Annales de l'institut Fourier

Denis Feyel

Ensembles singuliers associés aux espaces de Banach réticulés

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 1 (1981), p. 195-223

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_195_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 1 (1981), 195-223

ENSEMBLES SINGULIERS ASSOCIÉS AUX ESPACES DE BANACH RÉTICULES

par Denis FEYEL

Soit γ une capacité fonctionnelle sur $\overline{\mathbf{R}}^X$. On considère un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^X$, noté $\mathcal{L}^1(\gamma)$, tel que γ y vérifie une condition analogue à celle de Daniell et quelques autres propriétés naturelles. On rappelle la définition des ensembles quasi-ouverts, et on introduit un axiome dit de Lindelöf, toujours vérifié dans les applications, et autorisant les bornes supérieures de familles quelconques de quasi-ouverts.

Cela permet de résoudre le problème suivant : la quasi-topologie peut-elle être discrète, c'est-à-dire se peut-il que tout ensemble quasi-borélien soit quasi-ouvert ? On donne (th. 3) plusieurs conditions équivalentes : l'une d'elles signifie que $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est un espace de Köthe.

On est alors amené aux notions quasi-topologiques d'ensembles discrets, clairsemés, et l'on démontre l'analogue du théorème de Cantor-Bendixon.

La notion importante d'ensemble mince (c'est-à-dire ne portant qu'une seule classe de mesures négligeant les polaires), apparaît implicitement dans la thèse de R.M. Hervé, et est reprise par Dellacherie qui démontre une forme générale du théorème de Souslin-Alexandrov-Hausdorff : c'est bien une généralisation naturelle de la notion d'ensemble dénombrable. Dans les hypothèses que nous avons ici, tout ensemble quasi-topologiquement clairsemé est mince. La réciproque est vraie en topologie polonaise classique pour tout espace de Baire. Or, on a affaire en théorie du potentiel à une quasi-topologie plus fine que la quasi-topologie donnée et vérifiant de plus une propriété généralisant la propriété de Baire. On en déduit que tout quasi-G_δ fin mince est finement clairsemé, et que les ensembles minces sont exactement les quasi-F_σ fins héréditaires.

Des exemples très intéressants d'espaces de Banach fonctionnels réticulés sont fournis par le modèle probabiliste : on en tire, à l'aide d'un théorème de Mokobodzki, une caractérisation des suites presque-sûrement stationnaires de variables aléatoires.

Pour finir, on montre que l'axiome de Lindelöf cité plus haut s'exprime directement à l'aide des sous-espaces fermés de $\mathbf{L}^1(\gamma)$, indépendamment de toute représentation fonctionnelle. On voit ainsi que les théorèmes de Cantor-Bendixon et Alexandrov-Hausdorff deviennent des théorèmes de structure pour les espaces de Banach réticulés.

I. Hypothèses et rappels.

Si X est un ensemble, on désigne par c une fonction définie sur $\overline{\mathbf{R}}^X$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, et vérifiant :

$$|f| \leqslant \sum_n \lambda_n |g_n|\,, \quad \lambda_n \geqslant 0 \Longrightarrow c(f) \leqslant \sum_n \lambda_n\, c(g_n)$$

avec la convention usuelle $0 \,.\, \infty = 0$.

On notera aussi $c(\mathrm{E}) = c(1_\mathrm{E})$ pour tout ensemble $\mathrm{E} \subset \mathrm{X}$, où 1_E est l'indicatrice de E. Un ensemble E est dit "polaire" si $c(\mathrm{E}) = 0$, une propriété a lieu "quasi-partout" (ou en abrégé "q.p.") si elle a lieu hors d'un ensemble polaire.

Si $c(f) < \infty$, l'ensemble $(f \neq \pm\infty)$ est polaire. Si $f = \sum_n f_n$, avec $f_n \geqslant 0$, la série converge q.p. dès que $\sum_n c(f_n)$ est fini.

La donnée fondamentale de tout cet article est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^X$, noté $\mathcal{L}^1(\gamma)$ ayant les propriétés suivantes :

A) $c(f)$ est fini pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$

B) il existe $f > 0$, $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ (dénombrabilité à l'infini)

C) $\mathcal{L}^1(\gamma)$ est stable par l'opération $f \longmapsto (f \wedge 1)^+$

D) Si une suite décroissante f_n d'éléments de $\mathcal{L}^1(\gamma)$ tend vers 0, alors $c(f_n)$ tend vers 0.

E) $\mathcal{L}^1(\gamma)$ est fermé dans $\mathbf{R}^X$ par rapport à l'écart $c(f-g)$.

On remarque que c induit une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(\gamma)$, que l'on notera γ. Le séparé associé à $\mathcal{L}^1(\gamma)$ se note $\mathbf{L}^1(\gamma)$ et est un espace de Banach ordonné et réticulé. Un élément de $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est la classe d'un $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ modulo l'égalité q.p. En effet, la condition E) implique que l'indicatrice de tout ensemble polaire appartient à $\mathcal{L}^1(\gamma)$.

Dans la condition D), on peut donc aussi bien supposer que la suite f_n ne tend vers 0 que quasi-partout.

Soit $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $\mathcal{L}^1(\gamma)$. Toute forme linéaire $\lambda \geqslant 0$ sur $\mathcal{L}^1(\gamma)$ est continue (propriété des espaces de Banach réticulés). Il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ unique sur la tribu $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L}^1(\gamma) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lambda(f) = \int f d\mu$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$; cela résulte des conditions B) et D) et du théorème de Daniell-Carathéodory.

Toute forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(\gamma)$ s'écrit en différence $\mu - \nu$ de formes linéaires $\geqslant 0$. Ainsi, le dual topologique $\mathcal{M}^\infty(\gamma)$ de $\mathbf{L}^1(\gamma)$ s'identifie à un espace de mesures. On notera $\mathcal{M}_1^\infty$ sa boule unité positive : c'est un compact en topologie $\sigma(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{L}^1)$. Notons que si $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, $f \geqslant 0$:

$$\gamma(f) = \operatorname{Sup} \{\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}_1^\infty\}.$$

Quasi-topologie

Par définition, un ensemble G est « quasi-ouvert » s'il peut s'écrire $G = \{f > 0\}$ où $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$. Toute réunion dénombrable, tout intersection finie de quasi-ouverts est un quasi-ouvert. Un « quasi-fermé » est le complémentaire d'un quasi-ouvert. On définit aussi les « quasi-F_σ », les « quasi-G_δ », les « quasi-boréliens »...

La condition B) entraîne que tout quasi-ouvert est un quasi-F_σ. Les ensembles quasi-boréliens sont exactement les éléments de la tribu $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$ est aussi la classe monotone engendrée par les quasi-fermés.

Un ensemble K est dit « quasi-compact » s'il peut s'écrire $K = \{f \geqslant 1\}$ avec $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$. Un ensemble est « relativement quasi-compact » s'il est contenu dans un quasi-compact. Tout quasi-compact est quasi-fermé, et tout quasi-fermé relativement quasi-compact est quasi-compact. Un ensemble est « quasi-K_σ » s'il est la réunion d'une suite de quasi-compacts, tout quasi-F_σ est aussi un quasi-K_σ et $\mathcal{B}$ est donc la classe monotone engendrée par les quasi-compacts.

Une fonction f à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ est dite «quasi-s.c.i.» si les ensembles $(f > t)$ sont quasi-ouverts pour $t \in \mathbf{R}$. f est «quasi-s.c.s.» si $-f$ est quasi-s.c.i., elle est «quasi-continue» si elle est à la fois quasi-s.c.i. et quasi-s.c.s.

On démontre (6) que f appartient à $\mathcal{L}^1(\gamma)$ si et seulement si

a) f est quasi-continue,

b) on a $|f| \leqslant g$ où $g \in \mathcal{L}^1(\gamma)$.

Une suite croissante $f_n \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ est de Cauchy si et seulement si son enveloppe supérieure appartient à $\mathcal{L}^1(\gamma)$, et c'est alors sa limite.

Si $f \geqslant 0$, f est quasi-s.c.i. si et seulement si f est enveloppe supérieure d'une suite $f_n \in \mathcal{L}^1(\gamma)$.

Prolongement de Lebesgue de γ.

Si f est quasi-s.c.i. $\geqslant 0$, on pose :

$$\gamma(f) = \operatorname{Sup} \{\gamma(g) \mid 0 \leqslant g \leqslant f,\ g \in \mathcal{L}^1(\gamma)\}.$$

Cela prolonge évidemment γ, et l'on a aussi :

$$\gamma(f) = \operatorname{Sup} \{\mu(f) \mid \mu \in \mathfrak{M}_1^\infty\}.$$

Si $h \in \overline{\mathbf{R}}^X$, on pose aussi :

$$\gamma(h) = \operatorname{Inf} \{\gamma(f) \mid f \text{ quasi-s.c.i. } \geqslant h\}.$$

Cela définit le «prolongement de Lebesgue» de γ. Il se peut que l'on ait $\gamma \neq c$, mais les ensembles γ-polaires sont les mêmes que les ensembles c-polaires. γ vérifie aussi la condition :

$$|f| \leqslant \sum_n \lambda_n |g_n|,\ \lambda_n \geqslant 0 \Longrightarrow \gamma(f) \leqslant \sum_n \lambda_n \gamma(g_n).$$

Si f est quasi-s.c.s. $\geqslant 0$ et majorée par un élément de $\mathcal{L}^1(\gamma)$, on a encore, grâce au lemme du minimax

$$\gamma(f) = \operatorname{Sup} \{\mu(f) \mid \mu \in \mathfrak{M}_1^\infty\}$$

et l'application $\mu \longmapsto \mu(f)$ est affine s.c.s. sur $\mathfrak{M}_1^\infty$, elle est affine continue si $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$.

