ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE DEMAILLY

Construction d'hypersurfaces irréductibles avec lieu singulier donné dans $\mathbb{C}^n$

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 3 (1980), p. 219-236

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_219_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 3 (1980), 219-236

CONSTRUCTION D'HYPERSURFACES IRRÉDUCTIBLES AVEC LIEU SINGULIER DONNÉ DANS $\mathbf{C}^n$

par Jean-Pierre DEMAILLY

0. Introduction.

M. Cornalba et B. Shiffman [1] ont construit deux courbes d'ordre 0 dans $\mathbf{C}^n$ qui se coupent en une suite discrète de points dont le cardinal croît aussi rapidement que l'on veut à l'infini (voir le § 4), montrant ainsi que l'analogue transcendant du théorème de Bezout sur l'intersection des courbes algébriques n'est pas vrai en général. Il est bien connu d'autre part qu'une courbe algébrique de degré n, qui admet plus de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, dégénère en deux ou plusieurs courbes de degré inférieur. On peut se demander si un analogue transcendant de ce dernier théorème subsiste. L'objet du présent travail est de démontrer qu'il n'en est rien ; nous prouvons au § 4, en nous appuyant sur l'exemple de Cornalba-Shiffman, l'existence d'une courbe transcendante irréductible dont la croissance à l'infini est arbitrairement lente, et dont cependant les points singuliers sont aussi nombreux que l'on veut. Nous déduisons cet exemple d'un théorème général permettant de construire, avec contrôle de la croissance, une hypersurface irréductible de $\mathbf{C}^n$ dont le lieu singulier S est imposé (voir le § 1 pour l'énoncé précis). La traduction en termes de distributions à support compact, obtenue au § 5 par l'intermédiaire du théorème de Paley-Wiener, nous permet de retrouver un résultat antérieur de L.A. Rubel, W.A. Squires et B.A. Taylor [3], complété par J. Dixmier, P. Malliavin [2], selon lequel l'ensemble des produits de convolution $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) * \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ n'est pas égal à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ pour $n \geqslant 2$.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Henri Skoda, qui m'a signalé ce problème, et qui porte un intérêt constant à mes travaux.

1. Enoncé du théorème principal.

THEOREME. – *Soit* S *un ensemble analytique de* $\mathbf{C}^n$ (où $n \geq 2$), *de codimension* ≥ 2 *en tout point, défini par les équations*

$$f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0.$$

On se donne une fonction φ *de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$, *croissante et positive, telle que :*

(1) $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ *tend vers* $+\infty$ *quand* t *tend vers* $+\infty$.

Alors il existe des fonctions entières $g_1, \ldots, g_k$ *telles que :*

(2) *la fonction* $\mathrm{F} = \sum_{j=1}^{k} f_j g_j$ *est irréductible,*

(3) *l'hypersurface* X *définie par l'équation* $\mathrm{F} = 0$ *a son lieu singulier contenu dans* S,
et la majoration

(4) $\mathrm{Log}\,|g_j(z)| \leq \varphi(\mathrm{Log}\,|z|)$

a lieu pour tout $j = 1, \ldots, k$ *et tout* $z \in \mathbf{C}^n$.

COROLLAIRE 1. – *Si* $f_1, \ldots, f_k$ *s'annulent à l'ordre* 2 *au moins sur* S *(sinon remplacer par exemple* $f_1, \ldots, f_k$ *par leurs puissances), le lieu singulier de l'hypersurface irréductible* X *du théorème est précisément égal à* S.

Nous aurons besoin d'exprimer dans la démonstration qu'une hypersurface dépend «continûment» de son équation, propriété explicitée dans les propositions 1 et 2.

2. Déformation des composantes irréductibles d'une hypersurface en fonction de l'équation.

Les propositions 1 et 2 qui suivent sont probablement classiques. Mais vu leur importance pour la démonstration du théorème, il nous a semblé préférable d'en donner une preuve afin d'être complet.

PROPOSITION 1. – *Soient* Ω *une variété analytique complexe connexe de dimension* n, $H(\Omega)$ *l'espace des fonctions holomorphes sur* Ω, *et* K *une partie compacte de* Ω.

A toute fonction $f \in H(\Omega)$ *non nulle, on associe l'entier* $\nu_K(f)$, *somme des multiplicités de* f *sur les composantes irréductibles de* $Z_f = \{z \in \Omega \,;\, f(z) = 0\}$ *qui rencontrent* K, *et on pose* $\nu_K(0) = \infty$. *Alors l'application* $f \longrightarrow \nu_K(f)$ *est semi-continue supérieurement sur* $H(\Omega)$.

Démonstration. – On prouve la semi-continuité en une fonction $f \neq 0$ fixée une fois pour toutes. On commencera par substituer à K des compacts K_1, K_2 plus appropriés tels que

$$\nu_K(f) = \nu_{K_1}(f) = \nu_{K_2}(f),$$

$$\nu_K(g) \leqslant \nu_{K_1}(g) \leqslant \nu_{K_2}(g) \quad \text{pour } g \text{ voisine de } f.$$

Le lieu singulier S de Z_f a en tout point une codimension $\geqslant 2$. Quel que soit $z_0 \in S \cap K$, il existe donc des coordonnées locales $w_1, \ldots, w_n$ telles que $w_j(z_0) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, et telles que le point z_0 soit isolé dans l'ensemble $S \cap \{w_3 = \ldots = w_n = 0\}$.

