ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT

Sur la transformation de Mellin et les fonctions à dominante angulaire algébrico-logarithmique en un point

Annales de l'institut Fourier, tome 8 (1958), p. 367-407
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1958__8__367_0>

SUR LA TRANSFORMATION DE MELLIN ET LES FONCTIONS A DOMINANTE ANGULAIRE ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUE EN UN POINT

par Maurice BLAMBERT.

INTRODUCTION

Dans ce mémoire je me propose de mettre en évidence l'intérêt du choix convenable d'une fonctionnelle pour l'étude d'une certaine classe de points singuliers de fonctions analytiques. Cette classe est celle des points dont je conviens de dire (sous des conditions que je précise) que la fonction analytique considérée ayant un point de cette classe pour point singulier possède en ce point une « dominante angulaire algébrico-logarithmique »; elle contient la sous-classe des points algébrico-logarithmiques rencontrés dans l'étude des solutions analytiques des équations différentielles linéaires homogènes du type de Fuchs. (Ces derniers ont fait l'objet de nombreux travaux dans des directions diverses.)

Je montre que l'application convenable de la transformation de Mellin (l'intégrale de Mellin étant calculée de long d'un rayon issu du point singulier du type cité) à une fonction déterminante possédant ce type de points singuliers lui fait correspondre une fonction génératrice dont on peut caractériser l'ensemble singulier. Dans des cas intéressants, par exemple celui de l'existence de points algébrico-logarithmiques, la transformée de Mellin a un ensemble singulier constitué par des pôles régulièrement espacés. Lorsque l'origine du rayon d'intégration de l'intégrale de Mellin est un point régulier pour la fonction alors sous une condition de croissance la transformée est entière et est d'ordre à la Ritt nul dans chaque demi-bande horizontale gauche de son plan. Je retrouve comme cas particuliers des résultats anciens dus à G.H. Hardy, M. Fekete, M.L. Cartwright. Les résultats obtenus montrent qu'au lieu de caractériser un point singulier par le comportement de la fonction au voisinage de ce point il est plus intéressant dans certains types de problèmes de le caractériser par la donnée de l'ensemble singulier de la transformée à l'aide d'une fonctionnelle convenablement choisie.

Dans un premier chapitre je rappelle des définitions et des locutions et même des résultats déjà utilisés dans d'autres mémoires et j'introduis des définitions nouvelles. Au chapitre II j'étudie la nature de la transformée de Mellin, son ensemble singulier, et dans le cas particulier où elle est entière son ordre au sens de Ritt dans une demi-bande. Le chapitre III est réservé à l'étude de quelques propriétés d'inversion de la transformation. Le chapitre IV est consacré à l'application des résultats des chapitres II et III au problème de la composition (au sens Hadamard-Mandelbrojt) des singularités des séries de Dirichlet générales. Je précise que je ne me suis pas proposé de faire dans ce dernier chapitre une étude systématique de ce sujet. Les théorèmes énoncés ont pour but de mettre en évidence l'intérêt des résultats antérieurs dans ce problème. En effet l'étude de la composition des points singuliers au voisinage desquels les fonctions ne sont pas uniformes est en général plus difficile que celle des points où les fonctions sont uniformes. Ici on montre comment on peut apporter une solution à ce problème pour une certaine classe de points en se ramenant à la composition de points singuliers de fonctions uniformes. Les conditions et les énoncés des théorèmes du chapitre IV ont été choisis simples à dessein à la fois pour illustrer plus facilement la méthode et éviter d'allonger le texte. Ultérieurement dans un autre mémoire je reprendrai l'étude systématique de ce problème dans cette voie. Une bibliographie très succincte termine ce travail.

CHAPITRE PREMIER

On considère les deux séries $f(s) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ avec $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ et $\varphi(s) = \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-s\mu_n}$ avec $0 < \mu_n \uparrow \infty$, $s = \sigma + i\tau$. On note σ_C^f, σ_C^φ et σ_A^f, σ_A^φ respectivement leurs abscisses de convergence simple et absolue. Soit n_0 le plus petit entier positif tel que $\mu_n > \lambda_1$ dès que $n \geqslant n_0$, et soit k un entier positif. Le nombre que l'on note $a_{\mu_n}^{(k)}$ est défini de la manière suivante : il est égal à 0 pour $1 \leqslant n < n_0$ (si $n_0 > 1$) et à

$$\sum_{\substack{m \\ (\lambda_m < \mu_n)}} (\mu_n - \lambda_m)^k a_m \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant n_0.$$

Ce nombre $a_{\mu_n}^{(k)}$ est appelé le $n^{\text{ième}}$ coefficient d'ordre k, par rapport à la suite $\{\mu_n\}$, de la fonction $f(s)$ définie par prolongement analytique de la somme de la série $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$. Si la suite $\{\mu_n\}$ est identique à la suite $\{n\}$ le nombre,

$$\sum_{(\lambda_m < n)} (n - \lambda_m)^k a_m$$

est appelé le $n^{\text{ième}}$ coefficient « taylorien » d'ordre k de la fonction $f(s)$. J'appelle opérateur Hadamard-Mandelbrojt celui qui fait correspondre la série composée $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ au couple des deux séries composantes, $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ et $\Sigma b_n e^{-s\mu_n}$; la fonction définie par prolongement analytique de la somme de la série composée, à partir de son demi-plan de convergence, est notée $H_k[f, \varphi/s]$.

Soit σ_1 un certain nombre réel (fini) et soit Δ un domaine (ensemble connexe de points tous intérieurs) situé dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$ et tel que :

a) Δ contient des points s tels que $Rs = \sigma > \sigma_A^f$,

b) la fonction $f(s)$ est holomorphe dans Δ et égale à la somme de la série $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ pour chaque $s \in (\Delta \cap P_C^f)$, où P_C^f est le demi-plan $\sigma > \sigma_C^f$.

Soit $\Delta(\sigma_1)$, un domaine, le plus grand s'il existe, union de domaines Δ et qui est tel que la fonction $f(s)$ est holomorphe dans $\Delta(\sigma_1)$ et égale à la somme de sa série de définition pour chaque s du demi-plan P_C^f. L'ensemble constitué par tous les points du demi-plan $\sigma \geqslant \sigma_1$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\Delta(\sigma_1)$ est noté $\mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$ et est appelé « l'ensemble singulier de $f(s)$ par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_1$ ». Cet ensemble $\mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$ est fermé; il contient les points de la droite $\sigma = \sigma_1$. On remarquera que les propriétés qui caractérisent $\Delta(\sigma_1)$ entraînent que tout point $\alpha \in \mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$ avec $R\alpha > \sigma_1$ au voisinage duquel la fonction $f(s)$ n'est pas uniforme ne peut être point isolé dans l'ensemble $\mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$. La fonction $f(s)$ ne peut être prolongée analytiquement jusqu'à un point de $\mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$ le long d'un chemin contenu dans $\sigma > \sigma_1$. La branche principale de $f(s)$ est holomorphe dans $\underset{\overline{P_f}}{\complement} \mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$, où P_f et $\overline{P_f}$ sont respectivement les demi-plans $\sigma > \sigma$ et $\sigma \geqslant \sigma_1$.

Dire que les points d'un ensemble fermé $\mathfrak{S}$ sont les seuls points singuliers « possibles » par rapport à un demi-plan $P_f(\sigma > \sigma_1)$ d'une fonction $f(s)$ définie par prolongement analytique de la somme de la série $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, avec $\sigma_C^f < \infty$, signifie que dans chaque domaine Δ (dont l'intersection avec le demi-plan $\sigma > \sigma_C^f$ est non vide) appartenant au complémentaire par rapport à $\overline{P_f}$ de l'intersection de $\mathfrak{S}$ et $\overline{P_f}$:

1) $f(s)$ est holomorphe,

2) $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ pour chaque s avec $\sigma > \sigma_C^f$.

Eu égard à cette définition il est évident que les points de $\mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$ sont les seuls points singuliers « possibles » de $f(s)$ [ou encore de la branche principale de $f(s)$] par rapport à P_f. On remarquera que si $\alpha \in \mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$, α n'est pas nécessairement un point singulier (au sens classique) pour la fonction $f(s)$.

On définit de la manière suivante « l'ordre généralisé » de la fonction $f(s)$ dans P_f ou, plus succinctement, « l'ordre O_M » de $f(s)$ dans P_f:

On pose $\mathfrak{S}_f^{\sigma_1}(\varepsilon) = \cup\, c(s, \varepsilon)$ pour chaque $s \in \mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$, où $c(s, \varepsilon)$ est le cercle ouvert de centre s et de rayon ε. S'il existe un nombre $\nu \geqslant 0$ tel que :

1) à tout couple $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ il correspond un couple de

constantes $C = C(\varepsilon, \eta)$ et $T_0 = T_0(\varepsilon, \eta)$ tels que $|f(s)| < C|\tau|^{\nu+\eta}$ pour tout point à distance finie $s \in \underset{\overline{P_f}}{\complement}\left(\overline{P_f} \cap \mathbf{S}_f^{\sigma_1}(\varepsilon)\right)$ avec $|\tau|$ suffisamment grand, $|\tau| > T_0$,

2) aucun nombre $\nu' < \nu$ ne possède la propriété (1),

alors on dit que $f(s)$ est « d'ordre O_M » égal à ν dans P_f.

Si $\nu = 0$, la condition (2) est sans objet. On sait que la somme d'une série de Dirichlet est de la forme: $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n} = o(|\tau|)$ pour $|\tau| \uparrow \infty$, $\sigma_0 + i\tau = s$, σ_0 (fixé fini quelconque) $> \sigma_C^f$, (ce résultat peut-être amélioré, par exemple en particularisant la suite $\{\lambda_n\}$) et ne peut pas être de la forme

$$\Sigma a_n e^{-s\lambda_n} = O(|\tau|^{\mu}), \qquad \text{avec} \qquad \mu < 0, \qquad \text{pour} \qquad |\tau| \uparrow \infty,$$

de même qu'elle ne peut tendre vers une limite finie lorsque le point s s'éloigne à l'infini en décrivant une parallèle à l'axe de convergence dans le demi-plan de convergence. Il est évident que si la série définissant $f(s)$ est une série de Taylor-D, c'est-à-dire telle que $\{\lambda_n\} \equiv \{n\}$, alors dans le complémentaire par rapport à $\overline{P_f}$ de l'intersection de $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}(\varepsilon)$ et de $\overline{P_f}$ on a $f(s) = O(1)$.

Posons $\sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1) = \overline{\text{Borne}}\ \sigma$, $s \in \mathbf{S}_f^{\sigma_1}$. Le nombre $\sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1)$ est appelé l'abscisse d'holomorphie de $f(s)$ par rapport à P_f.

Posons $\sigma_{\mathcal{H}}^f = \underline{\textit{Borne}}\ \sigma'$, $f(s)$ étant holomorphe dans $\sigma > \sigma'$, (et égale à la somme de sa série de définition dans $\sigma > \sigma_C^f$). Le nombre $\sigma_{\mathcal{H}}^f$ est l'abscisse d'holomorphie au sens classique. Si $\sigma_1 < \sigma_{\mathcal{H}}^f$ on a $\sigma_{\mathcal{H}}^f = \sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1)$; si $\sigma_1 \geqslant \sigma_{\mathcal{H}}^f$, on a alors $\sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1) = \sigma_1$.

E_1 et E_2 étant des ensembles de nombres complexes, on appelle « somme composée » de ces deux ensembles l'ensemble formé de tous les nombres $\alpha + \beta$, avec $\alpha \in E_1$, $\beta \in E_2$.

S. Mandelbrojt a énoncé les théorèmes suivants [IV. 1]:

Théorème A. — *Soit* $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, *avec* $\sigma_A^f < \infty$, *« d'ordre* O_M *» égal à* ν *dans* $P_f(\sigma > \sigma_1)$; *soit* $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-s\mu_n}$, *avec* $\sigma_A^\varphi < \infty$ *« d'ordre* O_M *» égal à* μ *dans* $P_\varphi(\sigma > \sigma_2)$. *Soient* $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}$ *l'ensemble singulier de* $f(s)$ *par rapport à* P_f *et* $\mathbf{S}_\varphi^{\sigma_2}$ *celui de* $\varphi(s)$ *par rapport à* P_φ. *Si* k *(entier)* $> \nu + \mu$, *la série* $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ *a une abscise de convergence absolue au plus égale à max* $(\sigma_A^\varphi, \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi)$ *et la fonction* $H_k[f, \varphi|s]$ *a pour seuls points singuliers « possibles » par rapport au demi-plan* $\sigma > \sigma_2 + \max[o, \sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1)]$ *les points de l'ensemble* $\mathbf{S}_\varphi^{\sigma_2} \cup \mathbf{S}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}$.

