JEAN-FRANÇOIS JAULENT

Unités et classes dans les extensions métabéliennes de degré $n\ell^s$ sur un corps de nombres algébriques

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 1 (1981), p. 39-62

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_39_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 1 (1981), 39-62

UNITÉS ET CLASSES DANS LES EXTENSIONS MÉTABÉLIENNES DE DEGRÉ $n\ell^s$ SUR UN CORPS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Jean-François JAULENT

0. Introduction.

Les résultats de N. Moser et F. Halter-Koch sur les extensions métacycliques [12], ceux de W. Jehne sur les corps de Frobenius réels [10], et, sous des hypothèses plus générales, les travaux de C.D. Walter [14] mettent en évidence l'existence de relations précises entre le nombre de classes d'idéaux d'une extension normale d'un corps de nombres, ceux de ses sous-corps relatifs, et certains indices d'unités. Ces formules trouvent leur origine commune dans une identité de R. Brauer, liant nombres de classes et régulateurs, obtenue en toute généralité par des voies analytiques (cf. [15]).

Le but de ce travail est de montrer comment la théorie algébrique des nombres conduit à un résultat sensiblement plus précis, pour les extensions normales d'un corps de nombres, à groupe de Galois métabélien.

Nous nous limitons pour cela au cas où le groupe G s'écrit comme produit semi-direct d'un ℓ-groupe cyclique S et d'un groupe abélien T, d'exposant divisant $(\ell - 1)$; et c'est la décomposition semi-locale de l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[T]$ que nous mettons en œuvre pour étudier les ψ-composantes du ℓ-groupe des classes d'idéaux.

Nous montrons en particulier dans la première partie comment, par action d'un générateur convenable ϑ de l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[S]$, la comparaison de ces composantes se ramène essentiellement à un problème de théorie des genres dans l'extension N/K ; et plus précisément à la détermination des ordres des

ψ-composantes respectives des groupes de ℓ-classes ambiges et des ℓ-groupes de genres (théorème 1). C'est donc ce à quoi nous nous attachons dans les deux parties suivantes. Or, contrairement au cas abélien déjà étudié par G. Gras [5] et R. Gillard [4], les généralisations de la formule de C. Chevalley aux ψ-composantes du groupe des ℓ-classes ambiges (théorème 2) et du ℓ-groupe des genres (théorème 3) ne coïncident pas ; et c'est précisément cette différence que traduit la formule des classes obtenue dans la quatrième partie (théorème 4). La suite de l'article est consacrée à étudier les indices d'unités qui interviennent dans le résultat final et à faire apparaitre le quotient significatif (théorème 5). Enfin, nous appliquons l'ensemble des résultats qui précèdent à la recherche des conditions d'annulation du ℓ-groupe des classes.

Rappelons que la première démonstration algébrique de la formule du nombre de classes est sans doute celle donnée par T. Callahan [1] pour les extensions diédrales de degré 6 sur le corps des rationnels ; et que ce résultat a été étendu par F. Halter-Koch [7] aux extensions diédrales de degré 2ℓ sur $\mathbf{Q}$.

1. Description de l'extension.

a. Le groupe et son algèbre.

Dans tout ce qui suit, nous adoptons la convention suivante :

DEFINITION. – *Etant donnés ℓ un nombre premier impair, s un entier naturel non nul, et n un entier étranger à ℓ, nous entendons par groupe métabélien d'ordre $\ell^s n$ tout produit semi-direct G d'un groupe cyclique S d'ordre ℓ^s par un groupe abélien T, d'ordre n et d'exposant divisant $(\ell - 1)$. Et nous disons que G est métacyclique lorsque son centre C est trivial, le groupe T étant alors cyclique.*

Si G est un tel groupe, la suite exacte courte qui le définit :

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow G \longrightarrow T \longrightarrow 1,$$

est scindée par une application g de T dans le groupe $\mathrm{Aut}\, S$ des automorphismes de S. Puisque, par hypothèse, l'ordre n de T est étranger à ℓ, cette section se factorise par un caractère ℓ-adique

χ du groupe T, d'ordre m divisant n, et défini par la relation : $\tau\eta\tau^{-1} = \eta^{\chi(\tau)}$, pour tous τ de T et η de S.

Et il est clair que la donnée du caractère χ définit parfaitement la structure de G. Ainsi, lorsque χ est non trivial, le centre C de G est le noyau $\operatorname{Ker}\chi$, le sous-groupe dérivé est le groupe S, et le quotient $G_0 = G/C$ est un groupe de centre trivial, isomorphe au produit semi-direct de S par le groupe cyclique $T_0 = T/C$; autrement dit, un groupe métacyclique. Dans le cas particulier où le noyau $C = \operatorname{Ker}\chi$ est facteur direct de T, le quotient G_0 se relève en un sous-groupe métacyclique maximal de G et celui-ci est alors composé direct de G_0 et du centre C.

Par ailleurs, le groupe T étant supposé abélien et d'exposant divisant $(\ell - 1)$, ses représentations sont réalisables sur le corps $\mathbf{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques. Plus précisément, à tout caractère ℓ-adique ψ du groupe T, correspond un idempotent e_ψ dans l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[T]$, défini par la relation $e_\psi = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \psi(\tau^{-1})\tau$, et caractérisé par l'identité : $\tau e_\psi = \psi(\tau)\, e_\psi$, pour tout τ de T.

Il est bien connu que les éléments e_ψ forment un système complet d'idempotents orthogonaux de l'algèbre semi-locale $\mathbf{Z}_\ell[T]$, indexé sur le groupe T^* des caractères ℓ-adiques irréductibles de T. Plus précisément, si C^* désigne le groupe des caractères ℓ-adiques irréductibles du centre de G, et $(T/C)^*$ ceux du quotient T/C, nous avons :

PROPOSITION 1. – *Les idempotents centraux* $e_\varphi = \frac{1}{|C|} \sum_{\tau \in C} \varphi(\tau^{-1})\tau$, *attachés aux induits des caractères irréductibles du centre de* G, *définissent un isomorphisme d'algèbres :* $\mathbf{Z}_\ell[G] \simeq \bigoplus_{\varphi \in C^*} \mathbf{Z}_\ell[G_0]\, e_\varphi$.

De plus, les homothéties à droite associées aux idempotents e_ψ *de l'algèbre* $\mathbf{Z}_\ell[G]$ *sont autant de projecteurs orthogonaux pour sa structure de* $\mathbf{Z}_\ell[G]$*-module à gauche ; de sorte que l'algèbre* $\mathbf{Z}_\ell[G]$ *s'écrit comme somme directe :*

$$\mathbf{Z}_\ell[G] \simeq \bigoplus_{\varphi \in C^*} \bigoplus_{\psi \in (T/C)^*} \mathbf{Z}_\ell[S]\, e_\psi\, e_\varphi .$$

Faisons choix maintenant d'un générateur σ du groupe S ; notons $\delta = \sigma - 1$ un générateur de l'idéal d'augmentation $\mathfrak{I}$ de l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[S]$ et considérons l'élément $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1})\, \sigma^{\chi(\tau)}$.

Introduisant une section $\overline{\chi}$ de χ modulo ℓ^s, à valeurs dans $\mathbf{N}$, nous obtenons, dès que χ est non trivial :

$$\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1})\, [\sigma^{\chi(\tau)} - 1] = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} (\sigma - 1)\, \chi(\tau^{-1}) \\ [1 + \sigma + \ldots + \sigma^{\overline{\chi}(\tau) - 1}],$$

et donc :

$$\vartheta \equiv (\sigma - 1)\, \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1})\, \overline{\chi}(\tau)\ [\mathrm{mod}\, \mathfrak{I}^2]\,;$$

d'où il suit que ϑ engendre l'idéal $\mathfrak{I}$, sous réserve de l'inclusion $(\sigma - 1)\, \ell^s \subset \mathfrak{I}^2$. Or celle-ci résulte du lemme :

LEMME 1. – *Pour tout entier* $t = 1, \ldots, s$, *posons* $\delta_t = \sigma^{\ell^{t-1}} - 1$ *et* $\nu_t = 1 + \sigma^{\ell^{t-1}} + \ldots + \sigma^{(\ell-1)\ell^{t-1}}$. *Il existe un polynôme de l'anneau* $\mathbf{Z}[X]$, *qui vérifie :*

$$\delta_t^{\ell-1} = \nu_t - \ell(1 + \delta_t P_t), \quad \text{avec} \quad P_t = P(\sigma^{\ell^{t-1}}).$$

L'élément $1 + \delta_t P_t$ *est inversible dans l'algèbre* $\mathbf{Z}_\ell[S]$.

Démonstrations. – Dans l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$, nous avons l'identité :

$$(X - 1)^{\ell-1} = (1 + X + 1 \ldots + X^{\ell-1}) - \ell(1 + (X - 1)\, P(X)),$$

pour un P convenable de $\mathbf{Z}[X]$. Par substitution nous en déduisons les relations annoncées : $\delta_t^{\ell-1} = \nu_t - \ell(1 + \delta_t P_t)$. En particulier, nous avons la congruence $\delta_t^\ell \equiv \delta_{t+1}\, [\mathrm{mod}\ \ell \mathbf{Z}_\ell[S]]$; puis, par une récurrence immédiate, $\delta_t^{\ell^{s-t-1}} \equiv 0\ [\mathrm{mod}\ \ell \mathbf{Z}_\ell[S]]$; ce qui nous prouve que l'élément $1 + \delta_t P_t$, somme d'un inversible et d'un nilpotent topologique de l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[S]$, en est bien un élément inversible.