On choisit $\epsilon > 0$, puis $\eta > 0$ assez petits de sorte qu'en notant

$$V_{z_0} = \{z \in \Omega \,;\, |w_1(z)|^2 + |w_2(z)|^2 < \epsilon^2, \text{ et } |w_j(z)| < \eta \text{ pour } j > 2\},$$

$$B_{z_0} = \{E \in \Omega \,;\, |w_1(z)|^2 + |w_2(z)|^2 = \epsilon^2, \text{ et } |w_j(z)| \leqslant \eta \text{ pour } j > 2\},$$

on ait $S \cap B_{z_0} = \phi$, et que les composantes irréductibles de Z_f ne rencontrant pas K ne rencontrent pas non plus $\overline{V}_{z_0}$. Si $V_{z_1}, \ldots, V_{z_p}$ recouvrent $S \cap K$, on pose

$$K_1 = \Big(K \setminus \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant p} V_{z_j}\Big) \cup \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant p} B_{z_j}.$$

Toute hypersurface de Ω qui coupe V_{z_j} en un point a, coupe également B_{z_j}, sinon la trace de cette hypersurface sur l'ensemble

$$\{z \in \Omega \,;\, |w_1(z)|^2 + |w_2(z)|^2 < \epsilon^2 \quad \text{et} \quad w_j(z) = w_j(a),\ j > 2\}$$

serait un ensemble analytique compact de dimension 1 ou 2. Pour tout $g \in H(\Omega)$ on a donc $\nu_K(g) \leqslant \nu_{K_1}(g)$. De plus par construction, $\nu_K(f) \geqslant \nu_{K_1}(f)$, et $S \cap K_1 = \emptyset$. Soient $X'_1, \dots, X'_k$ les composantes connexes de $Z_f \backslash S$ qui rencontrent K_1, et L_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, un voisinage compact de $X'_j \cap K_1$ dans Ω tel que $Z_f \cap L_j = X'_j \cap L_j$. On prend

$$K_2 = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j ,$$

de sorte que $\nu_{K_2}(f) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \nu_{L_j}(f) = \nu_{K_1}(f)$. Comme K_2 est un voisinage de $Z_f \cap K_1$, on a $\inf_{z \in K_1 \backslash \mathring{K}_2} |f(z)| > 0$, donc $Z_g \cap K_1 \subset Z_g \cap \mathring{K}_2$ lorsque g tend vers f, ce qui entraîne

$$\nu_{K_1}(g) \leqslant \nu_{K_2}(g) \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \nu_{L_j}(g) ;$$

on voit qu'il suffit de prouver la semi-continuité des ν_{L_j} en f.

Pour simplifier les notations, on supprime l'indice j, et on considère un compact L de Ω tel que $Z_f \cap L = X' \cap L$, où X' est l'une des composantes connexes de la sous-variété lisse $Z_f \backslash S$ de dimension $n-1$. Soit $P = \{w \in \mathbf{C}^n \,;\, |w_j| < 1 ,\, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ le polydisque unité de $\mathbf{C}^n$. On peut, par compacité de $X' \cap L$, trouver un nombre fini de cartes $\theta_q : U_q \longrightarrow P$, définies par $\theta_q(z) = (w_1(z), \dots, w_n(z))$, où les U_q sont des ouverts de Ω recouvrant $X' \cap L$, et pour lesquelles $X' \cap U_q$ admet l'équation $w_1(z) = 0$. On suppose également que $Z_f \cap U_q = X' \cap U_q$, et on désigne par $\pi_q : U_q \longrightarrow X' \cap U_q$ l'application qui en coordonnées locales s'écrit $(w_1, w_2, \dots, w_n) \longrightarrow (0, w_2, \dots, w_n)$. Comme X' est connexe, on peut toujours faire en sorte que $\bigcup_q \pi_q(U_q)$ soit connexe. Pour chaque couple (q_1, q_2) d'indices distincts tels que $\pi_{q_1}(U_{q_2}) \cap \pi_{q_1}(U_{q_2}) \neq \emptyset$, on choisit un point

$$z_{q_1 q_2} \in \pi_{q_1}(U_{q_1}) \cap \pi_{q_2}(U_{q_2}) .$$

On pose

$$A_q^\epsilon = \{z \in U_q \,;\, |w_j(z)| \leqslant 1 - \epsilon ,\, 1 \leqslant j \leqslant n\} ,$$

$$B_q^\epsilon = \{z \in U_q \,;\, |w_1(z)| < \epsilon ,\, |w_j(z)| \leqslant 1 - \epsilon ,\, 1 < j \leqslant n\} ,$$

$$C_q^\epsilon = A_q^\epsilon \backslash B_q^\epsilon ,$$

et on prend $\epsilon > 0$ assez petit de manière que les conditions suivantes soient réalisées pour tous les couples (q_1, q_2) précédents :

(5) $z_{q_1 q_2} \in \pi_{q_1}(A^\epsilon_{q_1}) \cap \pi_{q_2}(A^\epsilon_{q_2})$,

(6) $\pi^{-1}_{q_1}(z_{q_1 q_2}) \cap B_{q_1} \subset A_{q_2}$,

(7) $A^\epsilon = \bigcup\limits_q A^\epsilon_q$ est un voisinage de $X' \cap L$.

Grâce à la propriété (7) et au fait que $Z_f \cap A^\epsilon = X' \cap A^\epsilon$, on voit que $\nu_L \leqslant \nu_A$ au voisinage de f dans $H(\Omega)$, et que

$$\nu_L(f) = \nu_{A^\epsilon}(f) = \text{multiplicité } m \text{ de } f \text{ sur } X'.$$

La démonstration sera achevée si nous prouvons que $\nu_{A^\epsilon}(g) \leqslant m$ lorsque

(8) $\sup\limits_{A^\epsilon} |g - f| < \inf\limits_{C^\epsilon} |f|$

où $C^\epsilon = \bigcup\limits_q C^\epsilon_q$ (noter que $Z_f \cap C^\epsilon = \emptyset$, donc $\inf\limits_{C^\epsilon} |f| > 0$).

Soit Y une composante irréductible de Z_g rencontrant A^ϵ, avec $Y \cap A^\epsilon_{q_1} \neq \emptyset$ par exemple. L'inégalité (8) entraîne que $Y \cap A^\epsilon_{q_1} = Y \cap B^\epsilon_{q_1}$, donc pour tout $z \in \pi_{q_1}(A^\epsilon_{q_1})$, le sous-ensemble analytique $Y \cap B^\epsilon_{q_1} \cap \pi^{-1}_{q_1}(z)$ du disque $B^\epsilon_{q_1} \cap \pi^{-1}_{q_1}(z)$ est compact. Il en résulte que les fibres $Y \cap B^\epsilon_{q_1} \cap \pi^{-1}_{q_1}(z)$ sont discrètes, et comme $\dim Y = \dim X' = n - 1$, $\pi_{q_1}(Y \cap B^\epsilon_{q_1})$ est ouvert dans $\pi_{q_1}(B^\epsilon_{q_1}) = \pi_{q_1}(A^\epsilon_{q_1})$. Mais d'autre part, $\pi_{q_1}(Y \cap B^\epsilon_{q_1}) = \pi_{q_1}(Y \cap A^\epsilon_{q_1})$ est une partie compacte non vide, donc $\pi_{q_1}(Y \cap B^\epsilon_{q_1}) = \pi_{q_1}(A^\epsilon_{q_1})$ par connexité de $\pi_{q_1}(A^\epsilon_{q_1})$. D'après (5) et (6), pour tout indice q_2 tel que $\pi_{q_1}(A^\epsilon_{q_1}) \cap \pi_{q_2}(A^\epsilon_{q_2}) \neq \emptyset$, on a $Y \cap A^\epsilon_{q_2} \neq \emptyset$, donc aussi $\pi_{q_2}(Y \cap B^\epsilon_{q_2}) = \pi_{q_2}(A^\epsilon_{q_2})$ en répétant le même raisonnement. Il en résulte par connexité de $\bigcup\limits_q \pi_q(A^\epsilon_q)$ (hypothèse (5)) que pour tout indice q on a $\pi_q(Y \cap B^\epsilon_q) = \pi_q(A^\epsilon_q)$.