Théorème B. — *Dans les mêmes conditions qu'au théorème* A *et si* $s = 0$ *est point régulier pour* $f(s)$, *alors les seuls points singuliers « possibles » par rapport à* $\sigma > \sigma_2 + \sigma^f_{\mathcal{H}}(\sigma_1)$ *de la fonction* $H_k[f, \varphi|s] - I_k(s)$, *avec* $I_k(s) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f^{(k-j)}_{(0)} \varphi^{(j)}_{(s)}$ *sont les points de l'ensemble* $\overline{\mathfrak{S}^{\sigma_1\sigma_2}_{f\ \varphi}}$ *(fermeture de l'ensemble composé des ensembles* $\mathfrak{S}^{\sigma_1}_f$ *et* $\mathfrak{S}^{\sigma_2}_\varphi$*).*

On rappelle succinctement que :

On pave la bande $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant c$ (où la constante $c > \max(o, \sigma^f_A)$) avec des carrés de côté $\varepsilon = \dfrac{c - \sigma_1}{q}$, q entier, et on note $D(\varepsilon)$ la fermeture de l'ensemble formé de tous les carrés qui ne contiennent dans leur fermeture ni un point de $S^{\sigma_1}_f$, ni le point $s = 0$, et qui ne sont pas contigüs à des carrés ne possédant pas cette propriété. On note $D'(\varepsilon)$ la plus grande région appartenant à $D(\varepsilon)$ et contenant les carrés bordant la droite $\sigma = c$, (ceci suppose d'avoir choisi l'entier q suffisamment grand), et soit $C_f(\varepsilon)$ la partie de la frontière de $D'(\varepsilon)$ qui ne contient pas la droite $\sigma = c$. Les deux intégrales

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\,\varphi(z-s)\,\frac{ds}{s^{1+k}}$$

et

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i} \int_{C_f(\varepsilon)} f(s)\,\varphi(z-s)\,\frac{ds}{s^{1+k}}$$

(la seconde intégrale étendue à $C_f(\varepsilon)$ est prise dans le sens indirect habituel par rapport à $D'(\varepsilon)$) définissent, par prolongement analytique à partir d'un demi-plan convenable du plan de la variable z, la même fonction $H_k[f, \varphi|z]$ que la somme de la série du théorème A.

Définition I. 1. — La fonction analytique $f(s)$, définie par le prolongement analytique de la somme de la série

$$\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}, \qquad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \qquad a_n \neq 0,$$

à partir de son demi-plan de convergence $Rs = \sigma > \sigma^f_C$, est dite une fonction de classe $\mathfrak{M}$, ($f \in \mathfrak{M}$), si elle satisfait aux conditions suivantes :

1) $\sigma^f_{\mathcal{H}} = 0$;

2) il existe $\sigma_1 < 0$ tel que $f(s)$ est « d'ordre O_M » fini (égal à ν) dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$;

3) la série $f^*(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n^*}$, avec $\lambda_n^* = \operatorname{Log} \lambda_n$, admet $\sigma_A^{f^*} < \infty$;

4) il existe une constante σ_1^*, avec $\sigma_1^* < \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}$, telle que la fonction $f^*(s)$ est « d'ordre O_M » fini (égal à ν^*) dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$. (On suppose, évidemment, que $\sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}$ est fini c'est-à-dire que $f^*(s)$ ne se réduit pas à une fonction entière.)

On remarquera que la condition (4) entraîne que si $f^*(s)$ est entière la condition subsite en abandonnant l'inégalité.

$$\lambda_n^* = \operatorname{Log} \lambda_n \geqslant 0,$$

c'est-à-dire $\lambda_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$. En effet, sinon il existerait un certain entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $\lambda_n^* < 0$ pour $1 \leqslant n \leqslant n_0$ et $\lambda_n^* \geqslant 0$ pour $n > n_0$. On aurait

$$f^*(s) = e^{-s\lambda_1^*}\{a_1 + f_0^*(s)\}, \qquad \text{avec} \qquad f_0^*(s) = \sum_2^{\infty} a_n e^{-s(\lambda_n^* - \lambda_1^*)}$$

et $\lambda_n^* - \lambda_1^* > 0$ pour $n \geqslant 2$, $\sigma_A^{f_0^*} < \infty$. Il en résulterait $f_0^*(s) = o(1)$ pour $\sigma \uparrow \infty$ et donc $|f^*(s)| \to \infty$ lorsque $\sigma \uparrow \infty$ sur toute droite $\tau = \tau_0$. La fonction $f^*(s)$ ne pourrait pas être « d'ordre O_M » fini dans un demi-plan.

Il est évident que la classe $\mathfrak{M}$ est non vide. Une telle assertion est triviale comme le montre l'exemple suivant :

$$T(s) = \sum_1^{\infty} e^{-ns}, \qquad \sigma > 0,$$
$$T^*(s) \equiv \zeta(s) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \sigma > 0,$$

ou $\sigma_A^T = 0$, $\sigma_A^\zeta = 1$; l'ensemble singulier $\mathbf{S}_T^{\sigma_1}$ de la fonction $T(s)$ par rapport à un demi-plan $\sigma > \sigma_1$, avec $\sigma_1 < 0$, se réduit à l'axe $\sigma = \sigma_1$ et aux points d'affixes $2n\pi i$ (n entier positif, négatif ou nul). Cette fonction est bornée en module dans ce demi-plan à l'extérieur des cercles de rayon $\varepsilon > 0$ ayant ces points pour centres. La fonction $\zeta(s)$ est, comme on sait, de la forme $\zeta(s) = O(|\tau|)$ pour $|\tau| \uparrow \infty$, $\sigma \geqslant 1/2$, et de la forme $O(1)$ dans chaque demi-plan $\sigma > 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Plus précisément on sait que si l'hypothèse de Riemann sur la répartition des zéros complexes est vraie alors $\zeta(\sigma + i\tau) = O(\tau^{\varepsilon})$, $\tau \uparrow \infty$, pour chaque $\varepsilon > 0$ et $\sigma \geqslant 1/2$; cette propriété est connue sous le nom d'hypothèse de Lindelöf.

Définition I. 2. — On dit qu'une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un angle Σ de sommet z_0, d'ouverture $\eta > 0$ et d'axe de symétrie $\arg(z - z_0) = \theta_0$, où θ_0 est une constante réelle, admet dans Σ au point z_0 une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » si pour $z \in \Sigma$ avec $|z - z_0| \downarrow 0$ elle a la représentation :

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \psi(z)$$

où :

1) $\varphi_0(z)$ et $\psi(z)$ sont deux fonctions holomorphes dans Σ;

2) $\psi(z)$ est (par prolongement analytique dans Σ) dans un voisinage circulaire $c(z_0, \rho)$, de centre z_0 et de rayon $\rho > 0$, de la forme

$$\psi(z) = \sum_{r=0}^{r_0} (z - z_0)^{-q_r} \{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{p_r - 1} \psi_r(z),$$

où chaque fonction $\psi_r(z)$ est holomorphe dans $c(z_0, \rho)$ avec $\psi_r(z_0) \neq 0$; les constantes q_r et p_r pouvant être complexes.

On précise que sous la locution « par prolongement analytique dans Σ... » on entend : puisque la fonction $\psi(z)$ est d'après (1) holomorphe dans Σ et considérant en un point z_1 intérieur à Σ (donc $|z_1 - z_0| > 0$) l'élément taylorien dont $\psi(z)$ est la somme dans un cercle (de rayon convenable non nul et de centre z_1) si on prolonge cet élément, le long de tout arc (rectifiable par exemple pour fixer les idées) intérieur à Σ on peut toujours atteindre un point z_2 intérieur à l'intersection de Σ et de $c(z_0, \rho)$, $\rho > 0$, tel que par prolongement dans $c(z_0, \rho)$ à partir du point z_2 la fonction $\psi(z)$ a la représentation indiquée;

3) la fonction $\varphi_0(z)$ étant holomorphe au point z_0 par prolongement analytique dans Σ (dans un domaine union de l'angle Σ et d'un cercle ouvert non vide de centre z_0 donc de rayon positif) ou bien z_0 est singulier pour le prolongement analytique de $\varphi_0(z)$ dans Σ auquel cas on suppose que $\varphi_0(z) = 0(|z - z_0|^{-\alpha})$ lorsque $|z - z_0| \downarrow 0$ pour $z \in \Sigma$, avec $\alpha < \min Rq_r$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$.

Définition I. 3. — La fonction

$$(z - z_0)^{-q_r} \{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{p_r - 1} \psi_r(z)$$

est appelée un élément singulier de la fonction « dominante », attaché au point z_0 et de type $(q_r, p_r - 1)$.

Définition I. 4. — La fonction $\psi(z)$ somme finie d'éléments de types respectifs $(q_r,\ p_r - 1)$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$, au point z_0, est appelée la « dominante angulaire algébrico-logarithmique » de $\varphi(z)$ dans Σ au point z_0.

Définition I. 5. — Le nombre $-\alpha$ est appelé l'ordre au point z_0 de la fonction « dominée » dans Σ.

On rappelle (d'après R. Jungen) [III. 1] que:

Le poids (si p_r est entier $\geqslant 1$) de l'élément singulier de type $(q_r,\ p_r - 1)$ est un complexe de deux nombres réels, défini comme suit:

$$
\begin{array}{lll}
.[q'_r, p_r - 1] & \text{si} \quad q_r \neq 0, -1, -2, -3, \ldots, & \text{avec} \quad q'_r = \mathrm{R} q_r. \\
.[q_r, p_r - 2] & \text{si} \quad q_r = 0, -1, -2, -3, \ldots, & p_r > 1. \\
.[-\infty, 0] & \text{si} \quad q_r = 0, -1, -2, -3, \ldots, & p_r = 1.
\end{array}
$$

On remarquera que si $p_r = 1$ et si q_r est un entier négatif ou 0, alors z_0 est point régulier pour l'élément considéré de $\psi(z)$; en d'autres termes, dire que z_0 est pour l'élément considéré de type $(q_r,\ 0)$ et de poids $[-\infty,\ 0]$, c'est affirmer que z_0 est point régulier pour cet élément. Les poids des éléments singulier de la « dominante » $\psi(z)$ du point z_0 sont ordonnés comme suit:

$$.[q'_r,\ p_r - 1] \qquad \text{est dit plus « lourd » que} \qquad [q'_{r'},\ p_{r'} - 1]$$

si $q'_r > q'_{r'}$, ou si $q'_r = q'_{r'}$ et $p_r > p'_{r'}$.

On appelle poids du point z_0 pour la « dominante » $\psi(z)$ le poids de l'élément singulier le plus lourd de cette « dominante ».

On remarquera que la « dominante » peut ne pas posséder un élément plus lourd que tous les autres c'est-à-dire qu'il peut exister au moins deux éléments de même poids et « plus lourds » que les autres; il peut arriver que les éléments de la dominante soient tous de même poids. On convient encore d'appeler poids du point z_0 pour la « dominante » le poids commun de ses éléments les plus « lourds ».

On remarquera que, si au point z_0, on considère un élément singulier du type $(q_r,\ p_r - 1)$ il est superflu d'y considérer des éléments des types $(q_r - n,\ p_r - 1)$, n entier positif.

Dans le cas d'une série de Dirichlet générale les définitions peuvent s'énoncer en particularisant comme suit:

On dit qu'une fonction $\varphi(s)$ admet en un point singulier s_0, situé sur son axe d'holomorphie $\sigma = \sigma^{\varphi}_{\mathcal{H}}$ (et donc $\sigma_0 = \sigma^{\varphi}_{\mathcal{H}}$), dans un angle ouvert Σ de sommet s_0 et d'ouverture $\eta > 0$, avec $\Sigma \subset P^{\varphi}_{\mathcal{H}}$ (où $P^{\varphi}_{\mathcal{H}}$ est le demi-plan d'holomorphie de $\varphi(s)$) une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » si pour $s \in \Sigma$ avec $|s - s_0| \downarrow 0$ elle a la représentation :

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \psi(s),$$

où... (tout le reste de la définition antérieure et celles qui la suivent étant légitimes mot pour mot).

Définition I. 6. — On appelle transformée de Mellin de la fonction $\varphi(z)$ suivant le rayon $\arg(z - z_0) = \theta_0$, la fonction analytique de la variable complexe s définie par le prolongement analytique de l'intégrale convergente

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \varphi(z)(z - z_0)^{s-1}\, dz, \qquad \text{avec} \qquad z - z_0 = \rho e^{i\theta_0},$$

à partir dans le plan de la variable s d'un domaine non vide, s'il existe, de convergence absolue de cette intégrale.

On note $M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_0 | s\}$ cette transformée.

Contrairement à l'habitude (outre le fait de ne pas se limiter à l'intégration sur le rayon $\arg z = 0$, avec $z_0 = 0$) on a fait figurer en coefficient la fonction entière $\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ dont la présence a pour avantage que, sous des conditions convenables, la transformée de Mellin d'une série de Dirichlet de type $\{\lambda_n\}$ est une série de Dirichlet de type $\{\lambda^*_n\}$, avec $\lambda^*_n = \operatorname{Log} \lambda_n$.

Définition I. 7. — On considère un angle Σ appartenant au demi-plan $Rz = x > x_0$ d'axe $\arg(z - z_0) = \theta_0$, ensemble des points z avec $|z - z_0| > 0$, $|\arg(z - z_0) - \theta_0| < \eta$, $\eta > 0$; l'angle Σ ainsi défini est tel que tout $z \in \Sigma$ de module fini est intérieur à Σ. On dit que le point z_0 est quasi-régulier pour la fonction $f(z)$ holomorphe dans Σ s'il existe un rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$ intérieur à Σ tel que la transformée de Mellin de $f(z)$ le long de ce rayon, $M\{f;\, z_0,\, \theta_1 | s\}$, est une fonction entière.

On constate facilement que si la série $f^*(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda^*_n}$, avec $\lambda_n^* = \text{Log}\,\lambda_n$ et $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, admet $\sigma_A^{f^*} < \infty$, alors la série $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ admet $\sigma_A^f \leqslant 0$. On sait que la relation,

$$f^*(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(x) x^{s-1}\, dx$$

où l'intégrale est calculée sur le demi-axe réel $x > 0$, est légitime avec le choix s tel que $\sigma > \max(0, \sigma_A^{f^*})$.

