PIERRE LECOMTE

Sur l'algèbre de Lie des sections d'un fibré en algèbres de Lie

Annales de l'institut Fourier, tome 30, n° 4 (1980), p. 35-50

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_4_35_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 4 (1980), 35-50.

SUR L'ALGÈBRE DE LIE DES SECTIONS D'UN FIBRE EN ALGÈBRES DE LIE

par Pierre LECOMTE

0. Introduction.

Dans ce travail, on étudie une classe particulière d'algèbres de Lie locales (au sens de [2]) : *les algèbres de Lie d'ordre zéro.* Ces algèbres sont définies comme suit : soit une algèbre de Lie L de dimension finie; on appelle *fibré en algèbres de Lie de type* L tout fibré vectoriel admettant un cocycle à valeurs dans le groupe des automorphismes de L ; chaque fibre d'un tel fibré E possède une structure naturelle d'algèbre de Lie isomorphe à L, ce qui permet aussitôt de munir l'espace des sections de classe C_k de E $(k = 0,1,\ldots,\infty)$ d'une structure d'algèbre de Lie, appelée algèbre de Lie d'ordre zéro (plus de détails concernant ces définitions sont données dans la section 2).

On se propose de présenter les principales propriétés des algèbres de Lie d'ordre zéro et, en particulier, de calculer leurs dérivations, d'étudier leur représentation adjointe et de mettre en évidence la structure de leurs automorphismes.

L'intérêt des algèbres de Lie d'ordre zéro est double.

On sait qu'on ne dispose pas de théorie générale satisfaisante des algèbres de Lie de dimension infinie et qu'il semble difficile d'adapter à celles-ci les outils classiques de la théorie des algèbres de dimension finie ; en outre, les algèbres de Lie de dimension infinie attachées aux variétés qui ont été abordées jusqu'à présent sont pour la plupart des sous-algèbres de l'algèbre des champs de vecteurs et il apparaît que leur structure est assez pauvre. De ce point de vue, les algèbres de Lie d'ordre zéro constituent un exemple intéressant d'algèbres de dimension infinie dont l'étude peut être menée à bien systématiquement ; par ailleurs, elles présentent une grande variété de propriétés, fortement conditionnées par celles de leur type L.

D'un autre côté, l'étude des isomorphismes entre algèbres de Lie d'ordre zéro fournit, à propos de ces algèbres, la réponse à une question posée par A. A. Kirillov dans [2], à l'occasion de sa classification des algèbres locales de rang 1 : dans quelle mesure une algèbre de Lie locale sur une variété caractérise-t-elle celle-ci ? Ce problème a été résolu pour l'algèbre de Lie des champs de vecteurs ([11] dans le cas d'une variété compacte, [1] dans celui d'une variété quelconque) et pour certaines de ses sous-algèbres ([4], [10]). Il est résolu dans [7] pour une algèbre de Lie d'ordre zéro particulière, celle des champs d'endomorphismes sur une variété, par des méthodes qui ne s'appliquent pas au cas général.

En fait, les théorèmes obtenus dans ce travail ne permettent pas seulement de répondre à la question de A. A. Kirillov, ils permettent également de construire canoniquement des algèbres de Lie caractérisant un fibré vectoriel donné. Cela conduit à d'intéressantes applications de la théorie exposée à l'étude des fibrés vectoriels ([5]), applications qui feront l'objet d'une publication ultérieure.

Les résultats exposés ici ont été annoncés dans [6].

1. Préliminaires.

Cette section est consacrée à quelques mises au point de notations et à des rappels utiles.

Sauf mention explicite du contraire, les variétés, les fibrés, ... considérés sont de classe C_∞. Les bases des fibrés, notées généralement M, M', ... sont connexes, séparées et à base dénombrable. L'espace des fonctions de classe C_k $(k=0,1,\ldots,\infty)$ sur M à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie V est noté $C_k(M,V)$; TM désigne le fibré tangent à M et $\mathscr{H}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M.

Étant donné un fibré vectoriel E de base M et de projection p, on note $\Gamma_k(E)$ l'espace des sections globales de classe C_k de E $(k=0,1,\ldots,\infty)$. On convient cependant, pour simplifier l'écriture, de poser $\Gamma(E) = \Gamma_\infty(E)$. On désigne le plus souvent par E_x la fibre $p^{-1}(x)$ de E en un point $x \in E$. Le symbole $\mathbf{1}$ est utilisé pour désigner le champ d'endomorphismes de E qui, à tout $x \in M$, associe l'identité $\mathbf{1}_x$ de E_x; par un abus commode, on note également $\mathbf{1}$ l'identité d'un espace vectoriel sur lui-même quel qu'il soit; les ambiguïtés pouvant résulter de ces conventions seront toujours levées par le contexte.

Tout au long de ce texte, $\mathbf{K}$ désigne soit le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, soit celui, $\mathbf{C}$, des nombres complexes.

Soit L une algèbre de Lie. On note $z(\mathrm{L})$, $\text{dér}\,\mathrm{L}$, $\mathrm{Aut}\,\mathrm{L}$ et $\theta(\mathrm{L})$ le centre de L, l'algèbre de Lie de ses dérivations, le groupe de ses automorphismes et le commutant de son module adjoint respectivement. Il importe pour la suite de noter dès à présent quelques propriétés élémentaires de $\theta(\mathrm{L})$, résumées dans le lemme 1 suivant, dont la démonstration – aisée – est laissée au lecteur.