Choisissons arbitrairement un indice q_0 et un point $h_0 \in \pi_{q_0}(A^\epsilon_{q_0})$.

D'après le théorème de Rouché et la condition (8), la fonction g possède exactement m zéros (comptés avec multiplicités) dans le disque $B^\epsilon_{q_0} \cap \pi^{-1}_{q_0}(h_0)$. Si $Y_1, \ldots, Y_r$ sont les composantes irréductibles de Z_g qui coupent A^ϵ (donc aussi $B^\epsilon_{q_0} \cap \pi^{-1}_{q_0}(h_0)$ en vertu de ce qui précède) et $m_1, \ldots, m_r$ les multiplicités respectives de g sur ces composantes, chaque point de $Y_j \cap B^\epsilon_{q_0} \cap \pi^{-1}_{q_0}(h_0)$, $1 \leqslant j \leqslant r$, contribue pour au moins m_j zéros. Il vient par conséquent

$$\nu_{A^\epsilon}(g) = m_1 + \ldots + m_r \leqslant m .$$

La preuve est complète.

Remarque 1. – Continuité de ν_K

Il est facile de voir que ν_K est continue en f sous les hypothèses : (9) toute composante de Z_f qui coupe K, coupe également $\overset{\circ}{K}$; (10) $Z_f \cap K$ ne comporte que des points où le germe de Z_f est irréductible, et en lesquels f a la multiplicité 1.

Lorsque Ω est une variété de Stein de dimension $n \geqslant 2$, la condition (10) est nécessaire pour que ν_K soit continue en f ; dans le cas $n = 1$, la condition (9) est en fait nécessaire et suffisante.

PROPOSITION 2. – *Soient* Ω, K *et* f *comme dans la proposition 1, f étant non nulle, et* $X_1 = \overline{X}'_1, \ldots, X_k = \overline{X}'_k$ *les composantes irréductibles de* Z_f *qui rencontrent* K. *Alors, pour tout ouvert* ω *de* Ω *qui rencontre chaque* X_j, *les composantes irréductibles de* Z_g *qui coupent* K, *rencontrent* ω *dès que* g *est suffisamment voisine de* f.

Démonstration. – On revient aux considérations précédentes, en supposant dans ce qui suit que g est prise suffisamment proche de f. Alors toute composante Y de Z_g telle que $Y \cap K \neq \emptyset$ rencontre $L = L_j$ pour $j = 1$ ou $2, \ldots$ ou k. On choisit ensuite les U_q de sorte que $\omega \cap \bigcup_q \pi_q(U_q) \neq \emptyset$, ce qui est toujours possible puisque X' est connexe. On prend enfin $h_0 \in \omega$, et ϵ assez petit pour que h_0 appartienne à un certain pavé $B^\epsilon_{q_0}$, avec $\pi^{-1}_{q_0}(h_0) \cap B^\epsilon_{q_0} \subset \omega$.

3. Démonstration du théorème.

Soit E l'espace de Fréchet des fonctions entières g telles que les semi-normes

$$(11)\ p_j(g) = \sup_{z\in\mathbf{C}^n} |g(z)|\, e^{-\frac{1}{j}\varphi(\mathrm{Log}\,|z|)}\ ,\ j = 1, 2, \ldots$$

soient finies. Notons B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p, $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de compacts de $\mathbf{C}^n\backslash S$, et U_p (resp. V_p) l'ensemble de k-uplets $g = (g_1, \ldots, g_k) \in E^k$ tels que, si $F = \sum_{j=1}^{k} f_j g_j$, tous les points de $Z_F \cap K_p$ soient réguliers pour F (resp. $\nu_{B_p}(F) \leqslant 1$, c'est-à-dire qu'une composante irréductible au plus de Z_F rencontre B_p, composante sur laquelle F a la multiplicité 1).

D'après la proposition 1, V_p est ouvert, et il en est de même trivialement pour U_p. Si l'on montre que U_p et V_p sont denses dans E^k, le théorème de Baire entraînera que $\bigcap_{p\in\mathbf{N}} (U_p \cap V_p)$ est dense, d'où la conclusion.

Densité de U_p

Il suffit de prouver que l'ensemble fermé des $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{C}^k$ tels que $(g_1 + a_1, \ldots, g_k + a_k)$ n'appartienne pas à U_p est négligeable, et pour cela, que l'ensemble des a tels que la fonction

$$F_a = \sum_{j=1}^{k} f_j(g_j + a_j)$$

ait un point critique sur $Z_{F_a}\backslash Z_{f_j}$, est négligeable quel que soit j, $1 \leqslant j \leqslant k$: en effet $Z_{f_a} \cap K_p \subset \bigcup_{1\leqslant j\leqslant k} Z_{F_a}\backslash Z_{f_j}$. Lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k$ sont fixés, F_a a un point critique sur $Z_{F_a} \cap Z_{f_j}$ si et seulement si a_j est valeur critique de la fonction $-\frac{F_a}{f_j} + a_j = -\frac{1}{f_j} \sum_{s\neq j} f_s(g_s + a_s) - g_j$, définie sur $\mathbf{C}^n\backslash Z_{f_j}$. L'ensemble de ces valeurs critiques est négligeable dans $\mathbf{C}$ (théorème de Sard), d'où la conclusion par Fubini.

Densité de V_p

C'est le point essentiel de la démonstration, le seul qui utilise (1) et la définition de E par les semi-normes (11).