Si K est quasi-compact, on a notamment :

$$\gamma(\mathrm{K}) = \operatorname{Sup} \{\mu(\mathrm{K}) \mid \mu \in \mathfrak{M}_1^\infty\}.$$

On en déduit qu'un quasi-compact, et plus généralement qu'un quasi-F_σ est polaire dès qu'il est μ-négligeable pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_1^\infty$.

Si f_n est une suite décroissante de fonctions quasi-s.c.s. $\geqslant 0$, et si $f_0 \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, on a : $\gamma(\operatorname{Inf}_n f_n) = \operatorname{Inf}_n \gamma(f_n)$.

Quasi-topologie induite.

Si B est quasi-borélien, un quasi-ouvert relatif dans B sera la trace sur B d'un quasi-ouvert de X.

Si G est quasi-ouvert, l'espace $\mathcal{L}^1(G, \gamma) = \{f \in \mathcal{L}^1(\gamma) \mid f = 0$ q.p. sur $X \backslash G\}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}^1(\gamma)$. Il engendre donc sur G une quasi-topologie : on vérifie aussitôt qu'elle coïncide avec la quasi-topologie induite par X.

1. THEOREME D'URYSOHN. – *Si f est quasi-s.c.s., et g quasi-s.c.i., et $f \leqslant g$, il existe une fonction quasi-continue u comprise entre f et g.*

Démonstration. – Supposons d'abord que f et g soient les indicatrices de F et G : F est quasi-fermé, G est quasi-ouvert, et l'on a $F \subset G$. Il existe par définition un couple (u, v) d'éléments de $\mathcal{L}^1(\gamma)$ tels que $G = \{v > 0\}$ et $F = \{u \leqslant 0\}$. On peut supposer u et $v \geqslant 0$: alors la fonction $w = \dfrac{v}{u+v}$ convient.

En posant $U = \{w > 1/2\}$ et $H = \{w \geqslant 1/2\}$, on obtient aussi un quasi-ouvert U et un quasi-fermé H vérifiant $F \subset U \subset H \subset G$.

Supposons maintenant seulement que f et g soient comprises entre 0 et 1, et pour tout $t \in]0, 1[$, posons $F_t = \{f \geqslant t\}$ et $G_t = \{g > t\}$. On a $F_t \subset G_s$ pour $s < t$. A l'aide d'un numérotage des rationnels de $]0, 1[$, on peut choisir successivement des ensembles U_t quasi-ouverts et H_t quasi-fermés vérifiant :

$$F_t \subset U_s \subset H_s \subset G_r \quad \text{pour } r < s < t$$

et

$$H_t \subset U_s \quad \text{pour } s < t.$$

Les deux fonctions $t \longmapsto H_t$ et $t \longmapsto U_t$ sont décroissantes sur $Q \cap]0, 1[$. Cela donne un sens à :

$$u(x) = \int_0^1 1_{U_t}(x)\, dt \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^1 1_{H_t}(x)\, dt$$

indépendamment des prolongements décroissants utilisés. Comme ce sont des intégrales de Riemann, on voit que u est quasi-s.c.i. et que h est quasi-s.c.s. On a par ailleurs $h(x) = u(x)$, et

$$f(x) = \int_0^1 1_{F_t}(x)\, dt \leqslant h(x) = u(x) \leqslant \int_0^1 1_{G_t}(x)\, dt = g(x).$$

Pour le cas général, on se ramène au cas précédent à l'aide d'un homéomorphisme de $\overline{\mathbf{R}}$ sur $[0, 1]$.

Espace de restrictions.

Si F est quasi-fermé, posons $\gamma_F(f) = \gamma(1_F f)$; γ_F est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(\gamma)$. Notons $\mathbf{L}^1(\gamma_F)$ le séparé associé. Alors $\mathbf{L}^1(\gamma_F)$ est complet. En effet, soit f_n une suite $\in \mathcal{L}^1(\gamma)$ telle que $\Sigma \gamma_F(f_n) < +\infty$. Soit θ_n une suite décroissante de fonctions quasi-continues comprises entre 0 et 1, convergeant vers 1_F. On peut supposer aussi $\gamma(\theta_n f_n) \leqslant \gamma_F(f_n) + 2^{-n}$ car F est quasi-fermé. La série $\Sigma \theta_n f_n$ converge normalement dans $\mathcal{L}^1(\gamma)$. Soit $u = \sum\limits_n \theta_n f_n \in \mathcal{L}^1(\gamma)$. On a $\gamma_F(u - f_1 - f_2 \ldots - f_n) \leqslant \gamma(u - \theta_1 f_1 - \theta_2 f_2 \ldots \theta_n f_n)$ donc $u = \sum\limits_n f_n$ dans $\mathcal{L}^1(\gamma_F)$.

Ainsi, le couple $(\gamma_F, \mathcal{L}^1(\gamma_F))$ est l'espace des restrictions de $\mathcal{L}^1(\gamma)$ à F. Il engendre une quasi-topologie sur F : on vérifie alors immédiatement qu'elle coïncide avec la quasi-topologie induite par celle de X.

2. THEOREME DE LUSIN. — *Si $\mu \in \mathcal{M}_1^\infty$, et si f est μ-mesurable,* X *admet une partition en un ensemble μ-négligeable et en une suite de quasi-compacts relativement à chacun desquels f est quasi-continue.*

Démonstration. — Si $(\delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base de la topologie de $\overline{\mathbf{R}}$, il existe pour tout n et tout $\epsilon > 0$, un quasi-fermé F_n et un quasi-ouvert G_n tels que $\mu(G_n \backslash F_n) \leqslant \epsilon/2^n$, et $F_n \subset f^{-1}(\delta_n) \subset G_n$. Soit $G = \bigcup\limits_n (G_n \backslash F_n)$, donc $\mu(G) \leqslant \epsilon$, et f est quasi-continue relativement à $X \backslash G$. En faisant tendre ϵ vers 0 suivant une suite décroissante, on obtient une suite croissante de quasi-fermés H_n de réunion X modulo μ et sur chacun desquels f est relativement quasi-continue. Or chaque $H_{n+1} \backslash H_n$ admet une partition du type envisagé.

Axiome de capacitabilité.

Nous supposerons que γ passe à la limite sur les suites croissantes d'ensembles. Comme elle passe à la limite sur les suites décroissantes de quasi-compacts, il résultera du théorème de capacitabilité de Choquet (2 et 3) que les quasi-boréliens seront capacitables. Notamment, un quasi-borélien sera polaire dès qu'il sera μ-négligeable pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_1^\infty$.

Axiome de Lindelöf.

L1. *Pour toute famille de quasi-ouverts* $(G_i)_{i\in I}$, *il existe une sous-famille dénombrable* $(G_j)_{j\in J}$ *telle que : pour tout* $i \in I$ *on ait* $G_i \subset \bigcup_{j\in J} G_j$ *q.p.*

On pourra noter $G = \operatorname{EssSup}_i G_i$ la réunion dénombrable ayant cette propriété.

Cet axiome justifie entièrement la dénomination «quasi-topologie» Il est facile de voir qu'il est vérifié dès que $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est séparable (6).

Il a lieu cependant dans des cas importants où $\mathbf{L}^1(\gamma)$ n'est pas séparable. (cf. n° VII).

Il entraîne que tout ensemble E a une quasi-adhérence $\overline{E}$ et un quasi-intérieur $\overset{\circ}{E}$.

Il entraîne que toute mesure μ ne chargeant pas les polaires a un quasi-support : c'est le complémentaire du plus grand quasi-ouvert modulo l'égalité q.p. μ-négligeable.

On remarque que les quasi-topologies induites ont aussi la propriété de Lindelöf.

Points non polaires.

Si a est non polaire, $\epsilon_a(f) = f(a)$ est définie sans ambigüité et est finie sur $\mathcal{L}^1(\gamma)$. Réciproquement, toute majoration de la forme $|f(a)| \leqslant K \cdot \gamma(f)$ implique que a est non polaire, car on a $1_p(a) = 0$ pour tout polaire P. Considérons alors

$$f = \operatorname{EssSup}\,\{g \in \mathcal{L}^1(\gamma) \mid \gamma(g) \leqslant 1\}$$

f est quasi-s.c.i., et l'on a quasi-partout $f(a) = \|\epsilon_a\|$. On en déduit que l'ensemble des points non polaires vaut $E = \{f < +\infty\}$: c'est un quasi-F_σ. Sur E, la quasi-topologie induit une vraie topologie ayant la propriété de Lindelöf, complètement régulière dès que $\mathcal{L}^1(\gamma)$ sépare les points de X.

On a $\mathcal{L}^1(\gamma) \mid E \subset \mathcal{C}(E)$. Tout compact K de E est quasi-compact et l'on a $\mathcal{C}(K) = \mathcal{L}^1(\gamma_K)$ avec normes équivalentes d'après le théorème des isomorphismes. Mais la réciproque est éventuellement fausse : on prend $X = \mathbf{N}$, $\gamma = \mu^*$, où μ est la mesure définie par $\mu(f) = \sum_n 2^{-n} f(n)$; et $\mathcal{L}^1(\gamma) = \mathcal{L}^1(\mu)$. Les points sont non polaires, donc $X = E$, et $X = E$ est quasi-compact, mais non compact.

On peut ici mentionner les deux exemples triviaux, mais «extrêmes» d'espaces $\mathcal{L}^1(\gamma)$ vérifiant nos axiomes.

a) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré et la tribu $\mathcal{B}$ est complète par rapport aux ensembles μ-négligeables. On prend $\gamma = \mu^*$, et $\mathcal{L}^1(\gamma) = \mathcal{L}^1(\mu)$. Tous les éléments de $\mathcal{B}$ sont quasi-ouverts : la quasi-topologie est «discrète».

b) X est un espace localement compact dénombrable à l'infini ainsi que tous ses sous-ensembles ouverts. On prend pour γ la norme uniforme, et $\mathcal{L}^1(\gamma) = \mathcal{C}_0(X)$. Seul $\emptyset$ est polaire, et la quasi-topologie s'identifie à la topologie de X. En ce cas, compact équivaut à quasi-compact.