Lemme 1. – *Soit* L *une algèbre de Lie sur* $\mathbf{K}$. *Le commutant* $\theta(\mathrm{L})$ *du module adjoint est une sous-algèbre associative de l'algèbre* $\mathrm{gl}(\mathrm{L})$ *des endomorphismes de* L *satisfaisant aux inclusions suivantes*

$$(1) \qquad [\theta(\mathrm{L}),\text{dér}\,\mathrm{L}] \subset \theta(\mathrm{L}) \qquad \textit{et} \qquad \theta(\mathrm{L}) \circ \text{dér}\,\mathrm{L} \subset \text{dér}\,\mathrm{L}.$$

Si $z(\mathrm{L}) = 0$, $\theta(\mathrm{L})$ *est abélien et si, de plus,* L *est de dimension finie,* $\theta(\mathrm{L})$ *est la somme directe du sous-espace* $\mathrm{N}(\mathrm{L})$ *de ses éléments nilpotents et du sous-espace* $\mathrm{S}(\mathrm{L})$ *de ses éléments semi-simples.*

Nous utiliserons ultérieurement une notion intermédiaire entre la réductibilité et la réductibilité complète de la représentation adjointe : l'algèbre de Lie L est dite *décomposable* si elle est somme directe d'au moins deux idéaux propres, *indécomposable* sinon. On démontre sans difficulté le

Lemme 2. – *Toute algèbre de Lie* L *de dimension finie sur* $\mathbf{K}$ *admet une décomposition* $\mathrm{L} = \oplus_{i \leqslant s} \mathrm{L}_i$ *en somme directe d'idéaux propres indécomposables* L_i. *Si* $z(\mathrm{L}) = 0$, *une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

Le critère de décomposabilité de l'algèbre de Lie L s'exprime différemment selon que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Lemme 3. – *Soit* L *une algèbre de Lie de dimension finie sur* $\mathbf{K}$ *telle que* $z(\mathrm{L}) = 0$.

a) Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, *alors* L *est indécomposable si et seulement si* $\mathrm{S}(\mathrm{L}) = \mathbf{C}.\mathbf{1}$.

b) Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, *alors* L *est indécomposable si et seulement si l'une des conditions suivantes est remplie :*

(α) $\mathrm{S}(\mathrm{L}) = \mathbf{R}.\mathbf{1}$.

(β) L *admet une structure complexe* J *et* $S(L) = \rangle 1, J \langle_{\mathbf{R}}$. *Dans le cas* (β), L *admet alors exactement deux structures complexes :* J *et* $-J$.

Preuve. – Le point *a*) résulte aussitôt de ce que si $T \in S(L)$, les espaces propres de T sont des idéaux de L ; cela montre aussi que pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, si L est indécomposable, un $T \in S(L)$ admet soit exactement une valeur propre qui est alors réelle, soit exactement deux valeurs propres qui sont alors complexes conjuguées. Dans ces conditions, si aucun élément de S(L) n'a de valeurs propres complexes, $S(L) = \mathbf{R}.\mathbf{1}$; par contre, si $T \in S(L)$ admet la valeur propre complexe $a + ib$, alors

$$J = (T - a\mathbf{1})/b \in S(L)$$

est une structure complexe de L. Pour conclure, il suffira de faire voir que si J′ est une structure complexe de L, alors $J' = \pm J$. Or, de $J^2 = J'^2$ et du fait que θ(L) est abélien (puisque $z(L) = 0$), on déduit

$$(J - J')(J + J') = 0.$$

Par suite si $J + J' \neq 0$, $J - J'$ est un entrelacement semi-simple admettant la valeur propre 0 ; il n'admet donc que cette seule valeur propre et, en conséquence, il est nul. D'où le lemme.

2. Définition des algèbres de Lie d'ordre zéro.

Reprenons, avec plus de détails, la définition des algèbres de Lie d'ordre zéro donnée dans l'introduction, en commençant par préciser la notion de fibrè en algèbres de Lie.

Soit L une algèbre de Lie de dimension finie sur **K**.

Par définition, *un fibré en algèbres de Lie de type* L est un fibré vectoriel $E \xrightarrow{p} M$ de fibre type L admettant un cocycle à valeurs dans le groupe Aut L ; cela revient à dire que E est le fibré associé à un fibré principal P de groupe de structure Aut L et à l'action naturelle de ce groupe sur L. Si tel est le cas, alors chaque fibre E_x ($x \in M$) de E est munie d'une structure naturelle d'algèbre de Lie : si $x \in M$ et si φ est une trivialisation de E au-dessus d'un voisinage de x choisie parmi les trivialisations qui engendrent le cocycle à valeurs dans Aut L, la structure en question est celle pour laquelle la restriction de φ à E_x est un isomorphisme d'algèbres de Lie de E_x sur L.

Les structures d'algèbres de Lie des fibres de E induisent de façon naturelle une structure d'algèbre de Lie sur l'espace $\Gamma_k(E)$; par définition, cette structure est une *algèbre de Lie d'ordre zéro sur la variété* M.

Certains fibrés naturellement associés à un fibré en algèbres de Lie seront utiles dans la suite. Ils s'obtiennent comme suit. Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré en algèbres de Lie de type L, associé à un fibré principal P de groupe de structure Aut L ; soit $J \subset gl(L)$ une sous-algèbre stabilisée par l'action naturelle de Aut L sur gl(L). Le fibré associé à P et à l'action de Aut L sur J est un fibré en algèbres de Lie E(J) de type J, sous-fibré du fibré Hom(E,E) des endomorphismes de E. Pour alléger l'écriture, on posera $E(\text{dér } L) = \text{dér } E$ et $E(\theta(L)) = \theta(E)$. On notera que la fibre de dér E (resp. $\theta(E)$) en un point est l'algèbre des dérivations (resp. le commutant du module adjoint) de la fibre de E en ce point.

3. Dérivations.

Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré en algèbres de Lie de type L.

On se propose de calculer les dérivations des algèbres de Lie $\Gamma_k(E)$ $(k=0,1,\ldots,\infty)$.

a) Le calcul de dér $\Gamma_k(E)$ pour $k \in \mathbf{N}$ est basé sur une extension du théorème de Peetre dont la démonstration s'obtient sans difficulté essentielle en adaptant la preuve du théorème classique donnée dans [9].

THÉORÈME 4 (Peetre). — *Soient* E_1 *et* E_2 *des fibrés vectoriels et une application linéaire* $T : \Gamma_r(E_1) \to \Gamma_s(E_2)$, *où* $r,s \in \mathbf{N}$. *Si* T *est local, c'est un opérateur différentiel linéaire d'ordre* $r - s$ *au plus. En particulier, si* $r < s$, T *est nul et, si* $r = s$, *il est d'ordre zéro et s'identifie à une section de classe* C_r *de* $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$.

On peut alors énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Soit* $E \xrightarrow{p} M$ *un fibré en algèbres de Lie de type* L. *Si* $z(L) = 0$, *alors* dér $\Gamma_k(E) = \Gamma_k(\text{dér } E)$ *pour* $k \in \mathbf{N}$.

Preuve. — Il suffit de montrer que si $z(L) = 0$, alors tout $D \in \text{dér } \Gamma_k(E)$ est une application locale. Or, si $A \in \Gamma_k(E)$ s'annule sur un ouvert U de

M, alors $D(A)_x \in z(E_x)$ pour tout $x \in U$ puisque, quel que soit B à support dans U, $[A,B] = 0$, de sorte que

$$[D(A)_x, B_x] = D([A,B])_x - [A_x, D(B)_x] = 0, \quad \forall x \in U ;$$

comme $z(E_x) = 0$, il en résulte que $D(A)_x = 0$ si $x \in U$.

Une application immédiate du théorème de Peetre ci-dessus permet de conclure.

b) Étudions à présent les dérivations de $\Gamma(E) = \Gamma_\infty(E)$. Il est commode pour cela d'introduire la notion de x-dérivation de E. Étant donné $x \in M$, une *x-dérivation de* E est, par définition, une application linéaire $\delta : \Gamma(E) \to E_x$ telle que

$$\delta([A,B])_x = [\delta(A), B_x] + [A_x, \delta(B)], \quad \forall A,B \in \Gamma(E). \tag{2}$$

L'ensemble des x-dérivations de E est un espace vectoriel que l'on notera $\mathscr{D}_x(E)$ et la réunion $\mathscr{D}(E) = \cup_{x \in M} \mathscr{D}_x(E)$ admet la projection $\bar{p} : \mathscr{D}(E) \to M : \delta \in \mathscr{D}_x(E) \to x$.

THÉORÈME 6. — *Soit* $E \xrightarrow{p} M$ *un fibré en algèbres de Lie de type* L. *Si* $z(L) = 0$, *toute x-dérivation de* E *est un opérateur différentiel linéaire d'ordre* 1 *au plus ; le triplet* $(\mathscr{D}(E), \bar{p}, M)$ *admet une structure de fibré vectoriel pour laquelle* dér $\Gamma(E)$ *s'identifie naturellement à* $\Gamma(\mathscr{D}(E))$; *de plus, on a une suite exacte de fibrés vectoriels*

$$0 \to \text{dér}\, E \xrightarrow{i} \mathscr{D}(E) \xrightarrow{\sigma} TM \otimes \theta(E) \to 0$$

où i *est l'injection naturelle et* σ *applique* $\delta \in \mathscr{D}(E)$ *sur son symbole.*

Preuve. — Soit $\delta \in \mathscr{D}_x(E)$.

En utilisant le développement de Taylor à l'ordre 2 de la forme locale de $A \in \Gamma(E)$ dans une trivialisation de E au voisinage de x, on établit aisément que si $j_x^1(A) = 0$, alors A est de la forme

$$A = \sum_{i \leqslant r} f_i^2 A_i \quad (f_i \in C_\infty(M,\mathbf{R}), \quad A_i \in \Gamma(E)),$$

où les fonctions f_i s'annulent en x. Il en résulte que $\delta(A) \in z(E_x)$ car, pour tout $B \in \Gamma(E)$,

$$[\delta(A),B_x] = \sum_{i \leqslant r} \{[\delta(f_i A_i), f_i(x) B_x] + [f_i(x) A_{i,x}, \delta(f_i B)]\} = 0 .$$

Ainsi $\delta(A) = 0$, car $z(E_x) = 0$.

Considérons un voisinage ouvert U de M qui soit le domaine d'une trivialisation de E et d'une carte $(x^1,\ldots,x^m)$ de M ; $E|U$ est alors isomorphe à $U \times L$ et l'espace vectoriel $\Gamma(E|U)$ l'est à $C_\infty(U,L)$. On peut choisir la trivialisation de E de manière qu'au crochet de l'algèbre de Lie $\Gamma(E|U)$ corresponde le crochet de Lie naturel de $C_\infty(U,L)$; δ prend alors la forme locale

$$A \to D(A_x) + \sum_{i \leqslant m} T^i(D_{x^i}A) \tag{3}$$

où $D, T^1, \ldots, T^m$ sont des endomorphismes de L ; un calcul élémentaire montre que δ satisfait à (2) si et seulement si $D \in \text{dér}\, L$ et $T^1, \ldots, T^m \in \theta(L)$. On déduit de ce qui précède une bijection

$$\delta \in \mathscr{D}(E)|U \to (\bar{p}(\delta),(D,(T^1,\ldots,T^m))) \in U \times \text{dér}\, L \times \theta(L)^m .$$

En procédant de façon analogue au voisinage de tout point de M, on construit ainsi des trivialisations de $\mathscr{D}(E)$ qui le munissent de la structure de fibré vectoriel cherchée, tout $D \in \text{dér}\, \Gamma(E)$ s'identifiant naturellement à la section $x \to ev_x \circ D$ de $\mathscr{D}(E)$, $ev_x : \Gamma(E) \to E_x$ étant l'évaluation en x. La suite exacte de l'énoncé se déduit aussitôt de (3) qui montre que le symbole d'une x-dérivation est un point de $T_xM \otimes \theta(E_x)$, ses termes de degré 0 définissant une dérivation de E_x. D'où le théorème.

c) En introduisant des dérivations covariantes particulières sur le fibré en algèbres de Lie E, on peut donner une description individuelle et globale des dérivations de $\Gamma(E)$ (lorsque $z(L)=0$).

Soit donnée une application linéaire $\mathscr{L} : \Gamma(TM \otimes \theta(E)) \to \Gamma(\mathscr{D}(E))$ telle que

$$\text{(i)} \qquad \sigma(\mathscr{L}_{\mathscr{I}}) = \mathscr{I} \qquad \text{et} \qquad \text{(ii)} \quad T\mathscr{L}_{\mathscr{I}} = \mathscr{L}_{T\mathscr{I}}$$

$(T \in \Gamma(\theta(E)),\ \mathscr{I} \in \Gamma(TM \otimes \theta(E)))$. Tout $\mathscr{I} \in \Gamma(TM \otimes \theta(E))$ étant une somme finie de termes de la forme $X \otimes T (X \in \mathscr{H}(M), T \in \Gamma(\theta(E)))$, $\mathscr{L}$ est déterminé univoquement par l'application $X \to \nabla_X = \mathscr{L}_{X \otimes 1}$ qui, vu (ii), est une dérivation covariante de E ; inversement, il est facile de voir qu'*une dérivation covariante* ∇ *de* E *s'étend en une application* $\mathscr{L}$ *ayant les propriétés* (i) *et* (ii) *pour autant que* $\nabla_X \in$ dér $\Gamma(E)$ *pour tout champ de vecteurs* X *sur* M. Une telle dérivation covariante de E sera dite *adaptée* et, pour simplifier les notations, on posera $\mathscr{L}_{\mathscr{I}} = \nabla_{\mathscr{I}}$ lorsque $\mathscr{L}$ et ∇ se correspondent de la façon qu'on vient d'indiquer. La proposition suivante résulte alors aussitôt du théorème précédent.

Proposition 7. — *Soient* E *un fibré en algèbres de Lie de type* L *et* ∇ *une dérivation covariante adaptée de* E. *Si* $z(L) = 0$, *toute dérivation* D *de* $\Gamma(E)$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $\nabla_{\mathscr{I}} + D_0(\mathscr{I} \in \Gamma(TM \otimes \theta(E)), D_0 \in \Gamma(\text{dér } E))$.

L'existence de dérivations covariantes adaptées s'obtient sans difficulté; on peut par exemple considérer un fibré principal P de groupe de structure Aut L auquel E soit associé et choisir une connexion sur P. La dérivée covariante de E induite par cette connexion lui est adaptée. Le fibré $\mathscr{D}(E)$ permet d'ailleurs de donner une interprétation géométrique des dérivations covariantes adaptées. Appelons sous-fibré θ-*stable* de $\mathscr{D}(E)$ tout sous-fibré vectoriel $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}(E)$ tel que $T\mathscr{E}_x \subset \mathscr{E}_x$ pour tout $x \in M$ et tout $T \in \theta(E_x)$. Il vient

Proposition 8. — *Soit* E *un fibré en algèbres de Lie de type* L. *Si* $z(L) = 0$, *il y a une correspondance biunivoque naturelle entre les dérivations covariantes adaptées de* E *et les supplémentaires* θ-*stables de* dér E *dans* $\mathscr{D}(E)$.

Preuve. — Si dér $E \oplus \mathscr{E} = \mathscr{D}(E)$, $\sigma : \mathscr{E} \to TM \otimes \theta(E)$ est un isomorphisme et induit un isomorphisme entre les espaces de sections correspondants; si $\mathscr{E}$ est θ-stable, l'isomorphisme inversé $\mathscr{L}$ jouit visiblement des propriétés (i) et (ii) précédentes; il prend dès lors la forme $\nabla_{\mathscr{I}}$ où ∇ est une dérivation covariante adaptée à E. On montre aisément que la correspondance $\mathscr{E} \to \nabla$ ainsi établie est biunivoque.

d) Dans certains cas, on peut étudier complètement dér $\Gamma_k(E)$ sans que l'hypothèse $z(L) = 0$ soit satisfaite. Il en est ainsi lorsque E est le fibré Hom (F,F) des endomorphismes d'un fibré vectoriel F, L étant alors $gl(n,\mathbf{K})$. On montre dans [8] que $\Gamma(\text{Hom}(F,F))$ est la somme directe de son centre $C_\infty(M,\mathbf{K}).\mathbf{1}$ et de son idéal dérivé qui est l'espace des sections du fibré $\text{Hom}_0(F,F)$ des endomorphismes de traces nulles (et qui est de type $sl(n,\mathbf{K})$). Une dérivation D de $\Gamma(\text{Hom}(F,F))$ est la somme de ses restrictions à $C_\infty(M,\mathbf{K}).\mathbf{1}$ et à $\Gamma(\text{Hom}_0(F,F))$. La première de ces restrictions est caractérisée par un endomorphisme de $C_\infty(M,\mathbf{K})$; la structure de la seconde s'obtient en appliquant la proposition 7 (on notera qu'une dérivation covariante adaptée de $\mathrm{Hom}_0(F,F)$ se déduit naturellement d'une dérivation covariante de F). Lorsque $F = TM$, on retrouve les résultats de [7]. La technique rapidement décrite ici s'applique *mutatis mutandis* lorsque le type L de E est réductif.

4. Le commutant du module adjoint. Décomposabilité. Structures complexes.

Soit $E \xrightarrow{p} M$ un fibré en algèbres de Lie de type L. On se propose à présent de déterminer les algèbres $\theta(\Gamma_k(E))(k=0,1,\ldots,\infty)$. Ce calcul est utile aussi bien à l'étude de la décomposabilité des algèbres de Lie d'ordre zéro qu'à celle de leurs isomorphismes.

a) Le lemme 1 (seconde inclusion de (1)) fournit aisément la structure de $\theta(\Gamma(E))$ une fois établi le

THÉORÈME 9. — *Soit* $E \xrightarrow{p} M$ *un fibré en algèbres de Lie de type* L, *avec* $z(L) = 0$. *Si l'endomorphisme* T *de* $\Gamma(E)$ *est tel que* $T \circ D \in \text{dér}\,\Gamma(E)$ *pour tout* $D \in \text{dér}\,\Gamma(E)$, *alors* T *est un opérateur différentiel linéaire d'ordre* 0 : *il s'identifie à une section de* $\mathrm{Hom}(E,E)$.

Preuve. — Montrons d'abord que T est local. Si $A \in \Gamma(E)$ s'annule sur un ouvert U de M et si $x \in U$, on démontre dans un lemme ci-dessous que A s'écrit $\sum_{i \leqslant r} D_i(A_i)$ où $D_i \in \text{dér}\,\Gamma(E)$ et où les $A_i \in \Gamma(E)$ s'annulent sur un voisinage ouvert U' de x. En conséquence,

$$T(A)|U' = \sum_{i \leqslant r} ((TD_i)(A_i))|U' = 0$$

puisque les TD_i sont des dérivations et sont donc des applications locales. Ainsi, $T(A)|U = 0$, ce qui prouve que T est local.

En vertu du théorème de Peetre, T est donc un opérateur différentiel linéaire. Comme, pour toute dérivation D, qui est un opérateur différentiel d'ordre 1 au plus, TD est une dérivation et est donc d'ordre 1 au plus, T est d'ordre zéro car on peut construire des dérivations de symbole $\mathscr{S} \in \Gamma(TM \otimes \theta(E))$ arbitraire. D'où le théorème.

Avant de donner le lemme annoncé, voyons quels sont les entrelacements de $\Gamma_k(E)$, pour $k = 0, 1, \ldots, \infty$.

THÉORÈME 10. — *Soit* $E \xrightarrow{p} M$ *un fibré en algèbres de Lie de type* L, *avec* $z(L) = 0$. *Pour* $k = 0, 1, \ldots, \infty$, *on a* $\theta(\Gamma_k(E)) = \Gamma_k(\theta(E))$.

Preuve. — Pour $k = \infty$, cela résulte aussitôt de (1) (section 1) et du théorème précédent.

Pour $k \in \mathbf{N}$, cela résulte immédiatement du théorème 4 et de ce que si $z(L) = 0$, les éléments de $\theta(\Gamma_k(E))$ sont locaux (pour vérifier ce point, on procède comme dans la preuve du théorème 5). D'où la conclusion.

Voici à présent le lemme utilisé dans la preuve du théorème 9.

LEMME 11. — *Soit* $E \xrightarrow{p} M$ *un fibré en algèbres de Lie de type* L, *avec* $z(L) = 0$. *Soient aussi* $x \in M$ *et un voisinage ouvert* U *de* x. *Si* $A \in \Gamma(E)$ *s'annule sur* U, *il est de la forme*

$$A = \sum_{i \leqslant r} D_i(A_i) \qquad (D_i \in \text{dér}\,\Gamma(E),\ A_i \in \Gamma(E)),$$

où les A_i *s'annulent au voisinage de* x.

Preuve. — Considérons un compact K contenu dans U et dont l'intérieur contient x. Choisissons un recouvrement localement fini de Palais $\mathcal{U} = \{U_i | i \in J\}$ de M subordonné au recouvrement $\{U, \complement K\}$ et dont les éléments soient à la fois des domaines de cartes de M et de trivialisations de E, choisies de façon telle que $E|U_i$ soit le fibré en algèbres de Lie trivial $U_i \times L$. Par définition d'un recouvrement de Palais, J admet une partition finie $\{J_1, \ldots, J_r\}$ telle que les ouverts U_i $(i \in J_t)$ soient disjoints pour $t = 1, \ldots, r$.

Donnons-nous également une partition de l'unité $\{\rho_i | i \in J\}$ strictement subordonnée à $\mathcal{U}$ (c'est-à-dire telle que le support de ρ_i soit un compact de U_i pour chaque indice $i \in J$).

Pour $i \in J$, $E|U_i$ étant trivial, on construit aisément $D_i \in \text{dér}\,\Gamma(E)$ et $A_i \in \Gamma(E)$ à supports compacts dans U_i tels que $\rho_i A = D_i(A_i)$; si $\text{supp}\,\rho_i \subset U$, on aura soin de prendre $A_i = 0$, ce qui est licite puisque

$A|U = 0$. En notant D_t la dérivation $\Sigma_{i \in J_t} D_i$ et A_t la section $\Sigma_{i \in J_t} A_i$, on peut écrire

$$A = \sum_{t \leqslant r} \left(\sum_{i \in J_t} \rho_i A \right) = \sum_{t \leqslant r} D_t(A_t).$$

Le lemme est ainsi démontré puisque $A_t|K = 0$ pour $t = 1, \ldots, r$.

b) La proposition suivante est un corollaire immédiat du théorème 10.

PROPOSITION 12. — *Soit* $E \xrightarrow{p} M$ *un fibré en algèbres de Lie de type* L. *Si* $z(L) = 0$ *et si* L *est indécomposable, alors* $\Gamma_k(E)$ *est indécomposable pour* $k = 0, \ldots, \infty$.

La réciproque de la proposition 12 demande quelques précautions. Soit $L = \oplus_{i \leqslant s} L_i$ une décomposition en somme directe d'idéaux propres indécomposables et G le quotient de Aut L par le sous-groupe de Aut L stabilisant cette décomposition. Lorsque $z(L) = 0$, G est discret car une décomposition en somme directe d'idéaux propres indécomposables est alors unique à l'ordre près des facteurs; notons $H^1(M,G)$ le premier groupe de la cohomologie de Čech de M à valeurs dans G :

THÉORÈME 13. — *Soit* $E \xrightarrow{p} M$ *un fibré en algèbres de Lie de type* L. *Si* $z(L) = 0$ *et si* $H^1(M,G) = 0$, *alors, pour* $k = 0, \ldots, \infty$, $\Gamma_k(E)$ *est somme directe d'idéaux propres indécomposables* I_i $(i \leqslant s)$; *une telle décomposition est unique à l'ordre près des facteurs et chaque idéal* I_i *est une algèbre de Lie d'ordre zéro dont le type est un idéal indécomposable de* L.

Preuve. — Sous l'hypothèse $H^1(M,G) = 0$, le fibré E admet un cocycle à valeurs dans le groupe des automorphismes de L stabilisant chaque L_i. Pour chaque $i \leqslant s$, ce cocycle permet de construire un sous-fibré en algèbres de Lie E_i de type L_i de E. On a $E = \oplus_{i \leqslant s} E_i$, ce qui donne une décomposition $\Gamma_k(E) = \oplus_{i \leqslant s} \Gamma_k(E_i)$ de $\Gamma_k(E)$ en idéaux propres indécomposables (cf. proposition 12). Voyons pourquoi une telle décomposition est unique à l'ordre près facteurs. Soient $\Gamma_k(E) = I_1 \oplus I_2$ une décomposition de $\Gamma_k(E)$ en idéaux, P la projection sur I_1 parallèle à I_2 et P_i $(i \leqslant s)$ les projecteurs associés à la décomposition de E en les E_i. En vertu du théorème 10, $P \in \Gamma_k(\theta(E))$, de sorte qu'il commute avec les P_i puisque $z(L) = 0$ (cf. lemme 1). On a donc $P|E_i = 0$ ou

$P|E_i = 1|E_i$ (cf. proposition 12), ce qui montre que I_1 est la somme de certains $\Gamma_k(E_i)$. D'où le théorème.

c) Le théorème 10 permet également de détecter les structures complexes des algèbres de Lie d'ordre zéro. On note $H^1(M,\mathbf{Z}/2)$ le premier espace de la cohomologie de Čech de M à valeurs dans $\mathbf{Z}/2$.

PROPOSITION 14. — *Soit* E *un fibré en algèbres de Lie de type* L *et de base* M. *On suppose* L *réel, indécomposable et dépourvu de centre. L'algèbre* $\Gamma_k(E)$ *admet au plus deux structures complexes. Si* $H^1(M,\mathbf{Z}/2) = 0$, *elle en admet une si et seulement si* L *en admet une.*

Preuve. — En vertu du théorème 10, si $J \in \theta(\Gamma_k(E))$ est une structure complexe, elle induit une structure complexe sur chaque fibre de E ; L admet donc une structure complexe. Le lemme 3 et la connexité de M montrent alors que $\Gamma_k(E)$ admet au plus deux structures complexes : J et $-J$.

Si J_0 est une structure complexe de L et L_{J_0} l'algèbre de Lie complexe correspondante, $\mathrm{Aut}\, L_{J_0}$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Aut}\, L$ (lemme 3). Par suite, si $H^1(M,\mathbf{Z}/2) = 0$, E admet un cocycle à valeurs dans $\mathrm{Aut}\, L_{J_0}$ qui en fait un fibré en algèbres de Lie de type L_{J_0} et qui fait de $\Gamma_k(E)$ une algèbre de Lie complexe. D'où la proposition.

5. Isomorphismes.

Le but de cette section est de déterminer les isomorphismes d'algèbres de Lie d'ordre zéro. Nous ne traiterons que le cas des algèbres indécomposables auquel le théorème 13 permet de se ramener.

a) Les théorèmes que nous allons énoncer reposent sur le lemme suivant; il est bien connu, cependant il semble difficile de trouver une référence explicite le concernant; aussi en donnons-nous l'essentiel de la preuve.

LEMME 15. — *Soient* M *et* M' *des variétés,* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et* k, k' *choisis parmi* $0, 1, \ldots, \infty$. *Si* $\nu : C_k(M,\mathbf{K}) \to C_{k'}(M',\mathbf{K})$ *est un isomorphisme d'algèbres associatives, alors* $k = k'$ *et il existe un difféomorphisme de classe* C_k, $\lambda : M \to M'$, *tel que* $\nu(f) = f \circ \lambda^{-1}$ *pour tout* $f \in C_\infty(M,\mathbf{K})$.

Preuve. — Pour simplifier, nous poserons $\mathscr{A} = C_k(M,\mathbf{K})$. Introduisons aussi les notations suivantes : si U est un ouvert de M, $\mathscr{A}_U$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{A}$ à support dans U et, si $x_0 \in M$, $\mathscr{N}_{x_0}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{A}$ nuls au point x_0. Visiblement, $\mathscr{N}_{x_0}$ est un idéal de codimension 1 de $\mathscr{A}$. Le point crucial de la démonstration consiste à montrer que *si* I *est un idéal de codimension* 1 *de* $\mathscr{A}$, *alors* $I = \mathscr{N}_x$ *pour un certain* $x \in M$. Il résulte en effet de ceci qu'il existe une bijection $\lambda : M \to M'$ telle que $\nu(\mathscr{N}_x) = \mathscr{N}_{\lambda(x)}$ pour tout $x \in M$ et par un raisonnement classique (cf. [1], [11] par exemple), on obtient aisément le lemme. Ceci noté, il est clair que si I est un idéal de codimension 1 de $\mathscr{A}$, alors $I \subset \mathscr{N}_{x_0}$ entraîne $I = \mathscr{N}_{x_0}$. Supposons donc que $I \not\subset \mathscr{N}_x$ quel que soit $x \in M$. En ce cas, tout point $x \in M$ appartient à un *ouvert admissible*, c'est-à-dire un ouvert U pour lequel il existe $f_0 \in I$ qui ne s'annule en aucun point de U. Pour un tel ouvert, $\mathscr{A}_U \subset I$ car si $f \in \mathscr{A}_U$, alors $f/f_0 \in \mathscr{A}$ de sorte que, I étant un idéal, $f = f_0 . (f/f_0) \in I$. Cela étant, choisissons une fonction propre φ non localement constante de M ; puisque I est de codimension 1, il existe $a,b \in \mathbf{K}$ non tous deux nuls tels que $f_1 = a\varphi^2 + b\varphi \in I$. Le complémentaire de l'ensemble U_1 des points où f_1 ne s'annule pas est un compact de M car f_1 est une fonction propre. Il est recouvert par un nombre fini d'ouverts admissibles $U_2, \ldots, U_r$. On obtient ainsi un recouvrement fini $\{U_i | i = 1, \ldots, r\}$ de M par des ouverts admissibles. Il vient alors

$$\mathscr{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathscr{A}_{U_i} \subset I,$$

de sorte que I n'est pas de codimension 1. D'où la conclusion.

b) Conformément au lemme 3 (section 1), si L est une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{K}$, indécomposable et dépourvue de centre, deux situations peuvent se présenter : $S(L) = \mathbf{K}.\mathbf{1}$ ou $S(L) = \rangle \mathbf{1}, J \langle_{\mathbf{R}}$, J étant une structure complexe de l'algèbre de lie réelle L. La proposition 14 permet de ramener le second cas au premier que nous allons à présent étudier.

THÉORÈME 16. — *Soient* $E \xrightarrow{p} M$ *et* $E' \xrightarrow{p'} M'$ *des fibrés en algèbres de Lie de types* L *et* L'. *Supposons que* $z(L) = 0$, $z(L') = 0$ *et que* $S(L) = \mathbf{K}.\mathbf{1}$, $S(L') = \mathbf{K}.\mathbf{1}$, *où* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *selon que* E *et* E' *sont réels ou complexes. Soient* $k,k' \in \{0,1,\ldots,\infty\}$ *et un isomorphisme d'algèbres de Lie* $\mu : \Gamma_k(E) \to \Gamma_{k'}(E')$. *On a* $k = k'$ *et* (*a*) *si* $k, k' \in \mathbf{N}$, μ *est induit de façon naturelle par un isomorphisme de classe* C_k *de fibrés vectoriels de* E *sur* E′.

(*b*) *si* $k = k' = \infty$, *les algèbres de Lie* L *et* L′ *sont isomorphes et les variétés* M *et* M′ *sont difféomorphes; si on identifie* L *à* L′ *et* M *à* M′, *alors* μ *est un opérateur différentiel linéaire d'ordre* $s - 1$ *au plus, où* $s = \dim L$ *et, dans des trivialisations convenables de* E *et* E′ *au-dessus de domaines* U *de cartes de* M, *il prend la forme locale*

$$A \to \sum_{|\alpha| < s} \frac{1}{\alpha!} N^\alpha \mu_0(D_x A) \tag{4}$$

où $\mu_0 \in C_\infty(U, \mathrm{Aut}\, L)$, $N_1, \ldots, N_m \in C_\infty(U, N(L))$ *et où, pour tout multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$,

$$N^\alpha = N_1^{\alpha_1} \circ \ldots \circ N_m^{\alpha_m}.$$

Preuve. — L'isomorphisme μ induit un isomorphisme $\tilde{\mu}$ d'algèbres associatives de $\theta(\Gamma_k(E))$ sur $\theta(\Gamma_{k'}(E'))$, donc de $\Gamma_k(\theta(E))$ sur $\Gamma_{k'}(\theta(E'))$, en vertu du théorème 10. D'après le lemme 1 appliqué à chaque fibre de $\theta(E')$, $\tilde{\mu}$ induit un isomorphisme d'algèbres associatives

$$\nu : C_k(M, \mathbf{K}) \to C_{k'}(M', \mathbf{K})$$

tel que

$$\tilde{\mu}(f\mathbf{1}) = \nu(f)\mathbf{1} + N_f \tag{5}$$

où N_f est nilpotent. Ainsi $k = k'$ et il existe un difféomorphisme $\lambda : M \to M'$ de classe C_k tel que $\nu(f) = f \circ \lambda^{-1}$. Ce difféomorphisme permet d'identifier M et M′ et de supposer que ν est l'identité de $C_k(M, \mathbf{K})$ dans lui-même.

Soient alors $A \in \Gamma_k(E)$ et $f \in C_k(M, \mathbf{K})$. Si f s'annule en un point $x \in M$, alors

$$\mu(f^t A)_x = 0, \tag{6}$$

comme le montrent immédiatement (5) et le fait que N_f est nilpotent. Ainsi μ est local et (*a*) résulte aussitôt du théorème 4. Lorsque $k = \infty$, (6) montre que μ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre $t - 1$ au plus car si le jet d'ordre $t - 1$ de $A \in \Gamma(E)$ s'annule en un point x, alors A est de la forme $\Sigma_i f_i^t A_i$ où $A_i \in \Gamma(E)$ et où les fonctions f_i s'annulent en x. En conséquence, dans des trivialisations convenables de E et E′ au-dessus d'un domaine U de cartes de M, μ prend la forme locale

$A \to \Sigma_{|\alpha|<t} T^\alpha(D_x^\alpha A)$ où, compte tenu de (5), les T^α sont donnés par

$$\begin{aligned}\alpha!\, T_x^\alpha(u) &= \mu((y-x)^\alpha u)_{y=x}\\ &= \left\{\prod_{i\leq m} [(y^i - x^i)\mathbf{1} + N_{y^i-x^i}]_{y=x}^{\alpha_i}\right\}.\, \mu(u)_x\end{aligned}$$

de sorte qu'en posant $N_{i,x} = N_{y^i-x^i}|_{y=x}$ et en notant $\mu_{0,x}(u)$ la valeur en x de l'image par μ de l'application constante $y \to u$, μ prend la forme locale (4). Vérifions à présent que $\mu_{0,x}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie pour chaque $x \in U$. Un calcul simple montre d'abord que si $B = \mu(A)$, alors

$$\left[\sum_{|\alpha|<t} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_x^\alpha(N^\alpha \mu_0)\right](A) = \sum_{|\alpha|<t} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_x^\alpha(N^\alpha B). \tag{7}$$

Posons

$$P(A) = \left[\sum_{|\alpha|<t} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_x^\alpha(N^\alpha \mu_0)\right](A)$$

et

$$Q(A) = \left[\sum_{|\alpha|<t} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_x^\alpha N^\alpha\right](B).$$

Si η est l'isomorphisme inverse de μ, il s'écrit localement sous une forme analogue à (4) et η_0 est défini semblablement à μ_0. Pour $x \in U$, $v \in L'$ donnés, il existe $A \in \Gamma(E)$ tels que $\mu(A) = v$ au voisinage de x. Vu (7), on a donc $P_x(\eta_{0,x}(v)) = Q_x(v)$. Comme Q_x est non singulier, il en résulte que $\eta_{0,x} : L' \to L$ est injectif. Par symétrie, $\eta_{0,x} : L \to L'$ l'est aussi. D'où le théorème.

c) Il résulte de ce qui précède que de nombreuses algèbres de Lie d'ordre zéro sur une variété M caractérisent celle-ci et même, dans certains cas, le fibré en algèbres de Lie dont elles sont l'espace des sections. Cependant, les théorèmes précédents reposent sur une hypothèse, à savoir que les types L et L′ envisagés sont dépourvus de centre; nous voulons indiquer ici que cette hypothèse est loin d'être indispensable pour qu'une algèbre de Lie d'ordre zéro caractérise la variété au-dessus de laquelle elle est construite.

Pour toute algèbre de Lie $\mathscr{A}$, introduisons la suite d'algèbres de Lie $\mathscr{A}^i = \mathscr{A}^{i-1}/z(\mathscr{A}^{i-1})$, $\mathscr{A}^0 = \mathscr{A}$. On peut montrer [8] que l'algèbre

$(\Gamma_k(E))^i$ est d'ordre zéro et qu'elle est construite sur un fibré en algèbres de Lie de type L^i de même base que E. Si E' est un fibré de type L' et si $\Gamma_k(E)$ et $\Gamma_{k'}(E')$ sont isomorphes, alors $(\Gamma_k(E))^i$ et $(\Gamma_{k'}(E'))^i$ le sont pour chaque i. En conséquence, si pour i assez grand $z(L^i) = 0$ et $L^i \neq 0$, alors $z(L'^i) = 0$ et $L'^i \neq 0$ de sorte que d'un isomorphisme de $\Gamma_k(E)$ sur $\Gamma_{k'}(E')$ on déduit un isomorphisme entre algèbres de Lie d'ordre zéro de types L^i, L'^i *dépourvus de centre.* On voit ainsi qu'*excepté si* L *est nilpotent, les résultats précédents permettent de décider si oui ou non une algèbre de Lie d'ordre zéro de type* L *sur* M *caractérise* M.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. AMEMIYA, Lie algebra of vector fields and complex structure, *J. of Math. Soc. Japan*, vol. 27, n° 4 (oct. 1975), 545.

[2] A. A. KIRILLOV, Local Lie algebras, *Russian Math. Surveys*, 31, 4 (1976), 55.

[3] S. KOBAYASKI, K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, 15, vol. 1, New York, 1963.

[4] A. KORIYAMA, On Lie algebras of vector fields with invariant submanifolds, *Nagoya Math. J.*, vol. 55 (1974), 91.

[5] P. LECOMTE, Algèbres de Lie d'ordre zéro sur une variété, Thèse de doctorat, Liège, 1979.

[6] P. LECOMTE, On a class of local Lie algebras over a manifold, A paraître dans *Letters in Mathematical Physics.*

[7] P. LECOMTE, Derivations of linear endomorphisms of the tangent bundle, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 47e année, 11-12 (1978), 329.

[8] P. LECOMTE, On some ideals of a Lie algebra of order zero, A paraître dans *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège.*

[9] R. NARASIMHAN, Analysis on Real and Complex Manifolds, Masson et Cie, Paris, 1973.

[10] H. OMORI, Infinite dimensional Lie transformation group, *Lecture Notes in Mathematics*, 427, Springer-Verlag, 1976.

[11] L. E. PURSELL, M. E. SHANKS, The Lie algebra of a smooth manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 5 (1954), 468.

Manuscrit reçu le 24 janvier 1980
révisé le 27 mai 1980.

Pierre LECOMTE,

Université de Liège
Institut de Mathématiques
15, avenue des Tilleuls
4000 Liège (Belgique).