ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN YGER

Fonctions définies dans le plan et vérifiant certaines propriétés de moyenne

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 3 (1981), p. 115-146

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_3_115_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31,3 (1981), 115-146

FONCTIONS DÉFINIES DANS LE PLAN ET VÉRIFIANT CERTAINES PROPRIÉTÉS DE MOYENNE

par Alain YGER

Soit f une fonction définie et continue dans $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$. Désignons par $F(x, r)$ la moyenne superficielle de la fonction f sur une sphère de centre x et de rayon r ; soient a et b deux nombres réels distincts, tous deux strictement positifs.

Dans [3], Delsarte a montré que, si le rapport a/b ne prenait pas certaines valeurs exceptionnelles, toute fonction f vérifiant, pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, $f(x) = F(x, a) = F(x, b)$, était alors une fonction harmonique dans $\mathbf{R}^n$.

Plaçons nous maintenant dans le cas $n = 2$.

Pour tout entier N supérieur ou égal à 2, soit P_N le polygone régulier de $\mathbf{R}^2$, centré en l'origine, dont les sommets sont les points $\left(\cos \frac{2k\pi}{N}, \sin \frac{2k\pi}{N}\right)$, k variant de 1 à N. Lorsque f désigne une fonction définie et continue dans $\mathbf{R}^2$, r un réel strictement positif, appelons $G_N(f, x, r)$ (resp. : $H_N(f, x, r)$) la moyenne des valeurs de la fonction f sur les sommets du polygone $x + r P_N$ (resp. : sur l'intérieur du polygone $x + r P_N$). Toute fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ et dont la valeur en tout point x de $\mathbf{R}^2$, est égale, pour tout $r > 0$, au nombre $G_N(f, x, r)$, est en fait un polynôme harmonique, de degré $N - 1$; le même résultat subsiste si $G_N(f, x, r)$ est remplacé par $H_N(f, x, r)$ ([1], [6], [19]).

Dans ce travail, nous nous placerons dans $\mathbf{R}^2$ et dans la situation où le polygone est un carré $(N = 4)$.

Nous envisagerons deux types de problèmes :

A. *Problèmes du type 1 :*

L'un des problèmes fondamentaux qui se posent pour un système de deux équations de convolution dans $\mathbf{R}^2$, depuis le contre exemple proposé par Gurevich [8], est celui de la synthèse spectrale : y a-t-il totalité des exponentielles polynômes solutions d'un système d'équations $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ $(\mu_1 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$, $\mu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2))$ dans l'espace des solutions continues de ce système ? Berenstein et Taylor, dans [2], ont donné, pour de tels systèmes, une condition suffisante non seulement pour qu'il y ait synthèse, mais encore pour que l'on dispose d'un moyen de représentation de toutes les solutions de classe C^∞ à l'aide des solutions élémentaires.

Il s'agit de s'assurer en premier lieu de ce que la sous variété $\mathbf{C}^2$ définie par $V(\mu_1, \mu_2) = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2, \hat{\check{\mu}}_1(Z) = \hat{\check{\mu}}_2(Z) = 0\}$ est bien de dimension 0, puis ensuite de ce que les composantes connexes de l'ensemble où $|\hat{\check{\mu}}_1|$ et $|\hat{\check{\mu}}_2|$ sont, en un certain sens, simultanément petits, sont bornées et de taille contrôlable. On dit alors que le couple $(\hat{\check{\mu}}_1(Z), \hat{\check{\mu}}_2(Z))$ est un couple de fonctions analytiques "slowly decreasing" pour le poids $p(Z) = |\mathrm{Im}Z| + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|)$, où $|\mathrm{Im}Z| = |\mathrm{Im}z| + |\mathrm{Im}w|$.

Dans cette première partie, nous donnerons une condition suffisante pour qu'un couple

$$(\hat{\check{\mu}}_1(Z), \hat{\check{\mu}}_2(Z)) \quad (\text{où } \mu_1 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2), \mu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2))$$

soit "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids p déjà considéré (lorsque la variété $V(\mu_1, \mu_2)$ est de dimension 0), (Proposition 1.1), puis nous verrons comment, en combinant ce résultat avec les méthodes déjà utilisées dans [23], nous pourrons en déduire, dans le cas $N = 4$, la propriété de synthèse spectrale et le théorème de représentation des solutions pour les systèmes du type :

$$(*)\ f(\cdot) = G_4(f, \cdot, 1) = G_4(f, \cdot, a) \quad (a \in]0, 1[).$$

Nous aurons été au préalable amenés à étudier la géométrie de l'ensemble des couples (z, w) de $\mathbf{C}^2$ satisfaisant au système d'équations :

$$(E_a) \qquad \cos z \cos w = \cos(az) \cos(aw) = 1 \quad (a \in]0, 1[\setminus \mathbf{Q}).$$

Cette étude se poursuivra dans la deuxième partie (II).

B. *Problèmes du type 2 :*

Soient μ_1 et μ_2 deux distributions à support compact dans le plan. Existe-t-il, et à quelles conditions, un ouvert relativement compact tel que toute solution distribution du système $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ soit en fait C^∞ partout lorsqu'elle est de classe C^∞ sur cet ouvert ? Tel que toute solution du système nulle sur cet ouvert soit en fait nulle partout ? Dans l'exemple étudié par J. Delsarte ([4], [12]), l'espace des solutions L^2_{loc} s'identifie à l'espace de Hilbert $L^2([0,2] \times [0,1])$; ce domaine $D = [0,2] \times [0,1]$ répond aux deux questions soulevées ci-dessus. Il n'est pas question, pour les systèmes de la forme (*), de construire ce que l'on pourrait appeler un tel domaine fondamental. L'obstruction est ici que la variété $V(\mu_1, \mu_2)$ correspondante ne peut être incluse dans une bande $\mathbf{C}^2$ de la forme $|\mathrm{Im} Z| \leqslant T$.

Cela résultera, on le verra, de l'étude géométrique des ensembles de couples de $\mathbf{C}^2$ vérifiant une équation du type (E_a).

Par contre nous serons en mesure de donner une réponse positive aux deux questions posées, si l'on arrive à montrer que l'ensemble des points de $\mathbf{C}^2$ où $|\hat{\check{\mu}}_1|$ et $|\hat{\check{\mu}}_2|$ sont simultanément petits (en un certain sens) se trouve dans un tube de $\mathbf{C}^2$ de la forme

$$|\mathrm{Im} Z| \leqslant T(1 + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|)) .$$

Ce sera l'objet du théorème 3.1, qui n'est en fait qu'un raffinement du théorème permettant le passage du semi local au global dans les problèmes de cohomologie à croissance (voir [2], [5], [18]).

Dans l'étude des systèmes de la forme (*) (où a est irrationnel), les propriétés arithmétiques du réel a et les propriétés géométriques de la variété $V(\mu_1, \mu_2)$ sont très liées, comme on le verra.

Nous montrerons l'existence d'irrationnels pour lesquels les hypothèses du théorème 3.1 pour la variété $V(\mu_1, \mu_2)$ correspondant au système (*) ne seront pas vérifiées.

Il existe d'autres méthodes, comme on le verra par certains systèmes de la forme (**) $f(\cdot) = H_4(f, ., 1) = H_4(f, ., a)$ $(a \in]0,1[)$, pour donner une réponse positive aux deux questions posées en tête de ce paragraphe.

1. Quelques problèmes liés au problème de la synthèse spectrale.

Dans la suite, p désignera toujours une fonction sous harmonique sur $\mathbf{C}^n$, non identiquement égale à $-\infty$, telle que

(i) $\forall Z \in \mathbf{C}^n$, $p(Z) \geqslant 0$

(ii) $\operatorname{Log}(1 + \|Z\|) = 0(p(Z))$

(iii) $\exists C > 0$, $\exists D > 0$ telles que

$$\forall Z \in \mathbf{C}^n,\ \forall \zeta \in \mathbf{C}^n,\ \|Z - \zeta\| \leqslant 1 \Longrightarrow p(\zeta) \leqslant Cp(Z) + D.$$

On notera $A(\mathbf{C}^n)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$; si Ω désigne un ouvert de $\mathbf{C}^n$, on notera $A(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.

Comme dans [2], on notera :

$$A_p(\Omega) = \{F \in A(\Omega) ;\ \exists A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall Z \in \Omega,\ |F(Z)| \leqslant Ae^{Bp(Z)}\}.$$

Rappelons la définition d'un n-uplet de fonctions analytiques dans $\mathbf{C}^n$ *"slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids p*. Ceci signifie

1) La variété analytique $\{F_1 = F_2 = \ldots\ldots = F_n = 0\}$ est de dimension 0.

2) $\exists \epsilon > 0$, $\exists K > 0$, $\exists K_1 > 0$, $\exists K_2 > 0$, tels que les composantes connexes de l'ensemble $\left\{ Z \in \mathbf{C}^n,\ \sum_{i=1}^{n} |F_i(Z)| < \epsilon\, e^{-K p(Z)} \right\}$ soient bornées, et que si Z et ζ sont deux points de l'une de ces composantes connexes, on ait : $p(Z) \leqslant K_1 p(\zeta) + K_2$.

Nous nous placerons, pour fixer les idées, et parce que nous allons utiliser les résultats de Berenstein-Taylor dans ce cadre, dans le cas $n = 2$.

PROPOSITION 1.1. – *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^2$. Soient*

$$F_1 \in A_p(\mathbf{C}^2),\ F_2 \in A_p(\mathbf{C}^2).$$

On suppose : il existe $\epsilon > 0$, $K > 0$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ *tels que*

2i) *Les composantes connexes rencontrant Ω de l'ensemble où* $|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |\operatorname{Jacobien}(F_1, F_2)(Z)| < \epsilon\, e^{-Kp(Z)}$ *sont bornées ;*

2ii) *Pour toute composante connexe* $\mathcal{C}$ *de cet ensemble rencontrant* Ω, *on a :* $\forall Z \in \mathcal{C}$, $\forall \zeta \in \mathcal{C}$, $p(Z) \leqslant K_1 p(\zeta) + K_2$.

Alors $\exists \epsilon > 0$, $\exists K' > 0$, $\exists K'_1 > 0$, $\exists K'_2 > 0$ *tels que*

3i) *Les composantes connexes rencontrant* Ω *de l'ensemble où* $|F_1(Z)| + |F_2(Z)| < \epsilon' e^{-K'p(Z)}$ *sont bornées.*

3ii) *Pour toute composante connexe* $\mathcal{C}'$ *de cet ensemble rencontrant* Ω, *on a :* $\forall Z \in \mathcal{C}'$, $\forall \zeta \in \mathcal{C}'$, $p(Z) \leqslant K'_1 p(\zeta) + K'_2$.

Remarque 1. – Les hypothèses impliquent la discrétion du spectre (variété des zéros communs de F_1 et F_2) ; dans le cas ou $\Omega = \mathbf{C}^2$, la conclusion du théorème signifie précisément que le couple (F_1, F_2) est "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor.

Ce corollaire immédiat a été annoncé dans l'introduction sous le titre : Proposition 1.1.

Remarque 2. – La proposition subsiste mot pour mot pour les n-uplets de fonctions analytiques dans $A_p(\mathbf{C}^n)$.