Si $(g_1, \ldots, g_k) \in E^k$ est donné, on peut choisir des vecteurs $a^1 \in \mathbf{C}^k$, $a^2 \in \mathbf{C}^k$ arbitrairement petits tels que les fonctions

$$F_1 = \sum_{j=1}^{k} f_j(g_j + a_j^1) \quad , \quad F_2 = \sum_{j=1}^{k} f_j(g_j + a_j^2),$$

aient un ensemble de zéros communs $Z_{F_1} \cap Z_{F_2}$ de dimension pure $n-2$: fixer a^1 tel que F_1 soit non nulle, puis utiliser le fait que $\operatorname{codim} S \geqslant 2$. On peut maintenant trouver α aussi proche de 1 que l'on veut, tel que les zéros critiques de $F_1 + \alpha F_2$ soient contenus dans $Z_{F_1} \cap Z_{F_2}$: prendre α valeur régulière de $-\dfrac{F_1}{F_2}$ sur $\mathbf{C}^n \backslash Z_{F_2}$, et $\dfrac{1}{\alpha}$ valeur régulière de $-\dfrac{F_2}{F_1}$ sur $\mathbf{C}^n \backslash Z_{F_1}$. Soient Y l'hypersurface d'équation $F_1 + \alpha F_2 = 0$, et $Y_1, \ldots, Y_r$ les différentes composantes irréductibles de Y qui rencontrent B_p ; on prend sur chaque Y_j un point z_j régulier pour Y, n'appartenant ni à B_p, ni à Z_{F_2} (ce qui est possible, car $Y_j \cap Z_{F_2} \subset Z_{F_1} \cap Z_{F_2}$ est de dimension $n-2$). On choisit ensuite des vecteurs $u_1, \ldots, u_r$ deux à deux indépendants tels qu'en notant H_j l'hyperplan $\langle z - z_j, u_j \rangle = 0$, on ait les propriétés suivantes :

(12) H_j ne rencontre pas B_p, et $|u_j - z_j| \leqslant 1$, ce qui est vrai dès que $|u_j - z_j|$ est assez petit,

(13) H_j coupe transversalement Y_j en z_j,

(14) H_j ne contient pas z_s pour $s \neq j$,

(15) Les sous-espaces $H_1 \cap H_j$, $j > 1$, sont deux à deux distincts, et non contenus dans $Y \cup Z_{F_2}$.

Pour chaque $j > 1$, on sélectionne un point $x_j \in H_1 \cap H_j$ tel que

(16) $x_j \notin Y \cup Z_{F_2} \cup \bigcup_{1<s\neq j} H_s$.

L'idée est que les hyperplans $H_1, \ldots, H_r$ «relient» entre elles les composantes $Y_1, \ldots, Y_r$, et qu'en déformant un peu l'ensemble $Y_1 \cup \ldots \cup Y_r \cup H_1 \cup \ldots \cup H_r$ on obtiendra une hypersurface irréductible. On pose quel que soit $\epsilon \in \mathbf{C}$

$$G_\epsilon = \frac{1}{2}(F_1 + \alpha F_2) \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{\langle z, u_j\rangle}{\langle z_j, u_j\rangle}\right) + \epsilon F_2,$$

et on examine l'allure de Z_{G_ϵ} au voisinage des points z_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, et x_j, $1 < j \leqslant r$. En ces points $F_2 \neq 0$ (cf. (16)), donc on est ramené à étudier localement les zéros de la fonction

$$\frac{G_\epsilon}{F_2} = \frac{1}{2}\,\frac{F_1 + \alpha F_2}{F_2} \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{\langle z , u_j \rangle}{\langle z_j , u_j \rangle}\right) + \epsilon \,;$$

en z_j, on peut prendre grâce à (13), (14), des coordonnées locales $(w_1 , \ldots , w_n)$ telles que

$$w_1 = 1 - \frac{\langle z , u_j \rangle}{\langle z_j , u_j \rangle}, \; w_2 = \frac{1}{2}\,\frac{F_1 + \alpha F_2}{F_2} \prod_{\substack{1 \leqslant s \leqslant r \\ s \neq j}} \left(1 - \frac{\langle z , u_s \rangle}{\langle z_s , u_s \rangle}\right);$$

en x_j, $j > 1$, on peut grâce à (16) trouver des coordonnées locales $(w_1 , \ldots , w_n)$ telles que

$$w_1 = \frac{1}{2}\,\frac{F_1 + \alpha F_2}{F_2} \prod_{1 < s \leqslant r} \left(1 - \frac{\langle z , u_s \rangle}{\langle z_s , u_s \rangle}\right), \; w_2 = 1 - \frac{\langle z , u_1 \rangle}{\langle z_1 , u_1 \rangle} \,.$$

Soit ω_{z_j} (resp. ω_{x_j}, $j > 1$) un voisinage ouvert de z_j (resp. x_j), tel que les coordonnées $(w_1 , \ldots , w_n)$ réalisent un isomorphisme de ω_{z_j} (resp. ω_{x_j}) sur le polydisque $P_\delta = \{w \in \mathbf{C}^n \,;\, |w_j| < \delta , 1 \leqslant j \leqslant n\}$ de $\mathbf{C}^n$. Dans les ouverts ω_{z_j} et ω_{x_j}, Z_{G_ϵ} admet l'équation $w_1 w_2 + \epsilon = 0$, donc pour $0 < |\epsilon| < \delta^2$, $Z_{G_\epsilon} \cap \omega_{z_j}$ et $Z_{G_\epsilon} \cap \omega_{x_j}$ sont irréductibles. Par ailleurs Z_{G_0} admet l'équation $w_1 w_2 = 0$, où $w_1 = 0$ représente l'hyperplan H_j, et $w_2 = 0$ l'hypersurface Y (dans ω_{z_j}), ou l'hyperplan H_1 (dans ω_{x_j}). On peut donc choisir des compacts L_j de ω_{z_j} et M_j de ω_{x_j}, $j > 1$, tels que

$$Z_{G_0} \cap L_j = H_j \cap L_j \quad \text{et} \quad H_j \cap \mathring{L}_j \neq \emptyset ,$$

$$Z_{G_0} \cap M_j = H_1 \cap M_j \quad \text{et} \quad H_1 \cap \mathring{M}_j \neq \emptyset ,$$

et il est clair que l'hyperbole $w_1 w_2 + \epsilon = 0$ rencontre L_j, ou M_j selon le cas, dès que ϵ est assez petit.

