-1/2}\otimes \mathrm{K}_\varphi\right]$$

et celui de tr A sous la forme

$$a(y,\xi)\ |\xi|^{n/2}\otimes\left[(2\pi)^{-k/4}\ \frac{\sqrt{d_{\varphi'}}}{|\xi|^{n/2}}\otimes|dy|^{-1/2}\otimes \mathrm{K}_{\varphi'}\right]$$

où $\sqrt{d_\varphi}$ et $\sqrt{d_{\varphi'}}$ sont les demi-densités et $\mathrm{K}_\varphi$ et $\mathrm{K}_{\varphi'}$ les facteurs de Maslov naturellement associés aux phases $\varphi$ et $\varphi'$ (cf. [8]), on décompose la partie principale de la trace en $u\otimes v$. Dans cette décomposition $u$ est l'identification annoncée entre classes de symboles et $v$ est un isomorphisme qui ne dépend pas de la classe particulière de symboles choisie. C'est donc le même morphisme que dans le cas classique, à savoir $\underline{\mathrm{tr}}$. Cqfd.

## 5. Les O.P.D. de $L_\Gamma^{p,q}$.

*Introduction* 5.0. – On va compléter le calcul symbolique dans le cas des opd de façon à obtenir l'énoncé d'hypoellipticité naturel.

*Constructions* 5.1. – On pose $\Gamma = (\mathrm{T}_0^*\mathrm{X},\overset{\circ}{\Sigma},\alpha)$,

$\overset{\circ}{\Sigma}{}' = \{(\sigma,-\sigma)\in \mathrm{T}_0^*\mathrm{X}\times\mathrm{T}_0^*\mathrm{X}\mid \sigma\in\overset{\circ}{\Sigma}\}$ et $\Gamma' = (\mathrm{N}^*\Delta,\overset{\circ}{\Sigma}{}',\alpha)$

où $\mathrm{N}^*\Delta$ désigne le fibré conormal à la diagonale de $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$. L'espace $L_\Gamma^{p,q}$ est définie comme espace des opd dont le noyau est dans $I_{\Gamma'}^{p,q}$. D'après (4.8) le symbole principal d'un élément de $L_\Gamma^{p,q}$ (opérant sur les fonctions) est une section de

$$\Omega_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Gamma'}^{-1/2}\otimes \mathrm{L}_{\Gamma'}\otimes\Omega_{\mathrm{N}^*\Delta,\Gamma'}^{1/2}\otimes \mathrm{D}_1^{p+n/4}\otimes\mathrm{D}_2^{q+\alpha n/4}\otimes\Omega_{\mathrm{X},\Gamma'}$$

(où par exemple $\Omega_{\mathrm{X},\Gamma'}$ désigne le fibré des densités sur X remonté sur $\overline{\Gamma'}$) puisque le noyau d'un tel opd est une section distribution du fibré $\Omega_\mathrm{X}$. Or, comme dans le cas classique, $\mathrm{L}_{\Gamma'}$ admet une trivialisation naturelle parce que $\mathrm{N}^*\Delta$ est un fibré conormal ; et la demi-densité canonique sur $T_0^*X$ (identifié à $N^*\Delta$) trivialise $\Omega^{1/2}_{N^*\Delta,\Gamma'} \otimes D_1^{n/2} \otimes D_2^{\alpha n/2}$ tandis que le fibré $\Omega^{-1/2}_{X\times X} \otimes \Omega_X$ est naturellement trivial sur la diagonale. Il s'ensuit que le symbole principal est en fait une section de $D_1^p \otimes D_2^q$ et par conséquent qu'il se représente par un symbole sur $T_0^*X$. D'autre part, il résulte de (4.4) et (4.5) que l'opd de symbole complet $a(x,\xi)$ est dans $L_\Gamma^{p,q}$ si et seulement si $a(x,\xi)$ est dans $S_\Gamma^{p,q}$. Comme dans le cas classique et pour les mêmes raisons, le symbole principal de l'opd de symbole complet $a(x,\xi)$ est la partie principale de $a(x,\xi)$.