On notera désormais Jacobien $(F_1, F_2)(Z) = J[F_1, F_2](Z)$.

Prouvons la proposition 1.1. – Choisissons pour l'instant

$$\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}, \; K' > K.$$

(ϵ et K sont attachés au couple de fonctions analytiques (F_1, F_2) par la condition 2i).

Considérons une composante connexe rencontrant Ω de l'ensemble :

$$\{Z \in \mathbf{C}^2, \; |F_1(Z)| + |F_2(Z)| < \epsilon' e^{-K'p(Z)}\}.$$

Supposons que cette composante connexe contienne un point Zo tel que :

$$J[F_1, F_2](Zo) > \frac{\epsilon}{2} e^{-Kp(Zo)}.$$

Considérons un réel strictement positif $\epsilon(Zo)$ de la forme $\lambda e^{-\mu p(Zo)}$ (λ et μ sont deux constantes positives ne dépendant que de ϵ, K, F_1, F_2) de manière à ce que

$$\|Z - Zo\| < \epsilon(Zo) \Longrightarrow \left| \begin{vmatrix} F_{1,1}^{Zo}(Z), & F_{1,2}^{Zo}(Z) \\ F_{2,1}^{Zo}(Z), & F_{2,2}^{Zo}(Z) \end{vmatrix} \right| > \frac{\epsilon}{4} e^{-Kp(Z)},$$

où $F^{Zo}_{1,1}$, $F^{Zo}_{1,2}$, $F^{Zo}_{2,1}$, $F^{Zo}_{2,2}$ sont des fonctions entières de $A_p(\mathbf{C}^2)$ définies par

$$\forall Z \in \mathbf{C}^2 \begin{cases} F_1(Z) - F_1(Zo) = (z - zo)\ F^{Zo}_{1,1}(Z) + (w - wo)\ F^{Zo}_{1,2}(Z) \\ F_2(Z) - F_2(Zo) = (z - zo)\ F^{Zo}_{2,1}(Z) + (w - wo)\ F^{Zo}_{2,2}(Z). \end{cases}$$

L'existence de λ et μ est assurée par les conditions préliminaires imposées au poids p.

On a, pour tout Z dans la boule de centre Zo, et de rayon $\epsilon(Zo)$

$$\frac{\epsilon}{4}\ e^{-Kp(Z)}\ \|Z - Zo\| < |F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |F_1(Zo)| + |F_2(Zo)|.$$

Si l'on a pris soin de choisir ϵ' et K' de manière à ce que

$$\epsilon'\, e^{-K'p(Zo)} < \frac{\epsilon}{8}\ (\lambda\, e^{-\mu p(Zo)})\ \ e^{-Kp(Z)}$$

(pour tout $Z \in \mathbf{C}^2$, tel que $\|Z - Zo\| < 1$).

On voit, quitte à améliorer à nouveau ce choix de ϵ' et de K', que la composante connexe étudiée contenant Zo se trouve en fait incluse complètement dans la boule de centre Zo et de rayon $\lambda\, e^{-\mu p(Zo)}$. Elle est bornée et satisfait bien sûr (3ii) (si $\lambda < 1$, ce que l'on peut toujours supposer, on peut prendre $K'_1 > C$, $K'_2 > D$, C et D étant les deux constantes intervenant dans l'énoncé de la propriété (iii) du poids p).

Les seules composantes connexes de

$$\{Z \in \mathbf{C}^2\,,\ |F_1(Z)| + |F_2(Z)| < \epsilon'\, e^{-K'p(Z)}\}$$

restant à étudier sont celles rencontrant Ω et en tout point desquelles on ait

$$|J[F_1, F_2](Z)| < \frac{\epsilon}{2}\ e^{-Kp(Z)}.$$

Mais une telle composante est incluse dans une composante connexe rencontrant Ω de l'ensemble où

$$|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |J[F_1, F_2](Z)| < \epsilon\, e^{-Kp(Z)}.$$

On utilise alors les hypothèses 2i et 2ii. □

Nous allons utiliser cette proposition pour démontrer le

THEOREME 1.2. – *Soit* a *un réel de l'intervalle* $]0,1[$.

Soient F_1 *et* $F_2^{(a)}$ *les deux fonctions analytiques sur* $\mathbf{C}^2$ *définies par :*

$$\forall Z \in \mathbf{C}^2 , \ F_1(Z) = \cos(z) \ \cos(w) - 1$$

$$\forall Z \in \mathbf{C}^2 , \ F_2^{(a)}(Z) = \cos(az) \ \cos(aw) - 1 .$$

Le couple $(F_1, F_2^{(a)})$ *est "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids* $p(Z) = |\mathrm{Im} Z| + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|)$.

COROLLAIRE. – *Soit* a *un réel de l'intervalle* $]0,1[$.

Les exponentielles polynômes solutions du système d'équations de convolution $f(\cdot) = G_4(f,.,1) = G_4(f,.,a)$ *forment une partie totale dans l'espace de toutes les solutions continues de ce système. On dispose de plus d'un processus sommatoire permettant de représenter toute solution de classe* C^∞ *sous forme d'une somme (convergente dans* $C^\infty(\mathbf{R}^2)$*) d'exponentielles polynômes solutions du système d'équations.*

Le corollaire est une conséquence du théorème 1.2 et du théorème 7 de [2] (les mesures introduites sont symétriques par rapport à (0,0)).

Pour démontrer le théorème 1.2, nous allons avoir besoin de localiser l'ensemble des zéros communs aux deux variétés analytiques $F_1(Z) = 0$ et $F_2^{(a)}(Z) = 0$.

Nous appellerons Γ le sous-groupe de $\mathbf{R}^2$ engendré par les points $(1,0)$, $(0,1)$, $(a,0)$, $(0,a)$. (1)

Soient μ et ν_a les mesures atomiques de $\mathbf{R}^2$ telles que

$$F_1 = \hat{\mu} , \ F_2^{(a)} = \hat{\nu}_a .$$

ν désignant une mesure atomique à support fini porté par Γ, χ étant un caractère du groupe Γ, on notera

si $$\nu = \sum_{\gamma_i \in \Gamma} a_i \delta_{\gamma_i} , \quad \chi\nu = \sum_{\gamma_i \in \Gamma} a_i \chi(\gamma_i) \, \delta_{\gamma_i} .$$

LEMME 1.2.1. – *Il existe des constantes strictement positives* ϵ, K, T *telles que, pour tout* $Z \in \mathbf{C}^2$ *tel que* $|\mathrm{Im} Z| > T$, *on ait*

$$\forall \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{T}), \ |(\chi\mu)\hat{}(Z)| + |(\chi\nu_a)\hat{}(Z)| + |J[(\chi\mu)\hat{}, (\chi\nu_a)\hat{}](Z)| > \epsilon e^{-K|\mathrm{Im} Z|} .$$

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan euclidien. Pour tout vecteur $\vec{u} = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$, et pour tout $\alpha > 0$, désignons par $\mathcal{S}_\alpha(\vec{u})$ le secteur angulaire

$$\mathcal{S}_\alpha(\vec{u}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 , |x \sin\theta - y \cos\theta| < \alpha(x \cos\theta + y \sin\theta)\}.$$

Nous allons en fait montrer que, pour toute direction $\vec{u}$, il existe deux constantes strictement positives $\alpha(\vec{u})$ et $\beta(\vec{u})$ telles que :

$$\forall Z \in \mathbf{C}^2 , (\operatorname{Im} z , \operatorname{Im} w) \in \mathcal{S}_{\alpha(\vec{u})}(\vec{u}) \text{ et } \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Im} z \\ \\ \operatorname{Im} w \end{pmatrix} \geqslant \beta(\vec{u})$$

$$\Longrightarrow \forall \chi \in \operatorname{Hom}(\Gamma, \mathbf{T}), |(\chi\mu)\hat{}(Z)| + |\chi\hat{\nu}_a(Z)| + |J[(\chi\mu)\hat{}, (\chi\nu_a)\hat{}](Z)| > \alpha(\vec{u})\, e^{-\beta(\vec{u})|\operatorname{Im} Z|} .$$

Mais, si $\vec{u}$ est distinct des directions perpendiculaires aux côtés du carré $(\pm\vec{i}, \pm\vec{j})$, il existe deux constantes $\alpha(\vec{u})$ et $\beta(\vec{u})$ strictement positives telles que :

$$\forall Z \in \mathbf{C}^2 , (\operatorname{Im} z , \operatorname{Im} w) \in \mathcal{S}_{\alpha(\vec{u})}(\vec{u}) \text{ et } \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Im} z \\ \\ \operatorname{Im} w \end{pmatrix} \geqslant \beta(\vec{u})$$

$$\Longrightarrow \forall \chi \in \operatorname{Hom}(\Gamma, \mathbf{T}), |(\chi\mu)\hat{}(Z)| \geqslant 1 .$$

Nous allons donc supposer $\vec{u} = (1,0)$ à partir de maintenant.

Soit χ un élément de $\operatorname{Hom}(\Gamma, \mathbf{T})$.

Posons : $\quad \chi((1,0)) = e^{i\theta} \quad \chi((0,1)) = e^{i\theta'}$

$\qquad\qquad \chi((a,0)) = e^{i\alpha} \quad \chi((0,a)) = e^{i\alpha'}$.

Nous avons

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z}(\chi\mu)\hat{}(Z) & \dfrac{\partial}{\partial w}(\chi\mu)\hat{}(Z) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(\chi\nu_a)\hat{}(Z) & \dfrac{\partial}{\partial w}(\chi\nu_a)\hat{}(Z) \end{vmatrix} = a[\sin(z+\theta)\cos(w+\theta')\sin(aw+\varphi')\cos(az+\varphi) - \sin(w+\theta')\cos(z+\theta)\sin(az+\varphi)\cos(aw+\varphi')]$$

$$= a\, F_\chi(Z) .$$

D'autre part

$$\sin((a-1)w + \varphi' - \theta')\sin((a+1)z + \theta + \varphi)$$

$$= F_\chi(Z) + G_\chi(Z) + (\chi\rho_1)\hat{}(Z)\,(\chi\mu)\hat{}(Z) + (\chi\rho_2)\hat{}(Z)\,(\chi\nu_a)\hat{}(Z) \quad (2)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont deux mesures atomiques de support fini dans Γ, où $G_\chi(Z) = \sin(aw+\varphi')\sin(az+\varphi) - \sin(z+\theta)\sin(w+\theta')$.

Il résulte de (2) : il existe deux mesures atomiques à support fini dans Γ, σ_1 et τ, telles que

(i) $\mathrm{Supp}(\sigma_1) \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 , x < 1\}$.

(ii) $\forall Z \in \mathbf{C}^2$, $F_\chi(Z) = -\dfrac{1}{4}(\chi\tau)\hat{}(Z) - (\chi\mu)\hat{}(Z)(\chi\rho_1)\hat{}(Z) - (\chi\nu_a)\hat{}(Z)(\chi\rho_2)\hat{}(Z)$.

(iii) $\tau = \delta_{(a+1,a-1)} - \delta_{(a+1,+1-a)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(1,-1)} + \sigma_1$.