Appliquons alors le lemme en remarquant que nous pouvons écrire $\ell = \nu_t + (\ell - \nu_t)$; puis $\ell = \nu_t - \delta_t Q_t$, avec $Q_t = \ell P_t - \delta_t^{\ell-2}$. Il vient ainsi $\ell \delta_{t-1} = \delta_t (1 - \delta_{t-1} Q_t)$, i.e. $\ell \delta_{t-1} \in \delta_t \mathbf{Z}_\ell[S]$; et, par une récurrence immédiate : $\ell^s \delta \in \ell \delta_s \mathbf{Z}_\ell[S]$. Utilisant maintenant le lemme à l'ordre s, nous obtenons $\delta^\ell \mathbf{Z}_\ell[S] = \ell \delta_s \mathbf{Z}_\ell[S]$.

L'élément $\ell^s\delta$ est donc contenu dans l'idéal $\delta_s^\ell \mathbf{Z}_\ell[S]$, donc, a fortiori, dans l'idéal primaire $\mathfrak{I}^\ell = \delta^\ell \mathbf{Z}_\ell[S]$. Par suite :

PROPOSITION 2. – *Il existe un générateur* $\vartheta = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{\tau\in T} \chi(\tau^{-1})\, \sigma^{\chi(\tau)}$ *de l'idéal d'augmentation* $\mathfrak{I}$ *de l'algèbre* $\mathbf{Z}_\ell[S]$, *congru à* δ *modulo* $\mathfrak{I}^2$, *qui satisfait aux relations de décalage :* $e_{\psi\chi}\vartheta = \vartheta e_\psi$, *pour tout caractère* ψ *du groupe* T.

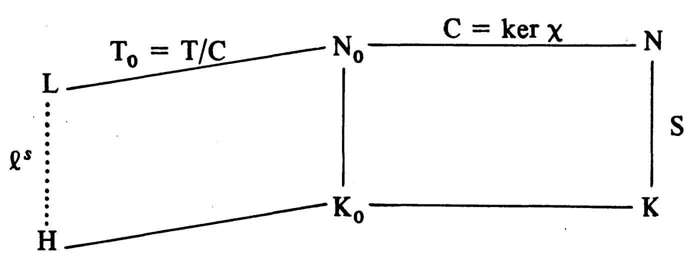
Démonstration. – Cela résulte immédiatement de l'identité : $\tau\vartheta = \chi(\tau)\,\vartheta\tau$, pour tout τ de T.

b. Les corps et leurs groupes de classes.

Par extension métabélienne d'un corps de nombres, nous entendons toute extension normale de ce corps, dont le groupe de Galois est métabélien.

Soient donc N une extension métabélienne de degré $\ell^s n$ sur un corps de nombres H, puis G son groupe de Galois et S le ℓ-sous-groupe de Sylow de G. Puisque le groupe S est distingué dans G, et à quotient abélien, son corps des invariants K dans N est une extension abélienne de H dont le groupe de Galois s'identifie à G/S.

Faisant choix d'un relèvement T de Gal(K/H) dans Gal(N/H), nous désignons par L son corps des invariants. Lorsque le groupe G n'est pas abélien, le corps L n'est pas galoisien sur H et possède exactement ℓ^s conjugués distincts. Sa clôture galoisienne est alors le sous-corps N_0 de N, fixé par le centre C de G. Ce corps N_0 est une extension métacyclique de H et nous disons par analogie géométrique que son sous-corps cyclique maximal K_0 est l'arête cyclique de l'extension N_0/H.



Cela étant, pour tout corps de nombres Ω convenons de noter $\mathfrak{H}(\Omega)$ l'unique ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux de l'anneau de ses entiers. Sur le groupe $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathrm{N})$ nous définissons une structure de $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$-module multiplicatif en faisant opérer exponentiellement l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$, conformément à la convention : $a^{\eta\tau} = (a^\eta)^\tau$, pour tous η, τ de $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$.

A tout caractère ℓ-adique ψ du groupe T correspond alors un sous $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{T}]$-module $\mathfrak{H}^\psi$ du groupe $\mathfrak{H}$, image de $\mathfrak{H}$ par l'idempotent $e_\psi = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{\tau \in \mathrm{T}} \psi(\tau^{-1})\,\tau$, et représentant la ψ-partie du ℓ-groupe des classes de N. Par exemple, si N' est un sous-corps de N au-dessus de L, puis T' le sous-groupe de T qui lui correspond par la théorie de Galois, n' son ordre et ψ' le caractère de T induit du caractère unité de T', le groupe des ℓ-classes de N' s'identifie canoniquement à la ψ'-partie du groupe des ℓ-classes de N : l'application norme $\mathrm{N}_{\mathrm{N}/\mathrm{N}'}$ est composée en effet de l'automorphisme d'élévation à la puissance n' et du projecteur $e' = \dfrac{1}{n'} \sum\limits_{\tau \in \mathrm{T}'} \tau$ qui induit l'identité sur $\mathfrak{H}(\mathrm{N}')$. De sorte que les ℓ-groupes de ψ-classes généralisent les ℓ-groupes des sous-corps.

Maintenant, pour comparer les ψ-composantes de $\mathfrak{H}$ lorsque ψ parcourt le groupe des caractères irréductibles de T, il est assez naturel, compte tenu de la relation de décalage donnée par la proposition 2, de faire appel à l'élément ϑ de l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{S}]$.

Il vient en effet :

THEOREME 1. – *Soit* N *une extension cyclique de degré* ℓ^s *sur un corps* K, *métabélienne de degré* $\ell^s n$ *sur un sous-corps* H. *Alors, pour tout caractère* ψ *du groupe* Gal(K/H), *l'opérateur* $\vartheta = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{\tau \in \mathrm{T}} \chi(\tau^{-1})\,\sigma^{\chi(\tau)}$ *de l'algèbre* $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{Gal(N/K)}]$ *détermine une suite exacte de* $\mathbf{Z}_\ell$*-modules :*

$$1 \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}^{\psi\chi} \longrightarrow \mathfrak{G}^{\psi\chi} \longrightarrow 1\,,$$

où le noyau $\mathfrak{H}_1^\psi$ *est la* ψ*-partie du groupe des* ℓ*-classes ambiges de* N, *et le conoyau* $\mathfrak{G}^{\psi\chi}$ *représente la* $\psi\chi$*-partie du* ℓ*-groupe des genres* $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^\vartheta$ *de l'extension* N/K.

La comparaison des ψ-composantes du ℓ-groupe des classes se trouve ainsi ramenée à un problème de théorie des genres dans l'extension N/K.

2. Formule des classes ambiges.

Intéressons nous d'abord au ℓ-groupe des classes ambiges. Des généralisations de la formule classique de C. Chevalley ont été données par G. Gras [5] et R. Gillard [4] dans le cas d'extensions cycliques abéliennes sur un sous-corps du corps de base. Les méthodes mises en œuvre consistent toujours à faire opérer l'anneau $\mathbf{Z}_\ell$ sur les groupes d'idéaux par extension des scalaires, puis à atteindre le groupe $\mathfrak{H}_1$ par une succession de suites exactes de $\mathbf{Z}_\ell[T]$-modules. En effet, pour toute telle suite : $\ldots\ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C} \ldots$, les suites composantes $\ldots\ \mathfrak{A}^\psi \longrightarrow \mathfrak{B}^\psi \longrightarrow \mathfrak{C}^\psi\ \ldots$, sont exactes, pour chaque caractère ψ de T.

Introduisons donc le module $\mathfrak{D} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_\mathbf{Z} \mathcal{D}_N$, tensorisé du groupe des idéaux fractionnaires de N, puis les sous-modules :

- $\mathfrak{D}_a$ des idéaux appartenant aux classes ambiges,
- $\mathfrak{D}_1$ des idéaux ambiges,
- $\mathfrak{D}_0$ des idéaux étendus de K,
- $\mathfrak{P}$ des idéaux principaux,
- $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{P}$, «la capitulation»,
- $\mathfrak{P}_1$ des idéaux principaux ambiges,
- $\mathfrak{P}_0$ des idéaux principaux étendus,
- $\mathfrak{P}^*$ des idéaux principaux de norme 1.

Ecrivons de même $\mathfrak{E}$ pour le tensorisé $\mathbf{Z}_\ell \otimes_\mathbf{Z} E_N$ du groupe des unités de N, puis notons : $\mathfrak{E}^*$ le noyau de la norme $\nu = N_{N/K}$, et $\mathfrak{E}_0$ le sous-module des unités de K. Ecrivons enfin $\mathfrak{N}$ pour le tensorisé $\mathbf{Z}_\ell \otimes_\mathbf{Z} N^\times$, du groupe multiplicatif du corps N.

Par ailleurs, les quotients qui interviennent étant tous ℓ-primaires, il est plus simple de raisonner, non sur leurs ordres, mais sur la ℓ-valuation de ces ordres. C'est ainsi, qu'en convenant d'affecter d'un indice ψ les termes correspondant à la ψ-partie, nous notons :

h la ℓ-valuation du groupe des classes de N, i.e. $|\mathfrak{H}^{\psi}| = \ell^{h_\psi}$;
ρ la ℓ-valuation du groupe des classes ambiges : $\mathfrak{H}_1$;
$\widetilde{\rho}$ la ℓ-valuation du groupe des genres : $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} / \mathfrak{H}^{\vartheta}$;
π la ℓ-valuation du groupe des classes d'idéaux ambiges $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{P}$;
c la ℓ-valuation du groupe des classes des idéaux induits $\mathfrak{D}_0/\mathfrak{I}$;
k la ℓ-valuation du groupe $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{D}_0/\mathfrak{P}_0$ des ℓ-classes d'idéaux du corps K ;
r la ℓ-valuation du quotient $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_0$;
n la ℓ-valuation du groupe $\mathfrak{E}_0/(\mathfrak{E}_0 \cap N_{N/K}(\mathfrak{R}))$ des unités modulo les normes ;
p la ℓ-valuation du quotient $\mathfrak{E}_0/\mathfrak{E}^{\nu} = H^2(S, \mathfrak{E})$;
q la ℓ-valuation du quotient $\mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^{\vartheta} = H^1(S, \mathfrak{E})$.

Proposition 3. – *Désignons par* χ *le caractère de l'action du groupe* T *sur le groupe* S, *et soit* ψ *un caractère de* T. *Nous avons les isomorphismes de* $\mathbf{Z}_\ell$*-modules :*

(i) $\mathfrak{D}_a^{\psi}/[\mathfrak{D}_1 \mathfrak{P}]^{\psi} \simeq [\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^{\vartheta}]^{\psi\chi} \simeq [\mathfrak{E} \cap N_{N/K}(\mathfrak{R})/\mathfrak{E}^{\nu}]^{\psi\chi}$, *d'une part ;*

(ii) $\mathfrak{P}_1^{\psi}/\mathfrak{P}_0^{\psi} \simeq [\mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^{\vartheta}]^{\psi\chi}$, *d'autre part.*

Démonstration. – Pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{D}_a$, l'idéal $\mathfrak{A}^{\vartheta}$ est un idéal principal (α) engendré par un élément de norme unité $\epsilon = \alpha^{\nu}$. L'application $\mathfrak{A} \overset{\partial}{\longmapsto} \epsilon\ [\mathrm{mod}\ \mathfrak{E}^{\nu}]$ est donc un $\mathbf{Z}_\ell$-morphisme de $\mathfrak{D}_a / \mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{E}_0 \cap N_{N/K}(\mathfrak{R})/\mathfrak{E}^{\nu}$ qui est surjectif en vertu du théorème 90 de Hilbert pour les idéaux, et qui a pour noyau le groupe $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ des classes des idéaux ambiges, isomorphe à $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{P}_1$. D'où un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell$-modules :

$$\mathfrak{D}_a/\mathfrak{D}_1 \mathfrak{P} \simeq \mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^{\vartheta} \simeq [\mathfrak{E}_0 \cap N_{N/K}(\mathfrak{R})/\mathfrak{E}^{\nu}.$$

L'isomorphisme $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^{\vartheta} \simeq [\mathfrak{E}_0 \cap N_{N/K}(\mathfrak{R})]/\mathfrak{E}^{\nu}$ étant compatible avec la $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{T}]$-structure nous avons bien

$$[\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^{\vartheta}]^{\psi\chi} \simeq [\mathfrak{E}_0 \cap N_{N/K}(\mathfrak{R})/\mathfrak{E}^{\nu}]^{\psi\chi}$$

pour tout caractère ψ ; par contre la relation de décalage $e_{\psi\chi}\vartheta = \vartheta e_{\psi}$ donnée par la proposition 2 se traduit par l'égalité $e_{\psi\chi}\partial = \partial e_{\psi}$ entre les opérateurs, donc finalement par l'isomorphisme :

$$[\mathfrak{D}_a/\mathfrak{D}_1 \mathfrak{P}]^{\psi} \cong [\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^{\vartheta}]^{\psi\chi}.$$

De façon semblable, pour tout idéal ambige (α) de $\mathfrak{P}_1$, l'élément α^ϑ est une unité ϵ de $\mathfrak{N}$, de norme 1 sur K. Et réciproquement nous savons par le théorème 90 de Hilbert que tout élément ϵ de $\mathfrak{N}$ de norme 1 sur K s'écrit $\epsilon = \alpha^\vartheta$ pour un α convenable de $\mathfrak{N}$. L'application $\partial' | (\alpha) \longrightarrow \alpha^\vartheta\,[\mathrm{mod}\ \mathfrak{E}^\vartheta]$ est donc un $\mathbf{Z}_\ell$-isomorphisme de $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_0$ sur $\mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^\vartheta$. La même égalité que plus haut conduit alors à l'isomorphisme : $[\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_0]^\psi \cong [\mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^\vartheta]^{\psi\chi}$.

Proposition 4 (suite exacte des classes ambiges). – *Pour tout caractère ψ du groupe* T, *il existe une suite exacte de $\mathbf{Z}_\ell$-modules :*

$$1 \longrightarrow (\mathfrak{E}/\mathfrak{P}_0)^\psi \longrightarrow (\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_0)^\psi \longrightarrow (\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_0)^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi/(\mathfrak{D}_0/\mathfrak{E})^\psi$$
$$\longrightarrow (\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\vartheta)^{\psi\chi} \longrightarrow 1\,.$$

Démonstration. – D'après la proposition 3, la suite exacte courte : $1 \longrightarrow \mathfrak{P}^\psi \longrightarrow \mathfrak{D}^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}^\psi \longrightarrow 1$, donne lieu à la suite exacte de cohomologie :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{P}_1^\psi \longrightarrow \mathfrak{D}_1^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathfrak{P})^{\psi\chi} \longrightarrow 1\,,$$

dans laquelle l'identité $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathfrak{D}) = 1$ traduit le théorème 90 de Hilbert, et où le premier groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathfrak{P})^{\psi\chi}$ s'identifie au quotient $[\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\vartheta]^{\psi\chi}$.

Formons alors la suite exacte du serpent associée au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathfrak{P}_0^\psi \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathfrak{D}_0^\psi \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathfrak{H}_0^\psi \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 1 \arrow[d, hook] & \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{P}_1^\psi \arrow[r] & \mathfrak{D}_1^\psi \arrow[r] & \mathfrak{H}_1^\psi \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathfrak{P})^{\psi\chi} \arrow[r] & 1\,.
\end{tikzcd}$$

Nous obtenons la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, i \longrightarrow \mathfrak{P}_1^\psi/\mathfrak{P}_0^\psi \longrightarrow \mathfrak{D}_1^\psi/\mathfrak{D}_0^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi/\mathrm{Im}\, i$$
$$\xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathfrak{P})^{\psi\chi} \longrightarrow 1$$

qui est bien la suite proposée.

Ecrivons maintenant que la somme alternée des valuations est nulle dans cette dernière suite. Nous avons immédiatement :

$$(k_\psi - c_\psi) + q_{\psi\chi} + r_\psi - (\rho_\psi - c_\psi) + (p_{\psi\chi} - n_{\psi\chi}) = 0\,,$$

qui constitue la formule des classes ambiges.

THEOREME 2 (formule des classes ambiges). – *Pour tout caractère* ψ *du groupe* T, *l'ordre de la* ψ*-composante du groupe des* ℓ*-classes ambiges du corps* N, *est donné par la relation :*

$$|\mathfrak{H}_1^{\psi}| = |\mathfrak{H}_0^{\psi}| \frac{[\mathfrak{D}_1^{\psi} : \mathfrak{D}_0^{\psi}]}{[\mathfrak{E}_0^{\psi\chi} : (\mathfrak{E}_0 \cap N(\mathfrak{R}))^{\psi\chi}]} \frac{[\mathfrak{E}_0^{\psi\chi} : \mathfrak{E}^{\nu\psi\chi}]}{[\mathfrak{E}^{*\psi\chi} : \mathfrak{E}^{\vartheta\psi\chi}]}.$$

Autrement dit, nous avons : $\rho_{\psi} = k_{\psi} + r_{\psi} - n_{\psi\chi} + p_{\psi\chi} - q_{\psi\chi}$.

Dans cette formule, le facteur $\dfrac{[\mathfrak{E}_0^{\psi\chi} : \mathfrak{E}^{\nu\psi\chi}]}{[\mathfrak{E}^{*\psi\chi} : \mathfrak{E}^{\vartheta\psi\chi}]} = \dfrac{|H^2(S, \mathfrak{E})^{\psi\chi}|}{|H^1(S, \mathfrak{E})^{\psi\chi}|}$ n'est pas un véritable quotient de Herbrand.

En effet, la $\psi\chi$-composante du groupe des unités $\mathfrak{E}$ n'est pas en général un $\mathbf{Z}_\ell[G]$-module, de sorte que le calcul de la différence $p_{\psi\chi} - q_{\psi\chi}$ nécessite la connaissance de la $\mathbf{Z}_\ell[G]$ structure de $\mathfrak{E}$.

La détermination de l'indice r_{ψ} n'offre, en revanche, aucune difficulté, dès que la ramification est connue :

PROPOSITION 6. – *L'indice* r_{ψ} *est donné par la relation :* $r_{\psi} = \Sigma_{\mathfrak{p}} < \psi, \chi_{\mathfrak{p}} > e_{\mathfrak{p}}$, *où* $\mathfrak{p}$ *parcourt les idéaux premiers de* H *qui se ramifient dans l'extension* N/K ; *l'exposant* $e_{\mathfrak{p}}$ *est la* ℓ*-valuation de l'indice de ramification dans* N/K ; *et* $\chi_{\mathfrak{p}}$ *est le caractère de* T *induit de la représentation unité du sous groupe de décomposition de* $\mathfrak{p}$ *dans l'extension* K/H.

Démonstration. – Le groupe $\mathfrak{D}_1$ des idéaux ambiges du corps N est engendré par le sous-groupe $\mathfrak{D}_0$ des idéaux étendus de K, et par les produits $\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de K qui se ramifient dans N.

Si donc nous notons $\mathfrak{I}$ le $\mathbf{Z}_\ell[G]$-module engendré par ces produits, il est clair que nous avons un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell[T]$-modules : i $\simeq \oplus_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}} \mathbf{Z}_\ell[T]$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de H qui se ramifient dans N/K, et $\mu_{\mathfrak{p}}$ désigne l'opérateur de $\mathbf{Z}_\ell[T]$ correspondant à la norme $N_{K/D_{\mathfrak{p}}}$ sur le sous-corps de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K. Exprimant $\mu_{\mathfrak{p}}$ en termes de caractères, et passant au quotient, nous obtenons la décomposition : $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_0 \simeq \oplus_{\mathfrak{p}} e_{\chi_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{Z}_\ell/\ell^{e_{\mathfrak{p}}}\mathbf{Z}_\ell)[T]$, ce qui achève la démonstration.

Contrairement au cas abélien, il semble plus délicat de donner, composante par composante, une décomposition du nombre de classes ambiges en produit d'entiers significatifs. La suite exacte des classes ambiges conduit cependant aux majorations :

SCOLIE. – *Les inégalités* $k_\psi - c_\psi \leqslant q_{\psi\chi} \leqslant (k_\psi - c_\psi) + r_\psi$ *entraînent* $c_\psi + r_\psi + (p_{\psi\chi} - n_{\psi\chi}) \geqslant \rho_\psi \geqslant c_\psi + (p_{\psi\chi} - n_{\psi\chi})$; *et la quantité* $k_\psi - c_\psi$ *mesure la* ψ*-capitulation.*

3. Formule des genres.

Etudions maintenant le groupe des genres $\mathfrak{G}$. Pour cela, désignons par $\mathfrak{f}$ le conducteur de l'extension N/K, qui est invariant par T ; notons $K^{\mathfrak{f}}$ le groupe multiplicatif des éléments de K étrangers à $\mathfrak{f}$; puis $N^{\mathfrak{f}}$ son homologue dans N ; et introduisons le groupe modulo* $\mathfrak{f}$ $U_K^{\mathfrak{f}} = \{x \in K^{\mathfrak{f}} \mid x \equiv 1 \; [\mathrm{mod}^* \mathfrak{f}]\}$.

Nous savons, par la théorie des restes que le quotient

$$K^{\mathfrak{f}}/N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}})\, U_K^{\mathfrak{f}}$$

est un groupe d'ordre fini, égal à ℓ^r. Plus précisément, nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 7. – *En tant que* $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{T}]$*-module, le quotient* $K^{\mathfrak{f}}/N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}})\, U_K^{\mathfrak{f}}$ *s'écrit comme somme directe :*

$$K^{\mathfrak{f}}/N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}})\, U_K^{\mathfrak{f}} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} [K^{\mathfrak{p}}/N_{N/K}(N^{\mathfrak{p}})\, U_K^{\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}}] \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{f}} [E_{K_{\mathfrak{p}}}/N_{N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(E_{N_{\mathfrak{P}}})].$$

Dans cette décomposition, $\mathfrak{p}$ *parcourt les diviseurs premiers du conducteur ; l'idéal* $\mathfrak{P}$ *est un premier de* N *au dessus de* $\mathfrak{p}$; *le symbole* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ *désigne la* $\mathfrak{p}$*-partie de* $\mathfrak{f}$, *puis* $K_{\mathfrak{p}}$ *et* $N_{\mathfrak{P}}$ *les complétés respectifs de* K *et de* N ; *enfin, le groupe* T *agit sur le produit des groupes d'unités locales* $E_{K_{\mathfrak{p}}}$, *conformément à la relation :* $(\alpha_{\mathfrak{p}})^{\tau}_{\mathfrak{p}} = (\alpha^{\tau}_{\mathfrak{p}^{\tau^{-1}}})_{\mathfrak{p}}$, *pour tout* τ *de* T.

Démonstration. – Pour tout élément α de $K^{\mathfrak{f}}$ et tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$ dans K, le théorème d'approximation simultanée nous assure l'existence d'un élément $\alpha_{\mathfrak{p}}$ de $K^{\mathfrak{p}}$ satisfaisant aux congruences multiplicatives : $\alpha_{\mathfrak{p}} \equiv \alpha \; [\mathrm{mod}^* \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}]$ et $\alpha_{\mathfrak{p}} \equiv 1 \; [\mathrm{mod}^* \mathfrak{f}/\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}]$. Il est bien connu que l'application $\alpha \longmapsto (\alpha_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ définit un isomorphisme du quotient $K^{\mathfrak{f}}/N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}})\, U_N^{\mathfrak{f}}$ sur le produit

$$\bigoplus_{\mathfrak{p} | \mathfrak{f}} [K^{\mathfrak{p}} / N_{N/K}(N^{\mathfrak{p}}) U_K^{\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}}] .$$

C'est même un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell[T]$-modules si nous convenons de définir une action de T sur le produit, par la relation : $(\alpha_{\mathfrak{p}})^{\tau}_{\mathfrak{p}} = (\alpha^{\tau}_{\mathfrak{p}^{\tau^{-1}}})_{\mathfrak{p}}$, pour tout τ de T.

Enfin, si $K_{\mathfrak{p}}$ désigne le complété de K pour la valuation $\mathfrak{p}$-adique, et $N_{\mathfrak{P}}$ l'un des complétés de N au dessus de $K_{\mathfrak{p}}$, il existe un isomorphisme canonique de $K^{\mathfrak{p}} / N_{N/K}(N^{\mathfrak{p}}) U_K^{\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}}$ sur $E_{K_{\mathfrak{p}}} / N_{N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(E_{N_{\mathfrak{P}}})$; ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE. – *Pour tout caractère* ψ *de* T, *l'indice* r_ψ *est précisément la* ℓ*-valuation de la* $\psi\chi$*-composante du* $\mathbf{Z}_\ell[T]$*-module* $K^{\mathfrak{f}} / N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}}) U_K^{\mathfrak{f}}$.

En particulier, on a l'inégalité : $r_\psi \geqslant n_{\psi\chi}$, *pour tout* ψ *de* T^*.

En effet, le calcul de l'ordre $|[K^{\mathfrak{f}} / N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}}) U_K^{\mathfrak{f}}]^{e_{\psi\chi}}|$ est immédiat, la quantité $[E_{K_{\mathfrak{p}}} : N_{N_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(E_{N_{\mathfrak{P}}})]$ étant bien connue. Comme les unités de K qui sont dans $N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}}) U_K^{\mathfrak{f}}$ sont précisément les normes locales, l'inclusion canonique :

$$E_K / [E_K \cap N_{N/K}(N)] \hookrightarrow K^{\mathfrak{f}} / N_{N/K}(N^{\mathfrak{f}}) U_K^{\mathfrak{f}} ,$$

nous donne la majoration annoncée.

L'inégalité obtenue peut être améliorée afin de prendre en compte la formule du produit pour le symbole de Hasse. Introduisons pour cela le ℓ-corps de classes de Hilbert de N, i.e. la plus grande ℓ-extension abélienne $\hat{N}$ qui est non ramifiée sur N. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\hat{N}/N)$ s'identifie à $\mathfrak{H}$ par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin, et $\hat{N}$ est une ℓ-extension galoisienne de K. En particulier, lorsque N/K est totalement ramifiée, le groupe $\mathrm{Gal}(\hat{N}/K)$ s'écrit comme produit semi-direct de $S = \mathrm{Gal}(N/K)$ et de $\mathfrak{H} \simeq \mathrm{Gal}(\hat{N}/N)$, avec les relations : $\eta a = a^{\eta} \eta$, pour tous η de S et a de $\mathfrak{H}$, i.e. $\eta a \eta^{-1} a^{-1} = a^{\eta - 1}$.

Notons $\tilde{N}$ le ℓ-corps de genres de l'extension N/K, i.e. la plus grande ℓ-extension abélienne de K qui est non ramifiée sur N. Le corps $\tilde{N}$ est la sous extension de $\hat{N}$ fixée par le sous-groupe des commutateurs $[\mathrm{Gal}(\hat{N}/K), \mathrm{Gal}(\hat{N}/K)] = \mathfrak{H}^{\delta}$; de sorte que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\tilde{N}/K)$ est une extension du groupe S par le groupe des genres $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} / \mathfrak{H}^{\vartheta}$.

Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de K qui se ramifie dans N/K, désignons par $I_\mathfrak{p}$ son groupe d'inertie dans l'extension $\widetilde{N}/K$. Nous sommes alors en mesure d'énoncer :

PROPOSITION 8. – *Etant donnée une extension cyclique* N *d'un corps de nombres* K, *il existe une suite exacte canonique :*

$$1 \longrightarrow E_K/(E_K \cap N_{N/K}(N)) \xrightarrow{\text{Hasse}} \oplus_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p} \xrightarrow{\text{proj}} \mathrm{Gal}(\widetilde{N}/K) \xrightarrow{\mathrm{Pr}_{\widetilde{N}/\widetilde{K}}} \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K) \longrightarrow 1 .$$

Démonstration. – La première application est obtenue en associant à une unité ϵ de K les symboles de Hasse $\left(\frac{\epsilon}{\mathfrak{p}}\right)_\mathfrak{p}$ relatifs aux idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K qui se ramifient dans N/K.

Considérons alors l'injection canonique $\epsilon \longmapsto (\alpha_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ de $E_K/(E_K \cap N_{N/K}(N))$ dans $\underset{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{f}}{\oplus} K^\mathfrak{p}/N_{N/K}(N^\mathfrak{p})\, U_K^{\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}}$. Le symbole de Hasse $\left(\frac{\epsilon}{\mathfrak{p}}\right)$ n'est autre que le symbole d'Artin $((\alpha_\mathfrak{p}), \widetilde{N}/K)$, de sorte que l'application $\mathfrak{h} \mid \epsilon \longrightarrow \left(\frac{\epsilon}{\mathfrak{p}}\right)_\mathfrak{p}$ est injective, comme composée d'une injection et d'un isomorphisme.

Cela étant, pour tout ϵ de E_K, l'image $\Pi_\mathfrak{p} \left(\frac{\epsilon}{\mathfrak{p}}\right)$ de $\mathfrak{h}(\epsilon)$ par la projection canonique de $\oplus_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Gal}(\widetilde{N}/K)$, est nulle en vertu de la formule du produit. Tandis que le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\widetilde{N}/K)$ engendré par les groupes d'inertie $I_\mathfrak{p}$ est précisément le groupe $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ associé par la théorie de Galois au ℓ-corps de classes de Hilbert $\widetilde{K}$ du corps K : son corps des invariants est, en effet, une sous-extension de $\widetilde{N}$, maximale non ramifiée sur K.

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{N}/K)$ est une extension du groupe $S = \mathrm{Gal}(N/K)$ par le groupe des genres $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^\vartheta = \mathrm{Gal}(\widetilde{N}/N)$ qui est un produit direct dès que l'extension N/K est totalement ramifiée. Son quotient $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ s'identifie à $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}(K)$ par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin.

Il resterait à montrer que tout élément $(\sigma_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ de $\oplus_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p}$ vérifiant la formule du produit $\Pi \sigma_\mathfrak{p} = 1$, provient, via le symbole de Hasse, d'une unité de K. C'est là un résultat classique de la théorie du corps de classes, qui découle ici de l'identité d'Euler-Poincaré : $0 = n - r + (\rho + s) - k$, donnée par la formule des classes ambiges de Chevalley.

L'exactitude de la suite est donc établie.

Maintenant, puisque l'extension N est galoisienne sur son sous-corps H, les différents termes de la suite exacte sont canoniquement des $\mathbf{Z}_\ell[T]$-modules. Il suffit alors de faire opérer le groupe T sur le produit des groupes d'inertie $\oplus_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p}$, par la relation : $(\sigma_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}^\tau = (\sigma^\tau_{\mathfrak{p}^{\tau^{-1}}})_\mathfrak{p}$, pour obtenir :

THEOREME 3 (Formule des genres). – *Etant donnée une extension métabélienne* N *de degré* $\ell^s n$ *sur un corps de nombres* H, *la suite exacte des genres est compatible avec la* $\mathbf{Z}_\ell[T]$*-structure, pour l'action de* T *sur le produit* $\oplus_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p}$ *transportée de celle sur le quotient* $K^\dagger/N_{N/K}(N^\dagger)\,E_K^\dagger$. *En particulier, pour tout caractère* ψ *du groupe* T, *l'ordre de la* ψ*-composante du groupe des genres est donnée par la relation :*

$$|\mathfrak{G}^\psi| = |\mathfrak{H}_0^\psi|\,\frac{|(K^\dagger/N_{N/K}(N^\dagger)\,E_K^\dagger)^\psi|}{|(\mathfrak{E}_0/(\mathfrak{E}_0\cap N(\mathfrak{N})))^\psi|}\,\ell^{-s\langle\psi,\chi\rangle}.$$

Autrement dit, nous avons : $\tilde{\rho}_\psi = k_\psi + r_{\psi\chi^{-1}} - n_\psi - s\langle\psi,\chi\rangle$.

Démonstration. – Pour tout caractère ψ du groupe T, la suite exacte des genres s'écrit :

$$1 \longrightarrow (\mathfrak{E}_0/(\mathfrak{E}_0\cap N(\mathfrak{N}))^\psi \longrightarrow (\oplus_\mathfrak{p} I_\mathfrak{p})^\psi \longrightarrow \mathrm{Gal}(\tilde{N}/K)^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_0^\psi \longrightarrow 1,$$

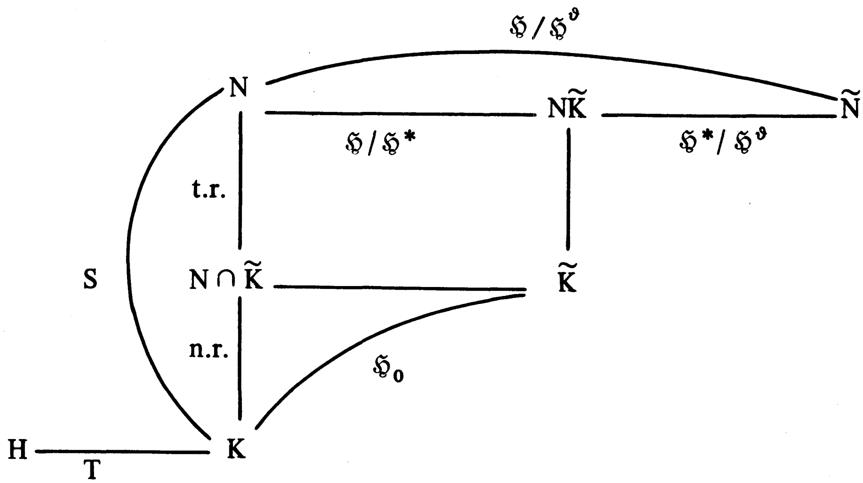
tandis que le groupe $\mathrm{Gal}(\tilde{N}/K)^\psi$ est déterminé par une suite courte : $1 \longrightarrow \mathfrak{G}^\psi \longrightarrow \mathrm{Gal}(\tilde{N}/K)^\psi \longrightarrow S^\psi \longrightarrow 1$, et le groupe T opère sur S par le caractère χ.

D'où la formule annoncée, en exprimant les ordres de chacun des groupes.

COROLLAIRE. – *Désignons par* $\mathfrak{H}^*$ *le noyau de la norme naturelle* $N_{N/K}$ *dans le groupe des* ℓ*-classes* $\mathfrak{H}$, *et par* ℓ^t *l'indice* $[N : N\cap\tilde{K}]$ *dans* N *de la sous extension maximale de* N *qui est non ramifiée sur* K. *Alors, pour tout caractère* ψ *de* T, *la quantité* $r_{\psi\chi^{-1}} - n_\psi - t\langle\psi,\chi\rangle$ *est exactement la* ℓ*-valuation du quotient* $(\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^\vartheta)^\psi$.

En particulier, nous avons la majoration : $n_\psi \leqslant r_{\psi\chi^{-1}} - t\langle\psi,\chi\rangle$.

Démonstration. – Par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin, le sous-groupe $\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^\vartheta$ s'identifie en effet au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{N}/N\widetilde{K})$ dont l'ordre est connu.



SCOLIE. – *Lorsque le groupe* G *est abélien, c'est-à-dire lorsque le groupe* T *opère trivialement sur* S, *la* ψ*-partie du nombre de genres est égale à celle du nombre de classes ambiges. Il vient alors :* $\dfrac{H^1(S,\mathfrak{E}^\psi)}{H^2(S,\mathfrak{E}^\psi)} = \ell^{s\langle\psi,1_T\rangle}$ *où* 1_T *est le caractère de la représentation unité.*

4. Formule du nombre de classes.

Compte tenu de la formule des classes ambiges, ainsi que de la formule des genres, le théorème 1 conduit au résultat :

THEOREME 4 (Formule du nombre de classes). – *Dans une extension métabélienne* N *de degré* $\ell^s n$ *sur un corps de nombres* H, *les* ψ*-composantes du* ℓ*-groupe des classes sont liées par l'identité :*

$$\frac{|\mathfrak{H}^\psi|}{|\mathfrak{H}^{\psi\chi}|} = \frac{|\mathfrak{H}_1^\psi|}{|\mathfrak{G}^{\psi\chi}|} = \frac{|\mathfrak{H}_0^\psi|}{|\mathfrak{H}_0^{\psi\chi}|} \cdot \frac{|H^2\ S,\mathfrak{E})^{\psi\chi}|}{|H^1(S,\mathfrak{E})^{\psi\chi}|}\ \ell^{s\langle\chi\psi,\chi\rangle}.$$

Autrement dit, nous avons :

$$h_\psi - h_{\psi\chi} = \rho_\psi - \widetilde{\rho}_{\psi\chi} = (k_\psi - k_{\psi\chi}) + (s\langle\chi\psi,\chi\rangle - q_\psi + p_\psi).$$

Il suit que la variation d'écart entre deux ψ-composantes du ℓ-groupe des classes, lorsque l'on passe du corps K à son extension N, est mesurée directement par un indice d'unités, qui dépend évidemment de la structure galoisienne du groupe $\mathfrak{G}$. Pour l'interpréter, introduisons quelques notations et rappelons tout d'abord la définition de l'indice de Hasse de l'extension :

PROPOSITION 9. – *L'image réciproque* W_N, *dans le groupe des unités* E_N, *du sous-groupe de torsion du quotient* E_N/E_K, *est le noyau dans* E_N *de l'opérateur* $(\nu - \ell^s)$, *où* $\nu = 1 + \sigma + \ldots + \sigma^{\ell^s - 1}$ *correspond à l'application norme* $N_{N/K}$.

Le quotient W_N/E_K *est un* ℓ*-groupe fini sur lequel* S *opère trivialement ; son ordre* ℓ^h, *appelé indice de Hasse de l'extension* N/K, *est le degré de la plus grande sous-extension de* N/K *qui est kummérienne de type unité, c'est-à-dire de la forme* $K[\sqrt[\ell^h]{\epsilon}]$, *pour un* ϵ *de* E_K, *non racine de l'unité.*

En effet, dès que χ est non trivial, nous avons :

PROPOSITION 10. – *Dans une extension métabélienne de degré* $\ell^s n$ *sur un corps de nombres* H, *le groupe* S *opère trivialement sur les racines de l'unité : En particulier, le corps* N *ne contient d'autres racines de l'unité, que celles de* K.

Démonstrations. – Considérons en effet le noyau de l'action de G sur le groupe μ_N des racines de l'unité contenues dans N. C'est un sous-groupe distingué de G, qui définit un quotient abélien. Il contient donc le sous-groupe dérivé S ; ce qui nous prouve que μ_N se réduit à μ_K.

Cela étant, notons provisoirement W'_N le noyau dans E_N de l'opérateur $(\nu - \ell^s)$. Il est clair que W'_N est contenu dans W_N puisque, pour toute unité $\epsilon \in W'_N$, la puissance $\epsilon^{\ell^s} = \epsilon^\nu = N_{N/K}(\epsilon)$ est dans E_K. Réciproquement, soient, si possible, η une unité de N contenue dans W_N mais non dans E_K, puis p le plus petit entier strictement positif tel que η^p soit dans E_K. Comme, d'après ce qui précède, η ne saurait être une racine de l'unité, l'extension $N' = K[\sqrt[p]{\eta^p}]$ est une extension kummérienne de degré p et de type unité sur K ; de sorte que p s'écrit ℓ^t, pour un t de $\{1, \ldots, s\}$ et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N'/K) = S/S^{\ell^t}$ agit sur η

par multiplication par les racines ℓ^{t}-ièmes de l'unité. En particulier il vient donc : $N_{N'/K}(\eta) = \eta^{\ell^t}$, puis

$$\eta^{\nu} = N_{N/K}(\eta) = N_{N'/K}(\eta)^{\ell^{s-t}} = \eta^{\ell^s},$$

ce qui achève la démonstration.

Notons alors $\mathfrak{W} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} W_N$, le sous-module de $\mathfrak{E}$ correspondant à W_N, puis : $\mathfrak{u} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} \mu_N$, le ℓ-Sylow du groupe des racines de l'unité ; et, avec les mêmes conventions que plus haut :

r le ℓ-rang du groupe des unités de K, i.e. $\ell^{r_\psi} = |(\mathfrak{E}_0/\mathfrak{u}\mathfrak{E}_0^\ell)^\psi|$

m la ℓ-valuation du quotient $\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^\vartheta$

h l'exposant de Hasse : $\ell^{h_\psi} = |[\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0]^\psi|$

u la ℓ-valuation du groupe des racines de l'unité.

Nous obtenons :

THEOREME 5. – *Pour tout caractère ψ du groupe* T, *l'ordre de la ψ-composante du quotient $\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^\vartheta$ est donné par la relation :*

$$|(\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^\vartheta)^\psi| = |(\mathfrak{E}_0/\mathfrak{u}\mathfrak{E}_0^\ell)^\psi|^s \; \frac{|(\mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^\vartheta)^\psi|}{|(\mathfrak{E}_0/\mathfrak{E}^\nu)^\psi|} \; \frac{|(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0)^{\psi\chi^{-1}}|}{|(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0)^\psi|} \,.$$

Autrement dit, nous avons : $\boldsymbol{m}_\psi = s\,\boldsymbol{r}_\psi + \boldsymbol{q}_\psi - \boldsymbol{p}_\psi - (\boldsymbol{h}_\psi - \boldsymbol{h}_{\psi\chi^{-1}})$.

Démonstration. – Par action de l'opérateur norme ν sur le quotient $\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^\vartheta$, nous définissons une suite exacte de $\mathbf{Z}_\ell[G]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{u}^*/(\mathfrak{W} \cap \mathfrak{E}^\vartheta) \longrightarrow \mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^\vartheta \longrightarrow \mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^\vartheta \xrightarrow{\ \nu\ } \mathfrak{E}_0/\mathfrak{W}^{\ell^s}$$
$$\longrightarrow \mathfrak{E}_0/\mathfrak{E}^\nu \longrightarrow 1\,.$$

Dans celle-ci, le groupe $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{E}^*$ est constitué des racines ℓ^s-ièmes de l'unité qui sont contenues dans K ; et le dénominateur $(\mathfrak{W} \cap \mathfrak{E}^\vartheta)$ est l'image bijective par ϑ du quotient $\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0$: en effet, pour toute unité $\eta = \epsilon^\delta$ de $\mathfrak{W} \cap \mathfrak{E}^\vartheta$, nous avons immédiatement $\eta^{\ell^s} = \eta^\nu = 1$, qui entraîne $\epsilon^{\ell^s} \in K$, c'est-à-dire finalement $\epsilon \in W_N$.

Compte tenu de la proposition 2, nous obtenons ainsi : $|(\mathfrak{W} \cap \mathfrak{E}^\vartheta)^\psi| = |(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0)^{\psi\chi^{-1}}|$; et, par ailleurs

$$|(\mathfrak{W}^{\ell^s}/\mathfrak{E}_0^{\ell^s})^\psi| = |(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0)^\psi|.$$

La valeur de l'indice cherché s'obtient alors en écrivant que le produit des ordres des différents termes de la suite exacte est égal à 1.

En particulier, la formule du nombre de classes se met sous la forme :

COROLLAIRE. – *Les ψ-composantes du ℓ-groupe des classes sont liées par l'identité :*

$$\frac{|\mathfrak{H}^{\psi}|}{|\mathfrak{H}^{\psi\chi}|} = \frac{|\mathfrak{H}_0^{\psi}|}{|\mathfrak{H}_0^{\psi\chi}|} \, \frac{|(\mathfrak{E}_0/u\,\mathfrak{E}_0^{\ell})^{\psi\chi}|^s}{|(\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\,\mathfrak{E}^{\vartheta})^{\psi\chi}|} \, \frac{|(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0)^{\psi}|}{|(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_0)^{\psi\chi}|} \, \ell^{s\langle\psi\chi,\chi\rangle} .$$

Ce qui s'écrit encore :

$$h_{\psi} - h_{\psi\chi} = (k_{\psi} - k_{\psi\chi}) + s(\boldsymbol{r}_{\psi\chi} + \langle \psi\chi , \chi \rangle) + (\boldsymbol{h}_{\psi} - \boldsymbol{h}_{\psi\chi}) - \boldsymbol{m}_{\psi\chi} .$$

Et la détermination de l'indice $\boldsymbol{r}_{\psi}$ ne fait aucune difficulté dès que la ramification à l'infini est connue :

PROPOSITION 11. – *Pour toute place à l'infini* $\mathfrak{P}$ *du corps* H, *notons* $\chi_{\mathfrak{P}}$ *le caractère de* T, *induit de la représentation unité du sous-groupe de décomposition de* $\mathfrak{P}$ *dans l'extension* K/H ; *alors, pour tout caractère* ψ *de* T, *l'indice* $\boldsymbol{r}_{\psi}$ *est donné par la formule :* $\boldsymbol{r}_{\psi} + \langle \psi , 1_T \rangle = \Sigma_{\mathfrak{P}} \langle \psi , \chi_{\mathfrak{P}} \rangle$.

Démonstration. – En effet, d'après le théorème de Herbrand sur les unités, la représentation du groupe T, de module $\mathbf{Q} \oplus (\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} E_K)$ est la somme des induites des représentations unités des sous-groupes de décomposition attachés aux places à l'infini de H.

La formule du corollaire contient ainsi les résultats classiques, cités dans l'introduction, reliant le nombre de classes d'un corps avec celui de sa clôture galoisienne dans le cas métacyclique. Pour le vérifier il suffit de sommer sur les ψ-composantes. Pour cela, convenons d'écrire $\mathcal{H}^{\varphi\psi}$ l'image d'un $\mathbf{Z}_{\ell}[G]$-module $\mathcal{H}$ par l'idempotent $e_{\varphi} . e_{\psi}$, lorsque φ désigne un caractère de T induit du centre C de G, et $\psi = \chi^{\iota}$ un caractère du quotient T/C.

Nous avons immédiatement :

$$|\mathcal{H}^{\varphi}| = |\mathcal{H}^{\varphi\chi^0}|^n \prod_{\iota=1}^{n-1} \left[\frac{|\mathcal{H}^{\varphi\chi^{\iota}}|}{|\mathcal{H}^{\varphi\chi^{\iota+1}}|} \right]^{\iota} ,$$

pour tout module fini $\mathcal{H}$; et donc :

$$h_{\varphi} - nh_{\varphi\chi^0} = (k_{\psi} - nk_{\varphi\chi^0}) + (\boldsymbol{h}_{\varphi} - \boldsymbol{nh}_{\varphi\chi^0}) + \sum_{\iota=1}^{n-1} \iota(s\boldsymbol{r}_{\varphi\chi^{\iota+1}} - \boldsymbol{m}_{\varphi\chi^{\iota+1}}) ,$$

en appliquant ce résultat au groupe des classes.

Cette dernière formule s'écrit encore :

$$h_\varphi - nh_{\varphi\chi^0} = (k_\varphi - nk_{\varphi\chi^0}) + (h_\varphi - nh_{\varphi\chi^0})$$
$$+ \sum_{\iota=1}^{n-1} (n-\iota)(m_{\varphi\chi^\iota} - sr_{\varphi\chi^\iota}) - (n-1)(m_\varphi - sr_\varphi)$$

avec : $m_\varphi - sr_\varphi = s\langle\varphi, 1_T\rangle$, par sommation à partir de la formule du théorème 5, compte tenu de l'expression du quotient de Herbrand $q_\varphi - p_\varphi$.

Pour interpréter la quantité $\sum_{\iota=1}^{n} (n-\iota)\, m_{\varphi\chi^\iota}$, nous nous appuierons sur le lemme :

LEMME. – *Soient* $\mathcal{H}$ *un* $\mathbf{Z}_\ell[G]$*-module puis* $\mathcal{H}_0$ *sa composante suivant l'idempotent* e_{χ^0}. *Le sous-module* $\mathcal{H}'_0$ *engendré par* $\mathcal{H}_0$ *est donné par la somme directe :* $\mathcal{H}'_0 = \overset{n-1}{\underset{\iota=0}{\oplus}} \mathcal{H}_0^{\vartheta^\iota} = \overset{n-1}{\underset{\iota=0}{\oplus}} (\mathcal{H}^{\vartheta^\iota})^{e_{\chi^\iota}}$. *En particulier, le quotient* $\mathcal{H}/\mathcal{H}'_0$ *admet la décomposition directe* $\mathcal{H}/\mathcal{H}'_0 = \overset{n-1}{\underset{\iota=1}{\oplus}} (\mathcal{H}/\mathcal{H}^{\vartheta^\iota})^{e_{\chi^\iota}}$.

Démonstration. – Puisque l'élément ϑ est un générateur de l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[S]$, il est clair que le sous-module engendré par $\mathcal{H}_0$ est donné par : $\mathcal{H}'_0 = \sum_{\iota\in\mathbf{N}} \mathcal{H}_0^{\vartheta^\iota}$. La décomposition annoncée résulte donc de l'identité $e_{\chi^\iota}\vartheta^\iota = \vartheta^\iota e_{\chi^0}$.

Appliquons le lemme au module $(\mathfrak{E}/\mathfrak{W})^\varphi$; nous obtenons la factorisation : $(\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{F})^\varphi \simeq \overset{n-1}{\underset{\iota=1}{\oplus}} (\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^\iota})^{\varphi\chi^\iota}$, en désignant par $\mathfrak{F}$ le sous-module de $\mathfrak{E}$ engendré par $\mathfrak{E}^{\chi^0}$. Et le problème est alors d'évaluer les quotients $(\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^\iota})^{\varphi\chi^\iota}$.

Pour ce faire, nous pouvons remarquer que, pour chaque entier ι, l'opérateur ϑ détermine une surjection de $\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^\iota}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^{\iota+1}}$ sur $\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^{\iota+1}}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^{\iota+2}}$ dont le noyau est constitué par les classes modulo $\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^{\iota+1}}$ des éléments η de $\mathfrak{E}$ qui vérifient l'équation $\eta^\delta \in \mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\iota+2}$. Or un tel élément s'écrit $\eta = \eta_0^{\delta^{\iota+1}}\theta$, avec $\theta^\delta \in \mathfrak{W}$, pour un η_0 convenable de $\mathfrak{E}$. La condition $\theta^\delta \in \mathfrak{W}$ s'écrit ainsi $\theta^{\delta\rho^s} \in \mathfrak{E}_0$; de sorte que $\theta^{\ell^s\delta}$ est une racine de l'unité, ce qui signifie que θ^{ℓ^s} donc θ est dans $\mathfrak{W}$. Autrement dit l'application

$$\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^\iota}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^{\iota+1}} \longrightarrow \mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^{\iota+1}}/\mathfrak{W}\mathfrak{E}^{\vartheta^{\iota+2}}$$

est une bijection.

La ℓ-valuation du quotient $(\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{J})^{\varphi}$ est donc donnée par la formule :

$$\mathfrak{a}_{\varphi} = \sum_{\iota=1}^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{\iota} \dim_{\mathrm{F}_{\ell}}(\mathfrak{W}\,\mathfrak{E}^{\vartheta^{j-1}}/\mathfrak{W}\,\mathfrak{E}^{\vartheta^{j}})^{\varphi\chi^{j}}\right] = \sum_{\iota=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{\iota} m_{\varphi\chi^{\iota-j+1}}\,.$$

C'est-à-dire finalement : $\mathfrak{a}_{\varphi} = \sum_{\iota=1}^{n-1}(n-\iota)\,m_{\varphi\chi^{\iota}}$. Et par suite :

THEOREME 6. – *Dans une extension métabélienne de degré $\ell^{s}n$ sur un corps de nombres, les ordres des φ-composantes du ℓ-groupe des classes sont liés par l'identité :*

$$\frac{|\mathfrak{H}^{\varphi}|}{|\mathfrak{H}^{\varphi\chi^{0}}|^{n}} = \frac{|\mathfrak{H}_{0}^{\varphi}|}{|\mathfrak{H}_{0}^{\varphi\chi^{0}}|^{n}}\;\frac{|(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_{0})^{\varphi}|}{|(\mathfrak{W}/\mathfrak{E}_{0})^{\varphi\chi^{0}}|^{n}}\;\frac{|(\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{J})^{\varphi}|}{\prod_{\iota=1}^{n-1}|(\mathfrak{E}_{0}/\mu\,\mathfrak{E}_{0}^{\ell})^{\varphi\chi^{\iota}}|^{s(n-\iota)}}\;\ell^{-s(n-1)\langle\varphi,1_{\mathrm{T}}\rangle}.$$

Autrement dit : $h_{\varphi} - nh_{\varphi\chi^{0}} = [k_{\varphi} - nk_{\varphi\chi^{0}}] + [h_{\varphi} - nh_{\varphi\chi^{0}}]$

$$+\,\mathfrak{a}_{\varphi} - s[(n-1)\langle\varphi,1_{\mathrm{T}}\rangle + \sum_{\iota=1}^{n-1}(n-\iota)\,r_{\varphi\chi^{\iota}}].$$

Et l'indice $\mathfrak{a}_{\varphi}$ est la ℓ-valuation du quotient $(\mathfrak{E}/\mathfrak{W}\mathfrak{J})^{\varphi}$ de la φ-composante du groupe $\mathfrak{E}/\mathfrak{W}$ par son sous-groupe engendré par les unités invariantes par C.

5. Applications.

Illustrons tout d'abord le théorème 6 par l'exemple des extensions métacycliques de degré $\ell^{s}n$ sur le corps des rationnels ou un corps quadratique imaginaire H. D'après la proposition 11, deux cas se présentent suivant que l'extension cyclique K/H est ramifiée ou non à l'infini :

PROPOSITION 12. – *Dans une extension métacyclique de degré $\ell^{s}n$ sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire* H, *les ℓ-groupes de classes sont liés par l'identité :*

$$\frac{|\mathfrak{H}(\mathrm{N})|}{|\mathfrak{H}(\mathrm{L})|^{n}} = \frac{|\mathfrak{H}(\mathrm{K})|}{|\mathfrak{H}(\mathrm{H})|^{n}}\;|\mathfrak{E}/\mathfrak{E}_{0}\mathfrak{J}|\;\ell^{-s\,\mathfrak{b}(n)}\;;$$

et la quantité $\mathfrak{d}(n)$ *est un polynôme en* n *égal à* $\frac{1}{4}(n^2+2n-4)$ *ou à* $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ *suivant que l'extension est ramifiée ou non à l'infini.*

Nous retrouvons ainsi, en le généralisant, le résultat établi pour $s = 1$ par N. Moser dans [12]. Le calcul de l'indice $|\mathfrak{E}/\mathfrak{E}_0\mathfrak{F}|$ peut être effectué via le théorème 5 à partir d'une description effective de la ℓ-structure galoisienne du groupe des unités (cf. [9]).

Montrons pour conclure comment les formules des genres et des classes ambiges permettent de préciser les conditions d'annulation du ℓ-groupe des classes.

Considérons pour cela une extension métacyclique de degré $\ell^s n$ sur un corps de nombres H et supposons que son ℓ-groupe des classes $\mathfrak{H}$ soit réduit à 1. Notons K l'unique sous-corps de N qui est de degré n sur H, puis N′ la sous-extension cyclique maximale de N/K qui est non ramifiée sur K. La formule des genres appliquée à l'extension cyclique totalement ramifiée N/N′ nous prouve que $\mathfrak{H}(\mathrm{N}')$ est nul. Le corps N′ est donc le ℓ-corps de classes de Hilbert de K, de sorte que le groupe $\mathfrak{H}(\mathrm{K})$, qui s'identifie à Gal(N′/K) par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin, est cyclique d'ordre $\ell^t = [\mathrm{N}':\mathrm{K}]$ et isotypique de caractère χ. Ainsi :

LEMME. — *Dans une extension métacyclique* N/H *de degré* $\ell^n s$, *si le ℓ-groupe des classes est trivial, le groupe* $\mathfrak{H}(\mathrm{K})$ *est cyclique d'ordre* ℓ^t *(pour un* $t \leqslant s$*) et isotypique de caractère* χ.

Cela étant, nous avons :

PROPOSITION 13 (critère d'annulation). — *Dans une extension métacyclique* N/H *de degré* $\ell^s n$, *l'identité* $\mathfrak{H} = 1$ *a lieu si et seulement si sont réalisées les conditions suivantes :*

(i) $q_\chi = r_{\chi^0}$; $n_\chi = p_\chi = r_{\chi^0} - s + k_\chi$; *et* $k = k_\chi \leqslant s$.

(ii) $q_{\chi^2} = r_\chi + k_\chi$; $n_{\chi^2} = p_{\chi^2} = r_\chi$.

(iii) $q_\psi = p_\psi = n_\psi = r_{\psi\chi^{-1}}$, *pour les caractères irréductibles* ψ *autres que* χ *et* χ^2.

Démonstration. – Supposons $\mathfrak{H} = 1$. D'après le lemme nous avons $k = k_\chi \leqslant s$; d'où, en appliquant la formule des genres (théorème 3) : $n_\psi = r_{\psi\chi^{-1}}$ pour $\psi \neq \chi$, et $n_\chi = r_{\chi^0} + k_\chi - s$. Par ailleurs, toute classe ambige étant évidemment représentée par un idéal ambige, la proposition 3 nous donne $p_\psi = n_\psi$, pour tout caractère ψ. La valeur de q_ψ résulte alors immédiatement de la formule du nombre de classes (théorème 5).

Réciproquement, lorsque ces identités sont vérifiées, la formule des genres nous donne $\widetilde{\rho} = 0$, ce qui suffit à entraîner $h = 0$.

Compte tenu des contraintes de rang sur les unités (proposition 11) le critère précédent impose des conditions sévères sur la ramification. Il peut d'ailleurs être sensiblement affiné sous la condition normique $E_H \subset N_{L/H}(L^\times)$. En effet, la formule des genres donne dans ce cas : $\widetilde{\rho}_{\chi^0} = k_{\chi^0} + r_{\chi^{-1}} - n_{\chi^0} = k_{\chi^0} + r_{\chi^{-1}}$; de sorte que $\widetilde{\rho}_{\chi^0} = 0$ entraîne $k_{\chi^0} = r_{\chi^{-1}} = 0$, et cette dernière égalité exprime le fait qu'aucun idéal ramifié dans N/K ne se décompose complètement dans K/H (cf. proposition 6). En particulier :

PROPOSITION 14. – *Soit* N/H *une extension métacyclique de degré $\ell^s n$ sur le corps des nombres rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire (distinct de* $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ *si* ℓ *vaut 3). Si le* ℓ*-groupe des classes* $\mathfrak{H}$ (L) *est trivial, aucun des idéaux premiers qui se ramifient dans* N/K *n'est complètement décomposé dans* K/H.

COROLLAIRE. – *Lorsque* N/H *est une extension diédrale de degré* $2\ell^s$ *sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire (distinct de* $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ *si* ℓ *vaut 3), les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le groupe des* ℓ*-classes* $\mathfrak{H}$ (N) *est trivial.*

(ii) *Le groupe* $\mathfrak{H}$ (L) *est trivial et les* ℓ*-classes de* $\mathfrak{H}$ (K) *capitulent dans* $\mathfrak{H}$ (N).

Démonstration. – La formule des classes (théorème 4) s'écrit $h_\chi = h_{\chi^0} + k_\chi - q_{\chi^0}$ et la condition de capitulation s'écrit précisément $k_\chi \leqslant q_{\chi^0}$ (scolie à la proposition 6).

Ce corollaire, qui étend un résultat de Honda et Kobayashi (cf. [11]), tombe en défaut lorsque la condition normique $E_H \subset N_{L/K}(L^\times)$

n'est pas vérifiée. il suffit pour s'en convaincre de considérer les corps $\mathbf{Q}[\sqrt[5]{m}, \zeta_5]$ comme extensions diédrales de degré 10 sur le corps quadratique $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$ (cf. [13] et [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. CALLAHAN, The 3-class of non Galois cubic fields, *Mathematika,* 21 (1974).

[2] C. CHEVALLEY, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, *J. of the Fac. of Sc.,* Tokyo, t. 2 (1933).

[3] F. GERTH III, On ℓ-class group of certain number fields, *Mathematika,* 23 (1976).

[4] R. GILLARD, $\mathbf{Z}_\ell$-extensions, fonctions Lp-adiques et unités cyclotomiques, Séminaire de Théorie des nombres, Bordeaux (1976-1977).

[5] G. GRAS, Nombre de φ-classes invariantes. Application aux classes des corps abéliens, *Bull. Soc. Math. France,* 106 (1978), 337-364.

[6] G. GRAS, Sur les ℓ-classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de $\mathbf{Q}$ de degré premier impair ℓ, à clôture galoisienne diédrale de degré 2ℓ, *J. Math. Soc. Japan,* t. 26, n° 4 (1974).

[7] F. HALTER-KOCH, Einheiten und Divisorenklassen in Galois'schen algebraischen Zahlkörpern mit Diedergruppe der Ordnung 2ℓ für eine ungerade Primzahl ℓ, *Acta Arithmetica,* 33 (1977).

[8] K. IIMURA, A criterion for the class number of a pure quintic field to be divisible by 5, *J. angew. Math.,* t. 292 (1977).

[9] J.F. JAULENT, Structures galoisiennes dans les extensions métabéliennes, Thèse, 3ème cycle, Besançon (1979).

[10] W. JEHNE, Uber die Einheiten und Divisorenklassengruppe von reellen Frobeniuskörpern von Maximaltyp, *Math. Zeit.,* 152 (1977), 223-252.

[11] S. KOBAYASHI, On the ℓ-class rank in some algebraic number field, *J. Math. Soc. Japan,* t. 26 (1974).

[12] N. MOSER et F. HALTER-KOCH, Sur le nombre de classes de certaines extensions métacycliques sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire, *J. Math. Soc. Japan,* t. 90 (1978).

[13] C.J. PARRY, Class number relations in pure quintic fields, *Symposia Mathematica,* t. 15 (1975).

[14] C.D. WALTER, A class number relation in Frobenius extensions of number fields, *Acta Arithmetica,* t. 24 (1977).

[15] C.D. WALTER, Brauer's class number relation, *Acta Arithmetica,* t. 35 (1979).

[16] C.D. WALTER, The ambiguous class group and the genus group of certain non-normal extensions, *Mathematica,* 26 (1979), 113-124.

Manuscrit reçu le 20 mai 1980.

Jean-François JAULENT,
Université de Franche-Comté
Besançon
Faculté des Sciences
Mathématiques
(E.R.A. n° 070654)
25030 Besançon Cedex.