PROPOSITION 5.2. – *Le composé d'éléments de* $L_\Gamma^{p',q'}$ *et* $L_\Gamma^{p'',q''}$ *est dans* $L_\Gamma^{p'+p'',q'+q''}$ *et le symbole principal du composé est le produit (au sens du morphisme naturel de* $D_1^{p'} \otimes D_2^{q'} \otimes D_1^{p''} \otimes D_2^{q''}$ *dans* $D_1^{p'+p''} \otimes D_2^{q'+q''}$*) des symboles principaux.*

*Démonstration.* – Il suffit d'écrire la formule donnant le symbole complet de deux opd de type $(\rho,\delta)$ $\left(\text{avec } \rho > \frac{1}{2}, \ \rho+\delta = 1\right)$ et d'appliquer (3.3) et (3.4). Cqfd.

COROLLAIRE 5.3. – *Si* P *est un opérateur différentiel dont le symbole principal dans* $L_\Gamma^{p,q}$ *est inversible, alors* P *admet une parametrix bilatère.*

*Démonstration.* – Standard.

*Construction* 5.4. – On va maintenant exprimer de façon explicite la condition pour que le symbole principal soit inversible. Soit P un opérateur (pseudo)-différentiel classique d'ordre $m$ dont le symbole principal s'annule à l'ordre $\alpha$ sur une sous-variété conique (lisse) $\Sigma$ de $T_0^*X$. On peut alors associer à P son hessien transverse d'ordre $\alpha$, soit $Q_P$ : c'est une fonction homogène de degré $\alpha$ sur le fibré normal à $\Sigma$ dont on note $C_\sigma$ l'image (de la fibre en $\sigma$) ; cette image est un cône de $\mathbf{C}$. Le résultat suivant est connu de Helffer ([6] th. 4.1) et résulte vraisemblablement du critère de Hörmander ([7]) ; il est tout à fait analogue à un résultat de Boutet de Monvel concernant le cas $\alpha = 2$ ([1] th. 7.3).

THEOREME 5.5. – *Si* $Q_p$ *n'a pas de zéro non trivial et si en tout point* $\sigma$ *de* $\Sigma$ *le symbole sous-principal de* P *prend sa valeur* *hors de* $-C_\sigma$, *alors* P *admet une paramétrix bilatère dans* $L_\Gamma^{-m,-\alpha(m-1)}$ *avec* $\Gamma = (T_0^*X, \Sigma, \alpha)$ *et si* $Pf$ *est dans* $H^s_{\mathrm{loc}}$, $f$ *est dans* $H^{s+m-1}_{\mathrm{loc}}$.

*Démonstration.* – On va donc calculer le symbole principal de P dans $L_\Gamma^{m,\alpha(m-1)}$ : choisissons au voisinage d'un rayon $\{t\sigma_0\}_{t>0}$ de $\Sigma$ un système de coordonnées $\left(\sigma, x, r' = \dfrac{1}{r}\right)$ comme dans (1.1). Alors un symbole complet $p$ de P s'écrit :

$$p(\sigma, x, r') = r'^{-m}(Q_P(x) + \epsilon(\sigma, x)) + r'^{-m+1}(g(\sigma, x) + r'h(\sigma, x, r'))$$

où $\epsilon(\sigma, x)$ s'annule à l'ordre $\alpha + 1$ pour $x = 0$,

$h(\sigma, x, r')$ est $C^\infty$

$g(\sigma, 0)\, r'^{-m+1}$ est le symbole sous-principal puisque le symbole principal s'annule à l'ordre au moins 3 sur $\Sigma$.

Alors avec les notations de (1.1) :

$$p \circ \pi(\sigma, x', r'', \rho) = \rho^{-\alpha m} r''^{-m}(\rho^\alpha Q_P(x') + \epsilon(\sigma, \rho x')) + \rho^{-\alpha(m-1)} r''^{-m+1}[g(\sigma, \rho x') + \rho^\alpha r'' h(\sigma, \rho x', \rho^\alpha r'')].$$

Donc $p \circ \pi(\sigma, x', r'', \rho) = \rho^{-\alpha(m-1)} r''^{-m}([Q_P(x') + r''g(\sigma, \rho x')] + \rho^{-\alpha}\epsilon(\sigma, \rho x') + \rho^\alpha r''^2 h(\sigma, \rho x', \rho^\alpha r''))$.

Il nous suffit de voir que le coefficient de $\rho^{-\alpha(m-1)} r''^{-m}$ ne s'annule pas au voisinage de $\overline{\Gamma}_2$ : ailleurs on sait que le symbole principal de P est non nul puisque P y est elliptique. Or, par l'hypothèse, $Q_P(x') + r''g(\sigma, 0)$ ne s'annule pas sur $\overline{\Gamma}_2$ et le reste, $\rho^{-\alpha}\epsilon(\sigma, \rho x') + \rho^\alpha r''^2 h(\sigma, \rho x', \rho^\alpha r'')$ s'annule pour $\rho = 0$, c'est-à-dire sur $\overline{\Gamma}_2$.

D'après (5.3), P admet donc une paramétrix bilatère dans $L_\Gamma^{-m,-\alpha(m-1)}$, donc dans $L_\rho^{1-m}$ avec $\rho = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$ d'après (3.4), d'où la dernière assertion du théorème. Cqfd.

*Exemples* 5.6. – Si P est un opérateur différentiel d'ordre 2 alors $\Sigma$ est nécessairement une réunion de fibres de $T_0^*X$ ; comme le symbole sous-principal a des zéros sur toute fibre, on ne peut espérer trouver d'exemple différentiel d'ordre deux. Soit donc $\alpha' > 1$, les opérateurs suivants vérifient les hypothèses de (5.5) :

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{2\alpha'} + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{2\alpha'-1}$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{2\alpha'} + \sum_{i=1}^{n-1} x_j^{2\alpha'} \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{2\alpha'} + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{2\alpha'-1}$$

$$P_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{2\alpha'-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{2\alpha'-2} .$$

## 6. Remarques finales.

Les OPD étudiés au paragraphe 5 permettent de définir des wave-fronts plus fins que le wave-front usuel. Ils permettent aussi de faire des partitions de l'unité en deux termes dont l'un est à wave-front dans une sous-variété de $S^*X$ sans diminuer sensiblement la qualité du calcul symbolique utilisable : cela permet par exemple de montrer que si K désigne le noyau du problème mixte extérieur (pour un d'Alembertien), il existe un OIF $K'$ tel que le wave-front de $K - K'$ soit contenu dans une sous-variété. Enfin en compliquant la modification choisie au paragraphe 1, on peut construire d'autres classes analogues qui contiendront évidemment les paramétrix de nombreux opérateurs hypoelliptiques. On va revenir sur tout ça dès que possible.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BOUTET DE MONVEL, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, *Comm. Pure and Appl. Math.*, XXVII (1974), 585-639.

[2] J.J. DUISTERMAAT, Fourier Integral Operators, Courant Institute of Math. Sciences, New York University, 1973.

[3] J.J. DUISTERMAAT, Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities, *Comm. Pure and Appl. Math.*, XXVII (1974), 207-281.

[4] J.J. DUISTERMAAT, L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators II, *Acta Math.*, 128 (1972), 183-265.

[5] V. GUILLEMIN, Singular Symbols, Preprint, 1975.

[6] B. HELFFER, Invariants associés à une classe d'opd et applications à l'hypoellipticité, *Ann. Inst. Fourier*, XXVI Fasc. 2 (1976), 55-70.

[7] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic differential operators, *Ann. Inst. Fourier*, XI (1961), 477-492.

[8] L. HÖRMANDER, Fourier Integral Operators I, *Acta Math.*, 127 (1971), 79-183.

Manuscrit reçu le 21 janvier 1980.

André HIRSCHOWITZ,
Université deNice
Institut de Mathématiques
& Sciences Physiques
Parc Valrose
06034 – Nice Cedex.