En fait la mesure τ peut s'écrire sous la forme :

$$\tau = \delta_{(a+1,a-1)} + \delta_{(a+1,-1-a)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(1,-1)} + \sigma_2 + \mu * \rho_1',$$

où σ_2 et ρ_1' sont deux mesures atomiques à support fini dans Γ, avec $\mathrm{Supp}\,\sigma_2 \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x < 1\}$.

τ peut donc s'écrire sous la forme

$$\tau = 4\delta_{(1,-1)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(1,-1)} + \delta_3 + \mu * \rho_1'' + \nu_a * \rho_2',$$

où $\sigma_3, \rho_1'', \rho_2'$ sont des mesures atomiques à support fini dans Γ, avec $\mathrm{Supp}\,\sigma_3 \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x < 1\}$.

On peut écrire le Jacobien des deux transformées de Fourier des mesures $\chi\tau$ et $\chi\nu_a$ sous la forme :

$$J[(\chi\mu)\hat{},(\chi\nu_a)\hat{}](Z) = -\frac{a}{4}(\chi\tau)\hat{}(Z) - a(\chi(\rho_1 * \mu + \rho_2 * \nu_a))\hat{}(Z)$$

avec
$$\begin{aligned}\tau &= 2\delta_{(1,-1)} + \sigma_4 + \mu * \tau_{4,1} + \nu_a * \tau_{4,2}\\ &= 2\delta_{(1,1)} + \sigma_5 + \mu * \tau_{5,1} + \nu_a * \tau_{5,2}\end{aligned}$$

où les mesures $\sigma_4, \sigma_5, \tau_{4,1}, \tau_{4,2}, \tau_{5,1}, \tau_{5,2}$ sont des mesures atomiques à support fini dans Γ, avec

$$\mathrm{Supp}(\sigma_4) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_5) \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x < 1\}.$$

L'existence de $\alpha(\vec{u})$ et de $\beta(\vec{u})$ est alors immédiate (le raisonnement est analogue à celui qui est fait dans la démonstration du lemme 2 de [23]).

Un recouvrement de $\mathbf{R}^2$ par un nombre fini de secteurs angulaires ouverts du type $\mathcal{S}_\alpha(\vec{u})$ achève la preuve du lemme 1.2.1. □

LEMME 1.2.2. – *Soit* a *un réel de* $]0,1[$, Γ *le sous groupe de* $\mathbf{R}^2$ *correspondant (1). Pour tout caractère* χ *de* Γ, *les zéros communs de* $(\chi\mu)\hat{}(Z) = (\chi\nu_a)\hat{}(Z)$ *sont isolés.*

Considérons en effet, comme dans [23], l'ensemble

$$\mathbf{E} = \bigcup_{\chi\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})} \mathcal{W}_a(\chi)\,,$$

où $\mathcal{W}_a(\chi)$ désigne l'ensemble des zéros non isolés de

$$(\chi\mu)\hat{}(Z) = (\chi\nu_a)\hat{}(Z) = 0\,.$$

En reprenant mot pour mot la preuve du lemme 4 de [23], on montre que la projection de $\mathbf{E}$ sur l'axe des z est une partie ouverte et fermée de $\mathbf{C}$. Comme cette projection se trouve, d'après le lemme 1.2.1, dans la bande $\{z\in\mathbf{C}\,,\,|\mathrm{Im} z|\leqslant \mathrm{T}\}$, elle est vide. □

LEMME 1.2.3. – *Soit* a *un réel de* $]0,1[$, Γ *le sous groupe de* $\mathbf{R}^2$ *correspondant (1). L'ensemble* $\mathcal{F}$ *des couples de fonctions entières sur* $\mathbf{C}^2$ *de la forme* $[(\chi\mu)\hat{}(Z), (\chi\nu_a)\hat{}(Z)]$, *où* χ *est un caractère de* Γ, *est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de* $\mathbf{C}^2$.

Puisque $|\chi| = 1$ et que μ et ν_a ont un support compact, toutes les dérivées de $(\chi\mu)\hat{}$ et de $(\chi\nu_a)\hat{}$ sont majorées, uniformément par rapport à χ. Le théorème d'Ascoli montre que $\mathcal{F}$ est relativement compact.

$\mathcal{F}$ est en fait compact car le groupe $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ est métrisable et compact. □

LEMME 1.2.4. – *Soit* a *un réel de* $]0,1[$. *Soit* T *un réel strictement positif; il existe deux constantes* $\epsilon(a)$, $\mathrm{K}(a)$ *telles que toute composante connexe de* $\{Z\in\mathbf{C}^2\,,\,|\hat{\mu}(Z)| + |\hat{\nu}_a(Z)| < \epsilon(a)\}$ *soit bornée et ait un diamètre au plus égal à* $\mathrm{K}(a)$ *lorsqu'elle intercepte la bande de* $\mathbf{C}^2$ $\{Z\in\mathbf{C}^2\,,\,|\mathrm{Im} Z|\leqslant \mathrm{T}\}$.

Considérons dans $\mathbf{C}^2$ la boule Δ de centre $(0,0)$ et de rayon $4\,\mathrm{T}$. L'ensemble $\mathcal{F}$ des couples de fonctions entières sur $\mathbf{C}^2$ et de la forme $[(\chi\mu)\hat{}(Z), (\chi\nu_a)\hat{}(Z)]$, où χ est un caractère de Γ, est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur Δ.

Soit (F,G) un tel couple; il existe un compact connexe $\mathcal{C}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ contenant dans son intérieur la boule de centre $(0,0)$ et de rayon $2\,\mathrm{T}$, inclus dans $\mathring{\Delta}$, et sur le bord duquel on ait $|F| + |G| > \epsilon(F, G) > 0$. (Cela résulte du lemme 1.2.2 ; on peut d'ailleurs prendre pour $\mathcal{C}(F, G)$ une boule de centre $(0,0)$ et de rayon intermédiaire entre $2T$ et $4T$ sur le bord de laquelle F et G n'aient aucun zéro commun).

Il existe un voisinage $\mathcal{V}(F, G)$ du couple (F, G) pour la topologie de la convergence uniforme sur Δ, tel que :

$$\forall (F', G') \in \mathcal{V}(F, G), |F'| + |G'| > \frac{\epsilon(F, G)}{2} \quad \text{sur } \partial\mathcal{C}(F, G).$$

Utilisant alors le lemme 1.2.3, nous recouvrons F par un nombre fini de voisinages $\mathcal{V}(F_1, G_1), \ldots, \mathcal{V}(F_k, G_k)$.

Pour tout couple (x_0, u_0) dans $\mathbf{R}^2$, le couple de fonctions analytiques $(\hat{\mu}(z + x_0, w + u_0), \hat{\nu}_a(z + x_0, w + u_0))$ est un élément de $\mathcal{F}$.

On pose alors

$$\epsilon(a) = \inf_{i \in \{1,\ldots,k\}} \left(\frac{\epsilon(F_i, G_i)}{2}\right), \; K(a) = \sup_{i \in \{1,\ldots,k\}} (\operatorname{diam}(\mathcal{C}(F_i, G_i))).$$

Le lemme 1.2.4 résulte d'un simple argument de compacité. □

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème 1.2.

Nous appliquons la proposition 1.1 en prenant comme ouvert

$$\Omega = \{Z \in \mathbf{C}^2, |\operatorname{Im} Z| > T\}.$$

Grâce au lemme 1.2.1, les hypothèses 2i et 2ii sont trivialement vérifiées. Nous appliquons enfin le lemme 1.2.4. □□

2. Quelques considérations arithmétiques.

Dans toute cette partie, a désignera un irrationnel de l'intervalle $]0,1[$. Comme nous l'avons annoncé en introduction, l'obstruction pour que le système d'équations de convolution dans $\mathbf{R}^2$ du type $(*)$ admette un domaine fondamental (c'est-à-dire un domaine borné Δ de $\mathbf{R}^2$ tel que l'on puisse identifier l'espace des solutions L^2_{loc} du système $(*)$ et $L^2(\Delta)$) ([12], [23]), est que l'ensemble des couples $(z, w) \in \mathbf{C}^2$ satisfaisant au système d'équations : (E_a) $\cos z \cos w = \cos(az) \cos(aw) = 1$ ne peut être inclus dans une bande de $\mathbf{C}^2$ de la forme $|\operatorname{Im} Z| \leqslant T$.

PROPOSITION 2.1. – *Soit* a *un irrationnel de* $]0,1[$.

Soit T *la constante introduite dans l'énoncé du lemme 1.2.1. Pour tout* v *réel et de module supérieur ou égal à* T, *pour tout* ϵ *positif, il existe un couple de* $\mathbf{C}^2$, *solution de :*

(i) $\cos(z)\ \cos(w) = \cos(az)\ \cos(aw) = 1$;

(ii) $|\mathrm{Im} w - v| < \epsilon$.

Prouvons cette proposition.

Soient A et B deux nombres complexes :

$$A = \alpha + i\beta\,,\ B = \gamma + i\delta\,,\ \beta\delta \neq 0\,,\ |sh(\beta)\ sh(\delta)| < 1\,.$$

Nous allons montrer qu'il existe θ et φ dans $\mathbf{R}$, tels que

$$\cos(A+\theta)\ \cos(B+\varphi) = 1\,.$$

En effet :

$\cos(A+\theta) = \cos(\alpha+\theta)\ ch(\beta) - i\ \sin(\alpha+\theta)\ sh(\beta)$ (pour tout θ réel)

$\cos(B+\varphi) = \cos(\gamma+\varphi)\ ch(\delta) - i\ \sin(\gamma+\varphi)\ sh(\delta)$ (pour tout φ réel)

Pour tout ρ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons

$$\Psi(\rho) = (ch(\beta)\ \cos(\lambda_1(\rho)) - i\,sh(\beta)\ \sin(\lambda_1(\rho)))\ (ch(\delta)\ \cos(\lambda_2(\rho)) + i\ sh(\delta)\ \sin(\lambda_2(\rho)))$$

où $\lambda_1(\rho)$ et $\lambda_2(\rho)$ sont déterminés de manière à ce que :

$$\mathrm{Arg}((ch(\beta)\ \cos(\lambda_1(\rho)) - i\ sh(\beta)\ \sin(\lambda_1(\rho))) = \rho$$

$$\mathrm{Arg}(ch(\delta)\ \cos(\lambda_2(\rho)) + i\ sh(\delta)\ \sin(\lambda_2(\rho))) = -\rho$$

$$\lambda_1(\rho) \in [0, 2\pi[\,,\ \lambda_2(\rho) \in [0, 2\pi[\,.$$

Ψ est une fonction continue à valeurs réelles, telle que

$$\Psi(0) = ch(\beta)\ sh(\delta) > 1\,,$$

et que $\left|\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |sh(\beta)\ sh(\delta)| < 1$.

Il existe donc ρ_0 dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tel que $\Psi(\rho_0) = 1$.

On choisit enfin $\theta = \alpha - \lambda_1(\rho_0)$, $\varphi = -\gamma - \lambda_2(\rho_0)$.

On a bien alors $\cos(A+\theta)\ \cos(B+\varphi) = 1 = \Psi(\rho_0)$.

