

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN MERRIEN

Applications des faisceaux analytiques semi-cohérents aux fonctions différentiables

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 1 (1981), p. 63-82

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_63_0

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DES FAISCEAUX ANALYTIQUES SEMI-COHÉRENTS AUX FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Jean MERRIEN

Dans cet article nous appliquons les résultats obtenus dans «Faisceaux analytiques semi-cohérents» ([5]) à l'étude des fonctions différentiables.

Les trois premiers paragraphes conduisent à un théorème de division par un polynôme distingué P , sur une partie Λ compatible avec P , d'une fonction de classe C^∞ sur $\bar{\Lambda}$ et plate sur $\partial\Lambda$, avec des conditions de platitude sur le bord pour le quotient et le reste (théorème 3.12).

Le paragraphe 4 donne un théorème de division par des fonctions Nash-analytiques, analogue au théorème de division de B. Malgrange, mais avec des conditions de platitude sur le bord (théorème 4.10). Ceci est le résultat principal de l'article.

Le paragraphe 5 introduit le formalisme des faisceaux différentiables de Fréchet, utile pour exprimer les propriétés de fermeture dans les modules différentiables.

Dans le paragraphe 6 on étudie les faisceaux différentiables engendrés par les faisceaux analytiques semi-cohérents. On donne en particulier (théorème 6.2) une description du sous-module de $\mathcal{E}(\Omega)^P$ engendré par un sous-faisceau analytique \mathcal{R} de \mathcal{O}^P , quand $\mathcal{O}^P/\mathcal{R}$ est semi-cohérent. Cela s'applique, par exemple, à la description des fonctions de classe C^∞ nulles sur un ensemble semi-analytique.

Dans le paragraphe 7 on étudie des propriétés des fonctions différentiables composées par un morphisme analytique propre et fini. On obtient des résultats analogues, sous des hypothèses différentes, à ceux de G. Glaeser [1].

1. Préliminaires.

Pour les résultats sur les fonctions différentiables et les théorèmes de Whitney nous renvoyons à [6].

Pour x dans \mathbf{R}^n , \mathcal{G}_x est l'anneau des germes en x de fonctions réelles de classe C^∞ . Pour Ω ouvert de \mathbf{R}^n , $\mathcal{G}(\Omega)$ est l'anneau des fonctions de classe C^∞ sur Ω .

Si X est une partie de \mathbf{R}^n , $J(X)$ est l'ensemble des jets d'ordre infini sur X , ou encore l'ensemble des champs sur X de séries formelles à coefficients réels et à n variables. Un élément de $J(X)$ est plat en $x \in X$ si le jet est nul en x .

Si X est localement fermé, $\mathfrak{W}(X)$ désigne le sous ensemble de $J(X)$ formé des fonctions de Whitney sur X , i.e. des jets prolongeables en une fonction de classe C^∞ sur un voisinage ouvert de X . Si X est ouvert, $\mathfrak{W}(X) = \mathcal{G}(X)$.

Si X est compact, et si $f = (f_k)_{k \in \mathbf{N}^n}$ appartient à $\mathfrak{W}(X)$ on note, pour $m \in \mathbf{N}$:

$$|f|_m^X = \sup_{\substack{|k| \leq m \\ x \in X}} |f^k(x)|$$

$$\|f\|_m^X = |f|_m^X + \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y \\ |k| \leq m}} \left| \frac{f^k(y) - \sum_{|k+q| \leq m} \frac{(y-x)^q}{q!} f^{k+q}(x)}{\|x-y\|^{m-|k|}} \right|.$$

Alors $\mathfrak{W}(X)$ est un espace de Fréchet pour la famille de normes $\|\cdot\|_m^X$. Les normes $|\cdot|_m^X$ et $\|\cdot\|_m^X$ ne sont pas, en général, équivalentes. Cependant, si X est convexe, il existe C , dépendant uniquement de m et n , avec $\|\cdot\|_m^X \leq C |\cdot|_m^X$.

Si X est localement fermé, on note $\mathcal{J}(\partial X, \bar{X})$ l'idéal de $\mathfrak{W}(\bar{X})$ formé des jets nuls sur ∂X .

Avec ces notations on a :

THEOREME 1.1. — Soit X une partie s.a.l.f. de \mathbf{R}^n , $f \in \mathcal{N}(X)$ et $\varphi \in \mathcal{J}(\partial X, \bar{X})$. Alors le jet égal à φf sur X et à 0 sur ∂X appartient à $\mathfrak{W}(\bar{X})$.

Démonstration. — La question étant locale, on se place au voisinage d'un point de ∂X . D'après I.5.1 de [5], on peut supposer que f est prolongé en un élément de $\mathcal{N}(\Omega)$, Ω ouvert semi-analytique contenant X . On peut, puisque $\mathbb{C} \cap \bar{X} \subset \partial X$ et que \bar{X} et $\mathbb{C} \cap \Omega$ sont régulièrement situés, prolonger φ en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n , plate sur $\mathbb{C} \cap \Omega$.

Alors, d'après I.2.1 de [5], la fonction $f\varphi$, de classe C^∞ sur Ω , se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n nulle sur $\mathbb{C} \cap \Omega$. D'où 1.1.

Pour démontrer 3.1 nous aurons à utiliser un cas très particulier du théorème de préparation différentiable ([3] ou [4]). Nous redémontrons rapidement ce résultat au paragraphe 2, en suivant les idées de [1]. Le théorème 3.1 permet d'ailleurs très facilement de démontrer le théorème de préparation, du moins sous la forme initiale de Malgrange.

2. Division générique.

Soit $Q(v, t) = t^q + \sum_{i=1}^q v_i t^{q-i}$ le polynôme générique sur $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$. Soit \mathbb{R}^m un espace auxiliaire et Π la projection de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$.

On pose $V = \{(y, v, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} ; \frac{\partial^i Q}{\partial t^i}(y, v, t) = 0 \text{ pour } i \in [0, q-1]\}$, i.e. l'ensemble des points où Q a une racine d'ordre q , et $V' = \Pi(V)$, homéomorphe à V par $\Pi \left(t = -\frac{v_1}{q} \text{ sur } V \right)$.

LEMME 2.1. — *Pour tout $\varphi \in \mathfrak{A}(V)$, il existe $\psi \in \mathfrak{A}(V)$ et $\chi_i \in \mathfrak{A}(V')$, $i \in [1, q]$, avec $\varphi = Q\psi + \sum_{i=1}^q \chi_i t^{q-i}$.*

Démonstration. — Soit $\sigma' : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$ défini par : $\sigma'(y, w_1, \dots, w_q) = (y, -\sigma_1(w), \sigma_2(w), \dots, (-1)^q \sigma_q(w))$, où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires.

Puis :

$$\sigma = \sigma' \times I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}.$$

$$W = \sigma^{-1}(V) = \{(y, w, t) ; t = w_i \text{ pour } i \in [1, q]\}, \quad W' = \Pi(W)$$

$$Q^* = Q \circ \sigma = \prod_{i=1}^q (t - w_i)$$

$\sigma|_W$ est un homéomorphisme de W sur V .

Supposons φ prolongé en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ et soit $\varphi^* = \varphi \circ \sigma$.

Par division successive par les $(t - w_i)$, il existe ψ^* dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R})$ et χ_i^* dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)$, symétriques en les w_i , avec : $\varphi^* = Q^* \psi^* + \sum_{i=1}^q \chi_i^* t^{q-i}$.

Puisque ψ^* et χ_i^* sont symétriques, il existe ψ dans $J(V)$ et χ_i dans $J(V')$ avec :

$$\psi^* = \psi \circ \sigma \quad \text{sur } W$$

$$\chi_i^* = \chi_i \circ \sigma' \quad \text{sur } W'.$$

D'où $\varphi \circ \sigma = (Q\psi + \sum_{i=1}^q \chi_i t^{q-i}) \circ \sigma$ sur W et donc

$$\varphi = Q\psi + \sum_{i=1}^q \chi_i t^{q-i}$$

sur V , car la composition par σ est injective.

Il reste à montrer que $\psi \in \mathfrak{A}(V)$ et $\chi_i \in \mathfrak{A}(V')$. Cela se fait en suivant les idées de [1], dans un cas très simple.

On remarque d'abord que, pour tout indice de dérivation α , on a $(D^\alpha \psi) \circ \sigma \in \mathfrak{A}(W)$ et $(D^\alpha \chi_i) \circ \sigma \in \mathfrak{A}(W')$, ce qui implique en particulier la continuité des composantes de ψ et χ_i .

Puis on remarque que, pour tout (a, b) de W^2 , on a $d(\sigma(a), \sigma(b)) \geq d(a, b)$. Or

$$(\psi(\sigma(b)) - \sum_{|\mathfrak{R}| < m} \frac{(\sigma(b) - \sigma(a))^{\mathfrak{R}}}{\mathfrak{R}!} \psi^{\mathfrak{R}}(\sigma(a)))$$

ne diffère de

$$((\psi \circ \sigma)(b) - \sum_{|\mathfrak{R}| < m} \frac{(b - a)^{\mathfrak{R}}}{\mathfrak{R}!} (\psi \circ \sigma)^{\mathfrak{R}}(a))$$

que par des termes de degrés supérieurs à m en $(b - a)$ et à coefficients bornés sur tout compact de W .

Cette quantité est donc un $o(\|a - b\|^m)$, et donc aussi un $o(\|\sigma(a) - \sigma(b)\|^m)$, sur tout compact de V .

Cela montre que ψ appartient à $\mathfrak{A}(V)$. De même χ_i appartient à $\mathfrak{A}(V')$.

COROLLAIRE 2.2. — Soit K un compact de V , $K' = \Pi(K)$.

Alors l'application de $\mathfrak{A}(K) \times \mathfrak{A}(K')^q$ dans $\mathfrak{A}(K)$, qui à (ψ, χ_i) fait correspondre $Q\psi + \sum_{i=1}^q \chi_i t^{q-i}$, est un isomorphisme d'espaces de Fréchet.

Démonstration. — L'application est évidemment continue. Elle est surjective d'après 2.1. Elle est injective d'après l'unicité de la division formelle, puisque, en tout point de V , Q est distingué.

3. Division d'un élément de $\mathcal{J}(\partial\Lambda, \bar{\Lambda})$.

Nous reprenons les notations des paragraphes II.1 et II.2 de [5] : $P(x', x_n)$ est un polynôme unitaire, Λ une partie s.a.l.f. de \mathbb{R}^n compatible avec P , de degré q , et Λ' sa projection.

Avec ces notations on a le théorème suivant, analogue C^∞ de II.2.4 de [5].

THEOREME 3.1. — Soit $\varphi \in \mathcal{J}(\partial\Lambda, \bar{\Lambda})$.

Alors il existe ψ dans $\mathcal{J}(\partial\Lambda, \bar{\Lambda})$ et χ_i dans $\mathcal{J}(\partial\Lambda', \bar{\Lambda}')$, $i \in [1, q]$, avec : $\varphi = P\psi + \sum_{i=1}^q \chi_i x_n^{q-i}$.

Ces éléments sont uniques.

Démonstration. — L'unicité est claire puisque P est régulier d'ordre q sur Λ .

D'après II.1.1. de [5], on a $P = RS$, où R et S sont des éléments de $\mathcal{N}(\Lambda')$ [X_n], R distingué de degré q sur Λ , S ne s'annulant pas sur Λ .

On écrit : $R = x_n^q + \sum_{i=1}^q a_i x_n^{q-i}$, $a_i \in \mathcal{N}(\Lambda')$.

Le théorème de préparation formel implique l'existence d'éléments ψ dans $J(\Lambda)$ et χ_i dans $J(\Lambda')$ avec : $\varphi = R\psi + \sum_{i=1}^q \chi_i x_n^{q-i}$ dans $J(\Lambda)$.

On va montrer que l'élément ψ (resp. χ_i) prolongé par 0 sur $\partial\Lambda$ (resp. $\partial\Lambda'$) appartient à $\mathfrak{A}(\bar{\Lambda})$ (resp. $\mathfrak{A}(\bar{\Lambda}')$). Le théorème en résultera puisque, S étant inversible dans $\mathcal{N}(\Lambda)$, $\frac{\psi}{S}$ appartient à $\mathfrak{A}(\partial\Lambda, \bar{\Lambda})$ d'après 1.1.

On va montrer successivement :

1) Il existe des constantes $c, \alpha, c', \alpha', c'', \alpha'', \gamma_m, \rho_m$ ($m \in \mathbf{N}$), positives, telles que :

(1) Si $x \in \Lambda$ et $\|y - x\| \leq 2C d(x, \partial\Lambda)^\alpha$, alors
 $d(y, \partial\Lambda) \leq 2d(x, \partial\Lambda)$.

(2) Si $x \in \Lambda$ et $x' = \Pi(x)$ on a

$$\Pi(B_x \cap \Lambda) \supset B_{x'} \cap \Lambda' \supset \Pi(B_x'' \cap \Lambda)$$

où B_x (resp. $B_{x'}, B_x''$) est la boule fermée de centre x et de rayon $Cd(x, \partial\Lambda)^\alpha$ (resp. de centre x' et de rayon $C'd(x', \partial\Lambda')^{\alpha'}$, resp. de centre x et de rayon $C''d(x, \partial\Lambda)^{\alpha''}$).

(3) $\|a\|_m^{B_{x'} \cap \Lambda'} \leq \gamma_m d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_m}$ où $a = (a_1, \dots, a_q)$.

2) $\psi|_{B_x \cap \Lambda} \in \mathfrak{A}(B_x \cap \Lambda)$, $\chi_i|_{B_{x'} \cap \Lambda'} \in \mathfrak{A}(B_{x'} \cap \Lambda')$, $\forall x \in \Lambda$ et, pour tout $(m, r) \in \mathbf{N}^2$, il existe une constante positive $C_{m,r}$ avec :

$$\left. \begin{aligned} \|\psi\|_m^{B_x \cap \Lambda} &\leq C_{m,r} d(x, \partial\Lambda)^r \\ \|\chi_i\|_m^{B_{x'} \cap \Lambda'} &\leq C_{m,r} d(x, \partial\Lambda)^r \end{aligned} \right\} \forall x \in \Lambda \quad (4)$$

Démonstration du 1. — Le (1) est immédiat.

Puisque $a_i \in \mathcal{N}(\Lambda')$, il existe un ouvert semi-analytique $\Omega' \supset \Lambda'$, tel que a_i se prolonge en un élément de $\mathcal{N}(\Omega')$.

On peut prendre C' et α' tels que $B_{x'} \subset \Omega'$ pour tout x' de Λ' , et que $d(y', \partial\Omega') \geq \gamma d(x', \partial\Omega')^\rho$, pour tout y' de $B_{x'}$, avec des constantes γ et ρ , positives, indépendantes de x' .

On déduit alors de I.2.1 de [5] l'existence de constantes positives γ'_m et ρ_m avec : $|a|_m^{B_{x'}} \leq \gamma'_m d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_m}$, $m \in \mathbf{N}$. Alors il existe γ_m positif avec : $\|a\|_m^{B_{x'}} \leq \gamma_m d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_m}$ d'où l'inégalité (3).

Si $x \in \Lambda$, on a $x_n = -\frac{a_1(x')}{q}$. Donc si x et y appartiennent à Λ et si $y' = \Pi(y) \in B'_{x'}$, $x' = \Pi(x)$, on a :

$$|y_n - x_n| \leq \frac{1}{q} \|x' - y'\| |a_1|_1^{B'_{x'}} \leq \frac{\gamma_1}{q} \|x' - y'\| d(x', \partial\Lambda')^{-\rho_1}.$$

On peut alors trouver C' et α' de manière à avoir la première inclusion de (2) (on utilise les inégalités II.2.2.2 de [5]). La seconde inclusion de (2) résulte des mêmes inégalités.

Démonstration du 2. – On va utiliser 2.2 en prenant $m = n - 1$, $y = x'$, $t = x_n$.

On suppose que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Pour chaque x de Λ , on prend une fonction u_x dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur B_x et nulle en dehors de $B(x, 2Cd(x, \partial\Lambda)^\alpha)$, et telle que $|u_x|_m^{\mathbb{R}^n} \leq C_m d(x, \partial\Lambda)^{-\alpha m}$, avec des constantes C_m .

La platitude de φ sur $\partial\Lambda$, et l'inégalité (1), montre alors que, pour tout (m, r) de \mathbf{N}^2 il existe des constantes $C'_{m,r}$ avec :

$$\|u_x \varphi\|_m^{\mathbb{R}^n} \leq C'_{m,r} d(x, \partial\Lambda)^r, \quad \forall x \in \Lambda. \tag{5}$$

Considérons les applications A (resp. A') définies au voisinage de Λ (resp. Λ') par :

$$\begin{aligned} A(x', x_n) &= (x', a_1(x'), \dots, a_q(x'), x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \\ \text{(resp. } A'(x') &= (x', a_1(x'), \dots, a_q(x')) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^q). \end{aligned}$$

Puisque les a_i sont bornés, il existe un compact K de V tel que $A(\Lambda) \subset K$ et $A'(\Lambda') \subset K'$ (les notations sont celles de 2.2).

On considère $u_x \varphi$ comme fonction de (x', v, x_n) indépendante de v .

D'après 2.2 il existe $\bar{\psi}_x$ dans $\mathfrak{E}\mathfrak{O}(K)$ et $\bar{\chi}_{ix}$ dans $\mathfrak{E}\mathfrak{O}(K')$, $i \in [1, q]$, avec :

$$u_x \varphi = Q\bar{\psi}_x + \sum_{i=1}^q \bar{\chi}_{ix} x_n^{q-i} \text{ dans } \mathfrak{E}\mathfrak{O}(K). \tag{6}$$

De plus la continuité de 2.2 montre qu'il existe, pour tout entier s , des constantes C'_s et m_s avec :

$$\begin{cases} \|\bar{\psi}_x\|_s^K \leq C'_s \|u_x \varphi\|_{m_s}^{\mathbb{R}^n} \\ \|\bar{\chi}_{ix}\|_s^{K'} \leq C'_s \|u_x \varphi\|_{m_s}^{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

De (5) on déduit alors, pour tout $(s, r) \in \mathbf{N}^2$:

$$\left. \begin{aligned} \|\bar{\psi}_x\|_s^K &\leq C'_s C'_{m_s, r} d(x, \partial\Lambda)^r \\ \|\bar{\chi}_{ix}\|_s^{K'} &\leq C'_s C'_{m_s, r} d(x, \partial\Lambda)^r. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

On pose $\psi_x = \bar{\psi}_x \circ A$ sur Λ , $\chi_{ix} = \bar{\chi}_{ix} \circ A'$ sur Λ' . On a $\psi_x \in \mathfrak{W}(\Lambda)$ et $\chi_{ix} \in \mathfrak{W}(\Lambda')$.

En composant (6) par A , et puisque $Q \circ A = R$, on a :

$$u_x \varphi = R\psi_x + \sum_{i=1}^q \chi_{ix} x_n^{q-i} \text{ sur } \Lambda.$$

Puisque u_x vaut 1 sur B_x on a :

$$\psi_x|_{B_x \cap \Lambda} = \psi|_{B_x \cap \Lambda} \quad \text{et} \quad \chi_{ix}|_{B'_x \cap \Lambda'} = \chi_i|_{B'_x \cap \Lambda'}.$$

On va majorer $\|\psi_x\|_m^{B'_x \cap \Lambda}$ et $\|\chi_{ix}\|_m^{B'_x \cap \Lambda'}$.

Pour cela, on remarque que, si F est un compact de \mathbf{R}^n , f un élément de $\mathfrak{W}(F)^p$, et g un élément de $\mathfrak{W}(f(F))$, il existe des constantes C''_m , ne dépendant que de n , p et du diamètre de F , telles que : $\|g \circ f\|_m^F \leq C''_m \|g\|_m^{f(F)} \sup_{k < m} (\|f\|_m^F)^k$. Il en résulte que

$$\left. \begin{aligned} \|\psi\|_m^{B'_x \cap \Lambda} &\leq C''_m \|\bar{\psi}_x\|_m^K \sup_{k < m} (\|A\|_m^{B'_x \cap \Lambda})^k \\ \|\chi_i\|_m^{B'_x \cap \Lambda'} &\leq C''_m \|\bar{\chi}_{ix}\|_m^{K'} \sup_{k < m} (\|A\|_m^{B'_x \cap \Lambda'})^k. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Alors les inégalités (4) du 2) résultent de (8), (7), (3) et des inégalités II.2.2.2 de [5].

Pour terminer la démonstration du 3.1, il suffit d'appliquer le lemme suivant, de démonstration classique :

LEMME 3.2. — Soit F une partie localement fermée de \mathbf{R}^n , $\Psi \in J(\bar{F})$ tels que :

$$1) \quad \psi|_{\partial F} = 0, \quad \psi|_F \in \mathfrak{W}(F).$$

2) il existe C et α positifs et des constantes $C_{m,r}$ avec : $\forall m, \forall r, \forall x \in F, \|\psi\|_m^{B_x \cap F} \leq C_{m,r} d(x, \partial F)^r$, où

$$B_x = \{y \in \mathbf{R}^n ; \|y - x\| \leq Cd(x, \partial F)^\alpha\}.$$

Alors $\psi \in \mathfrak{W}(\bar{F})$.

4. Division par des fonctions Nash-analytiques.

THEOREME 4.1. — Soit X une partie s.a.l.f. de \mathbf{R}^n , et f_j , $j \in [1, s]$, des éléments de $\mathcal{N}(X)^r$. Pour tout élément φ de $\mathcal{J}(\partial X, \bar{X})^r$, appartenant ponctuellement sur X au sous module de $J(X)^r$ engendré par les f_j , il existe $\alpha_j \in \mathcal{J}(\partial X, \bar{X})$, $j \in [1, s]$, avec $\varphi = \sum_{j=1}^s \alpha_j f_j$ sur X .

Remarques 4.2.

1) La condition d'appartenance ponctuelle signifie qu'il existe α_j dans $J(X)$ avec $\varphi = \sum_{j=1}^s \alpha_j f_j$.

2) Le théorème de division de Malgrange [2], implique, si X est ouvert, qu'il existe α_j dans $\mathcal{E}(X)$ avec $\varphi = \sum_{j=1}^s \alpha_j f_j$.

3) La condition supplémentaire de platitude sur le bord sera essentielle par la suite (Théorème 6.2).

4) Il résulte de 1.1 que chaque terme $\alpha_j f_j$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur \mathbf{R}^n plate sur ∂X .

Démonstration de 4.1. — On raisonne par récurrence sur n . Le résultat est évident pour $n = 0$. On le suppose vrai dans \mathbf{R}^{n-1} .

Il suffit de montrer 4.1 localement, c'est-à-dire de montrer que pour tout x_0 de \bar{X} il existe un ouvert $\Omega_0 \ni x_0$ et des $\alpha_j \in \mathcal{J}(\partial X \cap \Omega_0, \bar{X} \cap \Omega_0)$ avec $\varphi = \sum_{j=1}^s \alpha_j f_j$ sur $X \cap \Omega_0$. En effet, le résultat global s'obtient alors par une partition de l'unité.

On va donc raisonner au voisinage de 0. La démonstration est analogue à celles de II.4.1 et II.5.1 de [5].

a) On peut supposer X connexe au voisinage de 0.

En effet supposons $X = X_1 \cup X_2$, X_1 et X_2 s.a.l.f. avec $\bar{X}_1 \cap \bar{X}_2 \subset \partial X_1 \cap \partial X_2$, $\partial X_1 \subset \partial X$, $\partial X_2 \subset \partial X$. Alors, si le théorème est vrai pour X_1 et X_2 , il l'est pour $X_1 \cup X_2$:

Si $\varphi = \sum_{j=1}^s \alpha_j f_j$ sur X_1 et $\varphi = \sum_{j=1}^s \beta_j f_j$ sur X_2 avec α_j dans $\mathcal{J}(\partial X_1, \bar{X}_1)$ et β_j dans $\mathcal{J}(\partial X_2, \bar{X}_2)$, il existe γ_j dans

$\mathfrak{A}(\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2)$ coïncidant avec α_j sur \overline{X}_1 et β_j sur \overline{X}_2 (régulière situation de \overline{X}_1 et \overline{X}_2). On a alors $\varphi = \sum_{j=1}^s \gamma_j f_j$ sur X , avec $\gamma_j \in \mathcal{I}(\partial X, \overline{X})$.

On montre ensuite, comme dans les points b), c) et d) de II.4.1 de [5], qu'il suffit de montrer 4.1, au voisinage de 0, sous l'hypothèse suivante : $r \leq s$ et $[f_1, \dots, f_r] = \text{PI}_r$, où P est un polynôme distingué en x_n .

On va montrer, avec cette hypothèse :

LEMME 4.3. — Soit $\Lambda \subset X$ une partie s.a.l.f. compatible avec P. Alors pour tout élément φ_Λ de $\mathcal{I}(\partial\Lambda, \overline{\Lambda})^r$, appartenant ponctuellement au sous module engendré par les f_j , il existe α_j dans $\mathcal{I}(\partial\Lambda, \overline{\Lambda})$ avec $\varphi_\Lambda = \sum_{j=1}^s \alpha_j f_j$ sur Λ .

Montrons comment 4.3 implique 4.1.

D'après II.2.3 de [5], il existe une partition de $X \cap V(P)$, dans un voisinage de 0, en parties s.a.l.f. Λ_k , $k \in [1, N]$, compatibles avec P, telle que : $\partial\Lambda_k \subset (\bigcup_{\varrho < k} \Lambda_\varrho) \cup \partial X$ pour $k \in [1, N]$.

On va montrer, par récurrence sur k , que, si φ vérifie les hypothèses de 4.1, φ est égal modulo $\mathcal{I}(\partial X, \overline{X})$ (f_1, \dots, f_s) à un élément φ_k de $\mathfrak{A}(\overline{X})$ plat sur $(\bigcup_{\varrho < k} \Lambda_\varrho) \cup \partial X$.

C'est vrai pour $k = 1$, puisque φ est plat sur ∂X ($\varphi = \varphi_1$). Admettons le résultat à l'ordre k , et montrons le à l'ordre $k + 1$. On applique 4.3 à φ_k sur Λ_k : il existe α_{jk} dans $\mathcal{I}(\partial\Lambda_k, \overline{\Lambda}_k)$ avec $\varphi_k = \sum_{j=1}^s \alpha_{jk} f_j$ sur Λ_k .

Puisque les deux fermés $\overline{\Lambda}_k$ et $(\bigcup_{\varrho < k} \Lambda_\varrho) \cup \partial X$ sont régulièrement situés et que leur intersection est contenue dans $\partial\Lambda_k$, il existe β_{jk} dans $\mathfrak{A}(\overline{X})$, plat sur $(\bigcup_{\varrho < k} \Lambda_\varrho) \cup \partial X$ et égal à α_{jk} sur $\overline{\Lambda}_k$.

Posons $\varphi_{k+1} = \varphi_k - \sum_{j=1}^s \beta_{jk} f_j$ dans $\mathfrak{A}(\overline{X})$. Cet élément est plat sur $(\bigcup_{\varrho < k} \Lambda_\varrho) \cup \partial X$ par construction, et égal à φ modulo $\mathcal{I}(\partial X, \overline{X})$ (f_1, \dots, f_s). Donc il vérifie la récurrence à l'ordre $k + 1$.

A l'ordre $N + 1$ on obtient un élément φ_{N+1} plat sur $\bar{X} \cap V(P)$. Puisque $[f_1, \dots, f_r] = \text{PI}_r$, l'inégalité de Łojasiewicz montre que φ_{N+1} appartient à $\mathcal{H}(\partial X, \bar{X})(f_1, \dots, f_r)$. Donc φ appartient à $\mathcal{H}(\partial X, \bar{X})(f_1, \dots, f_r)$, d'où 4.1.

Démonstration de 4.3. — C'est exactement celle qui a été faite en II.5.1 de [5] aux changements suivants près : remplacer $\hat{\mathcal{O}}(\Lambda)$ et $\hat{\mathcal{O}}(\Lambda')$ par $J(\Lambda)$ et $J(\Lambda')$; utiliser 3.1 au lieu de II.2.4 de [5] pour diviser φ par P ; utiliser l'hypothèse de récurrence de 4.1 au lieu de celle de II.5.1 de [5] ; écrire des identités modulo P $\mathcal{H}(\partial \Lambda, \bar{\Lambda})'$ au lieu de $P \mathcal{N}(\Lambda)'$.

Remarque 4.4. — On peut reprendre les démonstrations précédentes dans le cas de fonctions de classe C^p , p fini, en utilisant la remarque I.2.4 de [5].

On obtient alors la variante suivante du théorème 4.1 :

Soit X une partie s.a.l.f. relativement compacte de \mathbb{R}^n , et f_j , $j \in [1, s]$, des éléments de $\mathcal{N}(X)'$. Il existe des constantes α et β telles que, pour tout entier p et tout élément φ de $(\mathcal{R}^p(\bar{X}))'$ (fonctions de Whitney de classe C^p sur \bar{X}), plat sur ∂X et appartenant ponctuellement sur X au sous module engendré par les f_j , il existe $\alpha_j \in \mathcal{R}^{[p/\alpha] - \beta}(\bar{X})$, plat sur ∂X , avec $\varphi = \sum_{j=1}^s \alpha_j f_j$.

5. Faisceaux différentiables de Fréchet .

5.1. Notations. — Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , on note \mathcal{E}_Ω , ou simplement \mathcal{E} , le faisceau des germes de fonctions différentiables réelles sur Ω , de fibre \mathcal{E}_x en x .

Pour x dans \mathbb{R}^n , on note m_x^∞ l'idéal de \mathcal{E}_x formé des germes plats en x , \mathfrak{F}_x le quotient \mathcal{E}_x/m_x^∞ , anneau de séries formelles, et $T_x : \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathfrak{F}_x$ la surjection canonique.

On appelle faisceau différentiable un faisceau de \mathcal{E} -modules.

Si \mathcal{G} est un faisceau différentiable, on note \mathcal{G}_x (resp. $\mathcal{G}(X)$) la restriction de \mathcal{G} à X (resp. le module des sections sur X).

5.2. Topologies canoniques. — Soit \mathcal{G} un faisceau différentiable sur Ω .

5.2.1. Supposons d'abord \mathcal{G} engendré sur Ω par p éléments de $\mathcal{G}(\Omega)$. On a alors une suite exacte : $0 \rightarrow \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{E}^p \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$. D'où la suite exacte : $0 \rightarrow \mathfrak{S}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \rightarrow \mathcal{G}(\Omega) \rightarrow 0$.

On munit $\mathcal{G}(\Omega)$ de la topologie quotient de $\mathcal{E}(\Omega)^p/\mathfrak{S}(\Omega)$, où la topologie sur $\mathcal{E}(\Omega)$ est la topologie usuelle. Pour cette topologie, $\mathcal{G}(\Omega)$ est séparé si et seulement si $\mathfrak{S}(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}(\Omega)^p$, et dans ce cas $\mathcal{G}(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

La topologie quotient sur $\mathcal{G}(\Omega)$ est indépendante du système de générateurs [6].

5.2.2. On supposera désormais \mathcal{G} de type fini sur Ω . Alors ce qui a été fait en 5.2.1 s'applique sur tout ouvert relativement compact de Ω , et, puisque $\mathcal{G}(\Omega)$ est la limite projective des $\mathcal{G}(U)$, U relativement compact dans Ω , on munit $\mathcal{G}(\Omega)$ de la topologie limite projective des topologies des $\mathcal{G}(U)$. Cette topologie sera dite topologie canonique sur $\mathcal{G}(\Omega)$.

Si \mathcal{G} est engendré sur Ω par un nombre fini d'éléments, la topologie canonique de $\mathcal{G}(\Omega)$ coïncide avec celle définie en 5.2.1.

La topologie canonique de $\mathcal{G}(\Omega)$ peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes. Si elle est séparée, $\mathcal{G}(\Omega)$ est un espace de Fréchet.

5.3. Soit \mathcal{G}' un sous faisceau de \mathcal{G} . On vérifie qu'on peut définir un sous faisceau $\overline{\mathcal{G}'}$ de \mathcal{G} en posant, pour tout ouvert U de Ω , $\overline{\mathcal{G}'}(U) = \overline{\mathcal{G}'(U)}$ adhérence de $\mathcal{G}'(U)$ dans $\mathcal{G}(U)$. Le faisceau $\overline{\mathcal{G}'}$ est l'adhérence de \mathcal{G}' dans \mathcal{G} .

DEFINITION 5.4. — *Un faisceau différentiable \mathcal{G} sur Ω , de type fini, est un faisceau de Fréchet si $\mathcal{G}(\Omega)$ est séparé (donc est un espace de Fréchet).*

D'après 5.3, \mathcal{G} est de Fréchet si et seulement si $\mathcal{G}(U)$ est un espace de Fréchet pour tout U assez petit.

DEFINITION 5.5. — *Soit \mathcal{G} un faisceau différentiable, de type fini, sur Ω . On appelle faisceau séparé du faisceau \mathcal{G} , le faisceau de Fréchet $\tilde{\mathcal{G}}$, quotient de \mathcal{G} par l'adhérence du sous-faisceau nul.*

5.6. Propriétés. —

5.6.1. Le module des relations entre une famille finie de sections d'un faisceau de Fréchet est fermé.

5.6.2. Si \mathcal{G} est de la forme $\mathcal{E}^p/\mathcal{F}$, alors $\widetilde{\mathcal{G}}$ est égal à $\mathcal{E}^p/\overline{\mathcal{F}}$.

Dans ce cas, il résulte du théorème spectral de Whitney qu'un élément φ de $\mathcal{E}(\Omega)^p$ appartient à $\overline{\mathcal{F}}(\Omega)$ si et seulement si, pour tout x de Ω , $T_x \varphi \in T_x \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x + m_x^\infty \mathcal{E}_x^p / m_x^\infty \mathcal{E}_x^p$.

6. Faisceaux analytiques et faisceaux différentiables.

6.1. Soit \mathcal{N} un faisceau analytique, de type fini, sur Ω . Alors $\mathcal{N} \otimes_\theta \mathcal{E}$ est un faisceau différentiable de type fini.

Supposons qu'on a, sur Ω , une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0.$$

Puisque \mathcal{E} est plat sur \mathcal{O} on a aussi la suite exacte :

6.1.1. $0 \rightarrow \mathcal{R}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^p \rightarrow \mathcal{N} \otimes_\theta \mathcal{E} \rightarrow 0$

où $\mathcal{R}\mathcal{E}$ est le sous-faisceau de \mathcal{E}^p engendré par \mathcal{R} , de fibre $\mathcal{R}_x \mathcal{E}_x$.

On a aussi les suites exactes :

6.1.2. $0 \rightarrow \mathcal{R}\mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \rightarrow \mathcal{N} \otimes_\theta \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow 0$

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}(\Omega)} \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \rightarrow \widetilde{\mathcal{N} \otimes_\theta \mathcal{E}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Pour tout x de Ω on a aussi la suite exacte :

6.1.3. $0 \rightarrow \mathcal{R}_x \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^p \rightarrow \mathcal{N}_x \otimes_{\theta_x} \mathcal{F}_x \rightarrow 0$

puisque \mathcal{F}_x est plat sur \mathcal{O}_x .

Soit alors $m_i, i \in [1, p]$, les générateurs de \mathcal{N} , et \widetilde{m}_i les images de $m_i \otimes_{\theta(\Omega)} 1_{\mathcal{E}(\Omega)}$ dans $\widetilde{\mathcal{N} \otimes_\theta \mathcal{E}(\Omega)}$.

D'après 5.6.2 on a :

6.1.4. Un élément $\varphi = (\varphi_i)$ de $\mathcal{E}(\Omega)^p$ appartient à $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}(\Omega)}$, i.e. vérifie $\sum_{i=1}^p \varphi_i \widetilde{m}_i = 0$, si et seulement si, pour tout x de Ω , on a $T_x \varphi \in \mathcal{R}_x \mathcal{F}_x$, donc si et seulement si $\sum_{i=1}^p T_x \varphi_i m_{ix} \otimes_{\theta_x} 1_{\mathcal{F}_x} = 0$.

6.1.5. *Exemple.* — Soit X une partie semi-analytique de Ω et \mathcal{J} le faisceau analytique des germes nuls sur X . Un élément φ de $\mathcal{E}(\Omega)$ appartient à $\overline{\mathcal{J}\mathcal{E}}(\Omega)$ si et seulement si, pour tout x de Ω , $T_x\varphi \in \mathcal{J}_x \mathcal{F}_x$. On démontre comme dans [4] que ceci est réalisé si et seulement si φ est nulle sur X .

Dans le cas où X est un sous-ensemble analytique fermé de Ω , X est cohérent si et seulement si $\mathcal{J}\mathcal{E} = \overline{\mathcal{J}\mathcal{E}}$ ([4] et [6]).

THEOREME 6.2. — Soit \mathcal{R} un sous faisceau de type semi-fini de \mathcal{O}_Ω^p . Soit : $x_0 \in \Omega$; Λ_i , $i \in [1, q]$, une partition finie d'un voisinage U de x_0 en parties s.a.l.f. avec $\partial\Lambda_i \subset \bigcup_{j < i} \Lambda_j$; U_i , $i \in [1, q]$, un ouvert semi-analytique contenant Λ_i ; r_{ik} une famille finie d'éléments de $\mathcal{R}(U_i) \cap \mathcal{N}(U_i)^p$ engendrant \mathcal{R} sur Λ_i .

Alors un élément φ de $\mathcal{E}(U)^p$ appartient à $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$ si, et seulement si, il existe des α_{ik} dans $\mathcal{E}(U)$, plats sur $\mathcal{C} U_i$, et tels que :
$$\varphi = \sum_{i=1}^q \sum_k \alpha_{ik} r_{ik}.$$

Remarques. —

1) Pour tout x_0 de Ω , il existe Λ_i , U_i , r_{ik} satisfaisant aux hypothèses de 6.2. (Théorème II.6.8 de [5]).

2) D'après 1.1, chaque $\alpha_{ik} r_{ik}$, prolongé par 0 sur $\mathcal{C} U_i$, appartient à $\mathcal{E}(U)$.

3) D'après III.7.1, de [5] le résultat s'applique au cas de 6.1.5.

Démonstration de 6.2. — Tout élément de la forme $\sum_i \sum_k \alpha_{ik} r_{ik}$, avec α_{ik} plat sur $\mathcal{C} U_i$, appartient à $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$, d'après le théorème spectral de Whitney.

Soit, réciproquement, un élément φ de $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$. On définit les éléments α_{ik} par récurrence sur i .

Supposons qu'on ait défini, pour $j < i$, les α_{jk} , plats sur $\mathcal{C} U_j$, de telle sorte que $\varphi_i = \varphi - \sum_{j < i} \sum_k \alpha_{jk} r_{jk}$ soit plat sur $\bigcup_{j < i} \Lambda_j$ (c'est vrai pour $i = 1$, en posant $\Lambda_0 = \emptyset$).

L'élément φ_i de $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}(U)$ est plat sur $\partial\Lambda_i$ et appartient ponctuellement sur Λ_i au sous-module engendré par les $(r_{ik})_k$.

D'après 4.1 il existe des α_{ik} dans $\mathcal{Y}(\partial\Lambda_i, \bar{\Lambda}_i)$ avec $\varphi_i = \sum_k \alpha_{ik} r_{ik}$ sur Λ_i .

D'après la régulière situation de $\bar{\Lambda}_i$ et de $(\bigcup_{j<i} \Lambda_j) \cup (\bigcup U_i)$, dont l'intersection est contenue dans $\partial\Lambda_i$, on peut prolonger les $(\alpha_{ik})_k$ en des éléments de $\mathcal{E}(U)$, toujours notés α_{ik} , plats sur $(\bigcup_{j<i} \Lambda_j) \cup (\bigcup U_i)$.

Alors, $\varphi_{i+1} = \varphi_i - \sum_k \alpha_{ik} r_{ik} = \varphi - \sum_{j<i} \sum_k \alpha_{jk} r_{jk}$, est plat sur $\bigcup_{j<i} \Lambda_j$, ce qui montre la récurrence.

Pour $i = q + 1$, on obtient 6.2.

THEOREME 6.3. — *Soit \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux sous-faisceaux, de type semi-fini, de \mathcal{O}_Ω^p . Alors on a $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{R}'\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{R}\mathcal{E} + \mathcal{R}'\mathcal{E}}$.*

Démonstration. — Il est clair que $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{R}'\mathcal{E}} \subset \overline{\mathcal{R}\mathcal{E} + \mathcal{R}'\mathcal{E}}$.

Réciproquement, soit φ une section de $\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{R}'\mathcal{E}}$ sur un ouvert U . On raisonne au voisinage d'un x_0 de U . Il résulte de II.6.8 de [5] qu'il existe Λ_i, U_i, r_{ik} (resp. $r'_{i\ell}$), satisfaisant aux hypothèses de 6.2 pour \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'). Il suffit en effet d'appliquer II.6.8 de [5] à chacun des faisceaux, et de raffiner les deux partitions en une partition convenant simultanément à \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Alors les Λ_i, U_i , et la famille union des r_{ik} et $r'_{i\ell}$, vérifient les hypothèses de 6.2 relativement au faisceau $\mathcal{R} + \mathcal{R}'$.

Il existe donc des α_{ik} et $\alpha'_{i\ell}$, plats sur $\bigcup U_i$, avec

$$\varphi = \sum_i \left(\sum_k \alpha_{ik} r_{ik} + \sum_\ell \alpha'_{i\ell} r'_{i\ell} \right) = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} r_{ik} + \sum_i \sum_\ell \alpha'_{i\ell} r'_{i\ell}.$$

Donc $\varphi \in (\overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{R}'\mathcal{E}})(U)$, d'où 6.3.

Soit \mathcal{N} et \mathcal{N}' deux faisceaux analytiques de type fini sur Ω , et τ un morphisme de \mathcal{N}' dans \mathcal{N} . Alors le morphisme $\tau \otimes 1: \mathcal{N}' \otimes_\circ \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N} \otimes_\circ \mathcal{E}$, définit par passage au quotient un morphisme $\tilde{\tau}: \mathcal{N}' \otimes_\circ \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N} \otimes_\circ \mathcal{E}$.

Avec ces notations on a :

THEOREME 6.4. — *Soit $\tau: \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ de type fini et \mathcal{N} semi-cohérent. Alors coker τ est isomorphe à coker $\tilde{\tau}$. Il en résulte que $\text{Im } \tilde{\tau}$ est un sous-faisceau fermé de $\mathcal{N} \otimes_\circ \mathcal{E}$.*

Démonstration. — Sur un ouvert U assez petit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{O}^{p'} & \longrightarrow & \mathcal{N}' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \tau & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}^p & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Dans ce diagramme les lignes sont exactes, \mathcal{R} est de type semi-fini, et f est défini par p' éléments de $\mathcal{O}(U)^p$, $f_1, f_2, \dots, f_{p'}$.

On en déduit le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{E}^{p'} & \longrightarrow & \mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \tilde{\tau} & & \\
 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}} & \longrightarrow & \mathcal{E}^p & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

On a : $\text{Im } \tilde{\tau} = ((f_1, \dots, f_{p'}) \mathcal{E} + \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}) / \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}}$.

Puisque $(f_1, \dots, f_{p'}) \mathcal{E}(U)$ est fermé dans $\mathcal{E}(U)^p$, il résulte de 6.3 que $(f_1, \dots, f_{p'}) \mathcal{E}(U) + \overline{\mathcal{R}\mathcal{E}(U)}$ est fermé. Donc $\text{Im } \tilde{\tau}(U)$ est fermé dans $\mathcal{N} \otimes \mathcal{E}(U)$ et $\text{coker } \tilde{\tau}$ est un faisceau de Fréchet.

Le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes, montre alors l'existence d'un isomorphisme de $\text{coker } \tau$ sur $\text{coker } \tilde{\tau}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{coker } \tau \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \widetilde{\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \widetilde{\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}} & \longrightarrow & \text{coker } \tilde{\tau} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

7. Fonctions composées différentiables.

THEOREME 7.1. — Soit Ω (resp. Ω') un ouvert de \mathbb{R}^m (resp. \mathbb{R}^n), f une application de classe C^∞ , propre et finie, de Ω dans Ω' . Alors

1) Si \mathcal{E} est un faisceau différentiable de type fini sur Ω , $f_*(\mathcal{E})$ est de type fini sur Ω' .

2) Si \mathcal{G} est un faisceau de Fréchet sur Ω , $f_*(\mathcal{G})$ est de Fréchet sur Ω' , et les topologies canoniques de $\mathcal{E}(\Omega')$ -module et de $\mathcal{E}(\Omega)$ -module sont égales sur $f_*(\mathcal{G})(\Omega') = \mathcal{G}(\Omega)$.

Démonstration. — Le 1) résulte du théorème de préparation différentiable.

En particulier $f_*(\mathcal{E}_\Omega)$ est de type fini. Donc si U' est un ouvert relativement compact dans Ω' , et $U = f^{-1}(U')$,

$$f_*(\mathcal{E}_\Omega)(U') = \mathcal{E}(U)$$

est un $\mathcal{E}(U')$ -module de type fini. On en déduit qu'il existe une application $\mathcal{E}(U')$ -linéaire, surjective, $\mathcal{E}(U')^p \longrightarrow \mathcal{E}(U)$. Cette application est continue.

Pour montrer le 2) il suffit de montrer que sur $f_*(\mathcal{G})(U') = \mathcal{G}(U)$, qui est de type fini sur $\mathcal{E}(U')$ et sur $\mathcal{E}(U)$, les topologies de $\mathcal{E}(U')$ -module et de $\mathcal{E}(U)$ -module sont égales.

Or on a une surjection, continue pour la topologie de $\mathcal{E}(U)$ -module, de $\mathcal{E}(U)^q$ dans $\mathcal{G}(U)$. Par composition on a une surjection de $\mathcal{E}(U')^{pq}$ dans $\mathcal{G}(U)$, continue pour la topologie de $\mathcal{E}(U)$ -module sur $\mathcal{G}(U)$. Puisque, pour cette topologie, $\mathcal{G}(U)$ est un espace de Fréchet, il en résulte que $\mathcal{G}(U)$ est isomorphe, algébriquement et topologiquement, à un quotient de $\mathcal{E}(U')^{pq}$ par un sous $\mathcal{E}(U')$ -module fermé. On en déduit le 2).

On suppose désormais que f est un morphisme analytique propre et fini de Ω dans Ω' . Si \mathcal{M} est un faisceau analytique de type fini sur Ω on a un morphisme naturel

$$\rho : f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{E}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega \longrightarrow \widetilde{f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega)}.$$

D'autre part $f_*(\mathcal{M})$ est de type fini sur Ω' . D'après 7.1, $\widetilde{f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega)}$ est un faisceau de Fréchet sur Ω' .

THEOREME 7.2. — *Le morphisme $\tilde{\rho}$ de $\widetilde{f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega)}$, dans $f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}_\Omega} \mathcal{E}_\Omega)$, obtenu à partir de ρ par passage aux séparés, est un isomorphisme.*

Démonstration. — On montre d'abord que ρ est surjectif.

En effet, soit $y \in \Omega'$, et $x_j, j \in [1, q]$, les éléments de $f^{-1}(y)$ (avec éventuellement $q = 0$). Alors

$(f_*(\mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'})_y = \bigoplus_j (\mathcal{N}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{E}_y) = \bigoplus_j (\mathcal{N}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} (\mathcal{O}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{E}_y)),$
 $f_*(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega}} \mathcal{E}_{\Omega})_y$ est un quotient de $f_*(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega}} \mathcal{E}_{\Omega})_y = \bigoplus_j (\mathcal{N}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} \mathcal{E}_{x_j}),$
 et ρ_y est obtenu en tensorisant par \mathcal{N}_{x_j} le morphisme naturel de $\mathcal{O}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{E}_y$ dans \mathcal{E}_{x_j} . Celui-ci est surjectif d'après l'hypothèse de finitude et le théorème de préparation.

Puisque ρ est surjectif, il en est de même de $\tilde{\rho}$.

Pour montrer 7.2 il suffit de raisonner localement sur Ω' , donc on peut supposer que $f_*(\mathcal{N})$ est engendré sur Ω' par des éléments m_i , $i \in [1, p]$, de $\mathcal{N}(\Omega)$.

On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Omega'}^p \longrightarrow f_*(\mathcal{N}) \longrightarrow 0.$$

D'où le diagramme, où la 1^{ère} ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{R}} \mathcal{E}_{\Omega'} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\Omega'}^p & \longrightarrow & \overline{f_*(\mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{E}_{\Omega'}} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \tilde{\rho} \\
 & & & & & & \overline{f_*(\mathcal{N} \otimes \mathcal{E}_{\Omega})}.
 \end{array}$$

Soit \tilde{m}_i les images dans $\overline{\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega}} \mathcal{E}_{\Omega}}(\Omega)$ des éléments $m_i \otimes_{\mathcal{O}(\Omega)} 1_{\mathcal{E}(\Omega)}$.

Pour montrer que $\tilde{\rho}$ est injectif il suffit de montrer que toute relation $\alpha = (\alpha_i) \in \mathcal{E}(\Omega')^p$ entre les \tilde{m}_i appartient à $\overline{\mathcal{R}} \mathcal{E}_{\Omega'}(\Omega')$, c'est-à-dire que, pour tout y de Ω' , $T_y \alpha \in \mathcal{R}_y \mathcal{F}_y$.

Or $\sum_{i=1}^p (\alpha_i \circ f) \tilde{m}_i = 0$ implique que, pour tout x de Ω , $T_x(\alpha \circ f)$ est une relation entre les $m_{ix} \otimes_{\mathcal{O}_x} 1_{\mathcal{E}_x}$. Donc, pour tout y de Ω' , $T_y \alpha \circ T_{x_j} f$ est une relation entre les $m_{ix_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} 1_{\mathcal{E}_{x_j}}$, où $f^{-1}(y) = \{x_j, j \in [1, q]\}$.

Puisque \mathcal{F}_{x_j} est isomorphe à $\mathcal{O}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{F}_y$, l'élément

$$m_{iy} \otimes_{\mathcal{O}_y} 1_{\mathcal{F}_y} = \bigoplus_{j=1}^q (m_{ix} \otimes_{\mathcal{O}_y} 1_{\mathcal{F}_y}) \text{ de } f_*(\mathcal{N})_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{F}_y = \bigoplus_{j=1}^q (\mathcal{N}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{F}_y)$$

s'identifie à l'élément

$$\bigoplus_{j=1}^q (m_{ix_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} 1_{\mathcal{F}_{x_j}}) \text{ de } \bigoplus_{j=1}^q (\mathcal{N}_{x_j} \otimes_{\mathcal{O}_{x_j}} \mathcal{F}_{x_j}).$$

Donc $T_y\alpha$ est une relation entre les $m_{iy} \otimes_{\mathcal{O}_y} 1_{\mathcal{F}_y}$. Il en résulte que $T_y\alpha$ appartient à $\mathcal{R}_y \mathcal{F}_y$.

THEOREME 7.3. — Soit \mathcal{N}' un faisceau analytique de type fini sur Ω' , \mathcal{N} un faisceau analytique semi-cohérent sur Ω et τ un morphisme de \mathcal{N}' dans \mathcal{N} au-dessus de f (i.e. un morphisme de \mathcal{N}' dans $f_*(\mathcal{N})$). Soit $\tilde{\tau}$:

$$\widetilde{\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{G}_{\Omega'}} \longrightarrow \widetilde{f_*(\mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega}} \mathcal{G}_{\Omega'}} = \widetilde{f_*(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega}} \mathcal{G}_{\Omega})}$$

le morphisme de faisceaux de Fréchet associé à τ .

Alors $(\text{Im } \tilde{\tau})(\Omega')$ est fermé dans $\widetilde{\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega}} \mathcal{G}_{\Omega}}(\Omega)$.

Démonstration. — $f_*(\mathcal{N})$ est semi-cohérent d'après II.7.1 de [5]. D'après 6.4, $(\text{Im } \tilde{\tau})(\Omega')$ est fermé dans $\widetilde{f_*(\mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_{\Omega'}} \mathcal{G}_{\Omega'}}(\Omega')$. Le théorème résulte alors de 7.1 et 7.2.

En prenant $\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\Omega}^p$ et $\mathcal{N}' = \mathcal{O}_{\Omega'}^q$, on obtient :

COROLLAIRE 7.4. — Le sous $\mathcal{G}(\Omega')$ -module de $\mathcal{G}(\Omega)^p$ engendré par q éléments de $\mathcal{O}(\Omega)^p$ est fermé.

Le cas particulier suivant est analogue à un théorème de G. Glaeser [1].

COROLLAIRE 7.5. — La sous-algèbre de $\mathcal{G}(\Omega)$, formée des fonctions composées $\alpha \circ f$, où $\alpha \in \mathcal{G}(\Omega')$, est fermée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. GLAESER, Fonctions composées différentiables, *Ann. of Math.*, 77, (1963) 193-209.
- [2] B. MALGRANGE, Division des distributions, Séminaire L. Schwartz, 1959-1960, exposés 21-25.
- [3] B. MALGRANGE, Le théorème de préparation en géométrie différentiable, Séminaire H. Cartan 1962-1963, exposés 11, 12, 13 et 22.

- [4] B. MALGRANGE, Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 113-127.
- [5] J. MERRIEN, Faisceaux analytiques semi-cohérents, *Ann. Inst. Fourier*, 30, 4 (1980), 165-219.
- [6] J.Cl. TOUGERON, Idéaux des fonctions différentiables, *Erg. der Math.*, 71.

Manuscrit reçu le 21 avril 1980.

Jean MERRIEN,
Institut de Recherche
Mathématique de Rennes
Laboratoire Associé n° 305
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.