ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANCIS HIRSCH

Quotients de fonctions définies-négatives et synthèse spectrale

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 4 (1980), p. 75-96

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_4_75_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 4 (1980), 75-96.

QUOTIENTS DE FONCTIONS DÉFINIES-NÉGATIVES ET SYNTHÈSE SPECTRALE

par Francis HIRSCH

1. Introduction.

Nous précisons d'abord quelques notations et définitions.

Toutes les fonctions et distributions considérées sont sur l'espace $\mathbf{R}^n$. Nous ferons systématiquement usage des notations de L. Schwartz [9] sans rappeler leur signification.

Soit $\tilde{\mathrm{E}}$ un espace de Banach tel que : $\mathscr{S} \hookrightarrow \tilde{\mathrm{E}} \hookrightarrow \mathscr{S}'$ (où $\hookrightarrow$ désigne une injection continue d'image dense).

Pour tout élément φ de $\tilde{\mathrm{E}}$, on appelle spectre de φ et on note $\sigma(\varphi)$ le support de $\overline{\mathscr{F}}\varphi$ (où $\overline{\mathscr{F}}$ est la transformée de Fourier réciproque définie sur $\tilde{\mathrm{E}}$ par restriction).

On note $\tilde{\mathrm{E}}^+$ l'ensemble des éléments φ de $\tilde{\mathrm{E}}$ tels que $\overline{\mathscr{F}}\varphi$ soit une mesure positive (ou, ce qui revient au même, les éléments φ de $\tilde{\mathrm{E}}$ qui sont des distributions de type positif).

Si F est un fermé de $\mathbf{R}^n$, $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}$ désignera $\{\varphi \in \tilde{\mathrm{E}}\,;\, \sigma(\varphi) \subset \mathrm{F}\}$, $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}^+$ désignera l'ensemble $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}} \cap \tilde{\mathrm{E}}^+$ et $[\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}^+]$ l'espace vectoriel engendré par $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}^+$.

Le problème de synthèse spectrale auquel nous nous intéressons est le suivant : F étant un fermé, a-t-on $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}} = \overline{[\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}^+]}$ (où $\overline{}$ désigne l'adhérence dans $\tilde{\mathrm{E}}$) ? Si la réponse est positive, nous dirons que la synthèse est possible sur F.

Les espaces $\tilde{\mathrm{E}}$ que nous allons étudier seront de la forme : $\tilde{\mathrm{E}} = \mathrm{L}^2(h\,dx)$ où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ et h est une fonction $\geqslant 0$ localement intégrable telle que h^{-1} soit aussi localement intégrable et que h

et h^{-1} soient à croissance lente (c'est-à-dire $h\,dx$ et $h^{-1}\,dx$ appartiennent à $\mathscr{S}'$). Ces hypothèses impliquent immédiatement $\mathscr{S} \hookrightarrow \tilde{\mathrm{E}} \hookrightarrow \mathscr{S}'$.

On posera $\mathrm{K} = \bar{\mathscr{F}}(h\,dx)$ ($\mathrm{K} \in \mathscr{S}'$ et K est de type positif) et $\mathrm{E} = \bar{\mathscr{F}}(\tilde{\mathrm{E}})$.

On munit E de la structure d'espace de Hilbert obtenue par transport par $\bar{\mathscr{F}}$ de la structure de $\tilde{\mathrm{E}}$.

On voit alors que E peut être aussi défini comme étant le complété de $\mathscr{D}$ pour la norme :

$$(\langle\bar{\varphi},\mathrm{K} * \varphi\rangle)^{1/2}$$

(où $\langle\, , \rangle$ désigne l'action d'une distribution sur une fonction).

Suivant J. Deny [3], nous appellerons E, l'espace des distributions d'énergie finie (relativement au noyau K).

Nous noterons E^+ l'ensemble des mesures positives d'énergie finie (c'est-à-dire les éléments de E qui sont des mesures positives).

Nous désignerons, pour F fermé, par E_F, E_F^+ les sous-ensembles des précédents constitués des éléments à support dans F, et par $[\mathrm{E}_\mathrm{F}^+]$ l'espace vectoriel engendré par E_F^+. Le problème est alors de savoir si $\mathrm{E}_\mathrm{F} = \overline{[\mathrm{E}_\mathrm{F}^+]}$ (où $\overline{}$ est l'adhérence dans E).

Ce problème a été posé par A. Beurling en 1947 [1] et résolu positivement dans le cas : $n = 1$, $h(x) = (1+|x|^\alpha)^{-1}$ avec $0 < \alpha \leqslant 1$.

Il a été ensuite résolu positivement par J. Deny dans le cas où K est une mesure positive vérifiant le principe de domination [3]. Ce cas est, d'après les résultats ultérieurs de A. Beurling et J. Deny ([2], [5]), celui où h est de la forme ψ^{-1} où ψ est une fonction définie-négative réelle (telle que ψ^{-1} soit localement intégrable).

Puis A. Beurling et J. Deny ont traité le cas $h = \psi_2 . \psi_1^{-1}$ où ψ_2 et ψ_1 sont des fonctions définies-négatives sur $\mathbf{Z}$, K étant alors un noyau sur $\mathbf{T}$. Ceci a été exposé par J. P. Kahane au Séminaire Bourbaki ([8]).

Les résultats que nous allons expliciter contiennent les précédents. (Pour qu'ils contiennent exactement le cas du tore $\mathbf{T}$, il faudrait, en fait, se placer sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$ ce qui ne nécessiterait que des adaptations de détail).

2. Fonctions définies-négatives. Laplaciens généralisés. Noyaux de Dirichlet.

Nous allons maintenant rappeler un certain nombre de définitions et propriétés des fonctions définies-négatives, des laplaciens généralisés et des noyaux de Dirichlet.

Soit ψ une fonction continue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \psi(x) = \psi(-x)$ et $\forall p \in \mathbf{N} \quad \forall x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{R}^n \quad \forall \rho \in \mathbf{R}^p$

$$\sum_{i,j=1}^{p} \sum [\psi(x_i) + \psi(x_j) - \psi(x_i - x_j)]\rho_i\rho_j \geqslant 0,$$

(ii) $\psi(0) \geqslant 0$ et $\forall t \geqslant 0 \;\; e^{-t\psi}$ est de type positif,

(iii) Il existe $a \geqslant 0$, Q forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^n$ et μ mesure positive symétrique sur $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ vérifiant

$$\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2}\, d\mu(x) < +\infty$$

tels que

$$\psi(x) = \mathrm{Q}(x) + a + \int \sin^2(x.y)\, d\mu(y)$$

où $|\ |$ désigne la norme euclidienne et $.$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$.