Soit maintenant v fixé dans $\mathbf{R}$, tel que $v \geqslant \mathrm{T}$. Considérons y dans $\mathbf{R}^+$, tel que $sh(y)\ sh(v) < 1$ et que $sh(ay)\ sh(av) < 1$. En raisonnant avec $\mathrm{A} = iv$ et $\mathrm{B} = iy$, on détermine u et x dans $\mathbf{R}$, tels que l'on ait : $\cos(u + iv)\ \cos(x + iy) = 1$.

En raisonnant ensuite avec $\mathrm{A}' = a(u + iv)$, $\mathrm{B}' = a(x + iy)$, on détermine dans un deuxième temps θ et φ dans $\mathbf{R}$, de manière à ce que :

$$\cos(a(u + iv) + \varphi)\ \cos(a(x + iy) + \theta) = 1 .$$

Le couple $(x + iy\,, u + iv)$ est donc une solution de

$$(\chi\mu)\hat{}(\mathrm{Z}) = (\chi\nu_a)\hat{}(\mathrm{Z}) = 0$$

où $\chi(1,0) = \chi(0,1) = 1$, $\chi(a\,,0) = e^{i\theta}$, $\chi(0\,,a) = e^{i\varphi}$.

(Pour les notations, se référer aux remarques suivant l'énoncé du corollaire du théorème 1.2).

Ce zéro est un zéro isolé du système $(\chi\mu)\hat{}(\mathrm{Z}) = (\chi\nu_a)\hat{}(\mathrm{Z}) = 0$, en vertu du lemme 1.2.1 ; c'est même un zéro simple.

Si ϵ est suffisamment petit pour que $(x + iy\,, u + iv)$ soit le seul zéro commun aux deux variétés $(\chi\mu)\hat{}(\mathrm{Z}) = (\chi\nu_a)\hat{}(\mathrm{Z}) = 0$ à l'intérieur de la boule de centre ce point et de rayon 2ϵ, alors :

$$\exists\eta(\epsilon) > 0\,,\ \forall\chi' \in \mathrm{Hom}(\Gamma\,,\mathbf{T})\,,\ \|\chi' - \chi\|_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})} < \eta(\epsilon)$$

$\Longrightarrow (\chi'\mu)\hat{}$ et $(\chi'\nu_a)\hat{}$ ont aussi un zéro commun dans la boule de centre $(x + iy\,,\ u + iv)$ et de rayon ϵ.

Cela résulte par exemple de l'application de la formule de Kronecker. Or a est irrationnel ; $2\pi\mathbf{Z} + 2\pi a\mathbf{Z}$ est donc un sous groupe dense de $\mathbf{R}$ (d'après le théorème de Dirichlet).

Il existe donc $(k\,,\ell)$ dans $\mathbf{Z}^2$, tel que, si $\chi_{(k,\ell)}$ désigne l'élément de $\mathrm{Hom}(\Gamma\,,\mathbf{T})$ défini par $\chi_{(k,\ell)}(0,1) = \chi_{(k,\ell)}(1,0) = 1$, $\chi_{(k,\ell)}(a\,,0) = e^{-2i\pi ka}$, $\chi_{(k,\ell)}(0\,,a) = e^{-2i\pi\ell a}$, on ait

$$\|\chi - \chi_{(k,\ell)}\|_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})} < \eta(\epsilon).$$

On a donc ainsi construit un point de $\mathbf{C}^2$, solution de $\hat{\mu}(\mathrm{Z}) = \hat{\nu}_a(\mathrm{Z}) = 0$, situé à une distance au plus égale à ϵ du point

$$(x + iy + 2k\pi\,, u + iv + 2\ell\pi).$$

Ce point vérifie $|\mathrm{Im} w - v| < \epsilon$. □

Un raffinement de cette démonstration nous permet de démontrer la :

PROPOSITION 2.2. – *Soit* a *un irrationnel de* $]0,1[$. *Les deux énoncés suivants sont équivalents*

(i) $\exists C > 0$, $\forall (z, w) \in \mathbf{C}^2$, $\cos(z)\cos(w) = \cos(az)\cos(aw)$
$= 1 \Longrightarrow |\mathrm{Im} z| < C(1 + \mathrm{Log}(1 + |\mathrm{Re} w|))$.

(ii) $\exists m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$, tel que
$$\forall q \in \mathbf{Z}\backslash\{0,-1\}, d((2q+1)a, \mathbf{Z}\backslash 2\mathbf{Z}) \geqslant \frac{1}{|2q+1|^m}.$$

Remarque. – On rappelle qu'un nombre réel a est un nombre de Liouville ([10], [11]) s'il peut être rapidement approché par les rationnels au sens suivant
$$\forall m \geqslant 2, \exists p \in \mathbf{Z}, \exists q \in \mathbf{Z}, \text{ avec } q \geqslant 2 \text{ et } \left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{|q|^m}.$$
Ces nombres constituent, dans $[0,1]$, un ensemble de mesure nulle. Il est clair qu'un irrationnel de $]0,1[$, qui est non-Liouville, vérifie (ii).

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ *(i).* – Raisonnons par l'absurde. Supposons que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, on puisse trouver un couple (z_n, w_n) dans $\mathbf{C}^2$ tel que
$$\begin{cases} \cos(z_n)\cos(w_n) = \cos(az_n)\cos(aw_n) = 1 \\ |\mathrm{Im} z_n| \geqslant n(1 + \mathrm{Log}(1 + |\mathrm{Re} w_n|)). \end{cases}$$
Pour les grandes valeurs de n, on peut écrire :
$$w_n = (2q_n + 1)\frac{\pi}{2} + \epsilon_n, |\epsilon_n| \leqslant 3e^{-n}, q_n \in \mathbf{Z}\backslash\{0,-1\}.$$
On a donc $d((2q_n + 1)a\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}(\mathbf{Z}\backslash 2\mathbf{Z})) \leqslant \frac{6}{\pi} e^{-an} \frac{1}{|(2q_n+1)^{an}|}$.

Pour n suffisamment grand $\frac{6}{\pi} e^{-an} \frac{1}{(2q_n+1)^{an}} \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{1}{|2q_n+1|^{an}}$ (pour $n \geqslant N$).

Si l'on se donne $m \in \mathbf{N}^*$, $m \geqslant 2$, et $n \geqslant \sup\left(N, \frac{m}{a}\right)$,
$$\exists q_n \in \mathbf{Z}\backslash\{-1,0\}, d((2q_n+1)a, \mathbf{Z}\backslash 2\mathbf{Z}) \leqslant \frac{1}{|2q_n+1|^m}.$$
Ceci achève la preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (ii). – La démonstration repose sur le lemme technique suivant, dont l'essentiel de la preuve figure déjà dans celle de la proposition 2.1.

LEMME 2.2.1. – *Soit y un nombre strictement positif.*

Soit $v \in \mathbf{R}^+$ vérifiant $sh(y)\ sh(v) < 1$. Il existe alors un unique couple $(x(v), u(v))$ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\cos(x(v) + iy)\ \cos(-u(v) + iv) = 1 .$$

De plus on a : $\lim\limits_{v \to 0} (u(v)) = u_0(y)$ *où* $\operatorname{tg}(u_0(y)) = shy$.

Prouvons ce lemme. – Si λ varie dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $\Psi_v(\lambda) = |z_v(\lambda)|\ |z_y(-\lambda)|$, où $z_v(\lambda)$ désigne l'affixe du point d'argument (λ) de l'ellipse $\dfrac{X^2}{ch^2(v)} + \dfrac{Y^2}{sh^2(v)} = 1$, où $z_y(-\lambda)$ désigne l'affixe du point d'argument $(-\lambda)$ de l'ellipse $\dfrac{X^2}{ch^2(y)} + \dfrac{Y^2}{sh^2(y)} = 1$. Comme $\Psi_v\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1 < \Psi_v(0)$, que Ψ_v est une fonction décroissante de λ, il existe une unique valeur de λ pour laquelle $\Psi_v(\lambda) = 1$. Cette valeur, que nous noterons $\lambda(v)$, vérifie

$$\left(\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(v)} + \frac{\sin^2(\lambda(v))}{sh^2(v)}\right)\left(\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(y)} + \frac{\sin^2(\lambda(v))}{sh^2(y)}\right) = 1 .$$

On a donc : $sh^2(v)\ ch^2(v)\ ch^2(y)\ sh^2(y) \geqslant \sin^4(\lambda(v))$.

On en déduit donc $\lim\limits_{v \to 0} (\lambda(v)) = 0$.

Comme dans la preuve de la proposition 2.1, $x(v)$ et $u(v)$ sont déterminés grâce à $\lambda(v)$, et l'on a

$$\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(v)}\ (1 + \operatorname{tg}^2(u(v)))\ \left(\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(y)} + \frac{\sin^2(\lambda(v))}{sh^2(y)}\right) = 1 .$$

Il s'ensuit $\lim\limits_{v \to 0} (1 + \operatorname{tg}^2(u(v))) = ch^2(y)$.

On a donc $\lim\limits_{v \to 0} \operatorname{tg}^2(u(v)) = sh^2(y)$.

Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.1.

Prouvons alors la proposition 2.2. – En reprenant les notations de la preuve du lemme 2.2.1, considérons la fonction φ définie sur $\mathbf{R}^+$ par

$$\forall y \in \mathbf{R}^+ \,,\; \varphi(y) = au_0(y) - u_0(ay) \,.$$

Il s'agit d'une fonction décroissante de y (pour les valeurs suffisamment grandes de la variable). De plus, $\lim_{y \to +\infty} (\varphi(y)) = (a-1)\,\dfrac{\pi}{2} \cdot$ Nous allons démontrer (i) $\Longrightarrow$ (ii) par l'absurde.

Si (ii) était en défaut, il existerait une suite d'entiers $(q_n)_{n \geqslant 2}$ de $\mathbf{Z}\backslash\{0\,,-1\}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \,,\; n \geqslant 2 \,,\; d((2q_n + 1)\,a\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,(\mathbf{Z}\backslash 2\,\mathbf{Z})) < \frac{\pi}{2\,|2q_n + 1|^n} \cdot$$

Il existerait donc une suite d'entiers $(\widetilde{q}_n)_{n \geqslant 2}$ de $\mathbf{Z}^*$, et une suite d'entiers $(p_n)_{n \geqslant 2}$ de $\mathbf{Z}$, avec :

$$\forall n \in \mathbf{N} \,,\; n \geqslant 2 \,,\; 0 < (-a+1)\,\frac{\pi}{2} + \widetilde{q}_n \pi\, a - p_n \pi < \frac{\pi}{2(1 + |\widetilde{q}_n|)^n} \cdot$$

Puisque $\lim_{y \to +\infty} \left[\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1}{sh(ay)}\right) - a \; \operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1}{sh(y)}\right)\right] = 0_+$, et que la fonction $\widetilde{\varphi}$ définie sur $\mathbf{R}^+$ par

$$\widetilde{\varphi}(y) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{sh(ay)}\right) - a \; \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{sh(y)}\right)$$

est décroissante pour les grandes valeurs de y, pour tout $n \geqslant 2$, il existe $y_n \in \mathbf{R}^+$ tel que :

$$\widetilde{\varphi}(y_n) = \epsilon_n = (-a+1)\,\frac{\pi}{2} + q_n \pi\, a - p_n \pi \,.$$

Fixons maintenant n et posons $y_n = y$.