On peut alors énoncer en particularisant I. 7 au cas des séries de Dirichlet :

Définition I. 8. — Si la série $f^*(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n^*}$, avec $\lambda_n^* = \text{Log}\ \lambda_n$ et $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, admet $\sigma_A^{f^*} < \infty$, alors le point $s = 0$ est dit « quasi-régulier » pour la fonction $f(s)$ prolongement analytique de la somme de la série $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, si la fonction $f^*(s)$ prolongement analytique de la somme de la série de type $\{\lambda_n^*\}$ est une fonction entière.

Ici l'angle Σ est tout angle, de sommet $z = 0$, ensemble des points z avec $|\arg z| < \theta < \pi/2$ et $M\{f;\, z_0,\, \theta_1 | s\} \equiv M\{f;\, 0,\, 0 | s\}$.

Remarque. — Si le point $s = 0$ est quasi-régulier pour une fonction $f(s)$ il n'est pas nécessairement régulier pour cette fonction. L'exemple suivant le prouve. On considère la fonction :

$$f(s) = \sum_{n \geqslant 3} e^{-\alpha \text{L}n \,.\, \text{L}_2 n} \,.\, e^{-sn},$$

où $\text{L}_2 n \equiv \text{Log}\,\text{Log}\, n$ et où α est une constante positive. On constate facilement que $\sigma_c^f = \sigma_{\mathcal{H}}^f = 0$. Le point $s = 0$ est singulier pour $f(s)$. On a :

$$f^*(s) = \sum_{n \geqslant 3} e^{-\alpha \text{L}n \,.\, \text{L}_2 n} \,.\, e^{-s\text{L}n}$$

et manifestement $\sigma_A^{f^*} = -\infty$. Le point $s = 0$ est donc singulier quasi-régulier pour $f(s)$.

On sait que J.F. Ritt a introduit pour les fonctions entières définies par des séries de Dirichlet une notion d'ordre distincte de la notion classique. On rappelle à ce sujet la définition suivante :

Soit $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, avec $\sigma_A^f = -\infty$; on pose :

$$M(\sigma) = \overline{\text{Borne}}\, |f(\sigma + i\tau)|, \qquad -\infty < \tau < \infty,$$

et on considère le nombre ρ défini par $\rho = \overline{\lim} \dfrac{L_2 M(\sigma)}{-\sigma}$, $\sigma \downarrow -\infty$.
ρ est par définition l'ordre au sens de Ritt de la fonction $f(s)$.

Entre autres propriétés cet auteur a établi le théorème suivant :

Si $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ *admet* $\sigma_\Lambda^f = -\infty$ *et si* $\underline{\lim} \dfrac{\lambda_n}{\operatorname{Log} n} > 0$ *alors une condition nécessaire et suffisante pour que* $f(s)$ *soit d'ordre (au sens de Ritt) égal à* ρ *est que :*

$$-\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} \frac{\operatorname{Log}|a_n|}{\lambda_n \operatorname{Log} \lambda_n}, \qquad n \uparrow \infty,$$

$\left(\text{avec } -\dfrac{1}{\rho} = -\infty \text{ si } \rho = 0\right.$ et la remarque qui en résulte relativement à la limite).

Dans cet ordre d'idées j'ajoute les définitions suivantes :

Définition I. 9. — Une fonction $f(s)$ étant définie et non nulle sur la demi-droite $s = \sigma + i\tau_0$, $\sigma < \sigma_0$, j'appelle ordre semi-rectiligne au sens de Ritt de cette fonction $f(s)$ sur cette demi-droite le nombre

$$\rho = \overline{\lim} \frac{L_2|f(s)|}{-\sigma}, \qquad \sigma \downarrow -\infty,$$

(ou plus succinctement ordre ($\underline{R}$) de $f(s)$ sur $s = \sigma + i\tau_0$).

Définition I. 10. — Si $f(s)$ est holomorphe sur la demi-bande $\mathcal{B}$ ensemble des points s avec $\sigma < \sigma_0$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, j'appelle ordre ($\underline{R}$) de $f(s)$ sur $\mathcal{B}$ le nombre

$$\rho = \overline{\lim} \frac{L_2 M(\sigma)}{-\sigma}, \qquad \sigma \downarrow -\infty,$$

où $M(\sigma) = \overline{\text{Borne}}\, |f(s)|$, pour $s = \sigma + i\tau$, avec $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Dans chacune de ces définitions le symbole $L_2 \alpha$ (ou α est positif) est par convention 0 si $\alpha \leqslant 1$.

S. Mandelbrojt a introduit la notion d'ordre au sens de Ritt dans une bande pour une fonction entière somme d'une série de Dirichlet convergente dans le plan et a énoncé d'intéressantes propriétés.

Dans une note parue il y a déjà quelques années, j'ai introduit les notions de « type de l'ordre au sens de Ritt » dans le plan et dans une bande horizontale du plan, et j'ai énoncé des propriétés relatives à ces notions telles que : expression du type τ de l'ordre ρ dans le plan au moyen des suites $\{a_n\}$ et $\{\lambda_n\}$, localisation des points singuliers d'une série donnée eu égard au type d'une série associée dont la somme est une fonction entière etc... Je ne ferai pas ici usage de ces résultats me réservant d'y revenir dans un travail ultérieur en les généralisant ainsi que ceux qui suivent au chapitre II, dans cet ordre d'idées.

CHAPITRE II

Théorème II. 1. — *Dans les conditions :*

1) *il existe dans le plan de la variable complexe* z *un angle* Σ *de sommet* z_0, *d'ouverture* $2\eta > 0$, *et d'axe de symétrie* $\arg(z - z_0) = \theta_0$, *où* θ_0 *et* η *sont des constantes telles que* $|\theta_0 \pm \eta| < \pi/2$, *et il existe une constante* $\mu > 0$ *telle que la fonction* $\varphi(z) = O(e^{-x\mu})$ *pour* $|z| \uparrow \infty$, *lorsque* $z \in \overline{\Sigma}$,

2) *au point* z_0 *la fonction* $\varphi(z)$ *admet dans l'angle* Σ *une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » formée des éléments des types* $(q_r,\ p_r - 1)$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$,

3) *la fonction « dominée » au point* z_0 *dans* Σ *est d'ordre* $-\alpha$,

4) *on suppose* $\operatorname{Min} p'_r > 0$, $P'_r = R_{\rho_r}$, *alors la transformée de Mellin*, $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1 | s\}$, *de la fonction* $\varphi(z)$ *suivant le rayon* $\arg(z - z_0) = \theta_1$ *avec* $|\theta_1 - \theta_0| < \eta$ *admet la représentation :*

$$M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\} = \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{n=0}^{N_r} \frac{\gamma_n^r e^{i\theta_1(n+s-q_r)}}{\Gamma(s)} \{L_{n,r}(s) - E_{n,r}(s)\} + M_\alpha(s)$$

où

$$L_{n,r}(s) = e_{n,r}(s) + (-1)^{P_r - 1} \frac{\Gamma(p_r) e^{-i\theta_1(n+s-q_r)}}{(n+s-q_r)^{P_r}}$$

les fonctions $E_{n,r}(s)$, $e_{n,r}(s)$ *étant entières; la fonction* $M_\alpha(s)$ *étant holomorphe dans le demi-plan* $\sigma > \alpha$; N_r *étant le plus grand entier positif (pouvant se réduire à* 0*) inférieur à* $q'_r - \alpha$; *les* γ_n^r *étant des constantes.*

D'après la condition (2), on a pour $z \in \Sigma$ avec $|z - z_0| \downarrow 0$:

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{r=0}^{r_0} (z - z_0)^{-q_r} \{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{P_r - 1} \psi_r(z),$$

où chaque fonction $\psi_r(z)$ est holomorphe dans un cercle $c(z_0,\ \rho)$ avec $\rho > 0$ et où la fonction « dominée » $\varphi_0(z)$ est holomorphe dans Σ (on a par définition $\alpha < \min q'_r$). Soit une constante δ.

On suppose $0 < \delta < 1$ et on fixe $z_1 \in \Sigma$ avec $|z_1 - z_0| = \delta$. On pose $\arg(z_1 - z_0) = \theta_1$ et on a $|\theta_1 - \theta_0| < \eta$. L'intégrale calculée sur le rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$

$$\int_{0+}^{\delta} \varphi_0(z)\,(z - z_0)^{s-1}\,dz = \lim \int_{\varepsilon}^{\delta} \cdots, \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon \downarrow 0,$$

existe pour chaque s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > \alpha$. Elle converge uniformément par rapport à s dans chaque domaine borné du demi-plan $\sigma \geqslant \alpha + \eta'$, $\eta' > 0$ arbitraire fixé, et est une fonction $\Phi(s)$ holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \alpha$. Puisque $(z - z_0)^{\varepsilon}\{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{\nu} = o\,(1)$ pour $z \in \Sigma$ lorsque $|z - z_0| \downarrow 0$, où $\varepsilon > 0$ et ν sont des constantes, il est évident qu'un élément de type $(q_r,\ p_r - 1)$ est de la forme $o(|z - z_0|^{-q'_r - \varepsilon})$ pour $|z - z_0| \downarrow 0$ avec $z \in \Sigma$. Il en résulte que l'intégrale calculée sur le rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$:

$$\int_{0+}^{\delta} \psi(z)(z - z_0)^{s-1}\,dz = \lim \int_{\varepsilon}^{\delta} \cdots, \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon \downarrow 0,$$

existe pour chaque s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > \operatorname{Max} q'_r$. Elle converge uniformément par rapport à s dans chaque domaine borné du demi-plan $\sigma \geqslant \eta' + \operatorname{Max} q'_r$, $\eta' > 0$ arbitraire fixé. On pose :

$$\theta(z) = \varphi(z)e^{z\mu}.$$

La fonction $\theta(z)$ est holomorphe et bornée supérieurement en module dans le complémentaire par rapport à l'angle Σ de l'intersection de cet angle et d'un cercle $c(z_0, \rho_0)$, avec $\rho_0 > 0$.

Pour $\arg(z - z_0) = \theta_1$ avec $|z - z_0| = \rho$ et posant $\rho = e^y$, $\delta' = \operatorname{Log}\delta$, $\Theta(y) = \theta(z)$, on a :

$$\int_{\delta}^{\infty} \varphi(z)(z - z_0)^{s-1}\,dz = e^{(is\theta_1 - z_0\mu)} \int_{\delta'}^{\infty} \Theta(y)e^{ys - \mu e^{y + i\theta_1}}\,dy.$$

La fonction $\Theta(y)$ est bornée supérieurement en module pour $y \geqslant \delta'$. Il est évident que quels que soient s_1 et s_2 fixés (avec $|s_1|$ et $|s_2|$ finis, et $\sigma_2 < \sigma_1$) d'une part l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \Theta(y)e^{ys - \mu e^{y + i\theta_1}}dy$$

converge absolument quel que soit s de module fini et uniformément par rapport à s dans le demi-plan $\sigma \leqslant \sigma_1$, d'autre part l'intégrale (puisque $\delta' < 0$)

$$\int_{\delta'}^{0} \Theta(y)e^{ys - \mu e^{y + i\theta_1}}dy$$

est bornée supérieurement en module dans le demi-plan $\sigma \geqslant \sigma_2$ et est une fonction de la variable s holomorphe dans ce demi-plan.

L'intégrale $\int_\delta^\infty \varphi(z)(z-z_0)^{s-1}dz$ est donc une fonction entière $E(s)$ puisque σ_1 et σ_2 sont arbitraires. Réunissant les résultats ci-dessus, il en résulte que l'intégrale calculée le long du rayon $\arg(z-z_0)=\theta_1$,

$$\int_{0+}^\infty \varphi(z)(z-z_0)^{s-1}dz = \lim \int_{1/\rho'}^{\rho''}\cdots$$

(pour ρ' et $\rho'' \uparrow \infty$ indépendamment l'un de l'autre) existe sous les conditions précisées relatives à s. La convergence est uniforme par rapport à s dans chaque domaine borné de la bande $\eta' + \operatorname{Max} q'_r \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$, où $\eta' > 0$ est arbitraire petit fixé et $\sigma_1 > 0$ arbitraire grand fixé. La fonction $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\}$ est holomorphe dans le demiplan $\sigma > 1 + \operatorname{Max} q'_r$. On sait qu'il existe $\rho_0 > 0$ (et donc une infinité non dénombrable de tels nombres) tel que chaque développement taylorien

$$\psi_r(z) = \sum_0^\infty \gamma_n^r (z-z_0)^n, \qquad 0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

converge uniformément sur le cercle fermé $\overline{c(z_0,\ \rho_0)}$ (il suffit de choisir le nombre positif ρ_0 inférieur au minimum des rayons de convergence des développements tayloriens ci-dessus). On suppose avoir choisi antérieurement $\delta \leqslant \rho_0$. En chaque point s du demi-plan $\sigma > \operatorname{Max} q'_r$, on a :

$$\int_0^\delta \varphi(z)(z-z_0)^{s-1}\,dz = \int_0^\delta \varphi_0(z)(z-z_0)^{s-1}\,dz$$
$$+ \sum_{r=0}^{r_0}\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^r \int_0^\delta (z-z_0)^{n+s-q_r-1}\{\operatorname{Log}(z-z_0)\}^{p_r-1}\,dz$$

chaque intégrale étant calculée sur le segment d'origine z_0 et de longueur δ du rayon $\arg(z-z_0)=\theta_1$.