On applique maintenant trois fois consécutives la proposition 2 avec $\Omega = \mathbf{C}^n$, $f = G_0$, $g = G_\epsilon$, où K, $\{X_1 , \ldots , X_k\}$ et ω sont remplacés par

$$\begin{array}{lll} B_p , & \{Y_1 , \ldots , Y_r\} , & \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant r} \omega_{z_j} \,; \\ L_j , & \{H_j\} & , \; \omega_{x_j} \quad \text{pour} \quad j > 1 \,; \\ M_j , & \{H_1\} & , \; \omega_{z_1} \quad \text{pour} \quad j > 1 \,. \end{array}$$

Si $\epsilon \neq 0$ est assez petit, et si T est une composante irréductible de Z_{G_ϵ} qui rencontre B_p, on obtiendra successivement les conséquences (17), (18), (19) ci-dessous :

$$\text{(17)} \qquad \mathrm{T} \text{ rencontre } \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant r} \omega_{z_j} \, ;$$

supposons que $\mathrm{T} \cap \omega_{z_j} \neq \phi$ pour $j > 1$; alors

$$\mathrm{T} \cap \mathrm{L}_j = \{w_1 w_2 + \epsilon = 0\} \cap \mathrm{L}_j \neq \phi \, ;$$

$$\text{(18)} \quad \mathrm{T} \cap \omega_{x_j} \neq \phi \, , \text{ donc } \mathrm{T} \cap \mathrm{M}_j = \{w_1 w_2 + \epsilon\} \cap \mathrm{M}_j \neq \phi \, ;$$

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{T} \cap \omega_{z_1} \neq \phi \, .$$

Dans tous les cas, on voit que $\mathrm{T} \cap \omega_{z_1} \neq \phi$; comme $\mathrm{Z}_{\mathrm{G}_\epsilon} \cap \omega_{z_1} = \{w_1 w_2 + \epsilon = 0\} \cap \omega_{z_1}$ est irréductible et que $\mathrm{G}_\epsilon = (w_1 w_2 + \epsilon)\, \mathrm{F}_2$ y a la multiplicité 1, $\mathrm{Z}_{\mathrm{G}_\epsilon}$ possède au plus une composante T rencontrant B_p, sur laquelle G_ϵ a nécessairement la multiplicité 1 ; par définition G_ϵ appartient à V_p.

Ecrivons maintenant $\mathrm{G}_\epsilon = \sum_{j=1}^{k} f_j g_{j,\epsilon}$ avec

$$g_{j,\epsilon} = \frac{1}{2}\,((g_j + a_j^1) + \alpha(g_j + a_j^2)) \prod_{s=1}^{k} \left(1 - \frac{\langle z , u_s \rangle}{\langle z_s , u_s \rangle}\right) + \epsilon(g_j + a_j^2) \, ;$$

on fait tendre a^1 et a^2 vers 0, α vers 1, z_s vers ∞, et ϵ vers 0.

Il résulte de (1) et de la définition de E (cf. (11)) que dans E la multiplication par un polynôme est continue. On vérifie enfin, en utilisant la relation (12) $|u_s - z_s| \leqslant 1$, que $g_{j,\epsilon}$ tend vers g_j, d'où la densité de V_p.

Remarque 2. – La démonstration révèle en fait que les k-uplets de fonctions $(g_1, \ldots, g_k) \in \mathrm{E}^k$ satisfaisant aux conclusions (2) et (3) du théorème constituent un G_δ dense dans E^k.

Le quatrième paragraphe est consacré à l'application du théorème au contre-exemple annoncé dans l'introduction.

4. Exemple de courbe irréductible d'ordre 0, ayant un lieu singulier d'ordre infini.

Rappelons d'abord brièvement l'exemple de Cornalba-Shiffman [1]. On choisit une suite de nombres complexes distincts non nuls, a_n, tendant très vite vers ∞, et on pose

$$f_1(z_1) = \frac{1}{2} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1}{a_n}\right) \ , \ h_n(z_1) = \frac{f_1(z_1)}{1 - \dfrac{z_1}{a_n}} \ ;$$

on détermine ensuite, étant donné une suite quelconque (k_n) d'entiers, une suite (ϵ_n) de complexes non nuls, tels qu'en définissant le polynôme P_k par

$$P_k(z_2) = \prod_{j=1}^{k} \left(z_2 - \frac{1}{j}\right),$$

la série $f_2(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n h_n(z_1) P_{k_n}(z_2)$ soit convergente. L'ensemble analytique

$$S = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \ ; \ f_1(z_1) = f_2(z_1, z_2) = 0\}$$

est l'ensemble des points de coordonnées

$$z_1 = a_n \ , \ n \in \mathbf{N} \ , \ z_2 \in \left\{1 \, , \frac{1}{2} \, , \dots , \frac{1}{k_n}\right\}.$$

La croissance de f_1 est aussi lente qu'on veut, pourvu que la suite (a_n) tende vers ∞ assez vite ; on choisit alors k_n très grand et ϵ_n très petit de sorte que f_2 soit à croissance lente et S à croissance très rapide. De façon précise, on obtient la

Proposition 3 (Cornalba-Shiffman [1]). — *Pour toute fonction croissante positive* φ *vérifiant (1), et toute fonction* $\psi : \mathbf{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ *croissante, on peut trouver* f_1 *et* f_2 *telles que*

$$\operatorname{Log} |f_1(z_1)| \leqslant \varphi(\operatorname{Log} |z_1|) \, ,$$

$$\operatorname{Log} |f_2(z_1, z_2)| \leqslant \varphi(\operatorname{Log} |z|) \, ,$$

et
$$\operatorname{Card} \{w \in S \ ; |w| \leqslant r\} \geqslant \psi(r) \, ,$$

quels que soient $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ et $r \geqslant 0$.