Pour les valeurs de v vérifiant $sh(y)\; sh(v) < 1$ et $sh(ay)\; sh(av) < 1$, nous pouvons trouver, d'après la preuve de la proposition 2.1, quatre réels de l'intervalle

$$\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right] ,\; x_y(v)\,,\; u_y(v)\,,\; x_{ay}(v)\,,\; u_{ay}(v)$$

de manière à ce que

$(iy\,,\,iv)$ soit un zéro du système $\begin{cases} \cos(z + x_y(v))\;\cos(-u_y(v) + w) = 1 \\ \cos(az + x_{ay}(v))\;\cos(-u_{ay}(v) + w) = 1\,. \end{cases}$

Grâce à l'argument de perturbation déjà utilisé pourvu que $|y| \geqslant T$ (cf. lemme 1.2.1), il existe deux constantes ϵ_0 et K_0 strictement positives telles que

$$\text{si } |u_y(v) - u_0(y)| + |u_{ay}(av) - u_0(ay)| < \epsilon_0 \, e^{-K_0 y},$$

alors il existe, à une distance au plus égale à $1/2$ du point (iy, iv), un couple (z', w') solution du système d'équations

$$\begin{cases} \cos(z' + x_y(v)) \cos(-u_0(y) + w') = 1 \\ \cos(az' + x_{ay}(v)) \cos(-u_0(ay) + aw') = 1. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\begin{cases} \cos(z' + x_y(v)) \cos(-u_0(y) + w') = 1 \\ \cos(az' + x_{ay}(av)) \cos(-au_0(y) + \varphi(y) + aw') = 1. \end{cases}$$

Or $au_0(y) - u_0(ay) = (a-1)\dfrac{\pi}{2} + \widetilde{\varphi}(y) = q_n \pi a - p_n \pi$.

Nous avons donc

$$\begin{cases} (-1)^{q_n} \cos(z' + x_y(v)) \cos(-u_0(y) - q\pi + w') = 1 \\ (-1)^{p_n} \cos(az' + x_{ay}(av)) \cos(a(-u_0(y) - q\pi + w')) = 1. \end{cases}$$

Le même argument de perturbation nous assure l'existence d'un point (z'', w''), solution de $\cos(z'')\cos(w'') = \cos(az'')\cos(aw'') = 1$, tel que

$$|\mathrm{Re}\, w'' + u_0(y) + q\pi| < 1, \quad |\mathrm{Im}\, z'' - y| < 1.$$

Nous avons donc :

$$|\mathrm{Re}\, w''| < |q| \, \pi + \frac{\pi}{2} + 1$$

$$|\mathrm{Im}\, z''| > |y| - 1.$$

Mais nous avons d'autre part : $\widetilde{\varphi}(y) \geqslant \rho\, e^{-ay}$ (pour une certaine constante positive ρ). A chaque $n \in \mathbf{N}$ $(n \geqslant 2)$, suffisamment grand, nous avons donc pu associer un point (z''_n, w''_n) solution du système $\cos(z)\cos(w) = \cos(az)\cos(aw) = 1$ vérifiant de plus

$$\frac{\rho\, e^{-a|\mathrm{Im}\, z''_n|}}{e^{-a}} \leqslant \widetilde{\varphi}(y_n) \leqslant \frac{\pi}{2(1 + |q_n|)^n}, \tag{3}$$

soit encore

$$e^{a|\mathrm{Im}\, z''_n|} \geqslant \frac{2\rho\, e^{-a}}{\pi} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n (|\mathrm{Re}\, w''_n| + 1)^n. \tag{4}$$

Si nous avions (i), nous déduirions de (4) et de (i) qu'il existe une constante W telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, $|\mathrm{Re} w_n''| \leqslant \mathrm{W}$.

Mais l'on pourrait alors extraire de la suite (w_n'') une sous suite convergente, ce qui serait absurde puisque la limite w_0 devrait vérifier $\cos(w_0) = \cos(aw_0) = 0$. □

PROPOSITION 2.3. – *Il existe des irrationnels a de* $]0,1[$, *pour lesquels on peut construire une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'entiers positifs strictement croissante, telle que : il existe deux constantes positives C_1 et C_2 de manière à ce que*

$\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\exists (z_k, w_k) \in \mathbf{C}^2$, *vérifiant* $\cos(z_k)\cos(w_k)$

$$= \cos(az_k)\cos(aw_k) = 1\,,\ |\mathrm{Im} w_k| \leqslant 1\,,$$

$$\mathrm{Im} z_k \geqslant n_k \,\mathrm{Log}\left(\frac{1 + |\mathrm{Re} z_k| + |\mathrm{Re} w_k|}{\mathrm{C}_1}\right) + \mathrm{C}_2\,.$$

Considérons par exemple $a = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{(p!)+1}}$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$; posons $n_k = 4k$.

Nous avons :

$$3^{(n_k)!+1}\, a = 3^{(n_k)!} + 3^{(n_k)!+1} + \sum_{p=2}^{n_k} 3^{(n_k)!-(p!)} + \mathrm{R}_k\,.$$

Il existe donc $p_{n_k} \in \mathbf{N}$, tel que $3^{(n_k)!+1}\, a = 4p_{n_k} - 1 + \mathrm{R}_k$.

Il existe aussi $q_{n_k} \in \mathbf{N}$, tel que $3^{(n_k)!+1} = 4q_{n_k} - 1$.

Nous avons donc ainsi construit deux suites d'entiers $(p_{n_k})_{k\in\mathbf{N}^*}$, $(q_{n_k})_{k\in\mathbf{N}^*}$, telles que $0 < (4q_{n_k} - 1)\,a - (4p_{n_k} - 1) < \frac{\mathrm{C}}{(q_{n_k} + 1)^{n_k}}$, où C est une constante positive.

En reprenant la preuve de la proposition 2.2 et l'argument de perturbation utilisé, cela est suffisant pour assurer l'existence du couple (z_k, w_k) et des constantes C_1 et C_2. □

Nous allons enfin examiner le cas où a est un nombre irrationnel de type constant (voir par exemple [11], [13]).

PROPOSITION 2.4. – *Soit* $a \in\,]0,1[\,\backslash \mathrm{Q}$; *on suppose a de type* *constant. Il existe alors deux constantes positives* $T_1(a)$, $T_2(a)$, *telles que pour tout couple* (x, y) *de* $\mathbf{R}^2$, *il existe un couple* (z, w) *de* $\mathbf{C}^2$ *vérifiant*

(i) $\cos(z)\cos(w) = \cos(az)\cos(aw) = 1$

(ii) $|\mathrm{Im} Z| \leqslant T_1(a)$

(iii) $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, w) \in (x, y) + [-T_2(a), T_2(a)]^2$.

Soit a un irrationnel de $]0,1[$ de type constant. Alors [13] : $\forall \epsilon > 0$, $\exists T_a(\epsilon) > 0$, tel que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall \varphi \in \mathbf{R}$, il existe $q \in \mathbf{Z}$ vérifiant $2\pi q \in [x - T_a(\epsilon), x + T_a(\epsilon)]$ et $d(2\pi q a - \varphi, 2\pi \mathbf{Z}) < \epsilon$.

Soit alors $T(a)$ la constante introduite dans l'énoncé du lemme 1.2.1. Posons $T_1(a) = T(a) + 1$. Nous fixerons le couple (x, y). Si v est un réel strictement positif vérifiant

$$sh(v)\, sh(T(a)) < 1 \quad \text{et} \quad sh(av)\, sh(aT(a)) < 1,$$

on peut trouver quatre réels x_v, x'_v, u_v, u'_v dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tels que

$$\begin{cases} \cos(x_v + i\,T(a))\cos(-u_v + iv) = 1 \\ \cos(x'_v + ai\,T(a))\cos(-u'_v + aiv) = 1\,; \end{cases}$$

on notera dorénavant $T(a) = T$. De plus (voir la preuve de la proposition 2.2), $\lim\limits_{v\to 0}(x_v) = \lim\limits_{v\to 0}(x'_v) = 0$, $\lim\limits_{v\to 0}(u_v) = u_0$, $\lim\limits_{v\to 0}(u'_v) = u'_0$ où $\mathrm{tg}(u_0) = sh(T)$, $\mathrm{tg}(u'_0) = sh(aT)$.

D'après l'argument de perturbation déjà utilisé, il existe (z_T, w_T) dans $\mathbf{C}^2$, solution de

$$\cos(z_T)\cos(-u_0 + w_T) = \cos(az_T)\cos(-u'_0 + aw_T) = 1,$$

tel que $(\mathrm{Re}\, z_T, \mathrm{Re}\, w_T) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ et que $|\mathrm{Im} Z_T| < T + \frac{1}{2}$.

D'après le même argument, du fait qu'il existe $q \in \mathbf{Z}$ vérifiant à la fois $2\pi q \in [x - T_a(\epsilon), x + T_a(\epsilon)]$ et $d(2q\pi a - au_0 + u'_0, 2\pi\mathbf{Z}) < \epsilon$, et $\ell \in \mathbf{Z}$ vérifiant à la fois $2\pi\ell \in [y - T_a(\epsilon), y + T_a(\epsilon)]$ et $d(2\ell\pi a, \mathbf{Z}) < \epsilon$, on peut à condition de choisir ϵ suffisamment petit (ce choix dépendra de la valeur de T), construire un couple (z'_T, w'_T) dans $\mathbf{C}^2$ tel que

$$\begin{cases} \cos(z'_T + 2\ell\pi)\ \cos(w'_T - u_0 + 2q\pi) = 1 \\ \cos(a(z'_T + 2\ell\pi))\ \cos(a(w'_T - u_0 + 2q\pi)) = 1 \\ (\mathrm{Re}\,z'_T\,, \mathrm{Re}\,w'_T) \in [-1,1]^2 \\ |\mathrm{Im}Z'_T| \leqslant T + 1 = T_1(a)\,; \end{cases}$$

ϵ ayant été choisi correctement en fonction de T, on pose

$$T_2(a) = T_a(\epsilon) + 3\,.$$

Le couple $(z'_T + 2\ell\pi\,, w'_T - u_0 + 2q\pi)$ satisfait clairement les conditions (i), (ii), (iii) exigées. □

Nous allons maintenant voir que si la condition (i) de la proposition 2.2 est vérifiée, nous pouvons contrôler par R^k le nombre de zéros isolés du système $\cos(z)\cos(w) = \cos(az)\cos(aw) = 1$ dans la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon R.

Revenons un instant au cas d'un n-uplet de fonctions entières de type exponentiel dans $\mathbf{C}^n$ "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor.

PROPOSITION 2.5. – *Soient* $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ *n fonctions entières de type exponentiel sur* $\mathbf{C}^n$ *; on suppose que le jacobien de ce n-uplet de fonctions n'est pas identiquement nul. On suppose de plus*

(H1) *Le n-uplet*$(F_1, F_2, \dots, F_n)$ *est "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids* $p(Z) = |\mathrm{Im}Z| + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|)$;

(H2) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\forall Z \in \mathbf{C}^n\,,\ F_1(Z) = F_2(Z) = \cdots = F_n(Z) = 0 \Longrightarrow |\mathrm{Im}Z| \leqslant C(1 + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|))\,.$$

Désignons, pour tout R *strictement positif, par* $N(R)$ *le nombre de points* Z *solutions du système* $(F_i(Z) = 0,\ i \in \{1, \dots, n\})$ *situés dans la boule ouverte de centre* $(0, 0 \dots, 0)$ *et de rayon* R.