Ces préliminaires étant achevés, nous pouvons enfin rentrer dans le vif du sujet. Signalons que nous ferons souvent l'abus consistant à identifier une fonction ou un ensemble avec sa classe modulo les ensembles polaires, c'est-à-dire à omettre les expressions telles que q.p. ou quasi-partout. Nous parlerons donc de «la» quasi-adhérence $\overline{E}$ de E, de «son» quasi-intérieur et «du» quasi-support d'une mesure, etc.

Dans l'énoncé qui suit, $\mathbf{L}(\gamma)$ désigne l'espace vectoriel des classes modulo γ des fonctions quasi-continues finies quasi-partout, $\mathbf{L}(\mu)$ est l'espace des classes modulo μ de fonctions μ-mesurables et finies μ-presque partout.

II. Ensembles discrets, clairsemés.

Tous les ensembles considérés sont quasi-boréliens dans X.

3. THEOREME. – *On dira que* X *est discret si sont vérifiées les conditions suivantes qui sont équivalentes :*

a) *Toute fonction quasi-borélienne est quasi-continue.*

b) *Tout ensemble quasi-borélien est quasi-ouvert.*

c) *Tout ensemble rare est polaire.*

d) *Pour toute suite décroissante* E_n *de quasi-boréliens relativement quasi-compacts,* $\gamma(E_n)$ *tend vers* 0 *dès que* $\bigcap_n E_n$ *est polaire.*

e) *Les segments* $(0, f)$ *de* $\mathbf{L}^1(\gamma)$ *sont compacts en topologie* $\sigma(\mathbf{L}^1(\gamma), \mathfrak{M}^\infty(\gamma))$.

f) *Il existe* $\mu \geqslant 0$, $\mu \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$, *telle que* $\mathbf{L}(\gamma) = \mathbf{L}(\mu)$.

g) *Il existe* $\mu \geqslant 0$, $\mu \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$, *telle que pour toute suite décroissante* G_n *de quasi-ouverts relativement quasi-compacts,* $\gamma(G_n)$ *tende vers* 0 *dès que* $\bigcap_n G_n$ *est* μ*-négligeable.*

h) $\mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$ *est compacte en topologie définie par les applications* $\mu \longmapsto \mu(B)$ *avec* $B \in \mathcal{B}$, B *relativement quasi-compact.*

i) $\mathbf{L}^1(\gamma)$ *est épais dans son bidual.*

Démonstration. – On va le faire suivant le schéma :

$$a) \Longrightarrow f) \Longrightarrow g) \Longrightarrow d) \Longrightarrow h) \Longrightarrow c) \Longrightarrow b) \Longrightarrow a)$$

et :
$$f) \Longrightarrow i) \Longrightarrow e) \Longrightarrow c)$$

a) $\Longrightarrow$ f) Soit (F_i, μ_i) un système maximal de couples où $\mu_i \geqslant 0$, $\mu_i \neq 0$, $\mu_i \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$, où F_i est le support de μ_i, et où les F_i sont quasi-disjoints deux à deux. D'après a), les F_i sont à la fois quasi-ouverts et quasi-fermés, et l'axiome de Lindelöf entraîne que I est au plus dénombrable. On a alors $X = \bigcup_i F_i$ sinon la famille ne serait pas maximale. Il s'ensuit que la mesure $\mu = \Sigma\, \epsilon_i\, \mu_i$ (avec des coefficients convenables) appartient à $\mathfrak{M}^\infty(\gamma)$ et ne néglige que les ensembles polaires. Si f est μ-mesurable, et finie μ presque partout, elle est d'après le a) quasi-continue et finie quasi-partout. Donc $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\mu)$. Mais les classes modulo μ sont identiques aux classes modulo γ, donc $\mathbf{L}(\gamma) = \mathbf{L}(\mu)$.

f) $\Longrightarrow$ g) On munit $\mathbf{L}(\gamma)$ (resp. $\mathbf{L}(\mu)$) de la topologie de la convergence en capacité (resp. en mesure), définie par la distance

$$d(f, g) = \gamma\,(h \,.\, \mathrm{Arctg}\, |f - g|) \quad \text{où} \quad h \in \mathcal{L}^1(\gamma),\ h > 0.$$

resp. $\tilde{d}(f, g) = \mu(h \,.\, \mathrm{Arctg}\, |f - g|)$.

Sur $\mathbf{L}(\gamma)$, d est une distance d'espace vectoriel topologique complet (dû au fait que $h \in \mathcal{L}^1(\gamma)$). d est évidemment plus fine que $\tilde{d}$, et le théorème des isomorphismes de Banach entraîne qu'elles sont équivalentes. Les fonctions 1_{G_n} de l'énoncé tendent vers 0 en mesure, donc aussi en capacité, et l'on a : $\operatorname{Lim\,Sup}_{n\to\infty} \gamma(h \,.\, \operatorname{Arctg} 1_{G_n}) = 0$, donc $\gamma(G_n)$ tend vers 0 (prendre $h \geqslant 1$ sur G_0).

g) $\Longrightarrow$ d) Pour tout n, il existe G_n quasi-ouvert relativement quasi-compact $G_n \supset E_n$ et $\mu(G_n) \leqslant \mu(E_n) + 2^{-n}$. On peut supposer la suite G_n décroissante, alors $\mu(G_n)$ tend vers 0, donc aussi $\gamma(E_n) \leqslant \gamma(G_n)$.

d) $\Longrightarrow$ h) Soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille ultrafiltrée extraite de $\mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$. Posons $\mu(B) = \operatorname{Lim}_i \mu_i(B)$ ($< +\infty$ d'après l'hypothèse). On définit ainsi une fonction simplement additive de quasi-boréliens relativement quasi-compacts. On a $\mu(B) \leqslant \gamma(B)$, donc μ est σ-additive et $\mu \in \mathfrak{M}_1^\infty$. La topologie envisagée est séparée, d'où le résultat.

h) $\Longrightarrow$ c) Soit R un ensemble rare : on peut le supposer quasi-compact. Alors $\mu \longmapsto \mu(R)$ est continue sur $\mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$ muni de la topologie envisagée. Cette topologie est plus fine que $\sigma(\mathfrak{M}_1^\infty, \mathbf{L}^1(\gamma))$: elle y coïncide donc. Il existe alors $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ telle que $\mu(R) = \mu(f)$ pour toute $\mu \in \mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$. Cela entraîne $f = 1_R$ quasi-partout. Comme R est rare, on a $f = 0$ quasi-partout, et R est polaire.

c) $\Longrightarrow$ b) Si F est quasi-fermé, $F \setminus \mathring{F}$ est rare donc polaire, et F est quasi-ouvert. Un raisonnement immédiat par récurrence transfinie permet de passer au cas d'un quasi-borélien quelconque.

b) $\Longrightarrow$ a) C'est évident.

f) $\Longrightarrow$ i) Soit F appartenant au bidual de $\mathbf{L}^1(\gamma)$, et $0 \leqslant F \leqslant f$, $f \in \mathbf{L}^1(\gamma)$. F induit une forme linéaire positive sur $\mathbf{L}^\infty(\mu)$, majorée par celle qu'induit f. Il s'ensuit (théorème de Lebesgue-Nikodym) qu'il existe $h \in \mathbf{L}^1(\mu)$ telle que $F(\nu) = \nu(h)$ pour toute $\nu \leqslant \mu$. L'hypothèse entraîne que $h \in \mathbf{L}(\gamma)$, et $h \leqslant f$ μ-presque partout, donc quasi-partout, donc $h \in \mathbf{L}^1(\gamma)$. Toute $\nu \geqslant 0$, $\nu \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$, est absolument continue par rapport à μ, on a donc : $F(\nu) \geqslant \nu(h)$ et aussi $\nu(f) - F(\nu) \geqslant \nu(f - h)$ puis $F(\nu) = \nu(h)$ pour toute $\nu \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$.

i) $\Longrightarrow$ e) Soit g_i une famille ultrafiltrée extraite de $(0, f)$. Pour toute $\nu \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$, $\nu \geqslant 0$, $\nu(g_i)$ converge vers une limite $F(\nu)$ positive et majorée par $\nu(f)$. Donc F est dans le sous-espace épais du bidual de $\mathbf{L}^1(\gamma)$ engendré par $\mathbf{L}^1(\gamma)$: il existe alors $h \in \mathbf{L}^1(\gamma)$ telle que $\nu(h) = \operatorname{Lim}_i \nu(g_i)$, pour toute $\nu \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$, et $0 \leqslant h \leqslant f$.

e) $\Longrightarrow$ c) Si R est rare relativement quasi-compact, on peut le supposer fermé. Alors $1_R = \operatorname{Inf}_n f_n$ où la suite $f_n \in \mathbf{L}^1(\gamma)$ décroît, et admet une valeur d'adhérence faible f. Ainsi $f = 1_R$. Mais R est rare, donc $f = 0$, et R est polaire.

Remarques. – a) La propriété c) signifie que $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est «order continuous» (cf. [12]). En effet, si (f_i) est une famille $f_i \in \mathbf{L}^1(\gamma)$, $f_i \geqslant 0$, telle que $\operatorname{Inf}_i f_i = 0$ (borne inférieure au sens de l'espace réticulé), alors $\operatorname{EssInf}_i f_i$ qui existe d'après l'axiome de Lindelöf est nulle sauf peut-être sur un ensemble maigre, lequel est polaire d'après c). Ainsi $\gamma(f_i) = \| f_i \|$ tend vers 0 si l'ensemble est filtrant décroissant.

b) La propriété f) signifie que $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est un espace de Köthe. ([12]).

c) Les caractérisations e) et i) se trouvent aussi dans [12].