On pose $\rho = e^{-y}$ et on a :

$$\int_0^\delta (z-z_0)^{n+s-q_r-1}\{\operatorname{Log}(z-z_0)\}^{p_r-1}\,dz = \int_0^1\cdots - \int_\delta^1\cdots,$$

avec

$$\int_0^1 \ldots\, dz = e^{i\theta_1(n+s-q_r)}\int_0^\infty e^{-y(n+s-q_r)}(i\theta_1 - y)^{p_r-1}\,dy.$$

Sous la condition $\sigma > q'_r - n$ (évidemment satisfaite par le choix de s dans le demi-plan précisé ci-dessus), et la condition (4) (plus précisément sous la condition $p'_r > 0$ si $\theta_1 = 0$), quel que soit θ_1 réel fini, l'intégrale du second membre converge et c'est la transformée de Laplace de la fonction $(i\theta_1 - y)^{p_r-1}$ calculée au point $n + s - q_r$; soit $L_{n,r}(s)$ cette fonction de s. Il est évident qu'elle se réduit à l'expression $\dfrac{(-1)^{p_r-1}\Gamma(p_r)}{(n+s-q_r)^{p_r}}$ lorsque $\theta_1 = 0$.

On a :

$$\int_\delta^1 \dots dz = e^{i\theta_1(n+s-q_r)} \int_0^{-\delta'} \dots dy, \qquad \text{avec} \qquad \delta' < 0.$$

Sous la condition (4) et quel que soit θ_1 réel fini, cette dernière intégrale existe (plus précisément avec $p'_r > 0$ si $\theta_1 = 0$) en chaque point d'affixe s et définit une fonction entière $E_{n,r}(s)$ de cette variable s. (On rappelle qu'ici on a $|\theta_1| < \pi/2$.)

Réunissant les résultats, on a pour s avec $\sigma > \operatorname{Max} q'_r$:

$$\int_0^\infty \varphi(z)(z - z_0)^{s-1}\, dz = \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^r e^{i\theta_1(n+s-q_r)} \{L_{n,r}(s) - E_{n,r}(s)\} \\ + \Phi(s) + E(s)$$

Remarque. — On calcule facilement la fonction $L_{n,r}(s)$ en utilisant le théorème des résidus; en considérant dans le plan de la variable complexe auxiliaire u le rectangle dont les sommets sont les points d'affixes 0, y_1, $i\theta_1$, $i\theta_1 + y_1$, avec $Ru = y$, on constate facilement que pour $y_1 \uparrow \infty$, on déduit :

$$L_{n,r}(s) = \int_0^\infty e^{-y(n+s-q_r)}(i\theta_1 - y)^{p_r-1}\, dy = e_{n,r}(s) \\ + \frac{(-1)^{p_r-1}\Gamma(p_r) e^{-i\theta_1(n+s-q_r)}}{(n+s-q_r)^{p_r}}$$

sous la condition $p'_r > 0$ et avec le choix $\sigma > q'_r$, quel que soit n entier positif ou nul.

En outre si $\theta_1 = 0$, on a $e_{n,r}(s) \equiv 0$.

L'ensemble des résultats ci-dessus s'énonce :

Dans le demi-plan $\sigma > \alpha$, la fonction $M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1 | s\}$ admet la représentation :

$$M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1|s\} = \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{n=0}^{N_r} \gamma_n^r \frac{e^{i\theta_1(n+s-q_r)}}{\Gamma(s)} \{L_{n,r}(s) - E_{n,r}(s)\} + M_\alpha(s),$$

où $M_\alpha(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \alpha$, et où N_r est le plus grand entier positif (pouvant se réduire à 0) inférieur à $q'_r - \alpha$.

Etude du cas où z_0 est régulier pour $\varphi(z)$.

On précise que sous la locution « z_0 régulier pour la fonction $\varphi(z)$ » on entend qu'il existe un cercle, de centre z_0 et de rayon positif, $c(z_0, \rho)$ tel que $\varphi(z)$ est holomorphe dans le domaine $\Sigma \cup c(z_0, \rho)$. Considérer le cas où z_0 est régulier pour $\varphi(z)$ revient à se limiter au cas particulier: $\varphi_0(z) \equiv 0$, $r_0 = 0$, $p_0 = 1$, q_0 entier négatif ou nul; la fonction $\psi(z) = \varphi(z) = (z - z_0)^{-q_0}\psi_0(z)$ étant holomorphe dans le domaine $\Sigma \cup c(z_0, \rho)$. Les fonctions $E_{n,r}(s)$ se réduisent aux seules fonctions

$$E_{n,0}(s) = \int_0^{-\delta'} e^{-y(n+s-q_0)}\,dy = \frac{1 - e^{\delta'(n+s-q_0)}}{n+s-q_0}$$

et les fonctions $L_{n,r}(s)$ se réduisent aux fonctions

$$L_{n,0}(s) = e_{n,0}(s) + \frac{e^{-i\theta_1(n+s-q_0)}}{n+s-q_0}$$

avec

$$e_{n,0}(s) = \int_0^{i\theta_1} e^{-u(n+s-q_0)}\,du = \frac{1 - e^{-i\theta_1(n+s-q_0)}}{n+s-q_0}.$$

c'est-à-dire que :

$$L_{n,0}(s) = \frac{1}{n+s-q_0}.$$

D'où la représentation (puisque $\varphi_0(z) \equiv 0$ entraîne $\Phi(s) \equiv 0$) :

$$M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n e^{(i\theta_1+\delta')(n+s-q_0)}}{\Gamma(s)(s+n-q_0)} + \frac{E(s)}{\Gamma(s)}$$

pour la transformée de Mellin calculée le long du rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$ de l'angle Σ.

Avec le choix antérieur de δ on a $-\delta' > \overline{\lim}\dfrac{\operatorname{Log}|\gamma_n|}{n}$; il en résulte que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n e^{n\delta'}}{\Gamma(s)(s+n-q_0)}$$

converge absolument quel que soit s, avec $|s|$ fini, puisque :

$$\lim\{\Gamma(s)(s+n-q_0)\} \quad \text{existe et est finie} \quad \neq 0$$

lorsque $\lim(s+n-q_0) = 0$; n entier fixé.

La somme de cette série est une fonction entière.

La fonction $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\}$ est une fonction entière de la variable s. Pour préciser l'ordre de cette fonction sur le demi-axe $\sigma < 0$, on constate que la fonction entière :

$$E(s) = e^{(is\theta_1 - z_0\mu)} \int_{\delta'}^{\infty} e^{ys}\Theta(y) e^{-\mu e^{y+i\theta_1}} dy,$$

puisque $\delta' < 0$, est du type exponentiel, pour $\sigma\downarrow -\infty$ sur chaque droite $\tau = \tau_0$ où τ_0 est une constante arbitraire fixée; on a $E(s) = 0(e^{\delta'\sigma})$ pour $\sigma\downarrow -\infty$ avec $\tau = \tau_0$. On considère :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n e^{(i\theta_1 + \delta')(n-q_0)}}{\Gamma(s)(s+n-q_0)} = \sum_{n=0}^{r+q_0-1} \cdots + \gamma_{r+q_0} \frac{e^{(i\theta_1+\delta')r}}{\Gamma(s)(s+r)} + \sum_{n\geqslant r+q_0+1} \cdots.$$

Il est évident que les 1^er^ et 3^e^ termes du second membre sont nuls pour $s = -r$, r (entier positif) $\geqslant -q_0 + 1$. On a, en outre, $\lim \left\{\frac{1}{\Gamma(s)(s+r)}\right\} = (-1)^r \Gamma(1+r)$ pour $s \to -r$. Il en résulte pour $s \to -r$: $\lim M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\} = (-1)^r \gamma_{r+q_0} \Gamma(1+r)$. Il est évident que $\gamma_r = o\,(e^{-\delta' r})$ pour $r\uparrow\infty$, puisque $\delta > 0$ est choisi inférieur au rayon de convergence du développement taylorien de $\psi_0(z)$ au point z_0. La formule des compléments pour la fonction $\Gamma(s)$ permet de constater tout aussi facilement que, pour s appartenant à la droite $s = \sigma + i\tau_0$, avec τ_0 fixé, $\sigma\downarrow -\infty$, on a :

$$M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\} = 0(e^{\delta'\sigma}\Gamma(1-\sigma)).$$

Cette propriété est encore vraie dans toute demi-bande $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$, uniformément par rapport à τ(σ_0, τ_1 et τ_2 étant des constantes arbitraires finies).

La fonction $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\}$ est d'ordre (R_-) égal à 0 dans chaque demi-bande $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$ (τ_1, τ_2, σ_0 étant des constantes finies arbitraires).

Théorème II. 2. — *Dans la condition* (1) *du théorème* (II. 1) *et si le point* z_0 *est régulier pour la fonction* $\varphi(z)$ *holomorphe dans l'angle* Σ, *alors la transformée de Mellin*, $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\}$, *suivant le rayon* $\arg(z - z_0) = \theta_1$ *avec* $|\theta_1 - \theta_0| < \eta$, *est une fonction entière dont l'ordre* (R_-) *est nul dans chaque demi-bande* $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$.

Particularisant le théorème II. 1 aux séries de Dirichlet générales, on peut énoncer :

Théorème II. 3. — *Sous les conditions:*

1) *La série* $\varphi(s) = \sum_{1}^{\infty} b_p e^{-s\mu_p}$, *admet* $\sigma_{A}^{\varphi} < \infty$ *et* $\sigma_{\mathcal{H}_0}^{\varphi} = 0$ (*on suppose* $\mu_1 > 0$);

2) *Au point* $s = 0$ *la fonction* $\varphi(s)$ *admet une « dominante angulaire algébricologarithmique » dans un angle* Σ (*de sommet* $s = 0$ *et d'ouverture* $|\arg s| < \eta$ *avec* $\eta > 0$) *formé des éléments des types* $(q_r,\ p_r - 1)$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$;

3) *La fonction « dominée au point* $s = 0$ *dans* Σ *est d'ordre* $-\alpha$;

4) Min $p_r' > 0$;

alors la transformée de Mellin $\mathrm{M}\{\varphi;\ s\} \equiv \mathrm{M}\{\varphi;\ 0,\ 0|\ s\}$ *de la fonction* $\varphi(s)$ *admet, dans le plan* $\sigma > \alpha$, *la représentation:*

$$\mathrm{M}\{\varphi;\ s\} = \sum_{r=0}^{r_0} (-1)^{p_r-1} \sum_{n=0}^{N_r} \frac{\gamma_n^r}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{\Gamma(p_r)}{(n+s-q_r)^{p_r}} - \mathrm{E}_{n,r}(s) \right\} + \mathrm{M}_\alpha(s),$$

où les fonctions $\mathrm{E}_{n,r}(s)$ *sont entières et où* $\mathrm{M}_\alpha(s)$ *est holomorphe dans* $\sigma > \alpha$; N_r *étant le plus grand entier inférieur à* $q_r' - \alpha$; *les* γ_n^r *étant des constantes.*

Si $\varphi^*(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p^*}$, avec $\mu_p^* = \operatorname{Log} \mu_p$ et $0 < \mu_p \uparrow \infty$, et si $\varphi(s) = \Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, on a rappelé antérieurement que la relation classique,

$$\Gamma(s)\varphi^*(s) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{s-1} dx,$$

est légitime en tout point s (avec $|s|$ fini) du demi-plan $\sigma > \max(0,\ \sigma_{A}^{\varphi^*})$, et que $\sigma_{A}^{\varphi^*} < \infty$ entraîne $\sigma_{A}^{\varphi} \leqslant 0$; on sait aussi que $\sigma_{C}^{\varphi} < 0$ entraîne $\sigma_{C}^{\varphi^*} = -\infty$, et que si $s = 0$ est régulier pour $\varphi(s)$ alors $\varphi^*(s)$ est une fonction entière si seulement $\sigma_{C}^{\varphi^*} < \infty$. (On rappelle d'autres résultats connus dans les remarques à la fin de ce chapitre.) On ne suppose pas ici que $\varphi(s)$ est une fonction de classe $\mathfrak{M}$. Particularisant encore davantage le théorème II. 1 on énonce:

Théorème II. 4.. — *Sous la condition, la fonction* $\varphi^*(s)$ *admet* $\sigma_{A}^{\varphi^*} < \infty$, *et les conditions* (2), (3), (4) *du théorème* II. 3, *alors la fonction* $\varphi^*(s)$ *est identique à la fonction* $\mathrm{M}\{\varphi; s\}$) *du théorème* II. 3.

Eu égard aux théorèmes II. 2 et II. 4. on énonce:

Théorème II. 5. — *Si la fonction* $\varphi^*(s)$ *définie par prolongement analytique de la somme de la série* $\Sigma b_p e^{-s\mu_p^*}$, *avec*

$\sigma_\lambda^{\varphi^*} < \infty$, *est une fonction entière, alors il suffit qu'il existe une demi-droite* $s = \sigma + i\tau_0$, $\sigma < \sigma_0$, *sur laquelle son ordre* (R_) *est positif, pour que le point* $s = 0$ *soit singulier quasi-régulier pour la fonction* $\varphi(s)$.

Si la «dominée» au point z_0 dans Σ est régulière en ce point (par prolongement dans Σ) on énonce :

Théorème II. 6. — *Dans les conditions* (1, 2, 4) *du théorème* (II. 1) *et si la « dominée » est régulière au point* z_0 *alors dans la représentation de* $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\}$ *obtenue dans ces conditions, la fonction* $\Phi(s)/\Gamma(s)$ *est entière et d'ordre* (R_) *égal à* 0 *dans chaque demi-bande* $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$.

On montre en effet très facilement que $\Phi(s)$ est de la forme

$$\Phi(s) = e^{s(i\theta_1+\delta')} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma'_n e^{n(i\theta_1+\delta')}}{(s+n)}$$

où $\{\gamma'_n\}$ est la suite des coefficients du développement taylorien de la « dominée » au point z_0, et où $\delta' = \operatorname{Log} \delta$ avec $\delta > 0$ inférieur au rayon de convergence de ce développement et satisfaisant à la condition antérieure.

Remarques. — Le théorème II. 4 contient comme cas particuliers des résultats anciens dus à G. H. Hardy et M. Fekete, et repris par M. L. Cartwright.

I) Si la fonction « dominée » est identiquement nulle et si la « dominante » se réduit à un seul élément de type $(q, p - 1)$ avec q entier négatif ou nul et $p = 1$, on a dans chaque demi-plan $\sigma > \sigma'$, quel que soit σ' fixé :

$$\varphi^*(s) = \sum_{0}^{N_{\sigma'}} \frac{\gamma_n e^{\delta'(n+s-q)}}{\Gamma(s)\,(s+n-q)} + \varphi^*_{\sigma'}(s),$$

où $\varphi^*_{\sigma'}(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma'$ et où $N_{\sigma'}$ est le plus grand entier inférieur à $q - \sigma'$. La fonction $\varphi^*(s)$ est entière.

II) Si la fonction « dominée » est identiquement nulle et si la « dominante » se réduit au seul élément de type $(q, p - 1)$ avec $p = 1$, alors $\varphi^*(s)$ est holomorphe dans le plan sauf peut-être aux points de la forme $q - n$ ou n est zéro ou un entier positif. Si q est un entier positif, les seuls pôles possibles sont les points $q, q - 1, q - 2, \ldots, 3, 2, 1$. Si q n'est pas un entier négatif ou zéro, c'est-à-dire si $\varphi(s)$ admet à l'origine un point de branchement ou un pôle, alors $\varphi^*(s)$ admet nécessairement des pôles à distance finie. Ces résultats sont dûs à M. Fekete et G. H. Hardy.

III) Les théorèmes II. 3 et II. 4 sont des extensions aux séries de Dirichlet générales d'un résultat exprimé par M. L. Cartwright au sujet de la « réduction riemanienne des séries de Taylor aux séries de Dirichlet ordinaires ».

CHAPITRE III

On rappelle que si $\varphi(s)$ est la somme (ou son prolongement analytique à partir du demi-plan de convergence) d'une série de Dirichlet de type $\{\mu_n\}$ alors $\varphi^*(s)$ représente la somme (ou son prolongement) de la série associée de type $\{\mu_n^*\}$, avec $\mu_n^* = \operatorname{Log} \mu_n$ (la suite des coefficients étant la même pour les deux séries). Dans les deux théorèmes qui suivent la propriété « d'ordre O_M fini dans un demi-plan » à laquelle satisfait la fonction $\varphi^*(s)$ entraîne (comme on l'a vu dans le chapitre I) $\mu_1 \geqslant 1$.

Théorème III. 1. — *Si $\sigma_A^{\varphi^*} < \infty$ et si $\varphi^*(s)$ est à la fois holomorphe et « d'ordre O_M » fini dans le demi-plan $\sigma > \sigma^*$, avec $-\infty < \sigma^* < \sigma_A^{\varphi^*}$ (et notant Σ un angle ensemble des points s avec $|\arg s| \leqslant \eta$ et $0 < \eta < \pi/2$), alors il existe un polynôme $P(s)$ tel que : $\varphi(s) - P(s) = O(|s|^{-\sigma^*-\varepsilon})$, lorsque $|s|\downarrow 0$ avec $s \in \Sigma$ pour chaque $\varepsilon > 0$, suffisamment petit. Le polynôme $P(s)$ est identiquement nul si $\sigma^* \geqslant 0$.*

On rappelle un résultat classique : On sait que pour chaque valeur s, à l'exception de s réel négatif, on a :

$$\operatorname{Log} \Gamma(s) = (s - 1/2) \operatorname{Log} s - s + (1/2) \operatorname{Log}(2\pi) + \varepsilon(s),$$

où

$$\varepsilon(s) = (1/2) \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p-1}{p(p+1)(s+r)^p}$$

et où on représente par $\operatorname{Log} s$ la branche principale du logarithme complexe de s (c'est-à-dire le prolongement analytique de la détermination qui est réelle pour s réel positif) dans le plan ouvert par la coupure constituée par le demi-axe réel négatif.

On pose $s = |s|e^{i\theta}$. Si le point d'affixe s appartient à l'ensemble $\mathcal{B}$ union des deux demi-bandes définies par $\sigma \in [c', c]$, $|\tau| > \tau_0 > 0$, $s = \sigma + i\tau$, où $c' < c$ et τ_0 sont des constantes finies, alors il existe un couple de constantes positives η et η' telles que $0 < \pi/2 - \eta < |\theta| < \pi/2 + \eta'$ si $s \in \mathcal{B}$ et on a $\tau\theta > 0$; on pose $|\theta| = \pi/2 + \nu$ et on a : $|s^{s-1/2}| = |s|^{\sigma-1/2} . e^{-|\tau|(\pi/2+\nu)}$; en outre, on a $\varepsilon(s) = O(1/|\tau|)$, pour $|\tau|\uparrow\infty$, uniformément par rapport à $\sigma \in [c', c]$. Ainsi à ce couple de constantes, $c' < c$, arbitraires réelles fixées et à $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé aussi petit qu'on veut on peut faire correspondre un ensemble $\mathcal{B}^*$ union des deux demi-bandes définies par:

$$\sigma \in [c', c], \qquad |\tau| > \tau^* > 0$$

et tel que:

$$|\Gamma(s)| < e^{-|\tau|(\pi/2-\varepsilon)}$$

quel que soit $s \in \mathcal{B}^*$.

On choisit $\varepsilon_0 > 0$ de sorte que $\sigma^* + \varepsilon_0$ ne soit pas un entier négatif ou 0 et on considère le rectangle R de sommets $\sigma^* + \varepsilon_0 \pm i\mathrm{T}$, $c \pm i\mathrm{T}$, avec la constante $c > \max(0, \sigma^{\varphi^*}_{\mathrm{A}})$. On remarquera que σ^* soit ou non un entier négatif ou 0, on peut toujours choisir pour ε_0 tout nombre positif suffisamment petit. On pose $z = |z|e^{i\omega}$ avec $|z| \neq 0$ et $0 \leqslant |\omega| < \pi/2 - \varepsilon_1$ où ε_1 est une constante positive fixée arbitrairement petite. Notant $\mathrm{Log}\, z$ la branche principale du logarithme complexe de z, on constate (eu égard à la majoration de $|\Gamma(s)|$ dans $\mathcal{B}^*$) que:

$$\lim \int_{\sigma^*+\varepsilon_0+i\mathrm{T}}^{c+i\mathrm{T}} \Gamma(s)\varphi^*(s)e^{-s\,\mathrm{Log}\,z}\, ds = 0, \qquad \text{pour} \qquad |\mathrm{T}|\uparrow\infty,$$

l'intégrale étant calculée sur le segment joignant le point $\sigma^* + \varepsilon_0 + i\mathrm{T}$ au point $c + i\mathrm{T}$.

Représentons par $\langle \sigma^* \rangle$ le nombre d'entiers négatifs supérieurs à σ^* si $\sigma^* < -1$, et 0 si $-1 \leqslant \sigma^* < 0$ et posons $\mathrm{E}(s) = \dfrac{1}{\Gamma(s)}$. On a comme le montre un calcul facile:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\varphi^*(s)z^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma^*+\varepsilon_0-i\infty}^{\sigma^*+\varepsilon_0+i\infty} \cdots + \mathrm{P}(z),$$

(cette relation d'inversion de la transformation de Mellin étant légitime sous la condition $\sigma_{\Lambda}^{\varphi^*} < \infty$ et le choix $c > \max(0, \sigma_{\Lambda}^{\varphi^*})$), avec

$$P(z) \equiv \sum_{j=0}^{\langle\sigma^*\rangle} \frac{\varphi^*(-j)z^j}{E'(-j)}$$

et $P(z) \equiv 0$ si σ^* est non négatif.

Eu égard à la majoration utilisée pour $|\Gamma(s)|$ et à la propriété d'ordre fini de $\varphi^*(s)$ dans $\sigma > \sigma^*$, on a :

$$\int_{\sigma^*+\varepsilon_0-i\infty}^{\sigma^*+\varepsilon_0+i\infty} \Gamma(s)\varphi^*(s)z^{-s}\,ds = O(|z|^{-\sigma^*-\varepsilon_0}), \qquad \text{pour} \qquad |z|\downarrow 0,$$

lorsque z est intérieur à l'angle Σ, ensemble des points z avec $|\arg z| < \pi/2 - \varepsilon_1$.

THÉORÈME III. 2. — *Sous les conditions :*

1) *La fonction $\varphi(s)$ est de classe $\mathfrak{M}$,*

2) *Il existe un nombre réel α, satisfaisant à $\sigma_1^* \leqslant \alpha < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^*}$, tel que dans le demi-plan $\sigma > \alpha$ la fonction $\varphi^*(s)$ est méromorphe et ne possède qu'un nombre fini de pôles tous d'affixes non nulles et non entières négatives, alors le point $s = 0$ est singulier pour $\varphi(s)$ et en outre, en ce point, la fonction admet une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » dans tout angle Σ ensemble des points s avec $|\arg s| < \pi/2 - \eta$, $\eta > 0$ arbitraire petit. (La constante réelle σ_1^* ayant la signification précisée dans la définition d'une fonction de classe $\mathfrak{M}$.)*

Il est évident que les pôles de $\varphi^*(s)$ intérieurs au demi-plan $\sigma > \alpha$ sont tous situés dans la bande $\alpha < \sigma \leqslant \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^*}$. On peut toujours supposer $\alpha \neq 0$ et non entier négatif puisque, si ce nombre α de l'hypothèse (2) ne satisfait pas à cette condition, on peut toujours trouver $\alpha' > \alpha$ tel que tous les pôles de $\varphi^*(s)$ du demi-plan $\sigma > \alpha$ (puisqu'il n'en existe qu'un nombre fini) appartiennent aussi au demi-plan $\sigma > \alpha'$.

Dans ce qui suit, pour la liaison avec l'énoncé du théorème on choisit z à la place de s pour représenter la variable indépendante dont dépend la fonction φ^*.

On sait que la relation,

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz$$

est légitime pour chaque s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > 0$ et avec le choix de la constante

$$c > \max(0, x_{\Lambda}^{\varphi^*}), \qquad \text{où} \qquad Rz = x.$$

Eu égard à la condition (2) il existe une constante $c' \neq 0$ non entière négative telle que la fonction $\varphi^*(z)$:

1) ne possède qu'un nombre fini de pôles dans la bande $c' < x \leqslant x^{\varphi^*}_{\mathcal{H}}$; soient z_p, $1 \leqslant p \leqslant N$, ces pôles d'ordre respectifs M_p;

2) est holomorphe sur l'axe $Rz = c'$;

3) ne possède pas d'autres points singuliers à distance finie dans le demi-plan $x \geqslant c'$ que les pôles z_p, $1 \leqslant p \leqslant N$;

en outre il existe une constante $x^*_1 < c'$ telle que :

4) la fonction $\varphi^*(z)$ est « d'ordre O_M » fini dans le demi-plan $x > x^*_1$.

On considère dans le plan de la variable z le rectangle ouvert R de sommets $c' \pm iY'$, $c \pm iY'$, où $Y' > 0$ est choisi suffisamment grand de sorte que chaque $z_p \in R$, $1 \leqslant p \leqslant N$.

Si $c' < -1$ on représente par $\langle c' \rangle$ le plus grand entier positif inférieur à $|c'|$ ou 0 si $-1 < c' < 0$. La fonction $\Gamma(z)$ possède lès pôles $0, -1, -2, \ldots$ à l'ordre 1. Si $c' < 0$ on a :

$$\Gamma(z) = \sum_{r=0}^{\langle c' \rangle} \frac{\Gamma_r}{z+r} + \Gamma_0(z),$$

où $\Gamma_0(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $x > c'$; $\Gamma_r = \dfrac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)}$ étant le résidu de $\Gamma(z)$ au pôle $-r$. On note $\{a^r_n\}$ la suite des coefficients du développement taylorien de $\varphi^*(z)$ au point $-r$, avec r entier. Le résidu de la fonction $\Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}$ au point $z = -r$ est pour s quelconque dans le demi-plan $\sigma > 0$ égal à $a^r_0\, \Gamma_r s^r$.

Dans un voisinage $c(z_p, \rho)$, de centre z_p et de rayon $\rho > 0$ suffisamment petit, la fonction $\varphi^*(z)$ est de la forme :

$$\varphi^*(z) = \sum_{r=1}^{M_p} \frac{A^r_p}{(z-z_p)^r} + \varphi^*_p(z),$$

où $\varphi^*_p(z)$ est holomorphe dans le cercle $c(z_p, \rho)$ et où les A^r_p sont des constantes, avec $A^{M_p}_p \neq 0$.

Choisissant s à distance finie avec $\sigma > 0$ et pour Log s la branche principale, le théorème des résidus permet d'écrire si $c' < 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{R\nearrow} \Gamma(z)\varphi^*(z) e^{-z \operatorname{Log} s}\, dz = \sum_{p=1}^{N} \mathcal{R}_p \{\Gamma(z)\varphi^*(z) e^{-z \operatorname{Log} s}\} + \sum_{r=0}^{\langle c' \rangle} a^r_0 \Gamma_r s^r$$

où $\mathcal{R}_p\{\Gamma(z)\varphi^*(z)e^{-z\operatorname{Log} s}\}$ désigne le résidu de la fonction entre crochets au pôle z_p. Dans le cercle $c(z_p, \rho)$, si $\rho > 0$ est suffisamment petit, on a :

$$s^{-z}\Gamma(z) = s^{-z_p}\sum_{r=0}^{\infty}\delta_p^r(z-z_p)^r,$$

avec

$$\delta_p^r = \sum_{h=0}^{r}(-1)^h\frac{\gamma_p^{r-h}(\operatorname{Log} s)^h}{\Gamma(h+1)},$$

où on note $\{\gamma_p^r\}$ la suite des coefficients du développement taylorien de $\Gamma(z)$ au point z_p.

Par conséquent, on a :

$$\mathcal{R}_p\{\Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\} = s^{-z_p}\sum_{r=1}^{M_p}\delta_p^{r-1}A_p^r.$$

En définitive, on a :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{R\nearrow}\cdots = \sum_{p=1}^{N}s^{-z_p}\sum_{r=1}^{M_p}A_p^r\sum_{h=0}^{r-1}(-1)^h\frac{\gamma_p^{r-h-1}(\operatorname{Log} s)^h}{\Gamma(h+1)} + \sum_{r=0}^{\langle c'\rangle}a_0^r\Gamma_r s^r.$$

si $c' > 0$, alors le polynôme du second membre disparaît.

On considère le point $z = |z|e^{i\theta}$, avec $|\theta| < \pi$, $(\theta y > 0)$, à distance finie, intérieur au plan ouvert suivant la coupure $x \leqslant 0$, $y = 0$. Eu égard à l'expression rappelée pour $\operatorname{Log}\Gamma(z)$ et à l'ordre de $\varphi^*(z)$ dans le demi-plan $x > x_1^*$ on constate facilement qu'à $\eta > 0$ arbitraire petit fixé on peut faire correspondre un nombre positif fini Y_0, et qu'il existe des constantes positives M et η' telles que, pour $Y' > Y_0$, on a :

$$\left|\int_{c'\pm iY'}^{c\pm iY'}\Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz\right| < M|Y'|^{\mu^*+\eta'}\int_{c'}^{c}|z|^{x-1/2}(|s|e)^{-x}e^{-Y'|\theta-\theta'|}\,dx$$

avec $s = |s|e^{i\theta'}$, $|s| \neq 0$ et $|\theta'| < \pi/2 - \eta$ (l'intégrale étant étendue à chacun des deux segments précisés de la frontière de R).

Soit une constante η'' telle que $0 < \eta'' < \eta$, on peut toujours lui faire correspondre un nombre positif Y_1 suffisamment grand (mais fini) tel que : $|\theta - \theta'| > \eta''$ pour tout point $z \in \mathcal{B}$, (avec $\theta - \theta' > \eta''$ pour $z \in \mathcal{B}$ et $y > 0$, et $\theta - \theta' < -\eta''$ pour $z \in \mathcal{B}$ avec $y < 0$) où $\mathcal{B}$ est l'ensemble union des deux demi-bandes :

$$Rz = x \in [c', c], \qquad |y| > Y_1.$$

En outre, on a $y(\theta - \theta') > 0$ lorsque z appartient aux deux segments joignant (avec correspondance des signes $+$ d'une part et des signes $-$ d'autre part) les points $c' \pm iY'$ aux points $c \pm iY'$, $Y' > Y_1$. Cette dernière remarque entraine (avec correspondance des signes) :

$$\int_{c' \pm iY'}^{c \pm iY'} \cdots = o(1) \quad \text{pour} \quad Y' \uparrow \infty.$$

Il en résulte :

$$\lim \oint_{R_{\mathcal{A}}} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \cdots - \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \cdots$$

pour $Y' \uparrow \infty$, et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \cdots$$
$$+ \sum_{p=1}^{N} s^{-z_p} \sum_{r=1}^{M_p} A_p^r \sum_{h=0}^{r-1} \cdots + \sum_{r=0}^{\langle c' \rangle} a_0^r \Gamma_r s^r.$$

Comme au théorème III. 1, on constate que :

$$\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz = O(|s|^{-c'}) \qquad \text{pour} \qquad |s| \downarrow 0,$$

avec $s \in \Sigma$ (où Σ est l'ensemble des points s avec $|\arg s| < \pi/2 - \eta$, η arbitraire positif petit fixé). Cette intégrale est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > 0$. On considère la fonction :

$$\psi(s) = \sum_{p=1}^{N} \psi_p(s) s^{-z_p}$$

avec

$$\psi_p(s) = \sum_{r=1}^{M_p} A_p^r \sum_{h=0}^{r=1} \frac{(-1)^h \gamma_p^{r-h-1} (\operatorname{Log} s)^h}{\Gamma(h+1)},$$

pour s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > 0$. On peut écrire :

$$\psi_p(s) = \sum_{h=0}^{M_p-1} \frac{(-1)^h (\operatorname{Log} s)^h}{\Gamma(h+1)} \sum_{r=h+1}^{M_p} A_p^r \gamma_p^{r-h-1}.$$

Il est impossible que la fonction $\psi_p(s)$ soit identiquement nulle, et ceci pour chaque indice p. En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que $\psi_p(s) \equiv 0$ est que :

$$\sum_{r=h+1}^{M_p} A_p^r \gamma_p^{r-h-1} = 0$$

pour chaque entier h avec $0 \leqslant h \leqslant M_p - 1$. L'ensemble des

M_p relations ci-dessus peut être considéré comme un système de M_p équations linéaires (p étant fixé) à M_p inconnues, x_p^r, satisfait par le sytème de solutions A_p^r, $1 \leqslant r \leqslant M_p$ (les A_p^r étant, eu égard à leur signification, non tous nuls). Le déterminant de ce système, est égal à $(\gamma_p^0)^{M_p} \neq 0$ puisque $\gamma_p^0 = \Gamma(z_p) \neq 0$. L'assertion est établie.

La fonction $s^{-z_p}\psi_p(s)$ possède au point $s = 0$ un élément singulier de type $(z_p, M_p - 1)$. Le point $s = 0$ est de poids $[x_p, M_p - 1]$ pour cette fonction. Si $c' > 0$, la « dominante » se réduit à la fonction $\psi(s)$. Si $c' < 0$ le polynôme peut être considéré comme un élément de poids $[-\infty, 0]$ de la dominante.

Remarque 1. — Chaque pôle z_p contribue à déterminer pour la dominante des éléments des types $(z_p, M_p - n - 1)$ avec $0 \leqslant n$ (entier) $\leqslant M_p - 1$; correspondant aux N pôles z_p il existe effectivement dans la dominante N éléments de poids $[x_p, M_p - 1]$, $1 \leqslant p \leqslant N$.

Remarque 2. — On peut démontrer un théorème analogue à III. 2 sans supposer les pôles d'affixes $\neq 0$ et non entières négatives (avec des modifications convenables si besoin est pour les assertions relatives aux types des éléments). Cette condition n'a été formulée que dans le but de simplifier quelque peu la démonstration.

CHAPITRE IV

$H_k[f, \varphi|s]$ représentant comme on l'a rappelé au chapitre I la fonction obtenue par application de l'opérateur Hadamard-Mandelbrojt au couple des fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$, c'est-à-dire le prolongement analytique de la somme de la série $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$, on note $H_k^*[f, \varphi|s]$ la fonction définie par prolongement de la somme de la série associée, comme ci-dessus, de type $\{\mu_n^*\}$ et ayant la même suite de coefficients. Les notations relatives à la fonction $f \in \mathfrak{M}$ ont été introduites dans la définition. On précise maintenant en vue de ce qui suit celles relatives à $\varphi(s)$ si $\varphi \in \mathfrak{M}$; on a : $\sigma_A^{\varphi^*} < \infty$, $\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi} = 0$; en outre, il existe $\sigma_2 < 0$ tel que $\varphi(s)$ est « d'ordre O_M » fini (égal à μ) dans le demi-plan $\sigma > \sigma_2$, et $\sigma_2^* < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^*}$ tel que $\varphi^*(s)$ est « d'ordre O_M » fini égal à μ^* dans le demi-plan $\sigma > \sigma_2^*$. On a $\sigma_A^f = \sigma_A^{\varphi} = 0$ puisque $\sigma_A^{f^*} < \infty$ entraîne $\sigma_A^f \leqslant 0$, et que $\sigma_{\mathcal{H}}^f = 0$ (et l'analogue pour la fonction $\varphi(s)$).

Lemme 1. — *Si les séries $f^*(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n^*}$ avec $\lambda_1^* \geqslant 0$ et $\varphi^*(s) = \Sigma b_n e^{-s\mu_n^*}$ possèdent respectivement des abscisses de convergence absolue $\sigma_A^{f^*}$ et $\sigma_A^{\varphi^*}$, finies, et si k est entier positif quelconque alors la série*

$$H_k^*[f, \varphi|s] = \Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n^*}$$

possède aussi une abscisse de convergence absolue, $\sigma_A^{H_k^*}$, $< \infty$.

Il est à remarquer qu'ici on a construit formellement la série du lemme à partir du couple des séries définissant les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$, où k est un entier positif quelconque, en utilisant la définition de $a_{\mu_n}^{(k)}$ donnée au début du chapitre I, au moyen des trois suites $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$ (sans assujettir ces fonctions à être de classe $\mathfrak{M}$).

On a :

$$a_{\mu_n^*}^{(k)} = \sum_{(\lambda_m^* < \mu_n^*)} (e^{\mu_n^*} - e^{\lambda_m^*})^k a_m$$
$$= e^{k\mu_n^*} \sum_{(\lambda_m^* < \mu_n^*)} a_m \sum_{p=k}^{\infty} d_p \frac{(\lambda_m^* - \mu_n^*)^p}{\Gamma(p+1)}.$$

On constate facilement que

$$d_p = \sum_{t=0}^{t=k} (-1)^t t^p C_k^t$$

avec

$$d_p = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant p \leqslant k-1 \\ (-1)^k \Gamma(k+1) \quad \text{pour} \quad p = k. \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

$$a_{\mu_n^*}^{(k)} = e^{k\mu_n^*} \sum_{p=k}^{\infty} \frac{(-1)^p d_p}{\Gamma(p+1)} a_{\mu_n^*}^{(p)}$$

en posant

$$a_{\mu_n^*}^{(p)} = \sum_{\lambda_m^* < \mu_n^*} (\mu_n^* - \lambda_m^*)^p a_m.$$

La constante $a_{\mu_n^*}^{(p)}$ est le $n^{\text{ième}}$ coefficient d'ordre p de la fonction $f^*(s)$ par rapport à la suite $\{\mu_n^*\}$.

La majoration suivante est évidente :

$$\frac{|a_{\mu_n^*}^{(p)}|}{\Gamma(p+1)} < \frac{Ce^{c\mu_n^*}}{c^p} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{|s|^{1+\eta}}, \qquad s = c + i\tau,$$

où $\eta > 0$ est arbitraire petit fixé, avec $c > \max(0, \sigma_A^{f^*})$ (C et c sont des constantes indépendantes de l'entier positif p), c'est-à-dire que :

$$|a_{\mu_n^*}^{(p)}| < \frac{C' \Gamma(p+1)}{c^p} e^{c\mu_n^*}.$$

On a, par conséquent :

$$\sum_n |a_{\mu_n^*}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n^*}| < C'' \sum_n \sum_p |b_n| \left(\frac{k}{c}\right)^p e^{-\mu_n^*(\sigma - c - k)}.$$

Si on choisit $c > \max(k, \sigma_A^{f^*})$ la condition ci-dessus pour c est à fortiori satisfaite et la série double converge sur le demi-axe $\sigma > c + \sigma_A^{\varphi^*} + k$. Il en résulte $\sigma_A^{H_k^*} < \infty$.

Notons $\mathfrak{S}_{\varphi^*, j}^{\sigma_1^*}$ l'ensemble composé de l'ensemble $\mathfrak{S}_{\varphi^*}^{\sigma_1^*}$ et du point d'affixe $-j$.

Théorème IV. 1. — *Si les fonctions* $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ *et* $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-s\mu_n}$ *sont de classe* $\mathfrak{M}$, *alors la fonction* $\mathrm{H}_k^*[f, \varphi \,|\, s+k]$, *avec k (entier)* $> \nu^* + \mu^*$, *a pour seules singularités « possibles », par rapport au demi-plan* $\sigma > \sigma_2^* + \max[0, \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}(\sigma_1^*)]$ *les points de l'ensemble*

$$\Big(\bigcup_j \mathrm{S}_{\varphi^*, j}^{\sigma_1^*}\Big) \bigcup \overline{\mathrm{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_1^*}}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k.$$

Sous la seule condition que $\sigma_A^f < \infty$ et $\sigma_A^\varphi < \infty$ avec le choix de la constante $c > \max(0, \sigma_A^f)$ et de k entier positif on sait qu'on a, pour z tel que $\mathrm{R}z > c + \sigma_A^\varphi$:

$$\mathrm{H}_k[f, \varphi | z] = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \varphi(z-s) \frac{ds}{s^{1+k}}.$$

Du lemme antérieur on déduit (puisque ici f et φ étant de classe $\mathfrak{M}$, on a $\sigma_A^{f^*} < \infty$ et $\sigma_A^{\varphi^*} < \infty$) que $x_A^{\mathrm{H}_k} \leqslant 0$. On remarquera aussi qu'on sait (théorème de S. Mandelbrojt) que $x_A^{\mathrm{H}_k} \leqslant \max(\sigma_A^\varphi, \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi)$, et puisque les fonctions f et φ sont de classe $\mathfrak{M}$, il en résulte encore $x_A^{\mathrm{H}_k} \leqslant 0$. Dans le demi-plan $\mathrm{R}z = x > 0$ on a :

$$\mathrm{H}_k[f, \varphi | z] = \Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-z\mu_n},$$

avec pour $a_{\mu_n}^{(k)}$ l'expression obtenue ci-dessus au moyen de la suite $\{a_{\mu_n^*}^{(p)}\}$. On considère la série

$$\mathrm{H}_k^*[f, \varphi | z] = \Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-z\mu_n^*}.$$

On a vu au lemme antérieur que pour tout point z à distance finie intérieur au demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_A^{\varphi^*}$, avec $c > \max(\sigma_A^{f^*}, k)$, la série double

$$\sum_n \sum_p \frac{(-1)^p d_p}{\Gamma(p+1)} a_{\mu_n^*}^{(p)} b_n e^{-z\mu_n^*}$$

est absolument convergente, et uniformément convergente dans chaque demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_A^{\varphi^*} + \eta$, $\eta > 0$ arbitraire fixé. La permutation des signes de sommation est alors légitime dans le demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_A^{\varphi^*}$ et on a, dans le demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_A^{\varphi^*} + k$:

$$\mathrm{H}_k^*[f, \varphi | z] = \sum_{p=k}^{\infty} \frac{(-1)^p d_p}{\Gamma(p+1)} \mathrm{H}_p[f^*, \varphi^* | z-k]$$

où

$$\mathrm{H}_p[f^*, \varphi^*|z] = \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\varphi^*(z-s)\frac{ds}{s^{1+p}}.$$

Cette dernière intégrale a un sens lorsque z appartient au demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*}$ avec le choix $c > \max(0, \sigma_{\mathrm{A}}^{f^*})$. La permutation des signes $\sum$ et $\int$ est légitime (et il est facile d'ailleurs de prouver la légitimité de cette permutation) pour le choix antérieur de $c > \max(k, \sigma_{\mathrm{A}}^{f^*})$ et de z tel que $\mathrm{R}z > c + k + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*}$, et on a :

$$\mathrm{H}_k^*[f, \varphi|z] = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\frac{ds}{s^{1+k}},$$

en posant

$$\omega_k(s) = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}\sum_{t=0}^{t=k}(-1)^t \mathrm{C}_k^t t^k \frac{s}{s+t}.$$

Remarquons qu'il est impossible de définir une constante réelle finie $\sigma_{\mathcal{C}}^{\omega_k}$ telle que, dans le demi-plan $\sigma > \sigma_{\mathcal{C}}^{\omega_k}$, la fonction $\omega_k(s)$ soit la somme d'une série de Dirichlet générale convergente (dont la suite des exposants est une suite réelle strictement croissante vers l'infini); en effet sur toute droite $\mathrm{R}s = \sigma$ (σ fixé), on a : $\lim \omega_k(s) = 1$, $|s|\uparrow\infty$. Cependant il est naturel d'écrire :

$$\mathrm{H}_k^*[f, \varphi|z] = \mathrm{H}_k[f^*\omega_k, \varphi^*|z-k],$$

puisque, entre autres raisons, on notera que l'assertion relative aux singularités « possibles » de la fonction de z définie par $\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}$, dans le théorème fondamental de S. Mandelbrojt, est encore légitime même si les fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$ n'admettent pas de représentations dirichletiennes; c'est-à-dire que la démonstration de cette partie de l'assertion du théorème repose avec le choix k (entier) $> \nu + \mu$ sur la propriété : les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont d'un « ordre $\mathrm{O_M}$ » fini ν et μ dans des demi-plans respectifs. (Cette remarque suppose une petite modification d'ailleurs évidente relative à la représentation de ces fonctions.) Remarquons encore que la fonction $f^*(s)\omega_k(s)$ est comme $f^*(s)$, « d'ordre $\mathrm{O_M}$ » égal à ν^* dans $\sigma > \sigma_1^*$. « L'ensemble singulier de $f^*(s)\omega_k(s)$

par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$ » que l'on note $\mathfrak{S}_{f^*\omega_k}^{\sigma_1^*}$ satisfait, comme on peut le constater, à la relation d'appartenance :

$$\mathfrak{S}_{f^*\omega_k}^{\sigma_1^*} \subset (\mathfrak{S}_{f^*}^{\sigma_1^*} \cup \mathrm{E}), \qquad \text{où} \qquad \mathrm{E} = \cup\,(-j), \qquad \text{avec} \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Il est évident que l'ensemble composé, que l'on note $\mathfrak{S}_{f^*\omega_k,\,\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*}$, des ensembles $\mathfrak{S}_{f^*\omega_k}^{\sigma_1^*}$ et $\mathfrak{S}_{\varphi^*}^{\sigma_2^*}$ satisfait alors à la relation d'appartenance :

$$\mathfrak{S}_{f^*\omega_k,\,\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*} \subset \left(\mathfrak{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*} \cup \left(\bigcup_j \mathfrak{S}_{\varphi^*,j}^{\sigma_2^*}\right)\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

On a, par conséquent :

$$(\mathfrak{S}_{\varphi^*}^{\sigma_2^*} \cup \mathfrak{S}_{f^*\omega_k,\,\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*}) \subset \left(\mathfrak{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*} \cup \left(\bigcup_j \mathfrak{S}_{\varphi^*,j}^{\sigma_2^*}\right)\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant k.$$

L'abscisse d'holomorphie par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$ de la fonction $f^*(s)\omega_k(s)$ est $\sigma_{\mathcal{H}}^{f^*\omega_k}(\sigma_1^*) \leqslant \max\,[-1,\ \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}(\sigma_1^*)]$ et donc $\max\,[0,\ \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*\omega_k}(\sigma_1^*)] \leqslant \max\,[0,\ \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}(\sigma_1^*)]$. La conclusion du théorème résulte alors immédiatement de la relation d'appartenance ci-dessus par application du théorème de S. Mandelbrojt, avec le choix k (entier) $> \nu^* + \mu^*$, à la fonction $\mathrm{H}_k^*[f,\ \varphi|s+k]$.

Théorème IV. 2. — *Sous les conditions :*

1) *les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont de classe $\mathfrak{M}$;*

2) *le point $s = 0$ est quasi-régulier pour chacune des fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$, alors la fonction $\mathrm{H}_k^*[f,\ \varphi|s+k]$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \max\,[\sigma_2^*,\ \sigma_1^* + \sigma_2^*]$, où k (entier) $> \nu^* + \mu^*$.*

En effet les ensembles singuliers $\mathfrak{S}_{\varphi^*,j}^{\sigma_2^*}$ et $\mathfrak{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*}$ se réduisent respectivement aux droites $\sigma = \sigma_2^* - j$ et $\sigma = \sigma_1^* + \sigma_2^*$; d'où la conclusion ci-dessus.

Dans un certain système de conditions [voir II. 1, 2] le problème de la composition des singularités des séries de Dirichlet générales (associé à l'opérateur Hadamard-Mandelbrojt) se ramène à l'étude des singularités des fonctions définies par des sommes (finies ou de séries) de séries du type de Cramér, c'est-à-dire de la forme,

$$\sum_n \psi_n(s) \qquad \text{avec} \qquad \psi_n(s) = \sum_p b_p \theta_n(\mu_p)\, e^{-(s-\alpha_n)\mu_p},$$

où $\alpha_n \in \mathfrak{S}_f^{\sigma_1}$; la fonction $f(s)$ étant la branche principale du prolongement analytique de la somme d'une des séries composantes, $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, dans $\underset{\overline{P_f}}{\complement} \mathbf{S}_f^{\sigma_1}$; l'autre fonction composante étant la branche principale du prolongement de $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-s\mu_n}$ dans $\underset{\overline{P_\varphi}}{\complement} \mathbf{S}_\varphi^{\sigma_2}$, où $\overline{P_\varphi}$ est le demi-plan $\sigma \geqslant \sigma_2$. Si le point α_n est isolé dans $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}$ et pôle d'ordre $M_n + 1$ de $f(s)$ alors $\theta_n(z)$ est un polynôme d'ordre M_n; si le point α_n isolé dans $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}$ est essentiel pour $f(s)$ alors $\theta_n(z)$ est une fonction entière du type exponentiel minimum. Dans un mémoire récent [II. 3] j'ai énoncé des propriétés relatives à la localisation de certains types de points singuliers pour les fonctions définies par les séries du type Cramér. Le théorème qui suit, constitue un exemple de théorème de composition de points singuliers au voisinage desquels les fonctions composantes ne sont pas uniformes. A dessein dans cet exemple on se limite à la considération du point $s = 0$ qui est supposé « algébrico-logarithmique » de type $(q_1, p_1 - 1)$ et $(q_2, p_2 - 1)$ respectivement pour les deux fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$. Sous ce « vocable » on entend que la « dominante » de la fonction $f(s)$ au point $s = 0$ dans tout angle $\Sigma(|\arg s| < \pi/2 - \eta)$, $\eta > 0$ arbitraire petit, se réduit au seul élément singulier de type $(q_1, p_1 - 1)$ où p_1 est entier $\geqslant 1$, et que la « dominée » est régulière au point $s = 0$ par prolongement analytique dans Σ (et l'analogue pour $\varphi(s)$). Si, en outre, on suppose que $f \in \mathfrak{M}$ alors l'ensemble singulier $\mathbf{S}_{f^*}^{\sigma_1^*}$ de $f^*(s)$ « par rapport » au demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$ se réduit à la droite $\sigma = \sigma_1^*$ et aux pôles de la forme $q_1 - m$, m entier $\geqslant 0$ tel que $q_1' - m > \sigma_1^*$. La constante σ_1^* a dans le théorème qui suit (comme dans certains théorèmes antérieurs) la signification précisée dans la définition de la fonction $f \in \mathfrak{M}$.

THÉORÈME IV. 3. — *Dans les conditions :*

a) *les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont des fonctions de classe $\mathfrak{M}$,*

b) *$s = 0$ est algébrico-logarithmique de type $(q_1, p_1 - 1)$ pour $f(s)$ et de type $(q_2, p_2 - 1)$ pour $\varphi(s)$,*

alors au point $s = 0$ la fonction $H_k[f, \varphi, |s]$, avec le choix de l'entier $k > \nu^* + \mu^*$ admet une dominante angulaire algébrico-logarithmique. Cette dominante possède un élément de type $(q_1 + q_2 + k, p_1 + p_2 - 2)$. (On suppose $q_1 \neq 0$ et non entier si $\sigma_1^* < 0$.)

On a obtenu au théorème (IV. 1) une représentation intégrale pour la fonction $H_k^*[f, \varphi|z]$. Eu égard au théorème fondamental de S. Mandelbrojt on sait que, avec un choix convenable de z (et le choix antérieur des constantes c et k) :

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\,\frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{f^*\omega_k}(\varepsilon)} f^*\omega_k\varphi^*\,\frac{ds}{s^{1+k}}$$

(par exemple, on peut toujours choisir x' suffisamment grand de sorte que la relation est satisfaite pour z avec $Rz = x > x'$). L'intégrale du second membre ayant la signification précisée au chapitre I.

On note $c_{m,\varepsilon}$ la frontière du cercle de centre $q_1 - m$ (m entier $\geqslant 0$) et de rayon ε, $C_{0,\varepsilon}$ la droite $Rs = \sigma_1^* + \varepsilon$, $c'_{j,\varepsilon}$ la frontière du cercle de centre $-j$ (j entier $\geqslant 0$) et de rayon ε, m_0 le plus grand entier positif (pouvant se réduire à 0) tel que $q'_1 - m_0 > \sigma_1^*$, avec $q'_1 = Rq_1$; si $\sigma_1^* < 0$ on note j_0 le plus grand entier positif (pouvant se réduire à 0) tel que $-j_0 > \sigma_1^*$. La constante positive ε est choisie telle qu'on ait :

$$c_{m,\varepsilon} \cap c_{m',\varepsilon} = \emptyset \quad \text{si} \quad m \neq m', \quad C_{0,\varepsilon} \cap c_{m,\varepsilon} = \emptyset \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant m \leqslant m_0;$$

si $\sigma_1^* < 0$ la constante ε devra en outre être choisie telle que :

$$C_{0,\varepsilon} \cap c'_{j,\varepsilon} = \emptyset \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant j \leqslant j_0 \qquad \text{et} \qquad c_{m,\varepsilon} \cap c'_{j,\varepsilon} = \emptyset$$

pour chaque couple d'entiers m, j.

Avec ce choix de ε, on constate facilement que l'égalité ci-dessus a encore lieu si on remplace l'ensemble $C_{f^*\omega_k}(\varepsilon)$ (où la constante ε n'est pas nécessairement la même que ci-dessus) défini au chapitre I par l'ensemble

$$C_{0,\varepsilon} \cup (C_\varepsilon \cup C'_\varepsilon), \qquad \text{où} \qquad C_\varepsilon = \bigcup_m c_{m,\varepsilon},$$

$$0 \leqslant m \leqslant m_0, \quad \text{et où} \quad C'_\varepsilon = \bigcup_j c'_{j,\varepsilon}, \quad 0 \leqslant j \leqslant j_0, \quad \text{si} \quad \sigma_1^* < 0$$

et seulement par $C_{0,\varepsilon} \cup C_\varepsilon$ si $\sigma_1^* \geqslant 0$. On a ainsi pour z appartenant à un demi-plan convenable (c'est-à-dire pour $Rz = x > x'$, x' suffisamment grand fini) :

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{0,\varepsilon}} \cdots + \int_{C_\varepsilon \cup C'_\varepsilon} \cdots$$

(égalité légitime si $\sigma_1^* < 0$; si $\sigma_1^* \geqslant 0$ la seconde intégrale n'est étendue qu'à l'ensemble C_ε) et

$$\int_{C_\varepsilon \cup C'_\varepsilon} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_\varepsilon} \cdots + \int_{C'_\varepsilon} \cdots = \sum_{m=0}^{m_0} \int_{c_{m,\varepsilon}} \cdots + \sum_{j=0}^{j_0} \int_{c'_{j,\varepsilon}} \cdots .$$

Dans $\sigma > \sigma_1^*$, on a (théorème II. 1 et suivants) :

$$f^*(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{m_0} \frac{B_m}{(s+m-q_1)^{p_1}} + f_1^*(s), \qquad \text{avec} \qquad B_0 \neq 0,$$

où $f_1^*(s)$ est une fonction holomorphe dans ce demi-plan. On a :

$$\frac{\omega_k(s)}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{m_0} \frac{B_m}{(s+m-q_1)^{p_1}} = \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} \frac{D_m^r}{(s+m-q_1)^r} + f_0^*(s)$$

où les D_m^r sont des constantes. Les fonctions de la variable s, $f_0^*(s)$, $f_1^*(s)$, $\frac{\omega_k(s)}{s^{1+k}}$ et $\varphi^*(z-s-k)$ avec z convenablement choisi ($Rz = x > x'$ où x' est choisi suffisamment grand fini) sont régulières sur la fermeture de chaque cercle $c(q_1 - m, \varepsilon)$, avec $0 \leqslant m \leqslant m_0$. Il en résulte que :

$$\int_{c_{m,\varepsilon}} f_1^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = 0, \qquad 0 \leqslant m \leqslant m_0,$$

et

$$\int_{c_{m,\varepsilon}} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_0^{m_0} \cdots \right) \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \sum_{r=1}^{p_1} D_m^r \int_{c_{m,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)\, ds}{(s+m-q_1)^r s^{1+k}}.$$

Les $A'^j_{r,m}$ et $A''^j_{r,m}$ étant des constantes convenables, on a :

$$\frac{1}{(s+m-q_1)^r s^{1+k}} = \sum_{j=1}^{r} \frac{A'^j_{r,m}}{(s+m-q_1)^j} + \sum_{j=1}^{1+k} \frac{A''^j_{r,m}}{s^j}.$$

On a (avec le choix de z antérieur) :

$$\int_{c_{m,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)}{(s+m-q_1)^j} ds = \frac{(-1)^{j-1} 2\pi i}{\Gamma(j)} \varphi^{*(j-1)}_{(z-k-q_1+m)}$$

et
$$\int_{c_{m,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)}{s^j} ds = 0$$

Il en résulte qu'il existe des constantes $C_{m,r}$ telles que :

$$\int_{C_\varepsilon} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = 2\pi i \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}}{\Gamma(j)} D_m^r A'^j_{r,m} \varphi^{*(j-1)}_{(z-k-q_1+m)}$$
$$= \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} C_{m,r} \varphi^{*(r-1)}_{(z-k-q_1+m)}, \qquad \text{avec} \qquad C_{0,p_1} \neq 0.$$

Choisissons z tel que $Rz = x > \sigma_1^* + \sigma_A^{\varphi^*} + k + \varepsilon$; on a :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \sum_{p=1}^{\infty} b_p e^{-\mu_p^*(z-k)} \int_{\sigma_1^*+\varepsilon-i\infty}^{\sigma_1^*+\varepsilon+i\infty} f^* \omega_k e^{s\mu_p^*} \frac{ds}{s^{1+k}}.$$

Posons

$$\delta_p = i \int_{-\infty}^{\infty} f^*(s) \omega_k(s) e^{i\tau\mu_p^*} \frac{d\tau}{s^{1+k}}, \qquad s = \sigma_1^* + \varepsilon + i\tau.$$

La suite $\{|\delta_p|\}$ est bornée supérieurement. La série $\sum_1^{\infty} b_p \delta_p e^{-z\mu_p^*}$ converge absolument en chaque point du demi-plan $x > \sigma_A^{\varphi^*}$. Il s'agit de déterminer l'ensemble singulier par rapport à un demi-plan de la fonction analytique de z définie par cette série. On rappelle qu'on peut déterminer des constantes D_m^r de sorte que :

$$f^*(s)\omega_k(s) = f_2^*(s) + \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} \frac{D_m^r}{(s+m-q_1)^r}$$

où $f_2^*(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$.

Pour z intérieur au demi-plan

$$x > \sigma_1^* + \sigma_A^{\varphi^*} + k + \varepsilon,$$

on a :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{0,\varepsilon}} f_2^* \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} + \sum_m \sum_r D_m^r \int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{(s+m-q_1)^r s^{1+k}}$$

On a aussi :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{(s+m-q_1)^r s^{1+k}} = \sum_{j=1}^{r} A'^j_{r,m} \int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{(s+m-q_1)^j} + \sum_{j=1}^{1+k} A''^j_{r,m} \int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{s^j}.$$

Il est bien connu que pour $\mu_p^* > 0$:

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{e^{s\mu_p^*} \, ds}{(s+m-q_1)^j} = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant m \leqslant m_0,$$

puisque pour ces valeurs de l'entier m, on a $\sigma_1^* + m - q_1' + \varepsilon < 0$. Puisque les fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont de classe $\mathfrak{M}$, on a $\lambda_1 \geqslant 1$ et $\mu_1 \geqslant 1$. Il en résulte que le coefficient de $f(s)$ d'ordre k par rapport à $\{\mu_n\}$, non nul de plus petit indice, ne peut être $a_{\mu_1}^{(k)} \neq 0$ que si $\mu_1 > 1$. Par conséquent le plus petit terme de la suite des exposants de la série $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ figurant effectivement dans cette série (c'est-à-dire associé à un coefficient non nul) est supérieur à 1.

Avec le choix antérieur de z, il en résulte :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* ds}{(s+m-q_1)^j} = 0, \qquad 0 \leqslant m \leqslant m_0.$$

On a pour j (entier) $\geqslant 1$:

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)}{s^j} ds = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma_1^* + \varepsilon < 0 \\ 2\pi i \dfrac{(-1)^{j-1}}{\Gamma(j)} \varphi_{(z-k)}^{*(j-1)} & \text{si} \quad \sigma_1^* + \varepsilon > 0. \end{cases}$$

En remarquant que quelle que soit la constante finie σ_1^* on peut toujours choisir $\varepsilon > 0$ satisfaisant aux conditions antérieurement précisées et suffisamment petit de sorte que $\sigma_1^* + \varepsilon \neq 0$ et réunissant les résultats obtenus ci-dessus il en résulte que la fonction de z définie par le prolongement analytique de la somme de la série considérée (ou le prolongement analytique de la fonction de z définie par l'intégrale,

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\frac{ds}{s^{1+k}},$$

à partir d'un point intérieur au demi-plan $x > \sigma_1^* + \sigma_A^{\varphi^*} + k + \varepsilon$) admet la représentation suivante légitime dans le demi-plan de convergence absolue de cette série (et dans un prolongement convenable) :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \cdots = \int_{C_{0,\varepsilon}} f_2^* \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} + \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma_1^* + \varepsilon < 0, \\ 2\pi i \sum_{j=1}^{1+k} D_j \varphi_{(z-k)}^{*(j-1)} \text{ si } \sigma_1^* + \varepsilon > 0 \end{cases}$$

où les D_j sont des constantes.

Les deux fonctions f_2^* et f^* sont du même « ordre O_M » égal à ν^* dans $\sigma > \sigma_1^*$; en outre $\sigma_{\mathcal{H}}^{f_2^*}(\sigma_1^*) = \sigma_1^*$ Dans le cas $\sigma_1^* < 0$ alors, eu égard au théorème de S. Mandelbrojt, la fonction de z

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f_2^* \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{0,\varepsilon} \cup c'_{0,\varepsilon}} f_2^* \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} - \frac{2\pi i}{\Gamma(k+1)} I_k(z),$$

avec

$$I_k(z) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f_{2(0)}^{*(k-j)} \varphi_{(z-k)}^{*(j)},$$

est analytique et ses seules singularités « possibles » dans le demi-plan $x > \sigma_1^* + \sigma_2^* + k$ sont les points de la fermeture de l'ensemble « somme composée » des ensembles $S_{f_2^*}^{\sigma_1^*}$ et $S_{\varphi^*, -k}^{\sigma_2^*}$ que l'on note $\overline{S_{f_2^*, \varphi^*, k}^{\sigma_1^* \sigma_2^*}}$ (on rappelle que $S_{\varphi^*, -k}^{\sigma_2^*}$ est l'ensemble « somme composée » de $S_{\varphi^*}^{\sigma_2^*}$ et du point d'affixe k).

On remarquera que $S_{f_2^*}^{\sigma_1^*}$ est identique à la droite $\sigma = \sigma_1^*$ et que $S_{f_2^*, \varphi^*, k}^{\sigma_1^* \sigma_2^*}$ contient la droite $\sigma = q_2' + \sigma_1^* + k$ et ne contient aucun point s avec $\sigma > q_2' + \sigma_1' + k$.

Il est évident que la définition de $S_{f_2^*}^{\sigma_1^*}$ suppose une petite modification (déjà vue au théorème IV. 1). Dans le cas $\sigma_1^* \geqslant 0$, cette intégrale admet pour singularités « possibles », dans le même demi-plan, les points de l'ensemble $S_{\varphi^*, -k}^{\sigma_2^*} \cup \overline{S_{f_2^*, \varphi^*, k}^{\sigma_1^* \sigma_2^*}}$. Cet ensemble contient la droite $\sigma = q_2' + \sigma_1^* + k$ et ne contient aucun point s avec $\sigma > q_2' + \sigma_1^* + k$.

Si $\sigma_1^* + \varepsilon < 0$, alors $C_\varepsilon' \neq \emptyset$; on a, dans le cas $\sigma_1^* < -1$:

$$\int_{C_\varepsilon'} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{c_{0,\varepsilon}'} \cdots + \sum_{j=1}^{j_0} \int_{c_{j,\varepsilon}'} \cdots,$$

— j, avec $1 \leqslant j \leqslant j_0$, est pôle simple de $\omega_k(s)$ et point régulier pour $\omega_k(s) \dfrac{f^*(s)}{s^{1+k}}$; on a donc pour z convenablement choisi (avec x suffisamment grand)

$$\int_{c_{j,\varepsilon}'} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = 0$$

et

$$\int_{c_{0,\varepsilon}'} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \frac{2\pi i}{\Gamma(k+1)} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_k^r \{f^* \omega_k\}_{s=0}^{(k-r)} \varphi^{*(r)}_{(z-k)}.$$

Des représentations obtenues pour les intégrales étudiées, on déduit immédiatement en réunissant les résultats que le point d'affixe $q_1 + q_2 + k$ est nécessairement singulier pour la fonction $H_k^*[f, \varphi|z]$; plus précisément il est pôle d'ordre $p_1 + p_2 - 1$. La fonction $H_k^*[f, \varphi|s]$ ne se réduisant pas à une fonction entière, et puisque $\sigma_A^{H_k^*}$ est fini, alors le point $s = 0$ est singulier pour la fonction $H_k[f, \varphi|s]$. En outre si $\sigma_1^* \geqslant 0$ alors dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1^* + q_2' + k$ les seuls points singuliers pour la fonction $H_k^*[f, \varphi|s]$ sont les pôles

$q_1 + q_2 + k - m$ à l'ordre $p_1 + p_2 - 1$ au plus; le pôle $q_1 + q_2 + k$ étant d'ordre $p_1 + p_2 - 1$.

Remarque. — On peut obtenir plus rapidement au théorème IV. 3 un résultat un peu moins précis. Au lieu d'établir que $H_k[f, \varphi \mid s]$ possède au point $s = 0$ une dominante angulaire algébrico-logarithmique, on peut se limiter à établir que $s = 0$ est point singulier pour cette fonction sans préciser davantage la nature de ce point. On sait que $\sigma_A^{H_k} \leqslant 0$. L'application immédiate à la fonction $H_k[f^*\omega_k, \varphi^* | s - k]$ d'un théorème établi dans un mémoire antérieur (référence II. 1) permet de conclure que $H_k^*[f, \varphi | s]$ ne se réduit pas à une fonction entière. Il en résulte que $s = 0$ est singulier pour $H_k[f, \varphi | s]$.

BIBLIOGRAPHIE

I. [1] W. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

II. [1] M. Blambert, Un problème de Composition des singularités des séries de Dirichlet générales, *Acta Mathematica*, t. 89, p. 217, 1953.

[2] M. Blambert, Quelques théorèmes Faberiens relatifs au problème Hadamard-Mandlbrojt, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, s. 2, t. III 1954.

[3] M. Blambert, Sur les points singuliers des séries de Dirichlet d'une classe de Cramér, *Annales Ec. Norm. Sup.*, 1955.

[4] M. Blambert, Quelques propriétés de répartition des singularités d'une série de Dirichlet générale en relation avec la nature de la suite des coefficients, *Publications Scientifiques de l'Université d'Alger*, 1956.

III. [1] R. Jungen, Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence, *Commentarii Math. Helv.*, v. 3, p. 226, 1931).

IV. [1] S. Mandelbrojt, Dirichlet Series. *The Rice Institute Pamphlet*, v. 31, 1944.

V. [1] R. Wilson, Functions with dominant singularities of the generalized algebraic-logarithmic type, *Proceedings Lond. Math. Soc.*, ser. 2, v. 42, 1937.

[2] R. Wilson, Functions with dominant singularities of the generalized algebraic-logarithmic type. (II) : on the order of the Hadamard produit, *Proceedings of the Lond. Math. Soc.*, v. 43, 1937.