Il existe alors deux constantes positives M *et* $\widetilde{K}$ *telles que* $\forall R \in \mathbf{R}^+,\ N(R) \leqslant \widetilde{K}(1 + R^M)$.

Donnons nous $\epsilon > 0$, $K > 0$, de manière à ce que les composantes connexes de $\left\{ Z \in \mathbf{C}^n\,,\ \left(\sum_1^n |F_i(Z)|^2\right)^{1/2} < \epsilon\, e^{-Kp(Z)} \right\}$ soient bornées, et vérifient la condition (2ii) de l'hypothèse "slowly decreasing".

Désignons par $\mathcal{C}_{(R)}$ l'ensemble des composantes connexes de cet ensemble rencontrant

$$\mathring{B}(0, R) \cap \{Z \in \mathbf{C}^n , F_1(Z) = F_2(Z) = \cdots = F_n(Z) = 0\}.$$

Si K_1 et K_2 sont les deux constantes introduites dans la condition (2ii) de l'hypothèse "slowly decreasing", et si $\widetilde{C} \in \mathcal{C}_R$, nous avons

$$\forall Z \in \widetilde{C},\ p(Z) \leqslant K_1 + K_2 p(Zo), \quad \text{où} \quad Zo \in S \cap \mathring{B}(0, R)$$

(on désignera par S l'ensemble des $Z \in \mathbf{C}^n$ tels que

$$F_1(Z) = F_2(Z) = \cdots = F_n(Z) = 0).$$

Nous avons donc :

$$\forall Z \in \widetilde{C},\ \operatorname{Log}(1 + \|Z\|) \leqslant K_1 + K_2 [C + (C + 1) \operatorname{Log}(1 + R)]$$

(à cause de l'hypothèse H1).

Il existe donc deux constantes λ et μ positives telles que

$$\forall R > 0,\ \forall \widetilde{C} \in \mathcal{C}(R),\ \widetilde{C} \subset B(0, \lambda(1 + R^{\mu})).$$

Il existe également deux constantes strictement positives ρ_1 et ρ_2 telles que :

$$\forall R > 0,\ \forall \widetilde{C} \in \mathcal{C}_{(R)},\ \forall Z \in \partial \widetilde{C}, \left(\sum_{i=1}^{n} |F_i(Z)|^2\right)^{1/2} \geqslant \frac{\rho_1}{(1 + R)^{\rho_2}}.$$

Grâce au lemme 1.5 de [2], nous pouvons supposer qu'il existe des constantes A et B telles que, si Γ désigne la frontière distinguée de l'une quelconque des composantes connexes de

$$\left\{ Z \in \mathbf{C}^n ,\ \left(\sum_{1}^{n} |F_i(Z)|^2\right)^{1/2} < \epsilon\, e^{-Kp(Z)} \right\},$$

on ait $\displaystyle\int_\Gamma |dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n| \leqslant A \exp(Bp(Z))$.

En utilisant les formules de la section I de [2], nous voyons qu'il existe $n + 1$ réels strictement positif $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \rho_3$ tels que $\forall \theta \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$, $\forall R > 0$, les fonctions analytiques G_i définies par $G_i(Z) = F_i(Z) - \dfrac{\alpha_i}{(1 + R)^{\rho_3}} e^{i\theta_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ont, dans toutes les composantes connexes $\widetilde{\mathrm{C}}$ appartenant à $\mathcal{C}_{\mathrm{R}}$, le même nombre de zéros communs que les fonctions $\mathrm{F}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Posons alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall r > 0$, $\mathrm{M}_i(r) = \sup\limits_{\mathrm{Z} \in \mathrm{B}(0,r)} |\mathrm{F}_i(\mathrm{Z})|$. Soit γ un réel strictement supérieur à 1.

D'après le théorème 2.9 de Gruman [7], on a l'inégalité suivante :

$$(2\pi)^n \, \mathrm{N}(\mathrm{R}) \leqslant \left(\frac{1}{(\gamma^2 - 1)\, \mathrm{R}'^2}\right)^n \mathrm{Vol}_n \mathrm{B}(0, \gamma^n \mathrm{R}') \prod_{j=1}^{j=n}$$
$$[\mathrm{Log}^+ \mathrm{M}_j(\lambda \gamma^{n-1+j}(\mathrm{R}^\mu + 1)) + \mathrm{Log}^- \alpha_i + \rho_3 \mathrm{Log}(1 + \mathrm{R}')]$$

où $\mathrm{R}' = \lambda(1 + \mathrm{R}^\mu)$, C étant une constante indépendante de R. On déduit immédiatement la proposition 2.4. □

Nous pourrions appliquer cette proposition au couple de fonctions analytiques $(\cos(z)\cos(w) - 1, \cos(az)\cos(aw) - 1)$ lorsque a satisfait à la condition (ii).

Mais il existe dans ce cas particulier, grâce au lemme 1.2.1 un résultat plus précis :

Proposition 2.6. — *Soit a un élément de $]0,1[$ (a peut éventuellement appartenir à* Q).

Désignons par $\mathrm{N}_a(\mathrm{R})$ le nombre de zéros du système d'équations $\cos(z)\cos(w) = \cos(az)\cos(aw) = 1$ situés dans l'intérieur de la boule de centre $(0,0)$ et de rayon R. On a

$$\int_1^{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{N}a(r)}{r}\, dr = 0(\mathrm{R}^2).$$

Soit $\mathrm{T}(a)$ la constante associée à a par le lemme 1.2.1.

Grâce à ce lemme (qui nous dit qu'aux points où $|\mathrm{Im Z}| > \mathrm{T}(a)$, $\cos(z)\cos(w) = 1$, $\cos(az)\cos(aw) = 1$, on a $|\mathrm{J}(\hat{\mu}, \hat{\nu}_a)| \geqslant \epsilon e^{-\mathrm{K}\|\mathrm{Z}\|}$) et au théorème 3 de M. Okada [14], nous pouvons affirmer

$$\exists \mathrm{C}_1 > 0 \text{ telle que : } \forall \mathrm{R} > 0, \int_1^{\mathrm{R}} \mathrm{N}_1^{(a)}(r) \frac{dr}{r} < \mathrm{C}_1 \mathrm{R}^2,$$

où $\mathrm{N}_1^{(a)}(\mathrm{R}) = \mathrm{card}\,\{\mathrm{Z} \in \mathbf{C}^2, \cos(z)\cos(w) = \cos(az)\cos(aw) = 1, |\mathrm{Im Z}| > \mathrm{T}(a), \|\mathrm{Z}\| < \mathrm{R}\}$.

Posons $\mathrm{N}_2^{(a)}(\mathrm{R}) = \mathrm{card}\,\{\mathrm{Z} \in \mathbf{C}^2, \cos(z)\cos(w) = \cos(az)\cos(aw) = 1, |\mathrm{Im Z}| \leqslant \mathrm{T}(a), \|\mathrm{Z}\| < \mathrm{R}\}$.

Grâce au lemme 1.2.3 et au raisonnement effectué lors de la preuve du lemme 1.2.4, nous montrons

$$\exists C_2 > 0\,,\ \forall R > 0\,,\ N_2^{(a)}(R) < C_2 R^2\ ;$$

or $$\int_1^R \frac{Na(r)}{r}\,dr = \int_1^R \frac{N_1^{(a)}(r)}{r}\,dr + \int_1^R \frac{N_2^{(a)}(r)}{r}\,dr\,. \qquad \square$$

3. Le problème de la propagation des singularités.

Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ n distributions à support compact dans $\mathbf{R}^n$.

Nous nous posons le problème de déterminer des conditions suffisantes portant la position des points de $\mathbf{C}^n$ vérifiant $\hat{\mu}_i(Z) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, de manière à ce qu'il existe dans $\mathbf{R}^n$ un ouvert relativement compact Ω dans lequel toute distribution à support compact dans $\mathbf{R}^n$ admette, modulo l'idéal $\sum_{i=1}^{n} \mu_i * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, un représentant.

Il existera dans ce cas un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^n$ (par exemple du type $(]-A, A[)^n$) tel que toute solution distribution du système : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_i * \rho = 0$ soit C^∞ partout lorsqu'elle l'est sur cet ouvert, nulle partout lorsqu'elle l'est sur cet ouvert.

Deux exemples de ce type de situation dans $\mathbf{R}^2$ sont :

1) *L'exemple de Delsarte généralisé,* où les deux mesures μ_1 et μ_2 sont en quelque sorte "gouvernées" par les charges dont elles affectent les sommets d'un polygone convexe compact du plan affine ; si P désigne ce polygone, nous pouvons démontrer (et nous donnerons les grandes lignes de cette démonstration en prouvant le théorème 3.1) que tout ouvert Ω contenant $P + P$ répond au problème posé ([22], [23]).

2) *L'exemple des systèmes de la norme* $(*)$ $f(\cdot) = G_4(f, \cdot, 1) = G_4(f, \cdot, a)$, où a vérifie la condition (ii) de la proposition 2.2 qui nous assure que l'ensemble des couples de $\mathbf{C}^2$ solutions de $\hat{\mu}(Z) = \hat{\nu}_a(Z) = 0$, sans être, comme dans le cas de l'exemple 1, dans une bande de

$\mathbf{C}^2\{|\mathrm{Im}Z| \leqslant T\}$ (voir la proposition 2.1), n'en est pas moins dans un domaine $|\mathrm{Im}Z| \leqslant T(1 + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|))$.