4. Definitions. – *Si* $E \subset X$, *on note* E' *et on appelle «dérivé» de* E *le plus petit quasi-fermé relatif dans* E *contenant tout ensemble rare sur* E, *ou, ce qui revient au même d'après l'axiome de capacitabilité, tout quasi-fermé inclus dans* E *et rare sur* E.

– *On dit que* E *est discret si* E' *est polaire.*

– *On dit que* E *est dense en soi si* $E' = E$.

– *On dit que* E *est parfait s'il est quasi-fermé et dense en soi.*

– *On dit que* E *est clairsemé s'il ne contient aucun ensemble dense en soi.*

Lemme. – E est discret si et seulement si tout ensemble rare sur E est polaire, ou encore si et seulement si tout sous-ensemble de E est quasi-ouvert relatif.

– Si A est inclus dans E, on a $A' \subset E'$, et $E \backslash E' = E^{is}$ est le plus grand quasi-ouvert relatif discret de E.

Démonstration. – Si R est quasi-fermé, $R \subset A$, R rare sur A, R est a fortiori rare sur E, donc $A' \subset E'$. En particulier $(E \backslash E')' \subset E'$ et $(E \backslash E')' \subset E \backslash E'$, donc $(E \backslash E')'$ est polaire, $E \backslash E'$ est discret et quasi-ouvert dans E.

Si A est discret et quasi-ouvert dans E, soit R un quasi-fermé, $R \subset A \cap E'$, R rare sur E. A est quasi-ouvert relatif, donc R est rare sur A, et R est polaire car A est discret. Ainsi $A \cap E' \subset E^{is}$, puis $A \subset E^{is}$.

5. THEOREME (cf. Cantor-Bendixon). – *Il existe un plus gros ensemble dense en soi et inclus dans* E, *noté* $N(E)$, *et appelé «noyau dense en soi» de* E. $N(E)$ *est quasi-fermé relatif,* $E^{cl} = E \backslash N(E)$ *est clairsemé et c'est le plus grand quasi-ouvert relatif clairsemé de* E.

Démonstration. – Pour $\xi < \aleph_1$, on définit par récurrence $E^{(\xi+1)} = E^{(\xi)'}$ et $E^{(\xi)} = \bigcap_{\eta<\xi} E^{(\eta)}$ si ξ est un ordinal limite. Les $E^{(\xi)}$ sont quasi-fermés relatifs, donc la suite $E^{(\xi)}$ est stationnaire (axiome de Lindelöf). Posons $N(E) = \operatorname{Ess\,Inf}_{\xi<\aleph_1} E^{(\xi)}$. Evidemment $N(E)$ est quasi-fermé relatif et dense en soi. Si $A \subset E$, on a par récurrence $A^{(\xi)} \subset E^{(\xi)}$, donc $N(A) \subset N(E)$. Si de plus A est dense en soi, on a $A = N(A) \subset N(E)$, donc E clairsemé équivaut à $N(E)$ polaire. Si A est quasi-ouvert relatif dans E, on a $A^{is} \subset E^{is}$, soit $A \backslash A' \subset E \backslash E'$, et par récurrence $A \backslash A^{(\xi)} \subset E \backslash E^{(\xi)}$, puis $A \backslash N(A) \subset E \backslash N(E)$, soit $A^{cl} \subset E^{cl}$. Si A est clairsemé, $N(A)$ est polaire, donc $A = A^{cl} \subset E^{cl}$.

6. PROPOSITION. – *Si* E *est clairsemé,* E *admet une partition dénombrable en ensembles quasi-fermés discrets, et il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$, $\mu \in \mathfrak{M}^{\infty}(\gamma)$, μ *concentrée sur* E, *et ne négligeant que les sous-ensembles polaires de* E.

Démonstration. – Il suffit de la faire lorsque E est discret. Soit (F_i) une famille maximale de quasi-fermés non polaires et disjoints inclus dans E: les F_i sont aussi quasi-ouverts sur E et la famille est dénombrable par l'axiome de Lindelöf. Enfin $E \backslash \bigcup_i F_i$ est polaire car la famille est maximale. Il n'y a plus qu'à appliquer le théorème 3, g) pour obtenir la mesure μ.

III. Ensembles minces.

Nous abordons maintenant une nouvelle classe d'ensembles «petits», qui a déjà été considérée par Dellacherie (cf. [4,5]) à qui nous emprunterons la terminologie.

7. THEOREME ET DEFINITION. – *Soit* A *un ensemble quasi-borélien, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe une mesure* $\mu \in \mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$, *concentrée sur* A *et ne négligeant que les sous-ensembles polaires de* A.

b) *toute famille* (K_i) *de quasi-compacts non polaires, inclus dans* A, *et quasi-disjoints deux à deux est au plus dénombrable.*

c) *toute famille* (μ_i) *de mesures positives non nulles,* $\mu_i \in \mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$ *concentrées sur* A, *et deux à deux étrangères, est au plus dénombrable.*

Un ensemble A ayant ces propriétés sera dit *mince.* Les ensembles minces forment une *horde* au sens de Dellacherie, c'est-à-dire une famille héréditaire (dans $\mathcal{B}$) et stable par les réunions dénombrables. Un ensemble non mince est dit *épais.* On remarque qu'un ensemble mince est toujours un quasi-F_σ, et même un quasi-F_σ héréditaire (i.e. ses sous-ensembles sont quasi-F_σ).

Démonstration. – a) $\Longrightarrow$ c) : toute mesure μ_i a une densité f_i par rapport à μ, et les ensembles $\{f_i > 0\}$ sont μ-négligeables, sauf une infinité dénombrable d'entre eux.

c) $\Longrightarrow$ b) : chaque K_i porte une mesure $\mu_i > 0$, et la famille (μ_i) vérifie alors c).

b) $\Longrightarrow$ a) : soit $\nu > 0$ une mesure concentrée sur A, $\nu \in \mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$, et soit (K_i) une famille maximale de quasi-compacts non polaires inclus dans A, quasi-disjoints et ν-négligeables : elle est au plus dénombrable. Alors $A \setminus \bigcup_i K_i$ vérifie la condition du a) avec la restriction de ν. Soit donc maintenant une famille maximale de couples (F_i, ν_i) où les F_i sont quasi-compacts disjoints inclus dans A, non polaires et vérifient la condition du a) avec la mesure ν_i. Cette famille est au plus dénombrable, $A \setminus \bigcup_i F_i$ est polaire, sinon il contiendrait un quasi-compact K portant une mesure vérifiant a) d'après le début de la démonstration, et la famille (F_i, ν_i) ne serait pas maximale. Alors la mesure $\mu = \Sigma \epsilon_i \nu_i$ avec des coefficients $\epsilon_i > 0$ convenables ne néglige que les ensembles polaires de A.

8. DEFINITIONS. – *Une mesure* $\mu \geqslant 0$, $\mu \in \mathfrak{M}^\infty(\gamma)$, *est singulière si elle est concentrée sur un ensemble mince, elle est étalée si elle néglige tous les ensembles minces.* On obtient ainsi une décomposition de $\mathfrak{M}^\infty(\gamma)$ en somme directe ordonnée de deux bandes étrangères.

Faisons maintenant quelques rappels : on appelle schéma de Cantor toute application $s \rightsquigarrow K_s$ qui à toute suite finie

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{0, 1\}^n$$

associe un quasi-compact K_s de sorte que $K_s \supset K_t$ lorsque s est le début de t.

Pour $\sigma \in \Sigma_0 = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ on note $K_\sigma = \bigcap_{s \prec \sigma} K_s$ et $K = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} K_\sigma$. K est le noyau du schéma de Cantor, on a aussi $K = \bigcap_n \bigcup_{s \in 2^n} K_s$, donc K est quasi-compact. Enfin le schéma est dit propre si aucun des K_s n'est polaire et si $K_s \cap K_t = \emptyset$ pour s et t de même longueur et $s \neq t$.

9. PROPOSITION. – *Soit* K *le noyau d'un schéma propre* (K_s) *de Cantor. Alors* K *porte une mesure étalée non nulle, et plus précisément une mesure non nulle qui néglige tous les quasi-*F_σ *héréditaires, c'est-à-dire tous ceux dont tous les sous-ensembles (quasi-boréliens) sont des quasi-*F_σ.

Démonstration. – L'ensemble de Cantor Σ_0 porte une mesure de probabilité λ diffuse, et pour $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, l'application $\sigma \rightsquigarrow \gamma(f^+ . 1_{K_\sigma})$ est s.c.s. Cela donne un sens à

$$p(f) = \int \gamma(f^+ . 1_{K_\sigma})\, d\lambda(\sigma) \leqslant \gamma(f).$$

Comme le schéma est propre, p est une fonction sous-linéaire croissante et non identiquement nulle sur $\mathsf{L}^1(\gamma)$. Soit une forme linéaire non nulle qui la minore : elle est représentable par une mesure $\mu \in \mathfrak{M}_1^\infty$ visiblement portée par K. Un simple raisonnement de capacitabilité prouve que l'on a $\mu(B) \leqslant \int \gamma(B \cap K_\sigma)\, d_\lambda(\sigma)$ pour tout quasi-borélien B. Notons E_B l'ensemble des $\sigma \in \Sigma_0$ tels que $B \cap K_\sigma$ soit non polaire. Si B est un quasi-F_σ, E_B est un F_σ dans Σ_0. Si E est borélien inclus dans E_B, il est de la forme E_C où C est un quasi-borélien inclus dans B comme on le voit facilement par récurrence sur la classe borélienne. Donc, si B est un quasi-F_σ héréditaire, E_B est un F_σ héréditaire dans Σ_0, il résulte du théorème de Baire que E_B est dénombrable. Mais λ est diffuse, donc $\mu(B) = 0$.

10. THEOREME. – *Si* $\mathsf{L}^1(\gamma)$ *est séparable, tout quasi-borélien épais contient le noyau d'un schéma propre de Cantor, et un ensemble est mince si et seulement si c'est un quasi-*F_σ *héréditaire.*

Si $\mathsf{L}^1(\gamma)$ *n'est pas séparable, tout quasi-borélien qui n'est pas un quasi-*F_σ *héréditaire contient le noyau d'un schéma propre de Cantor.* (On ignore s'il existe un quasi-F_σ héréditaire épais. cf. le n° 14).

Démonstration. – C'est une généralisation du théorème de Souslin-Alexandrov-Hausdorff. Il y a une généralisation semblable dans (4), mais il faut modifier la démonstration.

Introduisons les ensembles quasi-analytiques : ce sont les ensembles obtenus à partir des quasi-compacts à l'aide de l'opération (A) de Souslin (cf. [3]). Tout ensemble quasi-borélien est quasi-analytique, car $\mathcal{B}$ est la famille monotone engendrée par les quasi-compacts. Les quasi-analytiques sont γ-capacitables (théorème de Choquet, 3). Si A est quasi-analytique, son épaisseur $e(\mathrm{A})$ vaut par définition la borne supérieure des $t > 0$ pour lesquels il existe une famille indénombrable de quasi-compacts (K_i) quasi-disjoints deux à deux, inclus dans A, chaque K_i vérifiant de plus $\gamma(\mathrm{K}_i) > t$. Il est clair que e passe à la limite sur les suites croissantes (A_n) de quasi-analytiques, mais en général non sur les suites décroissantes de quasi-compacts. Or, si $\mathsf{L}^1(\gamma)$ est séparable, l'épaisseur est «dichotomique» : soit A quasi-analytique, et $e(\mathrm{A}) > t > 0$, et soit (K_i) une famille indénombrable de quasi-compacts deux à deux quasi-disjoints, inclus dans A et de capacité $\gamma(\mathrm{K}_i) > t$. Il existe des mesures μ_i concentrées sur K_i telles que $\mu_i(\mathrm{K}_i) > t$, et $\mu_i \in \mathfrak{M}_1^\infty$. Comme $\mathfrak{M}_1^\infty$ est un compact métrisable, la famille (μ_i) contient au moins deux points de condensation μ_{i_0} et μ_{i_1}. D'après le théorème d'Urysohn, il existe deux quasi-ouverts relativement quasi-compacts de quasi-adhérences disjointes et contenant K_{i_0} et K_{i_1}, soient G_0 et G_1.

L'ensemble des μ_i telles que $\mu_i(\mathrm{G}_0)$ dépasse t est un voisinage relatif de μ_{i_0} dans la famille (μ_i) et est donc indénombrable. On en déduit $e(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{G}}_0) > t$ et $e(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{G}}_1) > t$, grâce au théorème de capacitabilité.

Ecrivons maintenant que A est le noyau d'un schéma de Souslin régulier et croissant, construit sur les quasi-compacts : on a une application $s \longmapsto \mathrm{H}_s$ définie pour toute suite finie d'entiers s, où H_s est quasi-compact. On suppose que pour $r \prec s$, on a $\mathrm{H}_s \subset \mathrm{H}_r$ (notations de (3) : $r \prec s$ signifie que r commence s), et que pour r et s de même longueur vérifiant $r_1 \leqslant s_1$, $r_2 \leqslant s_2, \dots$, on a $H_r \subset H_s$. De plus $A = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} H_\sigma$, où $\Sigma = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ et $H_\sigma = \bigcap_{s \prec \sigma} H_s$ où $s \prec \sigma$ signifie que s commence σ. Notons $A_s = \bigcup_{s \prec \sigma} H_\sigma$. Le schéma (A_s) est encore régulier et croissant, a même noyau A que (H_s) et l'on a $H_\sigma = \bigcap_{s \prec \sigma} A_s$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Si $e(A) > t$, il existe un entier σ_1 tel que $e(A_{\sigma_1}) > t$. Puis il existe deux quasi-compacts F_0 et F_1 disjoints tels que $e(A_{\sigma_1} \cap F_i) > t$ Puis un entier σ_2 tel que $e(A_{\sigma_1\sigma_2} \cap F_i) > t$, puis deux quasi-compacts F_{ij} pour chaque i, disjoints et tels que

$$e(A_{\sigma_1\sigma_2} \cap F_i \cap F_{ij}) > t, \quad \text{etc.}$$

Si s est une suite finie $s = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ à valeurs 0 ou 1, on pose :

$$K_s = H_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \cap F_{i_1} \cap F_{i_1 i_2} \cap \dots \cap F_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

On obtient un schéma de Cantor de noyau K inclus dans H donc dans A. On a $\gamma(K_s) \geqslant e(K_s) > t$, et par suite $\gamma(K_s) \geqslant t$ pour tout s et le schéma est propre.

D'après la proposition 9, l'ensemble A n'est pas un quasi-F_σ héréditaire.

Si $\mathcal{L}^1(\gamma)$ n'est pas séparable, on ne sait pas extraire de points de condensation de la famille (μ_i). Mais il existe un sous-espace de $\mathcal{L}^1(\gamma)$ qui est séparable, vérifie les mêmes axiomes que $\mathcal{L}^1(\gamma)$, et engendre une «sous-quasi-topologie» contenant les H_s. Si A n'est pas un quasi-F_σ en quasi-topologie initiale, il ne l'est pas davantage pour cette sous-quasi-topologie : il contient donc le noyau d'un schéma propre de Cantor, mais tout quasi-compact de la sous-quasi-topologie l'est aussi en quasi-topologie initiale avec même capacité. c.q.f.d.

Il existe dans A un plus grand quasi-ouvert relatif qui soit mince (évident) : son complémentaire dans A s'appelle le noyau épais de A, ou noyau de condensation et se note K(A).

On peut de même définir un autre noyau L(A) tel que $A \setminus L(A)$ soit le plus grand quasi-ouvert relatif dans A qui soit un quasi-F_σ héréditaire.

On a toujours $L(A) \subset K(A) \subset N(A)$, $L(A) = K(A)$ si $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est séparable, et nous verrons plus loin que $L(A) = K(A) = N(A)$ pour tout quasi-G_δ si l'on suppose l'axiome de Baire.

IV. Construction de mesures à support donné.

Dans ce paragraphe, on fait l'hypothèse supplémentaire suivante, appelée « deuxième axiome de Lindelöf » :

L.2 *Pour toute famille de quasi-ouverts* $(G_i)_{i\in I}$, *il existe un sous-ensemble dénombrable* J *tel que l'intérieur* $\widehat{\bigcap_{j\in J} G_j}$ *soit inclus (quasi-partout) dans le quasi-ouvert* G_i, *et ceci pour tout* $i \in I$.

Comme le premier axiome de Lindelöf, cet axiome est vérifié dès que $\mathsf{L}^1(\gamma)$ est séparable (cf. [6]).

11. PROPOSITION. – *Tout quasi-fermé* F *est le support d'une mesure* $\mu \in \mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$.

Démonstration. – Soit (F_i, μ_i) la famille de tous les couples où μ_i est une mesure non nulle de $\mathfrak{M}_1^\infty(\gamma)$, et où F_i est le support de μ_i. Il existe un sous-ensemble dénombrable J tel que $F = \overline{\bigcup_{i\in J} F_i}$. La mesure $\mu = \Sigma\, \epsilon_i \mu_i$ répond à la question, pour des $\epsilon_i > 0$ convenables.

On voit aussi que tout quasi-fermé F tel que $F = K(F)$, est le support d'une mesure étalée (si $\mathsf{L}^1(\gamma)$ est séparable). En effet si l'on suppose ci-dessus que les μ_i sont étalées, $F \setminus \overline{\bigcup_{i\in J} F_i}$ ne porte aucune mesure étalée : il est donc mince puis polaire puisque c'est un quasi-ouvert et que $F = K(F)$.

De même (sans la séparabilité) si $F = L(F)$, F est le support d'une mesure négligeant les quasi-F_σ héréditaires.

V. Théorème de Baire.

Il nous faut un moyen de comparer les ensembles minces et les ensembles clairsemés. Il est évident que tout ensemble clairsemé est mince. En topologie polonaise, la réciproque est vraie pour tout G_δ, et tout ensemble mince (i.e. dénombrable) est réunion dénombrable d'ensembles discrets : ceci est dû au fait que les G_δ sont des espaces de Baire. Nous devrons donc introduire un axiome supplémentaire suffisant pour assurer une propriété analogue, mais pas trop contraignant, de sorte qu'il soit vérifié dans les applications à la théorie du potentiel.

Soit $\mathcal{C}$ une famille d'ensembles quasi-boréliens ayant les propriétés suivantes :

a) les polaires et leurs complémentaires appartiennent à $\mathcal{C}$,

b) toute intersection (resp. réunion) finie (resp. dénombrable) d'éléments de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$,

c) si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{C}$, il existe une partie J dénombrable de I telle que l'on ait pour tout $i \in I : G_i \subset \bigcup_{j \in J} G_j$ quasi-partout.

Une telle famille sera encore appelée «quasi-topologie». Evidemment les quasi-ouverts considérés jusqu'à présent forment une quasi-topologie : la quasi-topologie fondamentale ou «ordinaire», que nous noterons $\mathcal{C}_0$. Nous considèrerons une deuxième quasi-topologie $\mathcal{C}$ que nous appellerons «quasi-topologie fine» liée à la quasi-topologie ordinaire par les relations de compatibilité suivantes :

d) tout quasi-ouvert ordinaire est un quasi-ouvert fin ($\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_0$),

e) tout quasi-ouvert fin est un quasi-F_σ ordinaire,

f) pour tout quasi-ouvert fin G non polaire, il existe un quasi-ouvert fin U non polaire dont la quasi-adhérence *ordinaire* $\overline{U}$ est incluse dans G.

Par exemple, la quasi-topologie ordinaire est une quasi-topologie fine compatible. Nous noterons enfin $\overline{\overline{E}}$ la quasi-adhérence fine de E (elle existe en vertu de c)). On a bien sûr $\overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$.

Nous verrons plus loin qu'en théorie du potentiel on a naturellement affaire à une quasi-topologie fine compatible avec $\mathcal{C}_0$; en général $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ sont distinctes, mais l'intérêt de $\mathcal{C}$ provient (pour ce qui nous occupe actuellement) de la propriété suivante que nous appellerons «axiome de Baire» :

g) tout quasi-ouvert fin G a même capacité que sa quasi-adhérence fine $\overline{\overline{G}}$: $\gamma(G) = \gamma(\overline{\overline{G}})$.

Nous avons alors :

12. THEOREME (de Baire). – *Soit* A *un quasi-*G_δ *fin non polaire, et soit* B_n *une suite de quasi-ouverts fins relatifs et finement denses dans* A, *alors* $\bigcap_n B_n$ *est finement dense dans* A.

Démonstration. – Supposons d'abord que $A = X$, et que les B_n soient des quasi-ouverts ordinaires. On peut supposer la suite B_n décroissante. Notons U un quasi-ouvert fin non polaire relativement quasi-compact, et soit t réel tel que $0 < t < \gamma(U)$.

D'après g) on a $\gamma(U \cap B_1) = \gamma(U) > t$.

Il existe G'_1 quasi-ouvert ordinaire, tel que $\overline{G'_1} \subset B_1$ et $\gamma(U \cap G'_1) > t$ car γ passe à la limite sur les suites croissantes.

Il existe par récurrence un quasi-ouvert ordinaire G'_{n+1} tel que $\overline{G'_{n+1}} \subset G'_n \cap B_{n+1}$ et tel que $\gamma(U \cap G'_{n+1}) > t$, car $U \cap G'_n \cap B_{n+1}$ est finement dense dans $U \cap G'_n$. Posons alors $F = \bigcap_n \overline{G'_n} \subset \bigcap_n B_n$.

On a $\gamma(\overline{U} \cap \overline{G'_n}) \geqslant t$ pour tout n, donc $\gamma(\overline{U} \cap F) \geqslant t$ car les $\overline{U} \cap \overline{G'_n}$ sont quasi-compacts, puis $\gamma(\overline{U} \cap \bigcap_n B_n) \geqslant t > 0$. D'après f), cela prouve que $\bigcap_n B_n$ est finement dense dans X.

On peut alors renforcer l'ensemble des conditions e) et f) en une condition e′) : si G est un quasi-ouvert fin non polaire, il existe une suite croissante U_n de quasi-ouverts fins relativement quasi-compacts et tels que $\bigcup_n \overline{U}_n \subset G \subset \overline{\bigcup_n U_n}$.

En effet, d'après e), G est un quasi-F_σ ordinaire, et peut s'écrire $G = \bigcup_n H_n$ où les H_n sont quasi-compacts. Soit U_n l'intérieur fin de H_n. L'un au moins des U_n est non polaire, sans quoi G serait polaire d'après ce que nous venons de voir, et même $\bigcup_n U_n$ est finement dense dans G, grâce à e).

Passons maintenant au cas général. Posons $B_n = A \cap G_n$ où G_n est quasi-ouvert fin dans X : on peut supposer la suite G_n décroissante. Soit t réel tel que $0 < t < \gamma(A)$. On a $\gamma(A \cap G_1) > t$. D'après e′) il existe G'_1 quasi-ouvert fin relativement quasi-compact tel que $\overline{G'_1} \subset G_1$ et tel que $\gamma(A \cap G'_1) > t$. (Rappelons que $\overline{G'_1}$ désigne la quasi-adhérence ordinaire). Puis il existe par récurrence des quasi-ouverts fins $G'_{n+1} \subset \overline{G'_{n+1}} \subset G'_n \cap G_{n+1}$ tels que $\gamma(A \cap G'_{n+1}) > t$, car $A \cap G'_n \cap G_{n+1}$ est finement dense dans $A \cap G'_n$. Posons $F = \bigcap_n \overline{G'_n}$: on a $\gamma(\overline{A} \cap F) \geqslant t$ car $\overline{G'_1}$ est quasi-compact. Donc $\gamma(\overline{A} \cap \bigcap_n G_n) \geqslant t > 0$.

Si A_n est une suite de quasi-ouverts fins d'intersection A, et si U est un quasi-ouvert fin tel que $\gamma(U \cap A) > 0$, ce qui précède vaut encore si l'on remplace A par $U \cap A$ et la suite G_n par la suite double $U \cap A_p \cap G_n$. On obtient $\gamma(\overline{U \cap A \cap U \cap \bigcap_p A_p \cap \bigcap_n G_n}) > 0$, soit justement $\gamma(U \cap \bigcap_n B_n) > 0$.

13. THEOREME. – *Un quasi-borélien est mince si et seulement s'il est union dénombrable d'ensembles finement discrets. Un quasi-*G_δ *est mince si et seulement s'il est finement clairsemé.*

Démonstration. – Si A quasi-borélien est finement discret, et si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille de quasi-compacts quasi-disjoints deux à deux et non polaires, inclus dans A, les K_i sont tous quasi-ouverts fins relatifs puisque A est finement discret, alors I est dénombrable d'après l'axiome de Lindelöf : A est mince.

Supposons maintenant que A soit un quasi-G_δ fin mince. On définit ses dérivés fins successifs à l'aide de l'axiome de Lindelöf : il y en a au plus une infinité dénombrable comme au n° 5, et ce sont tous ici des quasi-G_δ fins. Le plus petit d'entre eux, soit $N_f(A)$, est à la fois quasi-G_δ fin, mince et finement dense en soi : nous allons montrer qu'il est polaire. Sinon, soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille maximale de quasi-compacts quasi-disjoints deux à deux, inclus dans $N_f(A)$, non polaires et finement rares sur $N_f(A)$. I est dénombrable car $N_f(A)$ est mince. L'ensemble $E = \bigcup_i K_i$ est donc un quasi-F_σ fin finement maigre sur $N_f(A)$, cela entraîne $E \neq N_f(A)$ (théorème de Baire appliqué au quasi-G_δ fin $N_f(A)$). Il existe donc (axiome de capacitabilité) un quasi-compact K non polaire inclus dans $N_f(A)\backslash E$, sa frontière fine relative est finement rare sur $N_f(A)$, donc polaire puisque la famille (K_i) est maximale, et K est aussi quasi-ouvert fin relatif dans $N_f(A)$. Or $N_f(A)\backslash E$ est un quasi-F_σ héréditaire : tous ses sous-ensembles sont donc des quasi-ouverts fins relatifs, c'est-à-dire que $N_f(A)\backslash E$ est quasi-ouvert discret fin dans $N_f(A)$. Mais $N_f(A)$ est finement dense en soi, d'où une contradiction. Ainsi $N_f(A)$ est polaire et A est finement clairsemé.

Enfin si A est quasi-borélien mince, c'est un quasi-F_σ, donc une réunion dénombrable d'ensembles clairsemés puis discrets (en quasi-topologie fine).

Il reste à résoudre le problème des quasi-F_σ héréditaires, et plus généralement des ensembles qui sont «quasi-F_σ fins héréditaires», c'est-à-dire dont tout sous-ensemble quasi-borélien est un quasi-F_σ fin.

14. THEOREME. – *On suppose le deuxième axiome de Lindelöf pour la quasi-topologie fine. Alors tout quasi-*G_δ *fin finement dense en soi et non polaire contient un quasi-*G_δ *fin qui n'est pas un quasi-*F_σ *fin. De plus, tous les quasi-*F_σ *fins héréditaires sont minces (et réciproquement).*

Démonstration. – Le deuxième axiome de Lindelöf pour la quasi-topologie fine est le suivant : pour toute famille de quasi-ouverts fins $(G_i)_{i \in I}$, il existe une partie dénombrable J de I telle que l'intérieur fin de $\bigcap_{j \in J} G_j$ soit contenu (quasi-partout) dans chacun des $G_i (i \in J)$.

Soit donc A un quasi-G_δ fin finement dense en soi et non polaire, et soit (F_i) la famille de tous les ensembles finement quasi-fermés inclus dans A, et finement rares sur A. Il existe alors un ensemble dénombrable $J \subset I$ tel que $B = \bigcup_{i \in J} F_i$ soit finement dense dans A en vertu du deuxième axiome de Lindelöf et du fait que A est finement dense en soi. Or, B est un quasi-F_σ fin finement maigre sur A et finement dense : il suit du théorème de Baire que ce n'est pas un quasi-G_δ fin.

Soit alors E un quasi-F_σ fin héréditaire, c'est une réunion dénombrable de quasi-fermés fins ayant la même propriété. Tout quasi-fermé fin est aussi un quasi-G_δ fin (et même un quasi-G_δ ordinaire) : tout quasi-fermé fin inclus dans E est donc finement clairsemé d'après le début du théorème, et E lui-même est mince.

15. *Remarque.* – Disons qu'un ensemble E est héréditairement finement dense en soi si tout sous-ensemble non polaire est finement dense en soi. Il revient au même de dire qu'il ne contient aucun ensemble mince et non polaire, ou encore qu'il ne porte que des mesures étalées. D'après ce que nous venons de voir, si $\gamma(E) > t$, il existe $B \subset E$ tel que $\gamma(B) > t$ et $\gamma(E \backslash B) > t$, et cela vaut aussi pour tout sous-ensemble de E : on en déduit que γ induit sur E une capacité dichotomique et que γ coïncide avec e (l'épaisseur) sur E. D'ailleurs cela caractérise les ensembles E qui sont héréditairement denses en soi, puisque les ensembles minces sont les ensembles d'épaisseur nulle. Choquet a démontré que la capacité newtonienne sur $\mathbf{R}^3$ a cette propriété : il suffit donc de voir que les ensembles minces sont polaires, mais même ainsi réduite, ce n'est pas une propriété triviale (*).

(*) Note sur les épreuves : on peut consulter à ce sujet « Remarques sur un résultat de Choquet ». Séminaire de théorie du potentiel, n° 6, Paris.

Signalons une autre application du deuxième axiome de Lindelöf ; on montrerait exactement comme au § IV que tout sous-ensemble finement fermé (resp. finement parfait) est le support fin d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^\infty(\gamma)$ (resp. étalée).

VI. L'exemple fondamental.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace mesuré, où P est une probabilité et $\mathcal{F}$ est supposée complétée par les ensembles P-négligeables. Soit $\mathcal{B}$ la tribu produit de $\mathcal{F}$ par la tribu borélienne de $[0, +\infty] = \overline{\mathbf{R}}^+$. Une fonction X $\mathcal{B}$-mesurable est dite un processus. Pour $X \geqslant 0$, on note $X^* = \sup\limits_t X_t$: il est bien connu que X^* est $\mathcal{F}$-mesurable (cf. (4)). On pose alors $\gamma(X) = \int |X|^* \, dP \leqslant +\infty$, et on note $\mathcal{L}^1(\gamma)$ l'ensemble des processus dont presque toute trajectoire $t \longmapsto X_t(\omega)$ est finie continue sur $[0, +\infty]$, et $\gamma(|X|) < +\infty$.

Il est clair que γ vérifie les propriétés a) et b) du paragraphe I. Les ensembles γ-polaires sont plus connus sous le nom d'ensembles évanescents, ce sont ceux dont la projection sur Ω est P-négligeable. Remarquons enfin que $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est isomorphe et isométrique à $\mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{C}(\overline{\mathbf{R}}^+))$, γ est fortement sous-additive et vérifie donc l'axiome de capacitabilité.

16. Proposition. – *$G \in \mathcal{B}$ est quasi-ouvert si et seulement si presque toute fibre G^ω est ouverte dans $\overline{\mathbf{R}}^+$.*

Démonstration. – Soit $d(\omega, t)$ la distance dans $\overline{\mathbf{R}}^+$ de t à $\overline{\mathbf{R}}^+ \backslash G^\omega$. Pour t fixé, $d(\omega, t)$ est temps d'entrée ou plutôt un début et est donc $\mathcal{F}$-mesurable. Pour ω fixé, c'est une fonction finie continue $\leqslant 1$ sur $\overline{\mathbf{R}}^+$. On en déduit que c'est un processus $\in \mathcal{L}^1(\gamma)$. Ce processus s'annule exactement sur le complémentaire de G si les fibres de G sont ouvertes, et alors G est quasi-ouvert.

17. Proposition. – *Les axiomes de Lindelöf et Baire sont satisfaits.*

Démonstration. – Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de quasi-ouverts que l'on peut supposer stable par réunions et intersections finies. Notons comme ci-dessus $d_i(\omega, t)$ la distance de t à $\overline{\mathbf{R}}^+ \backslash G_i^\omega$. Soit

J une partie réticulée et dénombrable de I telle que l'on ait pour tout t rationnel :

$$\operatorname*{Inf}_{j\in J} d_j(\omega, t) = \operatorname*{Ess\,Inf}_{i\in I} d_i(\omega, t)$$

$$\operatorname*{Sup}_{j\in J} d_j(\omega, t) = \operatorname*{Ess\,Sup}_{i\in I} d_i(\omega, t).$$

Comme les processus d_j sont également lipschitziens sur presque toute fibre, il est clair que J répond à la question.

Enfin on a pour tout E, $\gamma(E) = P(\pi(E))$ (π projection sur Ω) donc l'axiome de Baire puisque l'adhérence se prend fibre par fibre.

18. THEOREME. – a) *Pour que* F *quasi-fermé soit discret, il faut et il suffit que presque toute fibre* F^ω *soit finie.*

b) *Soit* $E \in \mathcal{B}$. *Les ensembles* E', $N(E)$, $K(E)$ *se calculent fibre par fibre au sens ordinaire.*

Démonstration. – Si presque tout F^ω est fini, F est d'abord quasi-fermé par la proposition 16. Ensuite, si $R \subset F$ est rare sur F, alors toujours d'après 16. presque tout R^ω est rare sur F^ω au sens ordinaire. Donc $R^\omega = \phi$ presque-sûrement, et R est polaire. Ainsi F est quasi-fermé discret par le théorème 3.c.

Inversement, soit F un quasi-fermé discret, et soit T le début de F : $T(\omega) = \operatorname{Inf}\{t \geqslant 0 \mid (\omega, t) \in F\}$.

L'ensemble $\widetilde{T} = \{(\omega, t) \mid t = T(\omega) \in F\}$ est un graphe partiel de variable aléatoire $\mathcal{E}$-mesurable, et est inclus dans F. Soit $(\widetilde{T}_i)$ une famille maximale de graphes partiels non polaires inclus dans F et quasi-disjoints : elle est au plus dénombrable car F est discret, et $F = \bigcup_i \widetilde{T}_i$ car la famille est maximale. Les ensembles $A_p = \bigcup_{i\geqslant p} \widetilde{T}_i$ décroissent et $\bigcap_p A_p$ est polaire. $\gamma(A_p)$ tend vers 0 (théorème 3.b), et il s'ensuit que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \pi(\widetilde{T}_n) = \bigcap \pi(A_p)$ est P-négligeable. Comme presque toute fibre de chaque $\widetilde{T}_n$ a au plus un point, on voit que F est fini sur presque toute fibre.

b) Soit E_1 l ensemble obtenu en dérivant au sens ordinaire fibre par fibre Soit $d(\omega, t)$ la distance de t à $E^\omega \backslash \{t\}$. On voit comme dans la proposition précédente que c'est un processus quasi-continu. Par suite, $E \backslash E_1 = \{d > 0\}$ est quasi-ouvert relatif dans

E. Soit R un ensemble rare sur E : presque toute fibre R^ω est rare sur E^ω, donc $E' \subset E_1$. Par ailleurs, tout graphe partiel extrait de E_1 est rare sur E, donc inclus dans E', et $E_1 = E'$.

On a alors par récurrence pour tout ordinal $\xi < \aleph_1$:

$$(E^{(\xi)})^\omega = (E^\omega)^{(\xi)} \quad \text{presque sûrement.}$$

Soit $\eta < \aleph_1$ le premier ordinal pour lequel $N(E) = E^{(\eta)}$. On a $E^{(\eta)} = E^{(\eta+1)}$ quasi-partout, donc $(E^\omega)^{(\eta)} = (E^\omega)^{(\eta+1)}$ presque sûrement, et par suite $N(E^\omega) = (E^\omega)^{(\eta)} = (E^{(\eta)})^\omega = N(E)^\omega$ presque sûrement.

Soit $E \in \mathcal{B}$, tel que presque tout E^ω soit dénombrable. Si F est quasi-fermé $F \subset E$, presque tout F^ω est dénombrable et fermé donc clairsemé. Ainsi $N(F^\omega) = \emptyset$, et $N(F)$ est polaire. On en déduit que E ne contient aucun parfait et est mince. Si maintenant E est mince, il est évidemment dénombrable par fibre.

Si $A \in \mathcal{B}$, soit $K_1(A)$ l'ensemble dont la fibre $K_1(A)^\omega$ est l'ensemble des points de condensation de la fibre A^ω, et soit $K(A)$ le noyau de condensation. On a presque sûrement :

$$(A \backslash K(A))^\omega \subset A^\omega \backslash K_1(A)^\omega \quad \text{donc} \quad K_1(A) \subset K(A)$$

et pour tout parfait $F \subset A : F^\omega \subset K_1(A)^\omega$. Comme $K(A)$ est la borne supérieure relative de ces ensembles parfaits, on a $K(A)^\omega \subset K_1(A)^\omega$ presque sûrement. Par suite $K(A) = K_1(A)$.

Il ne reste plus qu'à appliquer les théorèmes des chapitres précédents pour retrouver de nombreux résultats dûs à Dellacherie [4] : par exemple $A \backslash K(A)$ est réunion dénombrable de graphes partiels de variables aléatoires, et $K(A)$ est polaire (évanescent) ou bien contient $2^{\aleph_0}$ tels graphes partiels.

Signalons enfin que la quasi-topologie engendrée par les processus dont presque toute trajectoire est décroissante et continue à droite est une quasi-topologie fine compatible au sens du § V et vérifiant aussi l'axiome de Baire et les deux axiomes de Lindelöf : c'est une propriété générale de la théorie du potentiel.

VII. Théorème des suites stationnaires.

Reprenons l'exemple fondamental précédent, et soit K un compact aléatoire, $K \subset \Omega \times [0,1]$. Si f est borélienne sur $[0,1]$, posons $f^*(\omega) = \sup_{t \in K^\omega} |f(t)|$. On a vu que f^* était $\mathcal{F}$-mesurable. Posons $c(f) = \int f^*(\omega)\, dP(\omega)$ $(\leqslant +\infty)$. Notons $\mathcal{L}^1(\gamma_0)$ l'espace des fonctions c-quasi-boréliennes sur $[0,1]$ telles que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la restriction de f à K^ω soit finie continue. Toutes les conditions sont vérifiées, sauf peut-être l'axiome de Lindelöf, mais le sous-espace $\mathcal{C}([0,1])$ est partout dense dans $\mathcal{L}^1(\gamma_0)$: en effet, toute mesure $\geqslant 0$ du dual de $L^1(\gamma_0)$ est une mesure borélienne bornée sur $[0,1]$: c'est donc une mesure de Radon, et elle est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}([0,1])$. Alors si deux mesures $\geqslant 0$ coïncident sur $\mathcal{C}([0,1])$, elles coïncident sur $\mathcal{L}^1(\gamma_0)$, et le théorème de Hahn-Banach entraîne la densité de $\mathcal{C}([0,1])$. Comme $\mathcal{C}([0,1])$ est séparable en norme uniforme, $\mathcal{L}^1(\gamma_0)$ est séparable pour sa topologie qui est moins fine.

D'après notre théorème 3, $[0,1]$ est quasi-topologiquement discret s'il existe une mesure $\geqslant 0$ qui domine fortement la capacité c'est justement la condition étudiée par Mokobodzki dans [14], et il a démontré qu'il était nécessaire et suffisant que presque toute fibre K^ω de K soit finie, c'est-à-dire que K soit discret en γ-quasi-topologie. Cela étant, nous pouvons démontrer le résultat suivant :

19. THEOREME. – *Soit* T_n *une suite de variables aléatoires sur un espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Les propriétés a) et b) sont équivalentes :*

a) *pour presque tout* $\omega \in \Omega$, *la suite* $T_n(\omega)$ *est stationnaire.*

b) *pour toute fonction borélienne bornée* f, *la suite* $f \circ T_n$ *converge presque sûrement.*

Démonstration. – Il est clair que a) $\Longrightarrow$ b).

b) $\Longrightarrow$ a) : on peut supposer la suite T_n à valeurs dans $[0,1]$. Si f est borélienne bornée sur $[0,1]$, posons $Vf(\omega) = \lim_n f \circ T_n(\omega)$, donc $\int_A Vf\, dP = \lim_n \int_A f \circ T_n dP$ pour tout $A \subset \Omega$, par le théorème de Lebesgue. Si E est borélien dans $[0,1]$, l'expression $\epsilon_n^A(E) = \int_A 1_E \circ T_n dP$ converge donc vers $\mu^A(E) = \int_A V\, 1_E dP$. Comme les ϵ_n^A sont des mesures $\geqslant 0$, le théorème de Vitali-Hahn-Saks permet de conclure que μ^A est aussi une mesure. Or, on a $\mu^A(f) = \int_A Vf\, dP$ et par suite V est un noyau.

Calcul de V : la suite T_n converge presque-sûrement vers une variable aléatoire T par hypothèse, donc $f \circ T_n$ converge presque sûrement vers $f \circ T$ dès que f est continue sur $[0, 1]$. Donc $Vf = f \circ T$ pour toute f continue, puis pour toute f borélienne bornée puisque V est un noyau. Considérons maintenant le produit $\Omega \times [0, 1]$, et K le compact aléatoire de fibre générale $K^\omega = \{T_1(\omega), T_2(u), \dots, T(\omega)\}$.

On vient donc de montrer que toute fonction borélienne bornée sur $[0, 1]$ est quasi-continue, c'est-à-dire que $[0, 1]$ est quasi-topologiquement discret : le théorème de Mokobodzki que nous avons mentionné plus haut nous dit alors que presque toute fibre K^ω est finie, donc que la suite T_n stationne presque-sûrement.

c.q.f.d.

On peut montrer réciproquement que ce théorème implique celui de Mokobodzki, c'est pourquoi il serait intéressant d'en trouver une démonstration indépendante.

VIII. Théorie du potentiel.

Revenons aux hypothèses générales, et supposons nous donné de plus un cône C dans $L^1(\gamma)$, tel que :

- les éléments de C sont $\geqslant 0$,
- tout élément de $L^1(\gamma)$ est majoré par un élément de C,
- C-C est partout dense dans $L^1(\gamma)$,
- C est un cône de potentiels au sens de (13),
- la norme γ est linéaire sur C,
- il existe $p \in C$ qui est un «potentiel strict» (cf. 6).

Il existe alors une mesure $\theta \in \mathfrak{M}_1^\infty$, telle que $\gamma(p) = \theta(p)$ pour tout $p \in C$. Une fonction $f \geqslant 0$ et quasi-borélienne est dite C-concave ou «fortement surmédiane» si l'on a $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ pour tout couple de mesures (μ, ν) telles que μ soit «balayée» de ν i.e. $\mu(p) \leqslant \nu(p)$ pour tout $p \in C$. Si f est fortement surmédiane, sa régularisée inférieure f l'est aussi, et l'ensemble $\{f \neq \hat{f}\}$ est mince selon un théorème de R.M. Hervé pour le cas de la théorie axiomatique de Brelot. On démontre (9) qu'un tel ensemble est en fait union dénombrable d'ensembles quasi-topologiquement discrets.

On définit une quasi-topologie fine en prenant pour quasi-ouverts fins les ensembles de la forme $\{u > v\}$ où u et v sont C-concaves quasi-s.c.i., et on démontre (cf. 9) que cette quasi-topologie fine vérifie toutes les conditions du § V, et même le deuxième axiome de Lindelöf.

On peut remarquer que le cône des processus décroissants du § VI est un cône de potentiels comme nous venons de les définir, et même plus généralement le cône des surmartingales associées à une filtration convenable de la tribu $\mathcal{F}$, à quelques arrangements près qui sont exposés dans (9).

IX. Enoncés abstraits.

Soit E un espace de Banch réticulé abstrait (cf. 12). Un sous-espace H sera dit une «prébande» si les relations $|x| \leqslant |y|$ et $y \in H$ entraînent $x \in H$. (Un tel sous-espace est dit «épais» en terminologie de Bourbaki, qu'il vaut mieux éviter ici). Toute partie A de E engendre une prébande fermée : c'est la plus petite prébande fermée contenant A. Supposons que E vérifie l'axiome :

(AL) *toute prébande fermée est engendrée par un seul élément.*

On voit que l'espace $\mathbf{L}^1(\gamma)$ du I vérifie (AL) si et seulement s'il vérifie l'axiome de Lindelöf (L1). De plus, l'application $G \hookrightarrow E_G = \mathbf{L}^1(\gamma, G)$ est un isomorphisme du treillis formé par les quasi-ouverts sur le treillis des prébandes fermées de $\mathbf{L}^1(\gamma)$.

Inversement, si E est abstrait et vérifie (AL) il est isomorphe à un espace $\mathbf{L}^1(\gamma)$ vérifiant (L1) (cf. 10).

Disons que E est un espace de Köthe si c'est une prébande dans son bidual (order continuous d'après 12). Notons E_{is} la plus grande prébande fermée de E qui soit un espace de Köthe, et E_1 le quotient $E_1 = E/E_{is}$, puis par récurrence pour $\xi < \aleph_1$: $E_{\xi+1} = E_\xi/E_{\xi,is}$ $E_\xi = \varinjlim_{\eta<\xi} E_\eta$ si ξ est limite.

Le théorème de Cantor-Bendixon et le théorème d'Urysohn (qui sont indépendants de l'axiome de capacitabilité) nous disent alors que la suite est stationnaire, et qu'en notant $E_d = \varinjlim_{\xi} E_\xi$, on obtient un quotient de E n'ayant aucune prébande fermée qui soit un espace de Köthe autre que $\{0\}$.

Disons de même que E est mince s'il existe $\mu \geqslant 0$, $\mu \in E^*$ (le dual) telle que pour toute suite $x_n \in E$, $x_n \geqslant 0$ x_n décroissante, $\lim_n \mu(x_n) = 0$ implique $\lim_n x_n = 0$. Notons E_m la plus grande prébande fermée et mince de E. Le quotient $E_k = E/E_m$ n'a aucune prébande fermée mince autre que $\{0\}$. E_k est un quotient de E_d. A quelle condition (abstraite remplaçant la condition de Baire) a-t-on $E_k = E_d$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, On topologies and boundaries in potential theory, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 175, Springer, 1971.

[2] G. CHOQUET, Theory of capacities, *Annales de l'Institut Fourier*, 5 (1955), 131-295.

[3] G. CHOQUET, Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Annales de l'Institut Fourier*, 9 (1959), 83-89.

[4] C. DELLACHERIE, Capacités et processus stochastiques, *Ergebnisse der Mathematik*, n° 67, Springer, 1972.

[5] C. DELLACHERIE, Ensembles analytiques, capacités, mesures de Hausdorff, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 295, Springer, 1972.

[6] D. FEYEL, Espaces de Banach fonctionnels adaptés. Quasi-topologie et balayage, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 681, Springer, 1978.

[7] D. FEYEL, Relations entre ensembles clairsemés et ensembles semi-polaires, *C.R.A.S.*, t.290, série A, p. 65.

[8] D. FEYEL, Espaces fonctionnels de processus, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 814, Springer, 1980.

[9] D. FEYEL, Représentation des fonctionnelles surmédianes, (à paraître in *ZFW*).

[10] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Représentations d'espaces de Riesz-Banach sur des espaces quasi-topologiques, *C.R. Acad. Royale de Belgique*, 5e série, t. LXIV, 1978-6.

[11] R.M. HERVE, Recherches axiomatiques en théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Annales de l'Institut Fourier*, 12 (1962), 415-571.

[12] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI, Classical Banach Spaces II, *Ergebnisse der Mathematik*, n° 97, Springer, 1979.

[13] G. MOKOBODZKI, Structure des cônes de potentiel, Séminaire Bourbaki, 1970.

[14] G. MOKOBODZKI, Ensembles à coupes dénombrables et capacités dominées par une mesure, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 649, Springer, 1976.

Manuscrit reçu le 3 mars 1980
révisé le 25 novembre 1980.

Denis FEYEL,
ERA associée au CNRS n° 294
Université Paris VI
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.