ψ vérifiant l'une de ces propriétés est dite définie-négative. (On ne considère ici que des fonctions définies-négatives réelles). L'équivalence entre (i) et (ii) est un théorème de Schoënberg et (iii) est la formule de Levy-Khintchine.

Soit maintenant T un élément de $\mathscr{D}'$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T vérifie le principe du maximum positif (c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} \quad \varphi(0) = \sup \varphi \Rightarrow \langle \varphi, \mathrm{T} \rangle \leqslant 0)$$

et T est symétrique (c'est-à-dire $\check{\mathrm{T}} = \mathrm{T}$).

(ii) $\mathrm{T} \in \mathscr{S}'$ et $-\mathscr{F}\mathrm{T}$ est une fonction définie-négative.

T vérifiant ces propriétés est dit laplacien généralisé. (On ne considère ici que des laplaciens généralisés symétriques.)

Notons que si T est un laplacien généralisé, T est, en dehors, d'un voisinage de l'origine, une mesure bornée, et donc T appartient à l'espace $\mathscr{D}'_{L^1}$.

Soit enfin N une distribution. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) N vérifie le principe complet du maximum (c'est-à-dire

$$\forall\varphi, \psi \in \mathscr{D}^+ \quad N * \varphi \leqslant N * \psi + 1 \quad \text{sur} \quad \operatorname{Supp}\varphi$$
$$\Rightarrow N * \varphi \leqslant N * \psi + 1),$$

N est symétrique et N tend vers 0 à l'infini (c'est-à-dire $\forall\varphi \in \mathscr{D}$ $N * \varphi$ tend vers 0 à l'infini).

(ii) $N \in \mathscr{S}'$ et il existe une fonction définie-négative ψ telle que ψ^{-1} soit localement intégrable et $\mathscr{F}N = \psi^{-1}\,dx$.

N vérifiant ces propriétés est dit noyau de Dirichlet. Notons qu'un noyau de Dirichlet est une mesure positive.

Inversement, si ψ est une fonction définie-négative telle que ψ^{-1} soit localement intégrable, il est facile de voir que $(\psi^{-1}\,dx)$ est de type positif et correspond donc à un noyau de Dirichlet N. Si T est le laplacien généralisé dont la transformée de Fourier est $-\psi$ on a

$$T * N = -\delta$$

(où la convolution est celle définie entre un élément de $\mathscr{D}'_{L^1}$ et un élément de $\mathscr{D}'_{L^\infty}$).

Pour terminer ces préliminaires, rappelons que si ψ est une fonction définie négative et si on note μ_t la mesure positive telle que $\mathscr{F}\mu_t = e^{-t\psi}$, $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de convolution vaguement continu. Si T est le laplacien généralisé associé à ψ, T est le générateur infinitésimal de $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$, c'est-à-dire

$$T = \lim_{t\to 0}(\mu_t - \delta)t^{-1} \qquad \text{dans} \qquad \mathscr{D}'.$$

La résolvante associée à ce semi-groupe est $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda>0}$ définie par

$$\forall\lambda > 0 \quad \mathscr{F}\varepsilon_\lambda = (\psi+\lambda)^{-1}$$

et on a

$$\forall\lambda > 0 \quad \varepsilon_\lambda * (\lambda\delta - T) = \delta .$$

Dans la suite, on notera aussi parfois par $\hat{}$ la transformée de Fourier.

3. Synthèse spectrale sur les compacts.

Nous considérons dans ce paragraphe l'espace $\tilde{E} = L^2(h\,dx)$ *avec* $h = \psi_2 . \psi_1^{-1}$ *où* ψ_2 et ψ_1 *sont deux fonctions définies-négatives non identiquement nulles* (et donc presque partout non nulles).

Remarquons que si ψ_1^{-1} est localement intégrable, h est à croissance lente (car $\psi_1^{-1}\,dx$ est de type positif et ψ_2 est continue, $\psi_2(x) = 0\,(|x|^2)$).

Si en outre h^{-1} est localement intégrable et à croissance lente (ce qui est vérifié en particulier si ψ_2^{-1} est localement intégrable), on est dans les conditions décrites dans l'introduction dont on conserve les notations.

THÉORÈME 1. — *Si* ψ_1^{-1} *est localement intégrable et si* h^{-1} *est localement intégrable et à croissance lente, la synthèse est possible sur les compacts.*

On pose $\quad T = -\bar{\mathscr{F}}(\psi_2\,dx), \qquad N = \bar{\mathscr{F}}(\psi_1^{-1}\,dx)$

$\qquad\qquad K = -T * N = \bar{\mathscr{F}}(h\,dx).$

LEMME 1. — $\forall\varphi \in \mathscr{D}^+ \quad \forall\psi \in \mathscr{D}^+_{L^1}$

$$(K * \varphi \leqslant K * \psi \text{ } \textit{sur} \text{ } \operatorname{Supp}\varphi) \Rightarrow (N * \varphi \leqslant N * \psi).$$

Preuve. — Soit $(\eta_\lambda)_{\lambda>0}$ la résolvante associée à T :

$$\eta_\lambda * (\lambda\delta - T) = \delta .$$

Donc

$$\lambda\eta_\lambda * N + K * \eta_\lambda = N .$$

T étant non nul, d'après un résultat classique, pour toute fonction φ continue tendant vers 0 à l'infini, $\lim_{\lambda\to 0} \lambda\eta_\lambda * \varphi = 0$ uniformément.

N tendant vers 0 à l'infini,

$$\forall\varphi \in \mathscr{D} \quad N * \varphi = \lim_{\lambda\to 0} K * \eta_\lambda * \varphi \text{ uniformément.}$$

Or N est une mesure positive non nulle. On déduit donc de ce qui précède :

$$\forall \mathrm{A} \text{ compact } \exists \psi_{\mathrm{A}} \in \mathscr{D}^+_{\mathrm{L}^1} \quad \mathrm{K} * \psi_{\mathrm{A}} \geqslant 1 \quad \text{sur} \quad \mathrm{A}.$$

Considérons alors $\varphi \in \mathscr{D}^+$ et $\psi \in \mathscr{D}^+_{\mathrm{L}^1}$ tels que

$$\mathrm{K} * \varphi \leqslant \mathrm{K} * \psi \qquad \text{sur} \quad \mathrm{Supp}\, \varphi.$$

Posons $\mathrm{A} = \mathrm{Supp}\, \varphi$ et soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathrm{K} * \varphi < \mathrm{K} * (\psi + \varepsilon\psi_{\mathrm{A}}) \qquad \text{sur} \quad \mathrm{Supp}\, \varphi.$$

N vérifiant le principe complet du maximum,

ou bien

$$\mathrm{N} * \varphi \leqslant \mathrm{N} * (\psi + \varepsilon\psi_{\mathrm{A}})$$

ou bien

$$\exists x_0 \in \mathrm{Supp}\, \varphi$$

tel que

$$(\mathrm{N} * \varphi(x_0) - [\mathrm{N} * (\psi + \varepsilon\psi_{\mathrm{A}})](x_0)) = \sup\, (\mathrm{N} * \varphi - \mathrm{N} * (\psi + \varepsilon\psi_{\mathrm{A}})) > 0.$$

Dans le second cas, T vérifiant le principe du maximum positif,

$$- \mathrm{K} * \varphi(x_0) + [\mathrm{K} * (\psi + \varepsilon\psi_{\mathrm{A}})](x_0) \leqslant 0,$$

ce qui est contradictoire.

Donc

$$\mathrm{N} * \varphi \leqslant \mathrm{N} * \psi + \varepsilon \mathrm{N} * \psi_{\mathrm{A}}$$

et, faisant tendre ε vers 0, la propriété est démontrée.

LEMME 2. — $\forall \mathrm{A}$ *compact* $\forall \mu \in \mathscr{M}_b^+$ *(ensemble des mesures positives de masse finie)* $\exists \mu_{\mathrm{A}} \in \mathscr{M}^+$ *(ensemble des mesures positives) tel que*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Supp}\, \mu_{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A} \\ &\mathrm{K} * \mu_{\mathrm{A}} \leqslant \mathrm{N} * \mu \\ &\mathrm{K} * \mu_{\mathrm{A}} = \mathrm{N} * \mu \ \textit{sur}\ \mathring{\mathrm{A}}. \end{aligned}$$

Soit A un compact, $\check{\mathrm{A}}$ l'image de A par l'application $x \longmapsto -x$ et $\mathscr{C}(\check{\mathrm{A}})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\check{\mathrm{A}}$.

Pour $\varphi \in \mathscr{C}(\check{A})$ on pose

$$p(\varphi) = \inf\left\{\int (N * g - N * f)\, d\check{\mu}\,;\ g \in \mathscr{D}^+_{L^1},\right.$$
$$\left. f \in \mathscr{D}^+,\ \mathrm{Supp}\ f \subset \check{A} \text{ et } K * g - K * f \geqslant \varphi \text{ sur } \check{A}\right\}.$$

$p(\varphi)$ est bien défini et fini : en effet, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$K * \lambda\psi_{\check{A}} \geqslant (\sup \varphi) \quad \text{sur} \quad \check{A}$$

et donc l'ensemble considéré est non vide. D'autre part, on voit facilement d'après le lemme 1, que

$$p(\varphi) \geqslant -\ |\inf \varphi| \int (N * \psi_{\check{A}})\, d\check{\mu}.$$

p est donc une forme sous-linéaire sur $\mathscr{C}(\check{A})$ et donc, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire sur $\mathscr{C}(\check{A})$ majorée par p.

Comme
$$\varphi \leqslant 0 \Rightarrow p(\varphi) \leqslant 0,$$

cette forme linéaire se représente par une mesure positive $\tilde{\mu}$ à support dans $\check{A}$. Soient g et f dans $\mathscr{D}^+$ avec $\mathrm{Supp}\ f \subset \check{A}$. Posons $\varphi = (K * g - K * f)|_{\check{A}}$.

On a

$$\int \varphi\, d\tilde{\mu} = \int (K * g - K * f)\, d\tilde{\mu} \leqslant \int (N * g - N * f)\, d\check{\mu},$$

ce qui prouve que la mesure $\mu_A = \check{\tilde{\mu}}$ convient.

LEMME 3. — *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}$ *et* $S \in \mathscr{E}' \cap E$. *Alors*

$$\langle K * \varphi, S\rangle = \langle \varphi, K * S\rangle = (\varphi, \bar{S}) = (S, \bar{\varphi})$$

(*où* (,) *désigne le produit scalaire dans* E).

Démonstration immédiate par transformation de Fourier.

LEMME 4. — *Soit* μ *une mesure positive à support compact et* f *une fonction continue telles que*

$$K * \mu \leqslant f.$$

Alors μ *appartient à* E *et* $\|\mu\|^2 \leqslant \int f\, d\mu$ *(où* $\| \ \|$ *désigne la norme dans* E).

Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ une suite régularisante avec : $\forall n \ \varphi_n \geqslant 0$.

$$\int |\hat{\mu}|^2 h\, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int |\hat{\mu}|^2 |\hat{\varphi}_n|^2 \mathrm{h}\, \mathrm{dx} = \varliminf_{n\to\infty} (\mu * \varphi_n, \mu * \varphi_n).$$

D'après le lemme 3

$$(\mu * \varphi_n, \mu * \varphi_n) = \langle \mathrm{K} * \mu * \varphi_n * \check{\varphi}_n, \mu \rangle \leqslant \int (f * \varphi_n * \check{\varphi}_n)\, d\mu.$$

On en déduit donc

$$\int |\hat{\mu}|^2 h\, dx \leqslant \int f\, d\mu.$$

Preuve du théorème. — Nous remarquons d'abord que, d'après les injections continues de E et $\tilde{\mathrm{E}}$ dans $\mathscr{S}'$, pour tout fermé F, $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}$, E_{F}, $\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}^{+}$, $\mathrm{E}_{\mathrm{F}}^{+}$ sont fermés (alors que $[\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{F}}^{+}]$ et $[\mathrm{E}_{\mathrm{F}}^{+}]$ ne sont pas, en général, fermés).

Il s'agit donc de démontrer :

$$\forall \mathrm{R} \in \mathrm{E}_{\mathrm{F}} \quad \mathrm{R} \perp \mathrm{E}_{\mathrm{F}}^{+} \Rightarrow \mathrm{R} = 0$$

(où $\perp$ désigne l'orthogonalité dans E).

Soit donc F un compact et R un élément de E_{F} orthogonal à $\mathrm{E}_{\mathrm{F}}^{+}$.

Soit $(\omega_p)_{p\geqslant 0}$ une suite décroissante d'ouverts relativement compacts telle que

$$\bigcap_p \omega_p = \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad \forall p \quad \overline{\omega_{p+1}} \subset \omega_p.$$

Soit f un élément de $\mathscr{D}_{\mathrm{L}^1}^{+}$ et, pour tout $p \geqslant 0$, μ_p une mesure positive vérifiant :

$$\operatorname{Supp} \mu_p \subset \overline{\omega_p}, \qquad \mathrm{K} * \mu_p \leqslant \mathrm{N} * f, \qquad \mathrm{K} * \mu_p = \mathrm{N} * f \ \text{sur} \ \omega_p$$

(l'existence de μ_p étant assurée par le lemme 2).

Soit ψ un élément de $\mathscr{D}^{+}$ tel que

$$\psi = 1 \qquad \text{sur} \qquad \overline{\omega_0}.$$

D'après le lemme 4, μ_p appartient à E^+ et

$$\|\mu_p\|^2 \leqslant \int (N*f)\, d\mu_p = \int \psi(N*f)\, d\mu_p = \int \bar{\mathscr{F}}[\psi(N*f)]\hat{\mu}_p\, dx.$$

Donc

$$\|\mu_p\|^2 \leqslant \|\mu_p\| \left(\int |[\widehat{\psi(N*f)}]|^2 h^{-1}\, dx \right)^{1/2} = C\|\mu_p\|$$

ce qui implique

$$\forall p \quad \|\mu_p\| \leqslant C.$$

Il existe donc une suite extraite de la suite (μ_p) qui converge faiblement dans E vers μ et

$$\mu \in E_F^+ .$$

Pour p fixé, si $\varphi \in \mathscr{D}^+$ et $\operatorname{Supp} \varphi$ assez petit,

$$R * \varphi \in \mathscr{D} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp}(R*\varphi) \subset \omega_p$$

et donc

$$\langle R*\varphi, K*\mu_p \rangle = \langle R*\varphi, N*f \rangle$$

soit (d'après le lemme 3)

$$(R*\varphi, \mu_p) = \langle \varphi, \check{R}*N*f \rangle .$$

Si φ décrit une suite régularisante $(\varphi_r)_{r \geqslant 0}$, $R*\varphi_r$ converge vers R dans E (immédiat par transformation de Fourier) et donc

$$\forall p \quad (R, \mu_p) = \langle N*f, R \rangle$$

ce qui implique

$$0 = (R, \mu) = \langle N*f, R \rangle .$$

Soit alors $\varphi \in \mathscr{D}^+$ et $\varepsilon_\lambda = \bar{\mathscr{F}}\left(\dfrac{1}{\psi_1 + \lambda} \right)$.

$$\forall \lambda > 0 \quad \langle N*\varphi, R \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \lambda N*\varepsilon_\lambda*\varphi, R \rangle = 0$$

et donc

$$\forall \lambda > 0 \quad \langle \varepsilon_\lambda * \varphi, R \rangle = 0 .$$

Ainsi

$$\forall \lambda > 0 \quad \lambda \varepsilon_\lambda * \mathrm{R} = 0$$

et, faisant tendre λ vers $+\infty$,

$$\mathrm{R} = 0.$$

4. Synthèse spectrale sur les fermés.

Nous considérons encore dans ce paragraphe l'espace $\tilde{\tilde{\mathrm{E}}} = \mathrm{L}^2(h\,dx)$ avec $h = \psi_2 . \psi_1^{-1}$ *où* ψ_2 *et* ψ_1 *sont deux fonctions définies-négatives non identiquement nulles.*

Remarquons que si $(\psi_1\psi_2)^{-1}$ est localement intégrable, h et h^{-1} sont localement intégrables et à croissance lente (puisque ψ_1^{-1} et ψ_2^{-1} sont localement intégrables).

Théorème 2. — *Si* $(\psi_1\psi_2)^{-1}$ *est localement intégrable, la synthèse est possible sur les fermés.*

Nous conservons les notations du paragraphe précédent.

Lemme 1. — $(\psi_1\psi_2)^{-1}$ *est à croissance lente.*

Preuve. — Soient, comme définis précédemment, $\eta_\lambda = \bar{\bar{\mathscr{F}}}\left(\dfrac{1}{\psi_2 + \lambda}\right)$ et $\varepsilon_\lambda = \bar{\bar{\mathscr{F}}}\left(\dfrac{1}{\psi_1 + \lambda}\right)$.

η_λ et ε_λ sont des mesures positives de masse totale finie et on a

$$\begin{aligned}(\psi_1\psi_2)^{-1}\,dx &= \lim_{\lambda\to 0_+} [(\psi_1+\lambda)(\psi_2+\lambda)]^{-1}\,dx \\ &= \lim_{\lambda\to 0_+} \mathscr{F}(\varepsilon_\lambda * \eta_\lambda) \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'.\end{aligned}$$

Donc $(\psi_1\psi_2)^{-1}\,dx$ est une mesure de type positif et donc à croissance lente.

Lemme 2. — *Soit* ψ *une fonction définie-négative avec* ψ^{-1} *localement intégrable.*

Soit $f \in \mathscr{F}(L^2(\psi\, dx))$, *et* ω *ouvert,* $\omega \supset \operatorname{Supp} f$. *Il existe une suite* $(\varphi_p)_{p\geq 0}$ *de* $\mathscr{D}$ *telle que*

$$\forall p \quad \operatorname{Supp} \varphi_p \subset \omega \qquad et \qquad \lim_{p\to\infty} \hat{\varphi}_p = \hat{f} \ \ dans \ \ L^2(\psi\, dx).$$

Preuve. – En effet, $\mathscr{F}(L^2(\psi\, dx))$ est un espace de Dirichlet au sens de Beurling et Deny ([5]). Donc, d'après les résultats de [5], $\mathscr{F}(L^2(\psi\, dx))$ est constitué de classes de fonctions localement intégrables et est réticulé, et, par conséquent, on peut supposer f positive.

$\mathscr{D}$ étant dense dans l'espace de Dirichlet, il existe une suite $(k_p)_{p\geq 0}$ de $\mathscr{D}$ avec

$$\lim_{p\to\infty} \hat{k}_p = \hat{f} \qquad \text{dans} \qquad L^2(\psi\, dx),$$

f étant positive, toujours d'après [5], notant $(k_p)^+$ la fonction $\sup(k_p, 0)$,

$$\lim_{p\to\infty} \widehat{(k_p)^+} = \hat{f} \quad \text{dans} \quad L^2(\psi\, dx),$$

et aussi

$$\lim_{p\to\infty} \widehat{(\inf(f,k_p^+))} = \hat{f} \qquad \text{dans} \qquad L^2(\psi\, dx).$$

$\operatorname{Supp}(\inf(f,k_p^+)) \subset \operatorname{Supp} f$. Il suffit donc de régulariser $\inf(f,k_p^+)$ pour obtenir le résultat.

Preuve du théorème. – On pose, pour tout k entier > 0, $\psi_{1,k} = \psi_1 + k^{-1}$, $h_k = \psi_2 \cdot \psi_{1,k}^{-1}$, $E_k = \mathscr{F}(L^2(h_k\, dx))$, $\| \ \|_k$ et $(\ , \ )_k$ la norme et le produit scalaire dans E_k, et $K_k = \mathscr{F}(h_k\, dx)$.

Soit F un fermé et f un élément de $\mathscr{D}^+_{L^1}$. On désigne par P le noyau de Dirichlet

$$P = \mathscr{F}(\psi_2^{-1}\, dx).$$

Soit $(F_p)_{p\geq 0}$ une suite croissante de compacts telle que

$$\forall p \quad F_p \subset \mathring{F}_{p+1} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_p F_p = \mathring{F}.$$

On pose, pour k et p entiers, μ_p^k une mesure positive telle que

$$\operatorname{Supp}\mu_p^k \subset F_p, \quad K_k * \mu_p^k \leqslant \varepsilon_{1/k} * f \quad \text{et} \quad K_k * \mu_p^k = \varepsilon_{1/k} * f \quad \text{sur} \quad \mathring{F}_p$$

(l'existence d'une telle mesure est assurée par le lemme 2, § 3).

Alors, d'après le lemme 4, § 3, $\mu_p^k \in E_k^+$ et

$$\|\mu_p^k\|_k^2 \leqslant \int (\varepsilon_{1/k} * f)\, d\mu_p^k$$

$$= \int \widehat{\mu_p^k}\, \check{\hat{f}}\, \psi_{1,k}^{-1}\, dx \leqslant \|\mu_p^k\|_k \left(\int \frac{|\hat{f}|^2}{\psi_2 \cdot \psi_{1,k}}\, dx\right)^{1/2}$$

donc

$$\|\mu_p^k\|_k \leqslant \left(\int \frac{|\hat{f}|^2}{\psi_2 \psi_1}\, dx\right)^{1/2} = C$$

où C est fini d'après le lemme 1 et le fait que $\hat{f}$ est une fonction continue à décroissance rapide. C est indépendant de F, p et k.

D'autre part $P * f$ appartient à E, et donc à E_k pour tout k, et

$$\|P * f\| = C.$$

Si $\varphi \in \mathscr{D}$ et $\operatorname{Supp}\varphi \subset \mathring{F}_p$ on a

$$\int \varphi\, d(K_k * \mu_p^k) = \int \varphi\, d(\varepsilon_{1/k} * f)$$

et donc, d'après le lemme 3, § 3,

$$(\varphi, \mu_p^k)_k = \int \check{\hat{\varphi}}\, \hat{f}\, \psi_{1,k}^{-1}\, dx = (P * f, \bar{\varphi})_k .$$

En extrayant une suite faiblement convergente dans E_k de la suite $(\mu_p^k)_{p \geqslant 0}$ on obtient une mesure μ^k avec

$$\mu^k \in E_k^+, \qquad \operatorname{Supp}\mu^k \subset F, \qquad \|\mu^k\|_k \leqslant C$$

et

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} \quad \operatorname{Supp}\varphi \subset \mathring{F} \Rightarrow (\mu^k, \varphi)_k = (P * f, \varphi)_k .$$

Soit maintenant $R \in E_k$ avec $\operatorname{Supp} R \subset \mathring{F}$ et soit $(\varphi_r)_{r \geqslant 0}$ une suite régularisante.

$$\forall r \geqslant 0 \quad \widehat{(R * \varphi_r)} \in L^2(\psi_2\, dx).$$

(En effet

$$\int |\hat{R}|^2 |\hat{\varphi}_r|^2 \psi_2 \, dx = \int \left(|\hat{R}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_{1,k}} \right) (|\hat{\varphi}_r|^2 \psi_{1,k}) \, dx$$

et $|\hat{\varphi}_r|^2 \psi_{1,k}$ est une fonction continue bornée).

Donc, d'après le lemme 2, il existe, pour tout r tel que $\operatorname{Supp}(R * \varphi_r)$ soit inclus dans $\mathring{F}$, une suite $(\chi_l^r)_{l \geqslant 0}$ de $\mathscr{D}$ avec

$$\forall l \quad \operatorname{Supp} \chi_l^r \subset \mathring{F} \qquad \text{et} \qquad \lim_{l \to \infty} \widehat{\chi_l^r} = \hat{R}\,\hat{\varphi}_r \quad \text{dans} \quad L^2(\psi_2 \, dx).$$

Or

$$\psi_2 \cdot \psi_{1,k}^{-1} \leqslant k \psi_2,$$

donc

$$\lim_{l \to \infty} \chi_l^r = R * \varphi_r \qquad \text{dans} \qquad E_k.$$

Par conséquent, d'après les propriétés de μ^k, pour r assez grand,

$$(\mu^k, R * \varphi_r)_k = (P * f, R * \varphi_r)_k$$

et, en passant à la limite pour r tendant vers $+\infty$ on obtient finalement :

$$\forall R \in E_k \quad \operatorname{Supp} R \subset \mathring{F} \Rightarrow (\mu^k, R)_k = (P * f, R)_k.$$

Remarquons que, pour $k \geqslant 1$, on a les injections canoniques :

$$E \hookrightarrow E_{k+1} \hookrightarrow E_k.$$

On a

$$\forall k \geqslant r \quad \mu^k \in E_r \qquad \text{et} \qquad \|\mu^k\|_r \leqslant \|\mu^k\|_k \leqslant C.$$

Donc, par un procédé diagonal, on peut trouver une suite extraite $(\mu^{k_l})_{l \geqslant 0}$, telle que μ^{k_l} converge faiblement dans chaque E_r. D'après les injections entre les espaces E_r, la limite μ_F est indépendante de r.

$$\forall r \quad \mu_F \in E_r^+ \qquad \text{et} \qquad \|\mu_F\|_r \leqslant C.$$

On en déduit

$$\mu_F \in E_F^+ \qquad \text{et} \qquad \|\mu_F\| \leqslant C.$$

D'autre part, si $R \in E$ et $\operatorname{Supp} R \subset \mathring{F}$,

$$\forall k \quad (\mu^k, R)_k = (P * f, R)_k.$$

Or

$$\lim_{k\to\infty} (P * f, R)_k = (P * f, R)$$

et, pour $r \leqslant k_l$,

$$\begin{aligned}(\mu^{k_l},R)_{k_l} - (\mu_F,R) = (\mu^{k_l},R)_{k_l} &- (\mu^{k_l},R)_r \\ + (\mu^{k_l},R)_r &- (\mu_F,R)_r \\ + (\mu_F,R)_r &- (\mu_F,R)\end{aligned}$$

et

$$|(\mu^{k_l},R)_{k_l} - (\mu^{k_l},R)_r| \leqslant \|\mu^{k_l}\|_{k_l}\left[\int |\hat{R}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_1}\left(\frac{r^{-1}}{\psi_{1,r}}\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

(d'après l'inégalité de Schwarz).

Donc

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} |(\mu^{k_l},R)_{k_l} - (\mu_F,R)| \leqslant C\left[\int |\hat{R}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_1}\left(\frac{r^{-1}}{\psi_{1,r}}\right)^2 dx\right]^{1/2} + |(\mu_F,R)_r - (\mu_F,R)|.$$

On peut alors faire tendre r vers l'infini et on obtient

$$\lim_{l\to\infty} (\mu^{k_l},R)_{k_l} = (\mu_F,R) = (P * f, R).$$

On a donc démontré que, pour $f \in \mathscr{D}^+_{L^1}$ fixé, pour tout fermé F il existe $\mu_F \in E^+_F$ avec $\|\mu_F\| \leqslant \|P * f\|$ et

$$\forall R \in E \quad \operatorname{Supp} R \subset \mathring{F} \Rightarrow (\mu_F,R) = (P * f, R).$$

Considérons maintenant F un fermé quelconque et

$$R \in E_F, \qquad R \perp E^+_F.$$

Soit $(\omega_s)_{s\geqslant 0}$ une suite décroissante d'ouverts avec

$$\bigcap_s \omega_s = F \qquad \text{et} \qquad \forall s \quad \overline{\omega_{s+1}} \subset \omega_s$$

et soit $f \in \mathscr{D}^+_{L^1}$. Pour tout s, il existe une mesure $\mu_{\overline{\omega_s}}$ définie comme précédemment.

$$\forall s \geqslant 0 \quad (\mu_{\overline{\omega_s}}R)H = (P * f, R) \qquad \text{et} \qquad \|\mu_{\overline{\omega_s}}\| \leqslant \|P * f\|.$$

Par extraction d'une suite faiblement convergente, on obtient

$$\nu \in E_F^+ \qquad \text{et} \qquad (\nu, R) = (P * f, R).$$

Donc

$$\forall f \in \mathscr{D}_{L^1}^+ \quad (P * f, R) = 0.$$

On en déduit

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} \quad \forall \lambda > 0 \quad \int \widehat{(\varphi - \lambda \varepsilon_\lambda * \varphi)} \bar{\hat{R}} \, \psi_1^{-1} \, dx = 0$$

soit

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} \quad \forall \lambda > 0 \quad \int \frac{\lambda \hat{\varphi}}{\lambda + \psi_1} \bar{\hat{R}} \, dx = 0$$

et, faisant tendre λ vers $+\infty$,

$$\forall \varphi \in \mathscr{D} \quad \int \hat{\varphi} \, \bar{\hat{R}} \, dx = 0$$

ce qui implique

$$R = 0.$$

Le corollaire suivant généralise, au cas de $\mathbf{R}^n$, un résultat analogue de [8].

Corollaire. — *Sous les hypothèses suivantes :*

a) $\underline{\lim}_{x \to \infty} \psi_1(x) > 0$ *et* $\underline{\lim}_{x \to \infty} \psi_2(x) > 0$

b) $\exists \alpha$ *avec* $-n < \alpha < n$ tel que

$$0 < \underline{\lim}_{x \to 0} h(x)|x|^\alpha \leqslant \overline{\lim}_{x \to 0} h(x)|x|^\alpha < +\infty$$

la synthèse est possible sur les fermés.

Remarquons d'abord que si ψ est une fonction définie-négative telle que $\underline{\lim}_{x \to \infty} \psi(x) > 0$, on a

$$\forall x \neq 0 \qquad \psi(x) \neq 0$$

(en effet l'ensemble des zéros d'une fonction définie-négative est un sous-groupe, comme on peut le voir, par exemple, à partir de la formule de Levy-Khintchine).

Supposons les hypothèses *a*) et *b*). On a alors nécessairement $|\alpha| \leqslant 2$:

En effet posons, pour $j = 1, 2$,

$$\tilde{\psi}_j(x) = \int \psi_j(\rho(x))\, dS(\rho)$$

où dS désigne la mesure de Haar sur le groupe des isométries (linéaires) de $\mathbf{R}^n$.

$\tilde{\psi}_j$ est une fonction définie-négative invariante par les isométries de $\mathbf{R}^n$, non nulle en dehors de 0, et il existe a et $b > 0$ tels que

$$0 < |x| \leqslant 1 \Rightarrow a\tilde{\psi}_1(x) \leqslant \tilde{\psi}_2(x)|x|^\alpha \leqslant b\tilde{\psi}_1(x).$$

Or, d'après la formule de Levy-Khintchine,

$$\varliminf_{x\to 0} \tilde{\psi}_j(x)|x|^{-2} \geqslant a_j + c_j.\infty + \int |y|^2\, d\sigma_j(y)$$

avec $a_j \geqslant 0$, $c_j \geqslant 0$, $\sigma_j \in \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$, σ_j invariante par isométries et a_j, c_j et σ_j non tous les trois nuls.

Donc il existe $r_j > 0$ et $s_j > 0$ avec

$$|x| \leqslant 1 \Rightarrow r_j|x|^2 \leqslant \tilde{\psi}_j(x) \leqslant s_j.$$

Donc

$$|x| \leqslant 1 \Rightarrow ar_1|x|^2 \leqslant s_2|x|^\alpha \qquad \text{et} \qquad r_2|x|^{2+\alpha} \leqslant bs_2$$

ce qui implique bien

$$|\alpha| \leqslant 2.$$

D'autre part, il existe une fonction définie-négative ψ_0 bornée telle que

$$\lim_{x\to 0} \psi_0(x)|x|^{-2} = 1.$$

(Il suffit de prendre

$$\psi_0(x) = c\int \sin^2(x.y)\, d\sigma(y)$$

où c est une constante convenable et σ la distribution uniforme de masse 1 sur la sphère unité).

Considérons alors

$$\tilde{h} = (\psi_2 + \psi_0^\gamma)(\psi_1 + \psi_0^\beta)^{-1}.$$

Si $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et $\beta + \gamma < \frac{n}{2}$, les hypothèses du théorème sont vérifiées par $\tilde{h}$. Or si $|\alpha| < n$ et $|\alpha| \leqslant 2$, il existe β et γ vérifiant les inégalités ci-dessus et tels que

$$\alpha = 2(\beta - \gamma)$$

(on peut, suivant le signe de α, prendre β ou γ nul).

Pour un tel choix, on a, en utilisant les hypothèses *a*) et *b*)

$$\exists 0 < r < s \qquad r \leqslant \frac{\tilde{h}}{h} \leqslant s$$

et donc $L^2(h\,dx)$ et $L^2(\tilde{h}\,dx)$ sont les mêmes espaces munis de normes équivalentes, d'où le résultat.

5. Approximation par des mesures à support compact.

Nous allons d'abord rappeler des résultats dûs à J. Deny [4].

Soit h une fonction positive, localement intégrable telle que h^{-1} soit localement intégrable et que h et h^{-1} soient à croissance lente.

On conserve les notations de l'introduction (en particulier : $K = \mathscr{F}(h\,dx)$, $\tilde{E} = L^2(h\,dx)$, $E = \mathscr{F}(\tilde{E}) \ldots$).

On suppose, dans ce paragraphe, que K *est une mesure positive.*

THÉORÈME. — *Soit* H *l'ensemble des mesures positives* μ *telles que* $K * \mu * \check{\mu}$ *ait un sens et soit une mesure à densité continue.*

1) H *est un sous-cône convexe fermé de* E^+.

2) H *est l'adhérence dans* E^+ *du cône* $E^+ \cap \mathscr{E}'$.

3) *Si* $\mu \in H$ *et si* $(\varphi_p)_{p \geqslant 0}$ *est la suite des fonctions caractéristiques des boules de centre* 0 *et de rayon* p, *alors pour tout* p, $\varphi_p . \mu$ *appartient à* H *et*

$$\mu = \lim_{p \to \infty} (\varphi_p . \mu) \qquad \textit{dans} \qquad E.$$

Nous allons montrer que, dans des cas faisant partie de ceux étudiés au § 4, $H = E^+$, ce qui prouvera donc que, dans ces cas, on peut approximer toute distribution d'énergie finie par des combinaisons linéaires de mesures positives d'énergie finie *à support compact* inclus dans le support de la distribution.

THÉORÈME 3. — *Si* $h = \psi_2 . \psi_1^{-1}$ *avec* ψ_1 *et* ψ_2 *fonctions définies-négatives et si l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

(1) $\psi_2(0) \neq 0$ *et* ψ_1^{-1} *localement intégrable,*

(2) $\underline{\lim}_{x \to \infty} \psi_2(x) > 0$ *et* $\overline{\lim}_{x \to 0} h(x) < +\infty$,

alors $$H = E^+.$$

Supposons d'abord l'hypothèse (1). Soit μ un élément de E^+ et φ dans $\mathscr{D}^+$.

$$\int |\hat{\mu}|^2 |\hat{\varphi}|^2 \, dx \leqslant \left(\int |\hat{\mu}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_1} \, dx \right) \sup \left(|\hat{\varphi}|^2 \psi_1 \psi_2^{-1} \right)$$

et le sup est fini car, puisque $\psi_2(0)$ est non nul, $\psi_1 \psi_2^{-1}$ est continu et à croissance polynômiale.

Donc $$\mu * \varphi \in L^2(dx).$$

Notons, comme précédemment,

$$\varepsilon_\lambda = \mathscr{F}\left(\frac{1}{\psi_1 + \lambda}\right), \qquad N = \mathscr{F}\left(\frac{dx}{\psi_1}\right), \qquad T = -\mathscr{F}(\psi_2 \, dx).$$

On a, par conséquent, que $\varepsilon_\lambda * (\mu * \varphi) * (\check{\mu} * \check{\varphi})$ est défini et admet pour transformé de Fourier

$$|\hat{\mu}|^2 |\hat{\varphi}|^2 (\psi_1 + \lambda)^{-1}.$$

En particulier,

$$\forall \lambda > 0 \quad \varepsilon_\lambda * (\mu * \varphi) * (\check{\mu} * \check{\varphi}) \leqslant \|\mu * \varphi\|^2 [\psi_2(0)]^{-1}.$$

Donc $$N * (\mu * \varphi) * (\check{\mu} * \check{\varphi})$$

est une fonction s.c.i. bornée et de type positif, c'est donc une fonction continue de type positif. T s'exprimant comme somme d'une distribution à support compact et d'une mesure positive de masse finie, on a immédiatement que

$$K * (\mu * \varphi) * (\check{\mu} * \check{\varphi})$$

est continue et donc $(\mu * \varphi)$ appartient à H. Ceci étant valable pour tout φ de $\mathscr{D}^+$ et H étant fermé dans E^+, μ appartient à H.

Supposons maintenant l'hypothèse (2). K étant positif,

$$\overline{\lim_{x \to 0}}\, h(x) < +\infty \Rightarrow \int dK < +\infty .$$

K étant non nul, h est une fonction continue, strictement positive au voisinage de 0.

ψ_2 ne s'annulant pas en dehors de 0 et étant minorée au voisinage de $+\infty$, h^{-1} est une fonction continue à croissance polynômiale. On en déduit

$$\mu \in E^+ \quad \text{et} \quad \varphi \in \mathscr{D}^+ \Rightarrow (\mu * \varphi) \in L^2(dx)$$

et, K étant de masse totale finie, on a alors

$$\mu \in E^+ \quad \text{et} \quad \varphi \in \mathscr{D}^+ \Rightarrow K * (\mu * \varphi) * (\check{\mu} * \check{\varphi}) \text{ continue.}$$

On conclut alors comme dans le 1er cas.

6. Exemples.

Nous supposons, dans ce paragraphe, que K *est une mesure symétrique positive non nulle tendant vers* 0 *à l'infini.*

Nous avons démontré dans un article antérieur ([6]) que, dire que $\hat{K}$ était un quotient de fonctions définies-négatives, équivalait à dire que K vérifiait le principe classique du maximum. Ceci a d'ailleurs été généralisé aux groupes de Lie ([7]) et constitue une extension des résultats analogues de [8].

Nous rappelons le résultat principal :

THÉORÈME. — *Sont équivalents :*

i) K *vérifie le principe classique du maximum, c'est-à-dire*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}^+ \quad (K * \varphi \leqslant 1 \ \textit{sur}\ \mathrm{Supp}\, \varphi) \Rightarrow (K * \varphi \leqslant 1).$$

ii) $\hat{K}$ *admet une densité qui est une fonction localement intégrable* h *et il existe* ψ_1 *et* ψ_2 *fonctions définies-négatives non identiquement nulles avec*

$$h = \psi_2 . \psi_1^{-1} \text{ p.p.}$$

iii) *Il existe un laplacien généralisé* T *avec*

$$T * K \geqslant 0 \quad sur \quad \complement\{0\}.$$

En outre, si iii) *est réalisé, on peut prendre pour fonction* ψ_1 *intervenant dans* ii) $-\mathscr{F}(T)$ *et, alors,*

$$\psi_2 = -\mathscr{F}(T * K).$$

Ceci permet de donner des exemples de noyaux K pour lesquels la synthèse est possible (dans l'espace $(L^2(h\,dx)$ avec $h\,dx = \hat{K})$:

THÉORÈME 4. — *Supposons* $\Delta K \geqslant 0$ *sur* $\complement\{0\}$ (c'est-à-dire K est, en dehors de 0, représenté par une fonction sous-harmonique positive).

1) *Si* $n \geqslant 3$, *la synthèse est possible sur les compacts.*

2) *Si* $n \geqslant 3$ *et* $\exists a > 0 \quad K \geqslant a|x|^{2-n}\,dx$, *la synthèse est possible sur les fermés (avec approximation par des mesures à support compact).*

3) *Si* $\int dK < +\infty$ *et* $(K(\{0\}) > 0$ *ou* K *de classe* C^2 *sur* $\complement\{0\})$, *la synthèse est possible sur les fermés (avec approximation par des mesures à support compact).*

Pour démontrer le 1), compte-tenu du fait que $|x|^{-2}$ est localement intégrable si $n \geqslant 3$, on utilise le lemme suivant :

LEMME. — *Si* K *est une mesure positive non nulle tendant vers* 0 *à l'infini et si*

$$\mathscr{F}(K) = [\psi_2 \psi_1^{-1}]\,dx$$

avec ψ_1 *et* ψ_2 *définies négatives,* (ψ_1^{-1} *localement intégrable*) $\Rightarrow$ (ψ_2^{-1} *localement intégrable*).

En effet, d'après le début de la preuve du lemme 1, § 3

$$\forall \lambda > 0 \qquad \eta_\lambda * K \leqslant N.$$

Or K étant non nulle, on en déduit immédiatement que $\lim_{\lambda \to 0} \eta_\lambda$ existe dans $\mathscr{M}^+$ (pour la convergence vague), ce qui implique, d'après un résultat classique, ψ_2^{-1} localement intégrable.

Donc, sous l'hypothèse 1), posant $\psi_2 = -\mathscr{F}(\Delta K)$, ψ_2^{-1} est localement intégrable et les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées.

Preuve de 2). — Comme

$$\Delta(|x|^{2-n}\,dx) = 0 \qquad \text{sur} \qquad \complement\{0\},$$
$$\Delta(\mathrm{K} - a|x|^{2-n}\,dx) \geqslant 0 \qquad \text{sur} \qquad \complement\{0\}.$$

Donc, d'après le théorème,

$$-\mathscr{F}[\Delta(\mathrm{K}-a|x|^{2-n}\,dx)] = \psi \text{ fonction définie-négative}$$

et

$$-\mathscr{F}(\Delta\mathrm{K}) = \psi + \alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha > 0$$

et par conséquent

$$\psi_2(0) > 0.$$

Les hypothèses du théorème 2 sont donc réalisées de même que les hypothèses (1) du théorème 3.

Preuve de 3). — L'hypothèse $\int d\mathrm{K} < +\infty$ implique l'hypothèse *b*) du corollaire du théorème 3. D'autre part

$$\psi_1(x) = |x|^2$$

donc

$$\varliminf_{x\to\infty} \psi_1(x) > 0.$$

Supposons $\mathrm{K}(\{0\}) > 0$,

$$\Delta[\mathrm{K}-\mathrm{K}(\{0\})\,\delta] \geqslant 0 \qquad \text{sur} \qquad \complement\{0\}.$$

Donc

$$-\mathscr{F}(\Delta\mathrm{K}) = \psi + 4\pi^2\,\mathrm{K}(\{0\})|x|^2 = \psi_2$$

avec ψ définie négative.

Donc

$$\varliminf_{x\to\infty} \psi_2(x) > 0.$$

Supposons enfin K de classe C^2 sur $\complement\{0\}$. Alors $\Delta\mathrm{K}$ est une fonction continue sur $\complement\{0\}$. Donc, d'après la formule de Levy-Khintchine

$$\psi_2(x) = \mathrm{Q}(x) + b + \int \sin^2(x\,.\,y) f(y)\,dy$$

où f est une fonction symétrique, positive, continue sur $\complement\{0\}$ et intégrable sur le complémentaire d'un voisinage arbitraire de 0.

On déduit alors du lemme de Riemann-Lebesgue

$$\underline{\lim}_{x \to \infty} \psi_2(x) \geqslant \underline{\lim}_{x \to \infty} Q(x) + b + \frac{1}{2} \int_{y \neq 0} f(y)\, dy .$$

Si on avait $\underline{\lim}_{x \to \infty} \psi_2(x) = 0$, on aurait $b = 0$ et $f = 0$ et donc $\psi_2(x) = Q(x)$. Comme on aurait alors

$$\int dK = \lim_{x \to 0} \frac{Q(x)}{4\pi^2 |x|^2} > 0$$

$Q(x)$ serait de la forme $a|x|^2$ avec $a \neq 0$, ce qui amène à une contradiction.

Donc, sous l'hypothèse 3), on a $\underline{\lim}_{x \to \infty} \psi_2(x) > 0$, et on peut utiliser le corollaire du théorème 2 et le théorème 3 avec l'hypothèse (2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beurling, Sur les spectres des fonctions, Colloque d'Analyse Harmonique, C.N.R.S., Nancy 1947, 9-29.

[2] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, 45 (1959), 208-215.

[3] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.*, 82 (1950), 107-183.

[4] J. Deny, Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 2 (1950), 83-99.

[5] J. Deny, Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, Cours du CIME, Stresa, 1969.

[6] F. Hirsch, Principes du maximum pour les noyaux de convolution, Séminaire de théorie du Potentiel, Paris n° 4, pp. 113-136. *Lecture Notes* n° 713, Springer.

[7] F. Hirsch, Principe complet du maximum et principe complet du maximum relatif, Potential theory Copenhagen 1979, *Lecture Notes* n° 787, Springer, 144-158.

[8] J. P. Kahane, Quotients de fonctions définies-négatives (d'après Beurling-Deny), Séminaire Bourbaki, 19e année, 1966/67, n° 315.

[9] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann-Paris, 1966.

Manuscrit reçu le 21 avril 1980.

Francis Hirsch,

École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique
61, avenue du Président-Wilson
94230 Cachan.