THEOREME 3.1 [22]. – *Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ $(n \in \mathbf{N})$, n distributions à support compact dans $\mathbf{R}^n$, de support inclus dans $[-1, +1]^n$. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tels que :*

$$(\mathrm{H}) \quad \forall Z \in \mathbf{C}^2, \ \sum_{i=1}^{n} |\hat{\mu}_i(Z)| < \epsilon\, e^{-C_1 |\mathrm{Im}Z|} \Longrightarrow |\mathrm{Im}Z| \leqslant C_2(1 + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|)).$$

Alors, pour toute distribution U *dans* $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, *il existe une distribution* $\widetilde{U}_\alpha$ *dans* $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, *telle que :*

$$\mathrm{Supp}(\widetilde{U}_\alpha) \subset [-1-\alpha, \ 1+\alpha]^n, \ U - \widetilde{U}_\alpha \in \sum_{i=1}^{n} \mu_i * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n).$$

Prouvons ce théorème en suivant les pas de la démonstration du théorème 2.2 de [2]. Nous allons tronquer la fonction analytique $\hat{U}$ au voisinage de l'ensemble des points où les $\hat{\mu}_i$ sont simultanément très petits. Nous poserons

$$|F(Z)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\hat{\mu}_i(Z)|^2, \ p(Z) = |\mathrm{Im}Z| + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|).$$

Soit :

$$\forall \eta > 0, \ \forall C > 0, \ V(\eta, C) = \{Z \in \mathbf{C}^n, \ |F(Z)| < \eta\, e^{-Cp(Z)}\}.$$

En choisissant correctement $\eta' < \eta < \epsilon$, $C' > C > C_1$, nous construisons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$, égale à 1 sur $V(\eta', C')$, nulle au voisinage du complémentaire de $V(\eta, C)$, prenant ses valeurs dans $[0, 1]$, et ayant un $\bar{\partial}$ vérifiant

$$\exists A > 0, \ \exists B > 0, \ \forall Z \in \mathbf{C}^n, \ |\bar{\partial}\chi(Z)| \leqslant A\, e^{Bp(Z)}.$$

Suivant la méthode du *complexe de Koszul* ([2], [18]), et *en reprenant la démonstration du théorème 2.2* [2], posons $m = 2n + 1 + (n-1)\alpha$. Nous pouvons trouver une constante B_m de manière à ce que :

$$\int_{\mathbf{C}^n} \frac{|\hat{U} \cdot \bar{\partial}\chi(Z)|}{|F(Z)|^{2m}} \exp(-B_m p(Z))\, dv < +\infty.$$

Il existe donc (théorème 2.6 de [18]) $n\,(0,1)$ formes

$(\omega_i)_{i=1}^{i=n}$, $\exists B'_m > 0$, telles que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\bar{\partial}\,\omega_i = 0$ et

$$\int_{\mathbf{C}^n} \frac{\|\omega_i(Z)\|^2}{|F(Z)|^{2(n-1)\alpha}}\, e^{-B'_m p(Z)}\, dv < +\infty.$$

En utilisant le théorème de Hörmander et l'hypothèse (H), nous construisons $q \in \mathbf{N}$, $V_1, V_2, \dots, V_n$ dans $L^2_{loc}(\mathbf{C}^n)$ de manière à ce que :

$$\bar{\partial}\Big(\chi \hat{U} - \sum_{i=1}^{n} V_i \hat{\mu}_i\Big) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{C}^n} \frac{\sum_{i=1}^{n} |V_i(Z)|^2}{|F(Z)|^{2(n-1)\alpha}}\, \frac{dv}{(1+\|Z\|)^q} < +\infty.$$

Nous définissons ainsi une fonction entière Ψ, deux entiers q_1 et q_2, tels que

$$\int_{\mathbf{C}^n} |\Psi(Z)|^2\, \frac{e^{-2(\alpha+1)|\operatorname{Im} Z|}}{(1+\|Z\|)^{q_1}}\, dv < \infty,$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} \frac{|\hat{U}(Z) - \Psi(Z)|}{|F(Z)|^{2(n-1)\alpha+2}}\, e^{-q_2 p(Z)}\, dv < +\infty$$

Nous appliquons enfin le théorème 1 de [17]. □

COROLLAIRE. – *Soit* $\alpha > 1$; *soit* a *un irrationnel de* $]0,1[$, *vérifiant la condition (ii) de la proposition 2.2.*

Toute solution au sens des distributions du système

$$f(\cdot) = G_4(f, \cdot, 1) = G_4(f, \cdot, 2)$$

C^∞*(resp. nulle) dans un ouvert* Ω *contenant un translaté de* $[-2,2]^2$ *est en fait une solution* C^∞ *(resp. nulle) du système.*

Remarque. – Une question que nous n'avons pu résoudre serait de savoir si la conclusion du corollaire subsiste lorsque a ne vérifie plus les contraintes arithmétiques imposées.

Il n'est cependant pas possible, pour un nombre satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.3 (et nous savons qu'il en existe), qu'il existe un ouvert Ω *relativement compact, tel que toute distribution* $U \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$ *se trouve congrue, modulo l'idéal* $\mu * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2) + \nu_a * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$ *à une distribution dont le support se trouve inclus dans* Ω.

Si cela était le cas, prenons par exemple $(x_0, 0) \in \mathbf{R}^2$, $x_0 > 0$. Nous aurions : $\delta(x_0, 0) = \rho_{(x_0)} + \mu * \tau_{1,x_0} + \nu_a * \tau_{2,x_0}$, avec de plus $\operatorname{Supp} \rho \subset\subset \Omega$.

Considérons la suite $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de la proposition 2.2. Nous aurions $e^{-ix_0z_k} = \hat{\rho}_{(x_0)}(z_k\,,\,w_k)$.

Il existerait deux constantes $C_{(x_0)}$ et $K_{(x_0)}$ telles que

$$e^{(x_0-C_{(x_0)})\operatorname{Im} z_k} \leqslant K_{(x_0)}(1 + |\operatorname{Re} z_k| + |\operatorname{Re} w_k|)^{K_{(x_0)}}. \qquad (5)$$

Si x_0 est choisi suffisamment grand, on peut supposer $x_0 - C_{(x_0)} > 0$. La suite (Z_k) vérifierait à la fois (5) et la propriété de la proposition 2.3, ce qui signifierait que la suite w_k admette une sous suite convergente, ce qui est impossible (la limite éventuelle devrait vérifier $\cos(\ell) = \cos(a\ell) = 0$).

Lorsque a vérifie la condition (ii) de la proposition 2.2, il existe un ouvert relativement compact Ω_a (par exemple $]-2-\epsilon\,,\,2+\epsilon[^2$) que l'on pourrait qualifier «d'unicité» pour le système d'équations $(*)$.

Il n'est jamais possible pour de tels systèmes $(a \in\,]0\,,1[\,\backslash \mathrm{Q})$ que tout élément de $L^2(\Omega_a)$ admette, de manière continue, un prolongement à l'espace des solutions du système $(*)$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$; cela en effet résulte du lemme 2.1.

En revanche, lorsque a est un irrationnel de $]0\,,1[$ de type constant, nous pouvons démontrer :

PROPOSITION 3.2 [22]. – *Soit a un irrationnel de $]0\,,1[$, de type constant. Il existe $\epsilon_0(a) > 0$ tel que :*

$$\forall f \in L^2([-\epsilon_0(a)\,,\,\epsilon_0(a)]^2)\,,$$

il existe $F \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, *avec*

$$F\,|\,[-\epsilon_0(a)\,,\,\epsilon_0(a)]^2 = f \quad \text{et} \quad f(\cdot) = G_4(f,.\,,1) = G_4(f,.\,,a)\,.$$

Nous allons utiliser un lemme de perturbation très classique [16].

LEMME 3.2.1. – *Soit a un irrationnel de $]0\,,1[$, de type constant. Il existe une suite de points $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{C}^2$, solutions de $\cos(z_n)\cos(w_n) = \cos(az_n)\cos(aw_n) = 1$, il existe trois constantes strictement positives $C\,,\,\alpha\,,\,\beta$ telles que*

$$\forall f \in L^2\left(\left[-\frac{\pi}{C}\,,\,\frac{\pi}{C}\right]^2\right),\ \exists\,(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})\,,$$

avec

(i) $f(x, y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n e^{i(z_n x + w_n y)}$ (*au sens* L^2)

(ii) $\alpha\Big(\sum_{n\in\mathbf{N}} |c_n|^2\Big)^{1/2} \leqslant \|f\|_{L^2([-\frac{\pi}{C},\frac{\pi}{C}]^2)} \leqslant \beta\Big(\sum_{n\in\mathbf{N}} |c_n|^2\Big)^{1/2}$.

Nous utilisons pour prouver ce lemme un théorème classique de Paley-Wiener, redémontré par Nagy ([16], p. 206).

Appelons T_1 et T_2 les constantes liées à a par la proposition 2.4. Choisissons C de manière à ce que $|e^{\frac{2\pi}{C}(T_1+T_2)} - 1| = |\theta| < 1$.

Considérons la base orthonormée de $L^2\Big(\Big[-\frac{\pi}{C}, \frac{\pi}{C}\Big]^2\Big)$ constituée des $e_{k,\ell}(k \in \mathbf{Z}, \ell \in \mathbf{Z})$, où $e_{k,\ell}(x, y) = \exp(i(kCx + \ell Cy))$.

D'après la proposition 2.4, il existe $(z_{k,\ell}, w_{k,\ell}) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\cos(z_{k,\ell}) \cos(w_{k,\ell}) = \cos(az_{k,\ell}) \cos(aw_{k,\ell}) = 1$, $z_{k,\ell} = kC + \rho_{k,\ell}$, $w_{k,\ell} = \ell C + \sigma_{k,\ell}$, avec de plus $\sup(|\rho_{k,\ell}|, |\sigma_{k,\ell}|) \leqslant T_1 + T_2$. Soit F une partie finie de $\mathbf{Z}^2$, $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in F}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{(k,\ell)\in F} a_{k,\ell}(e^{i(z_{k,\ell}x + w_{k,\ell}y)} - e^{i(kCx+\ell Cy)}) = \sum_{\substack{p+q\neq 0\\ p\geqslant 0,\, q\geqslant 0}} \frac{i^{p+q}}{p!\,q!} x^p y^q \Big(\sum_{(k,\ell)\in F} \rho^p_{k,\ell}\, \sigma^q_{k,\ell}\, a_{k,\ell}\, e^{i(kCx+\ell Cy)}\Big).$$

La norme $L^2\Big(\Big[-\frac{\pi}{C}, \frac{\pi}{C}\Big]^2\Big)$ de cette quantité est donc majorée par

$$\sum_{\substack{p\geqslant 0,\, q\geqslant 0\\ p+q\neq 0}} \frac{1}{p!}\,\frac{1}{q!}\Big[\frac{\pi}{C}(T_1+T_2)\Big]^{p+q}\Big[\sum_{(k,\ell)\in F} |a_{k,\ell}|^2\Big]^{1/2}.$$

Cette expression est en fait égale à :

$$(e^{\frac{2\pi}{C}(T_1+T_2)} - 1)\Big[\sum_{(k,\ell)\in F} |a_{k,\ell}|^2\Big]^{1/2} = \theta\Big[\sum_{(k,\ell)\in F} |a_{k,\ell}|^2\Big]^{1/2},$$

où $\theta < 1$.

Nous appliquons alors le théorème de Nagy ([16], p. 206). □

La proposition 3.2 est une conséquence immédiate du lemme précédent. On pose $\epsilon_0(a) = \frac{\pi}{C}$ (C étant la constante introduite dans le lemme).

Tout élément f de $L^2([-\epsilon_0, \epsilon_0]^2)$ s'écrit

$$f = \sum_{(k,\ell)\in \mathbf{Z}^2} c_{k,\ell}\, e^{i(z_{k,\ell}x + w_{k,\ell}y)} .$$

Comme $\forall (k,\ell)\in \mathbf{Z}^2$, $|\mathrm{Im} Z_{k,\ell}| \leqslant T_1$, on définit de cette manière un élément de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ solution du système d'équations de convolution $(*)$. □

Lorsque a n'est pas un nombre de Liouville, nous avons un énoncé similaire à celui du corollaire du théorème 3.1 pour le système de la forme : $(**)$ $f(\cdot) = H_4(f,.,1) = H_4(f,.,a)$.