On remarquera que par construction, le jacobien de (f_1, f_2) est non nul aux points de S. D'après le théorème, on peut trouver des fonctions g_1 et g_2 telles que $f = f_1^{p_1} g_1 + f_2^{p_2} g_2$ soit irréductible (où $2 \leqslant p_1 \leqslant p_2$), telles que S soit l'ensemble des points singuliers de Z_f, et telles que

$$\operatorname{Log} (|g_1(z)| + |g_2(z)|) \leqslant \varphi(\operatorname{Log} |z|) \, .$$

La remarque 2 montre qu'on peut même imposer $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ aux points de S. Il vient $\text{Log}\,|f(z)| \leqslant (1 + p_2)\,\varphi(\text{Log}\,|z|)$, et Z_f admet en tout point de S l'équation locale

$$w_1^{p_1} + w_2^{p_2} = 0 \tag{20}$$

$\left(\text{avec les coordonnées } w_1 = f_1 g_1^{\frac{1}{p_1}},\ w_2 = f_2 g_2^{\frac{1}{p_2}}\right)$, équation irréductible ou non suivant que les entiers p_1, p_2 sont premiers entre eux ou non. On voit en particulier que la courbe irréductible Z_f d'ordre 0 peut avoir tous ses points singuliers multiples. Quitte à remplacer φ par $\dfrac{\varphi}{1 + p_2}$, on obtient la

PROPOSITION 4. – *Si* φ, ψ *sont les poids de la proposition 3, il existe une fonction entière irréductible* f *dans* $\mathbf{C}^2$ *telle que*

(21) $\text{Log}\,|f(z)| \leqslant \varphi(\text{Log}\,|z|)$,

(22) *l'ensemble* S *des points singuliers de* Z_f *vérifie la minoration* $\text{Card}\,\{z \in S\,;\, |z| \leqslant r\} \geqslant \psi(r)$,

(23) Z_f *a au voisinage des points singuliers l'équation (20)* $w_1^{p_1} + w_2^{p_2} = 0$.

Remarque 3. – Des modifications évidentes dans la construction de f_1 et f_2 permettraient de faire varier (p_1, p_2) à volonté.

5. Applications à l'analyse harmonique.

$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (resp. $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$) désignera comme d'habitude l'algèbre de convolution des fonctions indéfiniment différentiables (resp. des distributions) à support compact. A toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, on associe sa transformée de Fourier-Laplace $\hat{u} \in H(\mathbf{C}^n)$ définie par $\hat{u}(z) = u_x(e^{-i\langle x, z\rangle})$.

La classe des transformées de Fourier-Laplace des éléments de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ est caractérisée par le théorème bien connu de Paley-Wiener :

Une fonction entière f *est transformée de Fourier-Laplace d'une fonction de* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ *(resp. d'une distribution de* $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$*) à* *support dans la boule fermée de centre* 0 *et de rayon* A, *si et seulement si pour tout entier* $N \geqslant 0$, *il existe une constante* C_N *telle que*

(24) $|f(z)| \leqslant C_N(1 + |z|)^{-N} \exp(A\,|\mathrm{Im}\,z|)$,

respectivement, s'il existe un entier N *et une constante* C *tels que*

(25) $|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^{N} \exp(A\,|\mathrm{Im}\,z|)$.

Le théorème du § 1 admet dans ce contexte la traduction partielle suivante.

PROPOSITION 5. — *Soient* $u_1, \ldots, u_k$ *des distributions à support compact dans* $\mathbf{R}^n$ (*où* $n \geqslant 2$), *telles que les transformées de Laplace* $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k$ *aient un ensemble de zéros communs de codimension* $\geqslant 2$ *en tout point. Alors il existe des fonctions* $v_1, \ldots, v_k$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ *telles que la fonction* $V = \sum_{j=1}^{k} u_j * v_j$ *soit irréductible dans l'anneau* $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$.

Pour tout compact K_j *de* $\mathbf{R}^n$ *d'intérieur non vide,* $1 \leqslant j \leqslant k$, *l'ensemble des solutions* $(v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{D}(K_1) \times \ldots \times \mathcal{D}(K_k)$, *où* v_j *est à support dans* K_j, *est de seconde catégorie.*

Comme les seuls éléments inversibles de $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ sont les mesures de Dirac δ_a, $a \in \mathbf{R}^n$, et leurs multiples scalaires, lesquels n'appartiennent pas à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, on retrouve le

COROLLAIRE 2 (Rubel — Squires — Taylor [3] pour $n \geqslant 3$, Dixmier — Malliavin [2] pour $n = 2$). — $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) * \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \neq \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ *pour* $n \geqslant 2$.

Démonstration de la proposition 5. — Soient $w_1, \ldots, w_k$ des fonctions non nulles de $\mathcal{D}(B)$, où B est la boule de centre 0 et de rayon A. On peut supposer que

(26) les fonctions $\hat{u}_1 \hat{w}_1, \ldots, \hat{u}_k \hat{w}_k$ ont un ensemble de zéros communs de codimension $\geqslant 2$ en tout point.

Si (26) n'est pas vrai, on remplace w_j par

$$w_j'(x) = w_j(x) \exp(i \langle a_j, x \rangle), \; a_j \in \mathbf{C}^n ,$$

de sorte que $\hat{w}_j'(z) = \hat{w}_j(z - a_j)$. L'hypothèse (26) relative aux fonctions w_j' signifie que pour tout $j \neq s$ on a

(26′) $\operatorname{codim}(a_j + Z_{\hat{w}_j}) \cap Z_{\hat{u}_s} = \operatorname{codim}(a_j + Z_{\hat{w}_j}) \cap (a_s + Z_{\hat{w}_s}) = 2$.

Choisissons sur chaque composante irréductible de $Z_{\hat{w}_j}$ un point $q_{j,p}$ (où $p \in \mathbf{N}$). Il est clair que (26′) est réalisé dès que $(a_1, \ldots, a_k)$ est en dehors de la réunion (dénombrable) des ensembles analytiques dans $(\mathbf{C}^n)^k$ définis par l'une des conditions

$$a_j + q_{j,p} \in Z_{\hat{u}_s} \ , \ a_j - a_s + q_{j,p} \in Z_{\hat{w}_s} \ , \ j \neq s, \ p \in \mathbf{N}.$$

Par conséquent (26′) est vrai pour un ensemble dense de $(a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbf{C}^n)^k$. D'après (24), il existe pour tout entier N une constante C_N telle que (en revenant à la notation w_j)

(27) $|\hat{w}_j(z)| \leqslant C_N(1 + |z|)^{-N} \exp(A\,|\operatorname{Im} z|)$, $j = 1, \ldots, k$.

On peut naturellement supposer en outre que $\lim_{N \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} C_N}{N} = +\infty$, ce qui permet de définir une application croissante positive $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par

(28) $\varphi(t) = \frac{1}{2} \sup_{N \in \mathbf{N}} \left(Nt - \operatorname{Log} \frac{C_N}{C_0} \right)$.

On a $$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \geqslant \sup_{N \in \mathbf{N}} \frac{N}{2} = +\infty$$

donc la condition (1) est satisfaite. D'après le théorème du § 1, il existe des fonctions entières $g_1, \ldots, g_k$ telles que la fonction $F = \sum_{j=1}^{k} \hat{u}_j \hat{w}_j g_j$ soit irréductible, et qui satisfont à la majoration

(29) $\operatorname{Log} |g_j(z)| \leqslant \varphi(\operatorname{Log} |z|)$.

Il résulte aisément de (27), (28) et (29) que

$$\operatorname{Log} |\hat{w}_j(z)| \leqslant \operatorname{Log} C_0 - 2\varphi(\operatorname{Log} |z|) + A\,|\operatorname{Im} z|,$$

$$\operatorname{Log} |\hat{w}_j(z)\, g_j(z)| \leqslant \operatorname{Log} C_0 - \varphi(\operatorname{Log} |z|) + A\,|\operatorname{Im} z|.$$

Le théorème de Paley-Wiener montre qu'il existe une fonction $v_j \in \mathcal{D}(B)$ telle que $\hat{v}_j = \hat{w}_j g_j$. Si l'on définit $V = \sum_{j=1}^{k} u_j * v_j$, alors $\hat{V} = F$ est irréductible dans $H(\mathbf{C}^n)$, par conséquent V est irréductible dans $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, car les seules fonctions entières inversibles vérifiant (25) sont les exponentielles $\lambda \exp(-i\langle a, z \rangle)$,

$a \in \mathbf{R}^n$, correspondant par la transformation de Fourier-Laplace aux mesures de Dirac $\lambda \delta_a$.

Faisons maintenant tendre a_j vers 0 dans $\mathbf{C}^n$, et g_j vers 1, g_j satisfaisant de plus à (29) (cf. remarque 2) ; on obtient la densité des $(v_1, \ldots, v_k)$ dans $\mathcal{D}(\mathrm{B})^k$. Si $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_k$ sont des parties compactes de $\mathbf{R}^n$, $\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \neq \emptyset$, l'ensemble des k-uplets

$$(v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}_1) \times \ldots \times \mathcal{D}(\mathrm{K}_k)$$

tels que la fonction $\mathrm{V} = \sum_{j=1}^{k} u_j * v_j$ ait une transformée $\hat{\mathrm{V}}$ irréductible dans $\mathrm{H}(\mathbf{C}^n)$, est un G_δ (utiliser la proposition 1 et la continuité de la transformation de Laplace). Vérifions brièvement que ce G_δ est dense. Pour tout $\epsilon > 0$, désignons par $(\mathrm{K}_j)_\epsilon$ la partie compacte $\{x \in \mathrm{K}_j \,;\, d(x, \complement \mathrm{K}_j) \geqslant \epsilon\} \subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$; soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ une fonction positive d'intégrale 1, à support dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{3}$, et posons $\rho_{j,\epsilon}(x) = \int_{y \in (\mathrm{K}_j)_{\frac{2\epsilon}{3}}} \rho\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) \frac{dy}{\epsilon^n}$.

La fonction $\rho_{j,\epsilon} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ a les propriétés suivantes :

(30) $\rho_{j,\epsilon} = 1$ sur $(\mathrm{K}_j)_\epsilon$, $\mathrm{Supp}(\rho_{j,\epsilon}) \subset (\mathrm{K}_j)_{\frac{\epsilon}{3}}$;

(31) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^n$, il existe une constante C_α indépendante de ϵ telle que

$$|\mathrm{D}^\alpha \rho_{j,\epsilon}(x)| \leqslant \mathrm{C}_\alpha \, d(x, \complement \mathrm{K}_j)^{-|\alpha|}.$$

Il résulte facilement de (30), (31) qu'étant donné $v_j \in \mathcal{D}(\mathrm{K}_j)$ la fonction $v_{j,\epsilon} = v_j \rho_{j,\epsilon} \in \mathcal{D}(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j)$ tend vers v_j dans $\mathcal{D}(\mathrm{K}_j)$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$. On peut comme ci-dessus remplacer $v_{j,\epsilon}$ par une fonction voisine $v'_{j,\epsilon}$ telle que $\hat{u}_1 \hat{v}'_{1,\epsilon}, \ldots, \hat{u}_k \hat{v}'_{k,\epsilon}$ aient un ensemble de zéros communs de codimension $\geqslant 2$. D'après ce que nous avons déjà démontré, il existe des approximations $w_1, \ldots, w_k$ de δ_0 dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ telles que la fonction $\mathrm{V} = \sum_{j=1}^{k} u_j * v'_{j,\epsilon} * w_j$ soit irréductible. La preuve s'achève en faisant tendre $v'_{j,\epsilon}$ vers v_j, et w_j vers δ_0.

Remarque 4. – Dans le cas $n = 1$, la situation est tout à fait différente. Il est aisé de voir, en utilisant la factorisation canonique de Weierstrass-Hadamard des fonctions entières (24), que tout élément de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ est *réductible* dans $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$. Par contre, le problème de savoir si $\mathcal{D}(\mathbf{R}) * \mathcal{D}(\mathbf{R}) = \mathcal{D}(\mathbf{R})$ semble non résolu à ce jour (cf. [2], [3] pour plus de détails).

Remarque 5. – La proposition 5 repose sur le fait que pour toute distribution $V \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, l'irréductibilité de $\hat{V}$ dans $H(\mathbf{C}^n)$ entraîne l'irréductibilité de V dans $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Il est naturel de se demander si l'implication réciproque est vraie. La réponse est affirmative si $n = 1$, négative si $n \geqslant 2$.

PROPOSITION 6. – *Il existe une famille $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{C}}$, dépendant analytiquement de λ, de fonctions irréductibles dans l'anneau $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, premières entre elles deux à deux, telles que les transformées de Laplace $\hat{V}_\lambda$ aient un facteur commun $H \in H(\mathbf{C}^n)$ non inversible. De plus,*

(32) *la décomposition en facteurs irréductibles, lorsqu'elle existe, n'est pas unique en général dans $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$.*

Démonstration. – On considère la fonction d'une variable

$$g(z_1) = \frac{1}{\Gamma(z_1)} = z_1\, e^{Cz_1} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z_1}{s}\right) e^{-\frac{z_1}{s}}.$$

Il est classique que g est une fonction entière d'ordre 1 qui n'est pas de type exponentiel, et d'après la formule de Stirling g possède la majoration

$$(33)\quad |g(z_1)| \leqslant \mathrm{Cte}\,.\left(\frac{|z_1|}{e}\right)^{\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\, z_1} e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\, z_1|}.$$

On déduit aisément de (33) que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ la fonction $z_1 \longrightarrow g(z_1)\, g(\lambda - z_1)$ est dans l'espace $\widehat{\mathcal{E}'(\mathbf{R})}$ des transformées de Laplace.

Un raisonnement analogue à celui de la proposition 5 fournit, pour toute boule fermée B de centre 0, des éléments u, u' de $\mathcal{D}(B)$ tels que la fonction

$$H(z_1, \ldots, z_n) = \hat{u}(z_1, \ldots, z_n)\, g(z_1) + \hat{u}'(z_1, \ldots, z_n)\, g\left(z_1 + \frac{1}{2}\right)$$

soit irréductible dans $H(\mathbf{C}^n)$. Montrons tout d'abord que H n'est pas de type exponentiel. Fixons $(z_2^0, \ldots, z_n^0) \in \mathbf{C}^{n-1}$ de manière que la fonction $h(z_1) = \mathrm{H}(z_1, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ ne soit pas identiquement nulle. De (33) on tire la majoration

$$|h(z_1)| \leqslant \mathrm{Cte}\,.\left(\frac{|z_1|}{e}\right)^{-\mathrm{Re}\,z_1} \exp.\left(\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{A}\right) |\mathit{Im}\, z_1|\right)$$

(où A désigne le rayon de la boule B), montrant ainsi que $|h(z_1)|$ tend vers 0 très rapidement lorsque z_1 tend vers ∞ dans le secteur angulaire $|\operatorname{Arg} z_1| \leqslant \pi/4$. Si h était de type exponentiel, on en déduirait $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{Log} |h(re^{i\theta})|\, d\theta = -\infty$, ce qui est absurde. Il est clair que la fonction entière

$$\mathrm{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_n) = \mathrm{H}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\mathrm{H}(\lambda - z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

appartient à $\widehat{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$, que F_λ est irréductible dans l'anneau des fonctions de type exponentiel, mais réductible dans $\mathrm{H}(\mathbf{C}^n)$. Les fonctions $\mathrm{V}_\lambda \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ définies par $\hat{\mathrm{V}}_\lambda = \mathrm{F}_\lambda$ répondent à la question d'après le lemme ci-dessous, et l'assertion (32) résulte de même de l'égalité

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_0(z_1, \ldots)\, \mathrm{F}_0(z_1 + \lambda, \ldots) &= \mathrm{F}_{-\lambda}(z_1, \ldots)\, \mathrm{F}_\lambda(z_1 + \lambda, \ldots) \\ &= \mathrm{H}(z_1, \ldots)\, \mathrm{H}(-z_1, \ldots)\, \mathrm{H}(z_1 + \lambda, \ldots)\, \mathrm{H}(-\lambda - z_1, \ldots). \end{aligned}$$

LEMME. – *L'hypersurface irréductible* $\mathrm{Z_H} = \{z \in \mathbf{C}^n \,; \mathrm{H}(z) = 0\}$ *n'est invariante par aucune transformation* $z_1 \longmapsto \lambda - z_1$, *ou* $z_1 \longmapsto z_1 + \lambda$, $\lambda \neq 0$, *portant sur la première variable.*

Démonstration. – L'invariance de $\mathrm{Z_H}$ équivaut à l'existence d'une fonction $\mathrm{P} \in \mathrm{H}(\mathbf{C}^n)$ telle que

$$\mathrm{H}(\epsilon z_1 + \lambda, z_2, \ldots, z_n) = e^{\mathrm{P}(z_1, \ldots, z_n)}\, \mathrm{H}(z_1, \ldots, z_n), \ \epsilon = \pm 1 .$$

La fonction e^{P} est d'ordre 1, comme quotient de fonctions d'ordre 1, par conséquent P est un polynôme de degré $\leqslant 1$. Si $\epsilon = -1$, on obtient

$$\mathrm{H}(z)^2 = \mathrm{H}(z)\, \mathrm{H}(\lambda - z_1, z_2, \ldots, z_n)\, e^{-\mathrm{P}(z)} = \mathrm{F}_\lambda(z)\, e^{-\mathrm{P}(z)},$$

donc H serait une fonction de type exponentiel, contrairement à ce que nous savons déjà. Supposons désormais $\epsilon = 1$, $\lambda \neq 0$, et considérons une fonction partielle $h(z_1) = \mathrm{H}(z_1, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ non nulle. Par hypothèse, h est une fonction entière d'ordre 1, dont le diviseur $\operatorname{div}(h)$ est une somme de classes modulo $\lambda\mathbf{Z}$; comme la fonction $z_1 \longrightarrow h(z_1)h(-z_1)$ est de type exponentiel, le nombre N de ces classes est nécessairement fini (examiner la croissance du nombre de zéros), et h est de la forme

$$h(z_1) = e^{az_1+b} \prod_{s=1}^{N} \sin \frac{\pi}{\lambda}(z_1 - c_s)$$

avec des constantes complexes a, b, c_s; h serait donc encore de type exponentiel : contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. CORNALBA, B. SHIFFMAN, A counterexample to the "transcendental Bezout problem", *Ann. of Math.* (2) 96 (1972), 402-406.

[2] J. DIXMIER, P. MALLIAVIN, Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, *Bull. des Sc. Math.*, tome 102, fasc. n° 4 (1978), 305-330.

[3] L.A. RUBEL, W.A. SQUIRES, B.A. TAYLOR, Irreducibility of certain entire functions with applications to harmonic analysis, *Annals of Math.*, vol. 108, n° 3 (1978), 553-567.

Manuscrit reçu le 12 février 1980.

Jean-Pierre DEMAILLY,
L.A. au C.N.R.S. n° 213
Analyse Complexe et Géométrie
Université de Paris VI
4 place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.