PROPOSITION 3.3. – *Soit* a *un irrationnel de* $]0,1[$, *non-Liouville* [10]. *Il existe un ouvert relativement compact* $\Omega =]-A,+A[^2$ *tel que :* $\forall U \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$, *il existe une distribution à support compact* $\widetilde{U}$, *de support inclus dans* Ω, *telle que*

$$U - \widetilde{U} \in \widetilde{\mu} * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2) + \widetilde{\nu}_a * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2),$$

où $4\widetilde{\mu} = -4\delta_{(0,0)} + \chi[-1,1]^2$, $4\widetilde{\nu}_a = -4a^2\delta_{(0,0)} + \chi[-a,a]^2$ ($\chi[-\alpha,\alpha]^2$ *désigne la mesure de densité uniforme 1 dans le carré* $[-\alpha,+\alpha]^2$).

Cette proposition résulte du lemme suivant :

LEMME 3.3.1. – *Soit* a *un irrationnel de* $]0,1[$, *non-Liouville. Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une constante* $C(\epsilon, a)$ *telle que*

$$\forall Z \in \mathbf{C}^2,\ |\hat{\widetilde{\mu}}(Z)| + |\hat{\widetilde{\nu}}_a(Z)| \leqslant \epsilon$$

$$\Longrightarrow |\mathrm{Im}\, z| \leqslant C\ (1 + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|) + |\mathrm{Im}\, w|)$$

et $$|\mathrm{Im}\, w| \leqslant C\ (1 + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|) + |\mathrm{Im}\, z| .$$

Ce lemme résulte de [10] et de [15].

Il existe, si a est non-Liouville, deux distributions S_a et T_a de support respectivement inclus dans $[0,2]$ et $[0,2a]$, telles que

$$\delta'_{(0)} = (\delta_{(0)} - \delta_{(2a)}) * S_a + (\delta_{(0)} - \delta_{(2)}) * T_a .$$

Nous en déduisons l'existence de deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$, à support dans $]-\infty, 0[$, V_1 et V_2 telles que

$$\forall Z \in \mathbf{C}^2, \ \sin(z)\ \sin(az) = z(\hat{\widetilde{\mu}}(Z)+1)\ \sin(az)\, V_1(w) + az\sin(z)\,(\hat{\widetilde{\nu}}_a(Z)+1)\, V_2(w). \qquad (6)$$

Le lemme découle de ce résultat. □

Donnons les grandes lignes de la preuve de la proposition. Nous fixons $\epsilon = 1$, $C(\epsilon, 1) = C$ (lemme 3.3.1).

Nous déterminons, dans l'ouvert pseudo convexe

$$\Theta = \{Z \in \mathbf{C}^2,\ \mathrm{Im} w > C(1 + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|) + |\mathrm{Im} z|)\}$$

deux fonctions analytiques P et Q telles que

(i) $1 = P\hat{\widetilde{\mu}} + Q\hat{\widetilde{\nu}}_a$ dans Θ

(ii) $\exists N_0 \in \mathbf{N},\ \exists B \in \mathbf{R}^+,\ \int_\Theta \frac{|P|^2 + |Q|^2}{(1+\|Z\|)^{N_0}}\, e^{-2B|\mathrm{Im} Z|}\, dv < +\infty.$

Nous construisons ensuite une fonction φ de classe C^∞, égale à 1 sur le complémentaire de l'ouvert Θ, dont le support est inclus dans $\{Z \in \mathbf{C}^2,\ \mathrm{Im} w < C(4 + \mathrm{Log}(1+\|Z\|) + |\mathrm{Im} z|)\}$, et dont le $\overline{\partial}$ est borné.

Choisissons enfin deux constantes positives K_1 et K_2 pour l'instant suffisamment grandes ; soit η un nombre strictement positif. Posons, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\omega'_t =]-K_1 - \eta, K_1 + \eta[\times]-K_1 - \eta, K_1 + \eta + t[.$$

On posera $\forall t \geqslant 0$, $\omega_t = \omega'_t + K_2[-1, +1]^2$.

Nous allons raisonner comme S. Hänsen dans [9]. E désignera l'ensemble des réels positifs t tels que :

$$\forall T \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^2),\ \mathrm{Supp}\, T \subset\subset \omega_t \Longrightarrow \exists \widetilde{T} \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^2),\ \mathrm{Supp}\, \widetilde{T} \subset\subset \omega_0$$

et $\qquad T - \widetilde{T} \in \widetilde{\mu} * \mathscr{E}'(\mathbf{R}^2) + \widetilde{\nu}_a * \mathscr{E}'(\mathbf{R}^2).$

Nous désignerons par τ le sup de l'ensemble E.

Soit $X_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\partial\omega_\tau$, avec

$$-K_1 \leqslant x_0 \leqslant K_1,\ y_0 = K_1 + K_2 + \eta + \tau.$$

Soit Ω_0 le compact : $y = y_0 - K_1$, $|x - x_0| \leqslant 4CK_1$.

Si K_2 est correctement choisi, $\Omega_0 + (B+1)[-1, 1]^2 \subset\subset \omega_\tau$. (On a préalablement choisi $K_1 > B + 1$).

On pose $\Omega_1 = \Omega_0 + (B+1)\,[-1\,,+1]^2$; comme $\Omega_1 \subset\subset \omega_\tau$, il existe un convexe compact Ω_1' de ω_τ' tel que

$$\Omega_1 \subset \Omega_1' + K_2\,[-1\,,+1]^2\,.$$

En ayant recours, comme dans [9], à des secteurs paraboliques contenant X_0, on montre que toute distribution à support dans un tel secteur, ayant donc une transformée de Fourier $\hat{u}$ vérifiant

$$\forall Z \in \operatorname{Supp}\varphi\,,\ |\hat{u}(Z)| \leqslant \lambda\,(1+\|Z\|)^\lambda \exp(H_{\Omega_0}(\operatorname{Im}Z))$$

(où $H_{\Omega_0}(x) = \sup\limits_{y\in\Omega_0} \langle x\,,y\rangle$), est congrue, modulo l'idéal

$$\widetilde{\mu} * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2) + \widetilde{\nu}_a * \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)\,,$$

à une distribution de support inclus dans ω_τ.

Pourvu que M soit choisi suffisamment grand $(2(M+1-\lambda) > N_0)$, nous pouvons trouver u_1 et u_2 dans $L^2_{\mathrm{loc}} \subset \mathbf{C}^2)$ telles que

$$\overline{\partial} u_1 = P\hat{u}\,\overline{\partial}\varphi\,,\ \overline{\partial} u_2 = Q\hat{u}\,\overline{\partial}\varphi\,,$$

$$\forall i = 1\,,2\,,\ u_i \exp(-H_{\Omega_1}(\operatorname{Im}.) - (K_2-1)\,H_{[-1,1]}(\operatorname{Im}.) - M \operatorname{Log}(1+\|\cdot\|)) \in L^2(\mathbf{C}^2)\,.$$

(On applique le théorème de Hörmander).

Nous pouvons par cette méthode ramener toute distribution à support compact dans

$$\theta_\tau = \omega_\tau \cup \{]-K_1\,,K_1[\times[K_1+K_2+\eta+\tau\,,2K_1+K_2+\eta+\tau[\}\,,$$

modulo l'idéal engendré par $\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\nu}_a$, à une distribution de support inclus dans ω_τ.

Or l'identité (6) permet de ramener toute distribution à support dans $\omega_{\tau+K_1}$, modulo ce même idéal, à une distribution de support inclus dans θ_τ.

Ceci contredirait la définition de τ si τ était fini. Il faut enfin répéter ce raisonnement dans les 3 autres directions et appliquer à nouveau l'identité (6) pour conclure. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.F. BECKENBACH et M. READE, Mean Values and Harmonic polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53 (1943), 230-238.

[2] C.A. BERENSTEIN et B.A. TAYLOR, Interpolation problems in $\mathbf{C}^n$ with applications to Harmonic Analysis, *J. Analyse. Math.*, Vol. 38 (1980).

[3] J. DELSARTE, Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques, *C.R.A.S.*, 246 (1958), 1358-1359.

[4] J. DELSARTE, Théorie des fonctions moyenne-périodiques de deux variables, *Ann. Math.*, 72 (1960), 121-178.

[5] L. EHRENPREIS, Fourier Analysis in several complex variables, *Tracts in Math.*, 17, Wiley-Intersc., (1970).

[6] A. FRIEDMAN, Mean Values and polyharmonic polynomials, *Michigan Math. Journal*, 4 (1957), 67-74.

[7] L. GRUMAN, The area of analytic varieties in $\mathbf{C}^N$, *Math. Scand.*, 41 (1977).

[8] D.I. GUREVICH, Counterexamples to a problem of L. Schwartz, *Funct. Analysis and its applications* (traduit du russe). Russian original, Vol. 9, n° 2, 1975, traduction anglaise, 93-182, 1975, p. 116-120.

[9] S. HANSEN, Uniqueness of the Cauchy problem for convolution operators, *J. reine angew. Math.*, 317 (1980).

[10] E. KREGELIUS-PETERSEN et G.H. MEIRSTERS, Non Liouville Numbers and a theorem of Hörmander, *Journal of Functional Analysis*, 29 (1978), 142-150.

[11] S. LANG, *Introduction to Diophantine Approximations*, Addison-Wesley Publ. Co., 1966.

[12] Y. MEYER, Remarques sur un théorème de J. Delsarte, *Ann. Inst. Fourier*, 26, 2 (1976), 133-152.

[13] Y. MEYER, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland Publ. Co. 1972.

[14] M. OKADA, Une estimation modifiée du type de Bezout pour les applications holomorphes équidimensionnelles entières de $\mathbf{C}^n$, *C.R.A.S.*, Paris, t 291, Série A (7 juillet 1980).

[15] R.D. RICHTMYER, On the structure of some distributions discovered by Meirsters, *Journal of functional Analysis*, 9 (1972), 336-348.

[16] F. RIESZ et B. Sz. NAGY, Leçons d'Analyse fonctionnelle, 6^e^ édition, Gauthier-Villars, Paris 1972.

[17] H. SKODA, Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, *Ann. scient. ec. Norm. sup.*, 4^e^ série, 5, n° 4 (1972), 545-579.

[18] B.A. TAYLOR et J.J. KELLEHER, Finitely generated ideals in rings of analytic fonctions, *Math. Ann.*, 193 (1971), 225-237.

[19] J.L. WALSH, A mean Value theorem for polynomials and Harmonic polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 (1936), 923-930.

[20] A. YGER, Une généralisation d'un théorème de J. Delsarte, *C.R.A.S.*, Paris, 288, série A (1979), 497.

[21] A. YGER, Fonctions définies dans le plan et moyennes en tout point de leurs valeurs aux sommets de deux carrés, *C.R.A.S.*, Paris, 288, série A (1979), 535.

[22] A. YGER, Propriétés de certains systèmes d'équations de convolution dans $\mathbf{R}^2$, *C.R.A.S.*, Paris, 289, série A (1979), 169.

[23] A. YGER, Fonctions moyenne périodiques de deux variables; étude des systèmes d'équations de convolution envisagés par J. Delsarte, Séminaire d'Analyse Harmonique, Orsay, 1976-77.

Manuscrit reçu le 11 décembre 1980.

Alain YGER,
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex.