ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE CASSOU-NOGUÈS

Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 4 (1981), p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 4 (1981), 1-35.

APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES DE L'ÉTUDE DES VALEURS AUX ENTIERS NÉGATIFS DES SÉRIES DE DIRICHLET ASSOCIÉES A UN POLYNÔME

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS (*)

0. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Si P est un polynôme de $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$, nous lui associons, d'une part le polynôme homogène $\mathscr{P}$ de $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r,Y]$ défini par

$$\mathscr{P}(X_1,\ldots,X_r,Y) = P_\alpha(X_1,\ldots,X_r) + YP_{\alpha-1}(X_1,\ldots,X_r) + \ldots + Y^\alpha P_0(X_1,\ldots,X_r)$$

les P_i étant les polynômes homogènes de degré i tels que

$$P(X_1,\ldots,X_r) = P_\alpha(X_1,\ldots,X_r) + P_{\alpha-1}(X_1,\ldots,X_r) + \ldots + P_0(X_1,\ldots,X_r)$$

d'autre part pour tout $a = (a_1,\ldots,a_r) \in \mathbf{C}^r$ le polynôme

$$P_a(X_1,\ldots,X_r) = P(X_1+a_1,\ldots,X_r+a_r).$$

Dans cet article, nous considérons les séries

$$Z(P_a,Q_a,\xi)(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}^r}{}' Q_a(n)P_a(n)^{-s}\xi^n$$

(Σ' signifie que l'on exclut le r-uple $(0,\ldots,0)$ si $P(a_1,\ldots,a_r) = 0$).

(*) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

Cet article a été rédigé en partie pendant mon séjour à l'« Institute for Advanced Study » de Princeton. Je remercie l'Institut pour son hospitalité.

Le polynôme Q est un polynôme quelconque de $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$ (on peut supposer que Q est un monôme), $a = (a_1,\ldots,a_r) \in \mathbf{R}^r$ avec $a_i > 0$ si $i \in \{1,\ldots,r\}$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_r) \in \mathbf{C}^r$ avec $|\xi_i| \leqslant 1$ pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$. Nous faisons l'hypothèse suivante sur le polynôme P :

Hypothèse (*).

i) *Les coefficients de* P *sont de partie réelle positive.*

ii) P *est au moins de degré* 1 *par rapport à chacune des indéterminées.*

iii) *Pour tout* $i \in \{1,\ldots,r\}$ *tel que* $\xi_i = 1$

$$\mathscr{P}(0,\ldots,0,\ X_i,0,\ldots,0) \neq 0.$$

Mellin [23] et Mahler [22] ont montré que ces séries se prolongent à $\mathbf{C}$ en des fonctions méromorphes dont tous les pôles sont sur l'axe réel, en des points d'abscisse rationnelle. Dans [9] nous avons calculé les valeurs aux entiers négatifs et les résidus aux pôles de ces séries. En général ces valeurs n'appartiennent pas au corps K engendré sur $\mathbf{Q}$ par les coefficients des polynômes, a et ξ. Dans [10], on étudie l'espace vectoriel engendré sur ce corps par ces valeurs et on les relie aux périodes de certaines variétés définies à partir de P. Nous voulons ici étudier quelques cas où les valeurs aux entiers négatifs appartiennent à K et où K est un corps de nombres. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de ce corps, on s'intéresse à la divisibilité par $\mathfrak{p}$ de ces valeurs et à l'existence de fonctions $\mathfrak{p}$-adiques qui prennent ces valeurs sur certaines classes d'entiers denses dans $\mathbf{Z}_p$. On sait résoudre ces problèmes dans deux cas.

Cas I. — Lorsque P et Q sont quelconques et $\xi_i \neq 1$ pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$, $Z(P,Q,\xi)(s)$ se prolonge à $\mathbf{C}$ en une fonction holomorphe dont les valeurs aux entiers négatifs sont dans K et on peut définir des fonctions $\mathfrak{p}$-adiques associées. Ceci permet en particulier de retrouver les fonctions L $\mathfrak{p}$-adiques pour les extensions abéliennes d'un corps de nombres totalement réel ([14], [7]).

Cas II. — Supposons que $\xi = (1,\ldots,1,\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_r)$ avec $\xi_j \neq 1$ pour $\ell + 1 \leqslant j \leqslant r$. Définissons sur $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$ l'opérateur D_i par

$$D_i\omega = X_i \frac{\partial\omega}{\partial X_i} - \omega X_i \frac{\partial P}{\partial X_i} \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$$

pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Si nous supposons que P satisfait $(\ast)$ et que $X_1, \ldots, X_\ell Q(X_1,\ldots,X_r) \in \left(\prod_{i=1}^{\ell} D_i\right)\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$, alors $Z(P,Q,\xi)(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe avec un nombre fini de pôles, les valeurs aux entiers négatifs sont dans K et on peut définir des fonctions p-adiques associées. Le cas où P est une forme linéaire est particulièrement intéressant parce que par dérivation il permet de définir le logarithme des fonctions Γ-multiples.

Cette étude contient, comme cas particulier, les fonctions p-adiques arithmétiques connues, à l'exclusion des fonctions L p-adiques des courbes elliptiques (fonctions L p-adiques des corps de nombres, fonction Γ p-adique de Diamond). Mais elle est originale et générale en ce sens qu'elle généralise les résultats connus en utilisant des méthodes nouvelles. L'idée est de mettre les valeurs à interpoler sous une forme telle que l'on fait alors appel à des notions d'analyse p-adique élémentaires, ce qui rend très clair l'existence de fonctions p-adiques associées à des séries de Dirichlet. Donnons une idée de ces méthodes pour définir la fonction zêta p-adique de Kubota et Leopoldt. La fonction zêta de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 .$$

Elle se prolonge à $\mathbf{C}$ en une fonction méromorphe et pour tout entier $k > 0$

$$\zeta(1-k) = -\frac{b_k}{k}$$

où b_k est le k-ième nombre de Bernoulli défini par

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k\,!} .$$

Il est aisé de montrer que

$$(1-p^k)b_k = \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j((a+p\mathrm{X})^k)}{j}$$

$$\lambda_j((a+p\mathrm{X})^k) = -\sum_{\ell=1}^{j} \binom{j-1}{\ell-1}(-1)^{\ell}(a-\ell p)^k .$$

Si $i \equiv 0 \mod p-1$, $(a-\ell p)^i \equiv 1(p)$. La fonction

$$k \longmapsto (a-\ell p)^{k(p-1)}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ que l'on note $(a-\ell p)^{s(p-1)}$.

Pour tout j on peut donc définir des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$

$$\lambda_j(a,s) = -\sum_{\ell=1}^{j} \binom{j-1}{\ell-1}(-1)^{\ell}(a-\ell p)^{s(p-1)}$$

et il est élémentaire de montrer que pour tout $s \in \mathbf{Z}_p$

$$|\lambda_j(a,s)| \leqslant p^{-j}.$$

Alors $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(a,s)}{j}$ définit une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$. On définit alors

$$\zeta_p(1-s) = -\frac{1}{sp}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(a,s)}{j}.$$

On remarque que les fonctions $s \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(a,s)}{j}$ sont des limites uniformes de combinaisons linéaires de fonctions exponentielles. On appelle de telles fonctions des fonctions d'Iwasawa. Toutes les fonctions que nous obtenons sont des fonctions d'Iwasawa ou des dérivées de fonctions d'Iwasawa. On a :

$$b_k = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j(X^k)}{j}$$

où $\lambda_j(X^k) = -\sum_{\ell=1}^{j} \binom{j-1}{\ell-1}(-1)^{\ell}(-\ell)^k$.

Définissons pour $\xi \neq 1$, les nombres $\mathscr{B}_k(\xi)$ par

$$\frac{t}{1-\xi e^t} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{B}_{k-1}(\xi)k\frac{t^k}{k\,!}.$$

Alors on peut montrer que

$$\mathscr{B}_k(\xi) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j(X^k)}{(1-\xi)^j}.$$

Nous allons introduire les définitions suivantes :

DÉFINITIONS. — *Soit* K *un corps (commutatif).*

i) *Soit* $K[X_1,\ldots,X_r]$ *l'anneau des polynômes à coefficients dans* K, *notons* J *la forme* K-*linéaire sur* $K[X_1,\ldots,X_r]$ *définie par*

(1) $$J(X_1^{i_1}\ldots X_r^{i_r}) = b_{i_1}\ldots b_{i_r}.$$

ii) *Soit* $K(T_1,\ldots,T_r)$ *le corps des fractions rationnelles à coefficients dans* K, *notons* $R(.)(T)$ *l'application* K-*linéaire de* $K[X_1,\ldots,X_r]$ *dans* $K(T_1,\ldots,T_r)$ *définie par*

(2) $$R(X_1^{i_1}\ldots X_r^{i_r})(T) = \mathscr{B}_{i_1}(T_1)\ldots\mathscr{B}_{i_r}(T_r).$$

iii) *Soit* $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_r) \in \mathbf{C}^r$. *Soit* $K(\xi)$ *le corps engendré sur* K *par* ξ. *Notons* $A(\xi) = \{i \in \{1,\ldots,r\} | \xi_i = 1\}$. *Notons* φ_ξ *l'application* K-*linéaire de* $K[X_1,\ldots,K_r]$ *dans* $K(\xi)$ *définie par*

(3) $$\varphi_\xi(X_1^{i_1}\ldots X_r^{i_r}) = J\Big(\prod_{k\in A(\xi)} X_k^{i_k}\Big)R\Big(\prod_{\ell\notin A(\xi)} X_\ell^{i_\ell}\Big)(\xi).$$

Remarque. — $R(P)(T)$ est la fraction rationnelle égale à

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^r} P(n)T^n.$$

Le plan de l'article est le suivant :

I. Prolongement analytique.

II. Prolongement analytique p-adique.

III. Étude du cas I. Fonctions L p-adiques.

1. Propriétés arithmétiques des valeurs aux entiers négatifs.
2. Fonctions L p-adiques.

IV. Étude du cas II. Fonctions Γ-multiples p-adiques.

1. Propriétés arithmétiques des valeurs aux entiers négatifs.
2. Rappels — Fonctions Γ-multiples de Barnes.
3. Définition et propriétés des fonctions Γ-multiples p-adiques.
   a) définition,
   b) propriétés fonctionnelles,
   c) propriétés analytiques,
   d) développement asymptotique,
   e) formule de Gross-Koblitz.

V. Relations entre les fonctions L p-adiques et les fonctions Γ-multiples p-adiques.

I. PROLONGEMENT ANALYTIQUE COMPLEXE

Notons α (resp. β) le degré de P (resp. Q) par rapport à l'ensemble des indéterminées.

On supposera pour simplifier les notations que $\xi = (1,\ldots,1,\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_r)$ avec $\xi_i \neq 1$ pour $\ell+1 \leqslant i \leqslant r$. On posera $\ell = 0$ si $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_r)$ avec $\xi_i \neq 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. On peut remarquer que si P satisfait $*$, on peut l'écrire

$$P(X_1,\ldots,X_r) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i X_i^{\alpha} + R(X_1,\ldots,X_r)$$

où les α_i et les coefficients de R sont de partie réelle positive et où le degré de R par rapport à l'ensemble des indéterminées est inférieur ou égal à α.

Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Si* P *satisfait l'hypothèse* $*$, *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$, $k \leqslant \ell + \beta$, *il existe un polynôme* $S_k \in \mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$ *tel que*

$$\lim_{s \to k/\alpha} \left(s - \frac{k}{\alpha}\right)\Gamma(s)Z(P_a,Q_a,\xi)(s) = \varphi_\xi(S_k). \tag{4}$$

Le polynôme S_k est défini par les formules suivantes. Posons :

$$H(x_1,\ldots,x_r,y) = Q(x_1,\ldots,x_r)e^{-\mathscr{P}(x_1,\ldots,x_r,y)}$$

(on suppose que Q est un monôme). Soit S la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^{r+1}$, (où $\mathbf{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs)

$$S(x_1,\ldots,x_r,t) = \int_{(x_1+a_1)t}^{\infty} \int_{(x_\ell+a_\ell)t}^{\infty} H(t_1,\ldots,t_\ell,(x_{\ell+1} + a_{\ell+1})t,\ldots,(x_r+a_r)t)\, dt_1 \ldots dt_\ell. \tag{5}$$

Alors le polynôme S_k est le polynôme associé à la fonction polynôme

$$S_k(x_1,\ldots,x_r) = \frac{1}{(\ell+\beta-k)\,!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell+\beta-k} S(x_1,\ldots,x_r,t)_{t=0}. \tag{6}$$

Ce théorème peut se démontrer en utilisant la formule de Mellin et en cherchant le développement asymptotique de

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^r} \xi^n Q_a(n) e^{-P_a(n)}$$

à l'aide de la formule d'Euler Maclaurin. Les détails se trouvent dans [9].

On peut déduire du théorème 1, deux corollaires importants :

Corollaire 2. — *Si* $\ell = 0$, $Z(P_a,Q_a,\xi)(s)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathbf{C}$ *et pour tout entier* $k \in \mathbf{N}$

$$Z(P_a,Q_a,\xi)(-k) = R(Q_a P_a^k)(\xi). \tag{7}$$

Preuve. — Si $\ell = 0$

$$\begin{aligned} S(x_1,\ldots,x_r,t) &= Q((x_1+a_1)t,\ldots,(x_r+a_r)t)e^{-\mathscr{P}_a((x_1+a_1)t,\ldots,(x_r+a_r)t,t)} \\ &= t^\beta Q_a(x_1,\ldots,x_r)e^{-P_a(x_1,\ldots,x_r)t^\alpha}. \end{aligned}$$

Donc :

$$S_k(x_1,\ldots,x_r) = \frac{1}{(\beta-k)\,!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\beta-k}[t^\beta Q_a(x_1,\ldots,x_r)e^{-P_a(x_1,\ldots,x_r)t^\alpha}]_{t=0}$$

$$S_k(x_1,\ldots,x_r) = Q_a(x_1,\ldots,x_r)P_a^{k'}(x_1,\ldots,x_r) \quad \text{si} \quad -k = k'\alpha$$

et

$$S_k(x_1,\ldots,x_r) = 0 \quad \text{sinon.}$$

La formule (4) montre donc que tous les résidus aux pôles sont nuls et que les valeurs aux entiers négatifs sont données par (7).

Rappelons que pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$, on a défini l'opérateur D_i sur $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$ par

$$D_i\omega = X_i\frac{\partial\omega}{\partial X_i} - \omega X_i\frac{\partial P}{\partial X_i} \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r].$$

Corollaire 3. — *Si* P *satisfait* $*$ *et si*

$$X_1,\ldots,X_\ell\, Q(X_1,\ldots,X_r) = \prod_{i=1}^{\ell} D_i T(X_1,\ldots,X_r),$$

où

$$T(X_1,\ldots,X_r) \in \mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$$

alors $Z(P_a,Q_a,\xi)(.)$ *a* ℓ *pôles, qui se trouvent en* $s = 1, \dots, s = \ell$. *Pour tout entier* $k \geqslant 0$

$$(8) \qquad Z(P_a,Q_a,\xi)(-k) = \frac{k\,!}{(k+\ell)\,!}\,\varphi_\xi(T_a P_a^{\ell+k}).$$

Preuve. –

$$S(x_1,\dots,x_r,t) = \int_{(x_1+a_1)t}^{\infty} \dots \int_{(x_\ell+a_\ell)t}^{\infty} H(t_1,\dots,t_\ell,(x_{\ell+1}+a_{\ell+1})t,\dots,(x_r+a_r)t,t)\,dt_1 \dots dt_\ell$$

où

$$H(t_1,\dots,t_\ell,t_{\ell+1},\dots,t_r,t) = \frac{e^{-\mathscr{P}(t_1,\dots,t_r,t)}}{t_1 \dots t_r}\left(\prod_{i=1}^{\ell} D_i\right)T(t_1,\dots,t_r)$$

(on peut encore supposer que $T(X_1,\dots,X_r)$ est un monôme)

$$D_iT(t_1,\dots,t_r) = t_i\frac{\partial}{\partial t_i}T - Tt_i\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t_i}$$

$$\int_{(x_i+a_i)t}^{\infty} e^{-\mathscr{P}(t_1,\dots,t_r)}D_iT(t_1,\dots,t_r)\frac{dt_i}{t_i}$$
$$= \int_{(x_i+a_i)t}^{\infty} e^{-\mathscr{P}(t_1,\dots,t_r)}\frac{\partial}{\partial t_i}T\,dt_i - \int_{(x_i+a_i)t}^{\infty} T\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t_i}e^{-\mathscr{P}(t_1,\dots,t_r)}\,dt_i$$
$$= \left[Te^{-\mathscr{P}(t_1,\dots,t_r)}\right]_{(x_i+a_i)t}^{\infty}.$$

Donc

$$S(x_1,\dots,x_r,t) = T((x_1+a_1)t,\dots,(x_r+a_r)t)e^{-\mathscr{P}((x_1+a_1)t,\dots,(x_r+a_r)t,t)}$$

$$S_k(x_1,\dots,x_r) = \frac{1}{(\ell+\beta-k)!}T_a(x_1,\dots,x_r)\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell+\beta-k}\left[t^{\ell+\beta-\ell\alpha}e^{-P_a(x_1,\dots,x_r)t^\alpha}\right]_{t=0}$$
$$= \frac{1}{(\ell\alpha-k)!}T_a(x_1,\dots,x_r)\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell\alpha-k}\left[e^{-P_a(x_1,\dots,x_r)t^\alpha}\right]_{t=0}$$

$$S_k(x_1,\dots,x_r) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\ell+k')!}T_a(x_1,\dots,x_r)P_a^{\ell+k'}(x_1,\dots,x_r) & \text{si} \quad -k = k'\alpha \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tous les cas, on a

PROPOSITION 4. — *Le polynôme* S_k, *défini par le théorème* 1, *vérifie*

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^\ell}{\partial X_1 \ldots \partial X_\ell} S_k = QP^{k'} \quad \textit{si} \quad k = -k'\alpha \\ &\frac{\partial^\ell}{\partial X_1 \ldots \partial X_\ell} S_k = 0 \quad \textit{sinon.} \end{aligned}$$

Preuve. —

$$\frac{\partial^\ell}{\partial x_1 \ldots \partial x_\ell} S_k(x_1,\ldots,x_r) = \frac{1}{(\ell+\beta-k)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell+\beta-k}\left[t^{\ell+\beta}Q_a(x_1,\ldots,x_r)e^{-P_a(x_1,\ldots,x_r)t^\alpha}\right]_{t=0}.$$

Les formules (9) sont claires.

Notons K le corps engendré sur **Q** par les coefficients de P_a, Q_a et les ξ_i. On a alors :

PROPOSITION 5. — *Sous les hypothèses des corollaires* 2 *et* 3, *pour tout entier* $k \geqslant 0$

$$Z(P_a,Q_a,\xi)(-k) \in K.$$

Cette propriété n'est pas toujours vraie. Considérons par exemple

$$P(X_1,X_2) = X_1^4 + X_1X_2$$
$$\xi = (1,\xi_2).$$

Alors :

$$Z(P,\xi)(0) = \frac{B_2(\xi)}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + b_1B_1(\xi).$$

Le résultat suivant a été démontré par Shintani [25].

PROPOSITION 6. — *Si* P *est un produit de polynômes homogènes et de degré* 1, *si* $Q = 1$, *pour tout entier* $k \geqslant 0$

$$Z(P_a,Q,\xi)(-k) \in K.$$

Dans le cas général, le polynôme $S_{-k\alpha}$ est la somme d'un polynôme à coefficients dans K obtenu en intégrant terme à terme $Q_a P_a^k$ et d'un polynôme à coefficients en général transcendants sur K, dont chaque monôme a moins de r indéterminés.

Ces coefficients sont étudiés dans [10].

Sous les hypothèses des corollaires 2 et 3, non seulement nous savons que $Z(P_a,Q_a,\xi)(-k) \in K$, mais nous avons une expression simple par rapport à P_a^k de cette valeur. Ceci va nous permettre d'étudier l'arithmétique de ces valeurs.

II. PROLONGEMENT ANALYTIQUE p-ADIQUE

Dans tout le paragraphe II on utilisera les notations suivantes :

Soit $\mathbf{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire et $\mathbf{Z}_p$ son anneau de valuation. Soit $\mathbf{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathfrak{M}_p$ son idéal de valuation. Soit K une extension algébrique finie de Q_p et $\mathcal{O}$ son anneau de valuation. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal de valuation de K, $f_\mathfrak{p}$ son indice d'inertie et π une uniformisante de K. Soit θ l'unique application continue de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{O}$

$$\theta^{f_\mathfrak{p}}(x) = \theta(x) \qquad \text{et} \qquad \theta(x) \equiv x \bmod \mathfrak{p}\,.$$

On pose

$$\langle x \rangle = x/\theta(x) \ \text{ si } \ |x| = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle x \rangle = 0 \ \text{ si } \ |x| < 1\,.$$

Nous ferons l'hypothèse (**) suivante

i) il existe $P_1(X_1,\ldots,X_r) \in \mathcal{O}[X_1,\ldots,X_r]$ tel que

$$|P_1(0,\ldots,0)| = 1 \qquad \text{et} \qquad P(X_1,\ldots,X_r) = P_1(\pi X_1,\ldots,\pi X_r)\,.$$

ii) $Q(X_1,\ldots,X_r) \in K[X_1,\ldots,X_r]$ et $\|Q\| \leqslant 1$.

iii) $\xi = (1,\ldots,1,\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_r) \in \mathbf{C}_p^r$ et $|1-\xi_i| \geqslant 1$ pour $i \geqslant \ell+1$.

Le but du paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Soient* (P,Q,ξ) *satisfaisant les conditions* (**). *Alors, pour toute classe* γ, *de congruence de* $\mathbf{Z}$, *mod* $(p^{f_\mathfrak{p}}-1)$, *il existe une* *fonction d'Iwasawa* $Z_{p,\gamma}(P,Q,\xi)(s)$ *telle que pour tout entier* $k \geqslant 0$, $k \equiv \gamma$ mod $(p^{f_p}-1)$

$$Z_{p,\gamma}(P,Q,\xi)(-k) = \varphi_\xi(P^k Q).$$

Le schéma de la démonstration est le même que celui utilisé pour la fonction zêta p-adique de Kubota et Leopoldt (expliqué dans l'introduction).

La première étape consiste à chercher une expression arithmétique de $\varphi_\xi(P^k Q)$. On a le lemme suivant :

LEMME 8. — *Pour tout* $S \in K[X_1,\ldots,X_r]$

$$\varphi_\xi(S) = \sum_{j_1=1}^{1+\deg S} \cdots \sum_{j_r=1}^{1+\deg S} \frac{\lambda_j(S)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}} \tag{10}$$

où

$$\lambda_j(S) = (-1)^r \sum_{\ell_1=1}^{j_1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{j_r} \binom{j_1-1}{\ell_1-1} \cdots \binom{j_r-1}{\ell_r-1} (-1)^{\Sigma \ell_i} S(-\ell_1,\ldots,-\ell_r).$$

Preuve. — A cause de la linéarité des deux membres, il suffit de montrer la propriété sur les monômes. Par définition

$$\varphi_\xi(X_1^{i_1}\ldots X_r^{i_r}) = J(X_1^{i_1}) \ldots J(X_\ell^{i_\ell}) R(X_{\ell+1}^{i_{\ell+1}})(\xi_{\ell+1}) \ldots R(X_r^{i_r})(\xi_r).$$

Il suffit donc de montrer que

$$J(X^i) = b_i = \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\lambda_j(X^i)}{j} \tag{11}$$

$$R(X^i)(\xi) = \mathscr{B}_i(\xi) = \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\lambda_j(X^i)}{(1-\xi)^j}. \tag{12}$$

Par définition, on a :

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{t^i}{i!}.$$

Donc

$$b_i = \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left(\frac{t}{e^t - 1}\right)_{t=0}.$$

$$\lambda_j(X^i) = -\sum_{\ell=1}^{j} \binom{j-1}{\ell-1} (-1)^\ell (-\ell)^i = \left(\frac{d}{dt}\right)^i [e^{-t}(1-e^{-t})^{j-1}]_{t=0}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i+1} \frac{\lambda_j(X^i)}{j} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left[\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{(1-e^{-t})^j}{j}\right]_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left[\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^j}{j}\right]_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left[\frac{t}{e^t - 1}\right]_{t=0}.\end{aligned}$$

De même, par définition

$$\frac{1}{1-\xi e^t} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathscr{B}_i(\xi) \frac{t^i}{i!}.$$

Donc $\mathscr{B}_i(\xi) = \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left[\frac{1}{\xi e^t - 1}\right]_{t=0}.$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i+1} \frac{\lambda_j(X^i)}{(1-\xi)^j} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left[\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{(1-e^{-t})^j}{(1-\xi)^j}\right]_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left[\frac{e^{t}}{1-e^{-t}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1-e^{-t}}{1-\xi}\right)^j\right]_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^i \left[\frac{1}{1-\xi e^t}\right]_{t=0}.\end{aligned}$$

La deuxième étape consiste à utiliser le fait que sous les hypothèses (**) la fonction

$$n \longmapsto \langle P(-\ell)\rangle^n$$

se prolonge en une fonction continue (exponentielle) sur $\mathbf{Z}_p$. Ceci nous conduit à définir pour toute classe γ de congruence mod $(p^{f_\mathfrak{p}}-1)$ de $\mathbf{Z}$ les fonctions $s \longmapsto \lambda_{j,\gamma}(s)$ de $\mathbf{Z}_p$ dans K, où

$$\lambda_{j,\gamma}(s) = \sum_{\ell_1=1}^{j_1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{j_r} \binom{j_1-1}{\ell_1-1} \cdots \binom{j_r-1}{\ell_r-1} (-1)^{\Sigma\ell_i - r}$$
$$Q(-\ell_1,\ldots,-\ell_r)\theta^\gamma(P(-\ell_1,\ldots,-\ell_r))\langle P(-\ell_1,\ldots,-\ell_r)\rangle^s.$$

La troisième étape donne la majoration uniforme des $\lambda_{j,\gamma}(s)$ qui permet de considérer la série

$$\sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_r=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,\gamma}(s)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

comme une fonction d'Iwasawa.

LEMME 9. — *Pour tout* $j = (j_1, \ldots, j_r) \in \mathbf{N}^{*r}$, *pour tout* γ

$$|\lambda_{j,\gamma}(s)| \leqslant |\pi|^{j_1 + \cdots + j_r - \beta_1 \cdots - \beta_r}$$

où β_i *est le degré de* Q *par rapport à* X_i.

Preuve. — Puisque $s \longmapsto \lambda_{j,\gamma}(s)$ est une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$, il suffit de montrer la propriété pour tout m entier $m \equiv \gamma \bmod (p^{f_\mathfrak{p}} - 1)$

$$\lambda_{j,\gamma}(m) = \sum_{\ell_1=1}^{j_1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{j_r} \binom{j_1 - 1}{\ell_1 - 1} \cdots \binom{j_r - 1}{\ell_r - 1} (-1)^{\Sigma \ell_i - r} \\ Q(-\ell_1, \ldots, -\ell_r) P^m(-\ell_1, \ldots, -\ell_r).$$

Il suffit de montrer la propriété pour les monômes et même pour les monômes à une seule indéterminée. Posons

$$Q(X) = X^\beta$$
$$P_1(X) = \pi X^\alpha$$
$$\lambda_{j,\alpha}(m) = \pi^{\alpha m} \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j-1}{\ell-1} (-1)^{\ell-1} (-\ell)^{\beta+\alpha m}$$
$$\lambda_{j,\alpha}(m) = \pi^{\alpha m} \left(\left(T \frac{d}{dT} \right)^{\beta+\alpha m} (T(1-T)^{j-1}) \right)_{T=1}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \beta + \alpha m < j - 1 \\ \text{entier} & \text{si} \quad \beta + \alpha m \geqslant j - 1 \end{cases}$$

Donc $$|\lambda_{j,\alpha}(m)| \leqslant |\pi|^{j-\beta}.$$

Le lemme est démontré.

Posons pour toute classe γ, de congruence $\bmod (p^{f_\mathfrak{p}} - 1)$

$$Z_{p,\gamma}(P,Q)(-s) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_r=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,\gamma}(s)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} i_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}.$$

La série converge uniformément et définit une fonction d'Iwasawa. De plus, on a pour tout entier $k \geqslant 0$, $k \equiv \gamma \bmod (p^{f_\mathfrak{p}}-1)$

$$Z_{p,\gamma}(P,Q,\xi)(-k) = \varphi_\xi(QP^k).$$

III. ÉTUDE DU CAS I. FONCTIONS L p-ADIQUES

1. Propriétés arithmétiques des valeurs aux entiers négatifs.

Nous reprenons les hypothèses de l'introduction. Nous avons vu, d'après la proposition 5, que dans ce cas

$$Z(P_a,Q_a,\xi) \in K.$$

Nous supposons désormais que K est un corps de nombres. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de K nous notons $|\ \ |_\mathfrak{p}$ la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique de K et

$$\|P\|_\mathfrak{p} = \sup_{x \in \mathbf{Z}_p} |P(x)|_\mathfrak{p}.$$

PROPOSITION 10. — *Soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* K *tel que* $|1-\xi_i|_\mathfrak{p} \geqslant 1$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant r$. *Alors pour tout entier* $k \geqslant 0$

$$|Z(P_a,Q_a,\xi)(-k)|_\mathfrak{p} \leqslant \|P_a^kQ_a\|_\mathfrak{p}.$$

Fixons maintenant un premier $\mathfrak{p}$ de K au-dessus de p, ou ce qui revient au même, un plongement τ de K dans $\mathbf{C}_p$. Nous écrirons si $a \in K$, a pour $\tau(a)$ dans $\mathbf{C}_p$.

Supposons $|1-\xi|_\mathfrak{p} \neq 1$. Définissons

$$Z_0(P_a,Q_a,\xi)(s) = \sum_{\substack{n \in \mathbf{N}^r \\ P_a(n) \not\equiv 0(\mathfrak{p})}} P_a(n)^{-s}Q_a(n)\xi^n,$$

la sommation étant prise sur les r-uples tels que $P_a(n) \not\equiv 0(\mathfrak{p})$.

Soit $n = (n_1,\dots,n_r) \in \mathbf{N}^r$. Soit $n' = (n'_1,\dots,n'_r) \in \mathbf{N}^r$ tel que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant r$, $n'_i \equiv n_i(p)$ et $1 \leqslant n'_i \leqslant p$. Alors $\mathrm{P}_a(n) \equiv 0(\mathfrak{p}) \Leftrightarrow \mathrm{P}_a(n') \equiv 0(\mathfrak{p})$.

Considérons l'ensemble fini des $n' = (n'_1,\dots,n'_r) \in \{1,\dots,p\}^r$ tels que $\mathrm{P}_a(n') \not\equiv 0(\mathfrak{p})$. Notons-le $\mathcal{N}$. Alors

$$\mathrm{Z}_0(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(s) = \sum_{n' \in \mathcal{N}} \sum_{n \in \mathbf{N}^r} \mathrm{P}_a(n'+np)^s \mathrm{Q}_a(n'+np)\xi^{n'+np}.$$

Donc $\mathrm{Z}_0(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(s)$ s'écrit comme une somme finie de $\mathrm{Z}(\mathrm{P},\mathrm{Q},\xi)(s)$ telles que $\|\mathrm{P}\|_{\mathfrak{p}} = 1$, et il existe P_1 tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_r) = \mathrm{P}_1(p\mathrm{X}_1,\dots,p\mathrm{X}_r)$.

On peut donc appliquer les paragraphes précédents à $\mathrm{Z}_0(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(\,.\,)$. On en déduit

THÉORÈME 11. — *Pour toute classe γ, de congruence $mod\,(p^{f_{\mathfrak{p}}}-1)$, il existe une fonction d'Iwasawa $\mathrm{Z}_{\mathfrak{p},\gamma}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(s)$ telle que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $k \equiv \gamma\, mod\,(p^{f_{\mathfrak{p}}}-1)$*

$$\mathrm{Z}_{\mathfrak{p},\gamma}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(-k) = \mathrm{Z}_0(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(-k).$$

Preuve. — Il suffit de rappeler que si $\ell = 0$

$$\mathrm{Z}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(-k) = \mathrm{R}(\mathrm{Q}_a\mathrm{P}_a^k)(\xi)$$

et d'appliquer le théorème 7.

2. Définition des fonctions L p-adiques.

Soit K un corps de nombres totalement réel tel que $[\mathrm{K}:\mathbf{Q}] = r$ et M une extension abélienne de K. Soit χ un caractère du groupe de Galois de M sur K. On peut supposer que le noyau de χ est trivial. Notons $\mathfrak{f}$ le conducteur de χ. Soit p un nombre premier de $\mathbf{Z}$, notons $\mathfrak{f}_1$ le p.p.c.m. de $\mathfrak{f}$ et (p). On définit

$$\mathrm{L}_S(\chi,s) = \mathrm{L}(\chi,s)\prod_{\mathfrak{p}|p}(1-\chi(\mathfrak{p})\mathrm{N}\mathfrak{p}^{-s}).$$

En utilisant les résultats de Shintani [25] on peut montrer que $\mathrm{L}_S(\chi,s)$ peut s'écrire à l'aide d'un nombre fini de séries de Dirichlet associées à un polynôme. En effet, il existe un nombre fini de polynômes $\mathrm{L}_{j,x}$ tels que

$$\mathrm{L}_{j,x}(\mathrm{X}) = v_{j,1}(\mathrm{X}_1+x_1) + \dots + v_{j,r(j)}(\mathrm{X}_{r(j)}+x_{r(j)})$$

où

i) $r(j) \leqslant r$

ii) $v_{j,i} \in \mathfrak{f}_1$ pour tout j et tout i

iii) $x = (x_1, \ldots, x_{r(j)}) \in \mathbf{Q}^{r(j)}$, $0 < x_i < 1$ pour tout i

iv) $\sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{ji} \equiv 1 \mod \mathfrak{f}_1$

et v)

$$(14) \qquad L_S(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi(\mathfrak{a}^{-1}) N\mathfrak{a}^s \sum_{L_{j,x}} Z(NL_{j,x}, 1)(s)$$

où

$$NL_{j,x}(X) = \prod_{i=1}^{r} (v_{j,1}^{(i)}(X_1 + x_1) + \ldots + v_{j,r(j)}^{(i)}(X_{r(j)} + x_{r(j)})).$$

(Si $b \in K$, $(b^{(1)}, \ldots, b^{(r)})$ désignent les r conjugués de b.)

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal entier de K, vérifiant les hypothèses :

i) $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) = 1$, $(\mathfrak{c}, (v_{ij})) = 1$

ii) $\mathcal{O}_K/\mathfrak{c} \simeq \mathbf{Z}/c\mathbf{Z}$ où $(c) = \mathfrak{c} \cap \mathbf{Z}$.

On peut alors montrer qu'il existe $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ où les ξ_i sont des racines primitives c-ièmes de l'unité telles que

$$(15) \quad L_S(\chi, s) = \frac{1}{(\chi(\mathfrak{c}) N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)} \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}^{-1}) N\mathfrak{a}^s \sum_{L_{j,x}} \sum_{\mu=1}^{c-1} \xi_x^{\mu} Z(NL_{j,x}, \xi_j^{\mu})(s).$$

Soit τ un plongement de K dans $\mathbf{C}_p$. Le polynôme $NL_{j,x}(X)$ et ξ vérifient les hypothèses du théorème 7, on peut donc énoncer [7].

THÉORÈME 12. — *Il existe une fonction* $L_p(\chi, s)$ *définie sur* $\mathbf{Z}_p$ *telle que*

i) *pour tout entier positif* m, $m \geqslant 1$

$$L_p(\chi, 1-m) = L_S(\chi\theta^{-m}, 1-m)$$

ii) *la fonction*

$$s \longmapsto (\chi(\mathfrak{c}) \langle N\mathfrak{c} \rangle^{1-s} - 1) L_p(\chi, s)$$

est une fonction d'Iwasawa.

On pose :

$$(16)\quad L_p(\chi,s) = \frac{1}{(\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle^{1-s}-1)} \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1})\langle N\mathfrak{a}\rangle^s \sum_{L_{j,x}} \sum_{\mu=1}^{c-1} \xi_x^{\mu} Z_p(NL_{j,x},\xi_j^{\mu})(s).$$

On peut montrer aisément les conjectures de Coates [13] en utilisant les propriétés arithmétiques de $Z(NL_{j,x},\xi_j^{\mu})(.)$ [7].

IV. ÉTUDE DU CAS II FONCTIONS Γ-MULTIPLES p-ADIQUES

1. Propriétés arithmétiques des valeurs aux entiers négatifs.

Nous supposons ici que

$$X_1 \ldots X_\ell Q(X_1,\ldots,X_r) = \left(\prod_{i=1}^{\ell} D_i\right) T(X_1,\ldots,X_r).$$

Nous avons montré que dans ce cas, $Z(P_a,Q_a,\xi)(s)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe ayant un nombre fini de pôles et pour tout entier $k \geqslant 0$

$$Z(P_a,Q_a,\xi)(-k) = \frac{k!}{(k+\ell)!}\,\varphi_\xi(T_a P_a^{k+\ell}).$$

Supposons *désormais* que K est un corps de nombres. Soit p un nombre premier de $\mathbf{Z}$. Choisissons un plongement τ de K dans $\mathbf{C}_p$ ou ce qui revient au même un idéal premier $\mathfrak{p}$ de K au-dessus de p. Supposons que P_a, T_a, ξ vérifient l'hypothèse (**). Alors d'après le théorème 7 :

Pour toute classe γ, de congruence $\bmod\, p^{f_\mathfrak{p}}-1$, il existe une fonction d'Iwasawa $Z^1_{\mathfrak{p},\gamma}(P_a,Q_a,\xi)(.)$ telle que pour tout entier $k \geqslant 0$, $k \equiv \gamma \bmod p^{f_\mathfrak{p}}-1$

$$Z^1_{p,\gamma}(P_a,Q_a,\xi)(-k) = \varphi_\xi(T_a P_a^{\ell} . P_a^k).$$

Cette fonction est définie par

$$(18)\qquad Z^1_{\mathrm{p},\gamma}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(-s) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_r=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,\gamma}(s)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

et

$$\lambda_{j,\gamma}(s) = (-1)^r \sum_{n=1}^{j} \binom{j-1}{n-1} (-1)^{|n|} \mathrm{T}_a(-n) \mathrm{P}_a^{\ell}(-n) \theta^{\gamma}(\mathrm{P}(-n)) \langle \mathrm{P}(-n) \rangle^s$$

en posant

$$\binom{j-1}{n-1} = \binom{j_1-1}{n_1-1} \cdots \binom{j_r-1}{n_r-1}$$

et

$$|n| = n_1 + \ldots + n_r .$$

Définissons maintenant

$$(19)\qquad Z_{\mathrm{p},\gamma}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(s) = \frac{Z^1_{\mathrm{p},\gamma}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(s)}{(-s+1)\ldots(-s+\ell)} .$$

On a le théorème :

THÉORÈME 13. — *Pour toute classe* γ, *de congruence* $mod\,(p^{f_\mathrm{p}}-1)$ *il existe une fonction méromorphe sur* $\mathbf{Z}_p$, *ayant ses pôles en* $s = 1, \ldots, s = \ell$, *telle que pour tout entier* $k \geqslant 0$, $k \equiv \gamma\, mod\,(p^{f_\mathrm{p}}-1)$

$$Z_{\mathrm{p},\gamma}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(-k) = Z(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(-k) .$$

Nous écrirons $Z_{\mathrm{p}}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(.)$ pour $Z_{\mathrm{p},0}(\mathrm{P}_a,\mathrm{Q}_a,\xi)(.)$. Notons que le corollaire 3 et le théorème 14 répondent à la question posée à la fin de [6].

Nous allons maintenant utiliser le théorème 14 pour définir des fonctions Γ-multiples p-adiques. Nous rappelons tout d'abord la définition et quelques propriétés des fonctions Γ-multiples complexes de Barnes.

2. **Rappels** ([2], [3]).

Soit $a \in \mathbf{C}$ et $(v_1,\ldots,v_r) \in \mathbf{C}^r$. On suppose que $\mathrm{Re}(a) > 0$ *et* $\mathrm{Re}(v_i) > 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$. On notera

$$\mathrm{L}_{a,\mathrm{v}}(\mathrm{X}) = a + v_1 \mathrm{X}_1 + \ldots + v_r \mathrm{X}_r$$

et

$$Z(L_{a,V})(s) = \sum_{n \in \mathbf{N}^r} L_{a,V}(n)^{-s}.$$

Barnes [2] a défini $\rho_r(V)$ et $\Gamma_r(a, V)$ par les formules

$$\text{(20)} \qquad \operatorname{Log} \rho_r(V) = -\lim_{a \to 0} \left\{ \frac{d}{ds} Z(L_{a,V})(s)|_{s=0} + \operatorname{Log} a \right\}$$

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{Log} \frac{\Gamma_r(a, V)}{\rho_r(V)} = \frac{d}{ds} Z(L_{a,V})(s)|_{s=0}\,.$$

On a les propriétés suivantes :

a) Pour tout entier $r > 1$,

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{Log} \frac{\Gamma_r(a+v_i, V)}{\rho_r(V)} - \operatorname{Log} \frac{\Gamma_r(a,V)}{\rho_r(V)} = \operatorname{Log} \frac{\Gamma_{r-1}(a, \hat{V}_i)}{\rho_{r-1}(\hat{V}_i)}$$

où $\hat{V}_i = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r)$

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{Log} \frac{\Gamma_1(a+V,V)}{\rho_1(V)} - \operatorname{Log} \frac{\Gamma_1(a,V)}{\rho_1(V)} = \operatorname{Log} a\,.$$

(On peut remarquer que l'on a

$$\operatorname{Log} \frac{\Gamma_1(a,V)}{\rho_1(V)} = \operatorname{Log} \frac{\Gamma\left(\dfrac{a}{V}\right)}{\sqrt{2\pi}} + \left(\frac{a}{V} - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} V\,.)$$

b) Pour tout entier $m > 0$,

$$\text{(24)} \quad \operatorname{Log} \frac{\Gamma_r(ma,V)}{\rho_r(V)} = (-1)^{r-1} Z(L_{ma,V})(0) \operatorname{Log} m + \sum_{p_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{p_r=0}^{m-1} \operatorname{Log} \frac{\Gamma_r\left(a + \dfrac{p_1 v_1}{m} + \ldots + \dfrac{p_r v_r}{m}, V\right)}{\rho_r(V)}.$$

c) Pour tout entier $q > 1$

$$\text{(25)} \qquad \frac{d^q}{da^q} \operatorname{Log} \frac{\Gamma_r(a,V)}{\rho_r(V)} = (-1)^{q-1}(q-1)!\, Z(L_{a,V})(q)\,.$$

Remarques. –

i) On peut exprimer les dérivées en zéro des fonctions L de Dirichlet à l'aide de la fonction $\operatorname{Log}\Gamma$: c'est la formule de Lerch. Shintani [26] a généralisé ce résultat dans le cas d'un corps de nombres en utilisant les fonctions Γ-multiples.

ii) On peut généraliser de deux façons les résultats de Barnes :

– d'une part, en considérant les dérivées à tout ordre de $Z(L_{a,V})(s)$ pour $s = 0$. On obtient des fonctions qui vérifient des propriétés analogues : par exemple (22) reste inchangée, dans (23), on remplace $\operatorname{Log} a$ par $(\operatorname{Log} a)^i$ où i est l'ordre de dérivation...

– d'autre part, en considérant les dérivées pour tous les entiers négatifs. On aurait encore des propriétés semblables : (22) inchangée, dans (23) on remplace $\operatorname{Log} a$ par $a^i \operatorname{Log} a$, si l'on considère la dérivée en $-i, \ldots$.

3. Définition et propriétés des fonctions Γ-multiples p-adiques.

a) Définition.

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de K et $\mathfrak{p}$ son idéal de valuation. Soient $(a, v_1, \ldots, v_r) \in \mathcal{O}^{r+1}$ tels que :

i) $a \notin \mathfrak{p}$

ii) $v_i \in \mathfrak{p}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Posons

$$L_{a,V}(X_1, \ldots, X_r) = a + v_1 X_1 + \ldots + v_r X_r$$

$L_{a,V}$ vérifie les hypothèses ** et donc pour tout $\xi \in \mathbf{C}_p^r$ tel que $|1 - \xi_i| \geqslant 1$ si $\xi_i \neq 1$, on peut définir une fonction méromorphe

$$Z_p(L_{a,V}, \xi)(-s) = \frac{1}{(-s+1)\ldots(-s+\ell)} \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} v_\alpha} \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_r=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(s)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

où

$$\lambda_j(s) = (-1)^r \sum_{n=1}^{j} \binom{j-1}{n-1} (-1)^{|n|} (L_{a,V}(-n))^{\ell} \langle L_{a,V}(-n) \rangle^s .$$

Définissons

$$G_{p,r}(a,V,\xi) = \frac{d}{ds} Z_p(L_{a,V},\xi)(s)|_{s=0}.$$

b) Propriétés fonctionnelles

PROPOSITION 16. — i) *Pour tout entier* $r > 1$

$$\xi_j G_{p,r}(a+v_j,V,\xi) - G_{p,r}(a,V,\xi) = G_{p,r-1}(a,\hat{V}_j,\hat{\xi}_j) \tag{27}$$

où $\hat{V}_j = (v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_r)$, $\hat{\xi}_j = (\xi_1,\ldots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\ldots,\xi_r)$.

ii) *Pour* $r = 1$, *pour tout* $i \geqslant 1$,

$$\xi G_{p,1}(a+v,v,\xi) - G_{p,1}(a,v,\xi) = \operatorname{Log}\langle a\rangle. \tag{28}$$

Preuve. — Nous allons montrer, que pour tout $s \in \mathbf{Z}_p$, si $r > 1$

$$\xi_j Z_p(L_{a+v_j,V},\xi)(s) - Z_p(L_{a,V},\xi)(s) = Z_p(L_{a,\hat{V}_j},\hat{\xi}_j)(s) \tag{29}$$

si $r = 1$

$$\xi Z_p(L_{a+v,v},\xi)(s) - Z_p(L_{a,v},\xi)(s) = \langle a\rangle^s. \tag{30}$$

Pour montrer (30) et (31) pour tout $s \in \mathbf{Z}_p$, il suffit de montrer ces formules pour tout entier $k' \leqslant 0$, $k' \equiv 0\ (p^{f_p}-1)$. Soit $k = -k'$

$$Z_p(L_{a,V},\xi)(-k) = \frac{1}{(k+1)\ldots(k+\ell)}\,\frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} v_\alpha} \sum_{j_1=1}\cdots\sum_{j_r=1} \frac{\lambda_j(a,V,k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

$$\lambda_j(a,V,k) = (-1)^r \sum_{n=1}^{j} \binom{j-1}{n-1} (-1)^{|n|} L_{a,V}(-n)^{k+\ell}.$$

Donc :

$$\sum_{j_1=1}\cdots\sum_{j_r=1} \frac{\lambda_j(a,V,k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+\ell} \left[e^{at} \prod_{\alpha=1}^{\ell} \frac{v_\alpha t}{e^{v_\alpha t}-1} \prod_{\beta=\ell+1}^{r} \frac{1}{1-\xi_\beta e^{v_\beta t}} \right]_{t=0}.$$

Supposons $r > 1,\ 1 \leqslant \alpha_0 \leqslant \ell$

$$\sum_{j_1=1} \cdots \sum_{j_r=1} \frac{\lambda_j(a+v_{\alpha_0},\mathrm{V},k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}} - \sum_{j_1=1} \cdots \sum_{j_r=1} \frac{\lambda_j(a,\mathrm{V},k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+\ell} \left[v_{\alpha_0} t \,.\, e^{at} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \alpha_0}}^{\ell} \frac{v_\alpha t}{e^{v_\alpha t} - 1} \prod_{\beta=\ell+1} \frac{1}{1 - \xi_\beta e^{v_\beta t}} \right]_{t=0}$$

$$= (k+\ell) v_{\alpha_0} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+\ell-1} \left[e^{at} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \alpha_0}}^{\ell} \frac{v_\alpha t}{e^{v_\alpha t} - 1} \prod_{\beta=\ell+1}^{r} \frac{1}{1 - \xi_\beta e^{v_\beta t}} \right]_{t=0}$$

Si $\ell + 1 \leqslant \beta_0 \leqslant r$

$$\xi_{\beta_0} \sum_{j_1=1} \cdots \sum_{j_r=1} \frac{\lambda_j(a+v_{\beta_0},\mathrm{V},k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}} - \sum_{j_1=1} \cdots \sum_{j_r=1} \frac{\lambda_j(a,\mathrm{V},k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

$$= -\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+\ell} \left[e^{at} \prod_{\alpha=1}^{\ell} \frac{v_\alpha t}{e^{v_\alpha t} - 1} \prod_{\substack{\beta=\ell+1 \\ \beta \neq \beta_0}}^{\ell} \frac{1}{1 - \xi_\beta e^{v_\beta t}} \right]_{t=0} .$$

Si $r = 1$

$$\sum_{j=1} \frac{\lambda_j(a+v,v,k)}{j} - \sum_{j=1} \frac{\lambda_j(a,v,k)}{j} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1} [vt \,.\, e^{at}]_{t=0} = (k+1) v a^k$$

$$\xi \sum_{j=1} \frac{\lambda_j(a+v,v,k)}{(1-\xi)^j} - \sum_{j=1} \frac{\lambda_j(a,v,k)}{(1-\xi)^j} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k} [e^{at}]_{t=0} = a^k .$$

Remarquons que les démonstrations se font sur des séries formelles en t qui donnent les mêmes résultats pour les valeurs aux entiers négatifs des séries complexes.

PROPOSITION 17. — *Pour tout* $r \geqslant 1$, *pour tout* $m \geqslant 1$, *tel que* p *ne divise pas* m

$$(31) \quad \sum_{p_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{p_r=0}^{m-1} \mathrm{G}_{p,r}\left(a + \frac{p_1 v_1}{m} + \ldots + \frac{p_r v_r}{m}, \mathrm{V}, 1 \right)$$
$$= \mathrm{Z}_p(\mathrm{L}_{ma,\mathrm{V}},1)(0) \,.\, \mathrm{Log} \langle m \rangle + \mathrm{G}_{p,r}(ma,\mathrm{V},1) .$$

Preuve. – On va montrer que pour tout $s \in \mathbf{Z}_p$

$$(32) \quad \sum_{p_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{p_r=0}^{m-1} Z_p(L_{a+\frac{p_1 v_1}{m}+\ldots+\frac{p_r v_r}{m},V},1)(s) = \langle m \rangle^s Z_p(L_{am,V},1)(s).$$

Soit k un entier positif ou nul, $k \equiv 0 \bmod (p^{f_p}-1)$

$$\sum_{p_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{p_r=0}^{m-1} \sum_{j_1 \geqslant 1} \cdots \sum_{j_r \geqslant 1} \frac{\lambda_j\left(a+\frac{p_1 v_1}{m}+\ldots+\frac{p_r v_r}{m},V,k\right)}{j_1 \cdots j_r}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+r}\left[\sum_{p_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{p_r=0}^{m-1} e^{\frac{p_1 v_1 t}{m}} \cdots e^{\frac{p_r v_r t}{m}} . e^{at} \prod_{i=1}^{r} \frac{v_i t}{e^{v_i t}-1}\right]_{t=0}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+r}\left[e^{at} \prod_{i=1}^{r} \frac{v_i t}{e^{\frac{v_i}{m}t}-1}\right]_{t=0}$$

$$= m^{-k}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+r}\left[e^{mat} \prod_{i=1}^{r} \frac{v_i t}{e^{v_i t}-1}\right]_{t=0}.$$

Les proprétés fonctionnelles que nous venons d'étudier n'utilisent pas d'analyse p-adique, par contre maintenant nous allons nous intéresser aux propriétés analytiques de $G_{p,r}(a,V,\xi)$.

c) Propriétés analytiques.

PROPOSITION 18. –

$$(33) \qquad G_{p,r}(a,V,\xi) = \frac{1}{\ell! \prod_{\alpha=1}^{\ell} v_\alpha} \sum_{j \in \mathbf{N}^{*r}} \frac{\lambda_j}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

où

$$\lambda_j = \sum_{n_1=1}^{j_1} \cdots \sum_{n_r=1}^{j_r} \binom{j_1-1}{n_1-1} \cdots \binom{j_r-1}{n_r-1} (-1)^{\Sigma n_i - r} L_{a,V}(-n)^{\ell} \left[\operatorname{Log} \langle L_{a,V}(-n) \rangle - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{i}\right].$$

Preuve. – Il suffit de vérifier que cette série converge.

On en déduit :

PROPOSITION 19. – *La fonction* $a \longmapsto G(a,V,\xi)$ *de* $\mathcal{O}^{\times}$ *dans* K *est localement analytique.*

PROPOSITION 20. — *Pour tout* $r \geqslant 1$, *pour tout* $q > \ell$

$$\text{(34)} \qquad \frac{d^q}{da^q} G_{p,r}(a,V,\xi) = (-1)^q(q-1)!Z_{p,-q}(L_{a,V},\xi)(q).$$

Preuve. — Il suffit d'utiliser le fait que

$$\frac{d^q}{da^q}\lambda_j = \sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}(-1)^{|n|-r}\sum_{i=0}^{\ell}\binom{q}{i}\frac{\ell!(q-i-1)!(-1)^{q-i}}{(\ell-i)!}\frac{\theta(L_{a,V}(-n))}{L_{a,V}(\ell)^{q-\ell}}.$$

d) Développement asymptotique.

PROPOSITION 21. — *Pour tout* $r \geqslant 1$

$$\text{(35)} \quad G_{p,r}(a,V,\xi) = \left[\operatorname{Log}\langle a\rangle - \sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{i}\right]Z(L_{a,V},\xi)(0)$$

$$+a^{\ell}\sum_{q=0}^{\ell}\binom{\ell}{q}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^q(i+q)!}{ia^{i+q}}\sum_{t_1+\dots+t_r=i+q}\prod_{\alpha=1}^{\ell}\frac{Z(v_\alpha X,1)(1-t_\alpha)}{(t_\alpha-1)!}\prod_{\beta=\ell+1}^{r}\frac{Z(v_\beta X,\xi_\beta)(-t_\beta)}{t_\beta!}.$$

Preuve. —

$$G_{p,r}(a,V,\xi) = \frac{1}{\ell!\prod_{\alpha=1}^{\ell}v_\alpha}\sum_{j\in\mathbf{N}^{*r}}\frac{\lambda_j}{\prod_{\alpha=1}^{\ell}j_\alpha\prod_{\beta=\ell+1}^{r}(1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

où

$$\lambda_j = \sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}(-1)^{|n|-r}L_{a,V}(-n)^{\ell}\left[\operatorname{Log}\langle L_{a,V}(-n)\rangle - \sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{i}\right].$$

Nous écrivons

$$\operatorname{Log}\langle L_{a,V}(-n)\rangle = \operatorname{Log}\langle a-v_1n_1-v_2n_2-\dots-v_rn_r\rangle$$

$$= \operatorname{Log}\langle a\rangle - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(v_1n_1+\dots+v_rn_r)^i}{ia^i}$$

$$\lambda_j = \sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}(-1)^{|n|-r}\left[L_{a,V}(-n)^{\ell}\left(\operatorname{Log} a - \sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{i}\right)\right.$$

$$\left. + a^{\ell}\sum_{q=0}^{\ell}\binom{\ell}{q}(-1)^q\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{ia^{i+q}}(v_1n_1+\dots+v_rn_r)^{i+q}\right].$$

Rappelons que

$$Z(L_{a,V},\xi)(0) = \frac{1}{l\,!}\,\frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} v_\alpha}\sum_{j\in \mathbf{N}^{*r}}\frac{\lambda_j(0)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r}(1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

où

$$\lambda_j(0) = \sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}(-1)^{|n|-r}L_{a,V}(-n)^{\ell}.$$

De plus :

$$\frac{1}{v}\sum_{j\geqslant 1}\frac{\lambda_j((vX)^t)}{j} = tZ(vX,1)(1-t)$$

$$\sum_{j\geqslant 1}\frac{\lambda_j((vX)^t)}{(1-\xi)^j} = Z(vX,\xi)(-t).$$

Donc

$$\begin{aligned}G_{p,r}(a,V,\xi) = \left[\operatorname{Log}\langle a\rangle - \sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{i}\right]Z(L_{a,V},\xi)(0)\\ + a^{\ell}\sum_{q=0}^{\ell}\binom{\ell}{q}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^q(i+q)!}{ia^{i+q}}\\ \sum_{t_1+\ldots+t_r=i+q}\prod_{\alpha=1}^{\ell}\frac{Z(v_\alpha X,1)(1-t_\alpha)}{(t_\alpha-1)!}\prod_{\beta=\ell+1}^{r}\frac{Z(v_\beta X,\xi_\beta)(-t_\beta)}{t_\beta!}.\end{aligned}$$

e) Formule de Gross-Koblitz.

Soit $q = p^f$ et soit d un nombre entier qui divise $p-1$. Soit $\pi\in\mathbf{C}_p$ tel que $\pi^{p-1} = -p$. Posons $\theta_f(x) = \exp\pi(x-x^q)$. On définit pour $0\leqslant j<d$

$$-g_f\left(\frac{j}{d}(q-1)\right) = \sum_{x^{q-1}=1} x^{-(j/d)(q-1)}\theta_f(x) \tag{36}$$

la sommation étant prise sur les racines $(q-1)$-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}_p$.

Si y est un nombre réel, alors $\ll y\gg$ est défini par $y\equiv\ll y\gg \bmod \mathbf{Z}$ $0\leqslant\ \ll y\gg\ <1$. Posons

$$\frac{j}{d}(p^f-1) = c_0 + c_1p + \ldots + c_{f-1}p^{f-1}$$

$$0\leqslant c_i<p,\qquad i=0,1,\ldots,f-1.$$

Alors la formule de Gross-Koblitz ([18], [19], [4]) s'écrit

$$(37) \qquad g_f\left(\frac{j}{d}(p^f-1)\right) = \pi^{c_0+c_1+\dots+c_{f-1}} \prod_{i=0}^{f-1} \Gamma_p\left(\ll p^i \frac{j}{d} \gg\right)$$

où Γ_p est la fonction Γ p-adique de Morita [24]. Cette fonction est définie sur $\mathbf{Z}_p$ par

$$(38) \qquad \Gamma_p(s) = \lim_{k \to s} \Gamma_p(k)$$

où $\Gamma_p(k) = (-1)^k \prod_{\substack{j<k \\ p \nmid j}} j$.

Elle satisfait

$$(39) \qquad \frac{\Gamma_p(x+1)}{\Gamma_p(x)} = \begin{cases} -x & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p^* \\ 0 & \text{si } x \in p\mathbf{Z}_p \end{cases}$$

$$\Gamma_p(0) = 1 .$$

Nous allons tout d'abord montrer le lien entre nos fonctions $G_{p,1}$ et Γ_p.

PROPOSITION 22. — *Pour tout* $a \in \mathbf{Z}_p$

$$(40) \qquad \operatorname{Log} \Gamma_p(a) = \sum_{\substack{i=0 \\ i+a \in \mathbf{Z}_p^*}}^{p-1} G_{p,1}(i+a,p,1) .$$

Preuve. — On montre cette égalité pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

Si $n = 0$

$$\operatorname{Log} \Gamma_p(0) = 0 .$$

Nous allons calculer

$$\sum_{i=1}^{p-1} G_{p,1}(i+a,p,1) .$$

Pour montrer que ceci est nul, nous montrons que

$$Z_p(L_{a,p},1)(s) + Z_p(L_{p-a,p},1)(s) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad s \in \mathbf{Z}_p$$

ce qui implique

$$(41) \qquad G_{p,1}(a,p,1) + G_{p,1}(p-a,p,1) = 0 .$$

Pour tout $k \equiv 0 \bmod (p-1)$

$$Z_p(L_{a,p},1)(-k) + Z_p(L_{p-a,p},1)(-k) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+1}\left[\frac{e^{at}t}{e^{pt}-1} + \frac{e^{-at}(-t)}{e^{-pt}-1}\right]_{t=0}$$

Si $p|n$

$$\operatorname{Log}\Gamma_p(n+1) = \operatorname{Log}\Gamma_p(n)$$

$$\sum_{i=0}^{p-2} Z_p(L_{i+n+1,p},1)(s) - \sum_{i=1}^{p-1} Z_p(L_{i+n,p},1)(s) = 0.$$

Si $p \nmid n$

$$\operatorname{Log}\Gamma_p(n+1) = \operatorname{Log}\Gamma_p(n) + \operatorname{Log} n$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ (i+n+1)\in \mathbf{Z}_p^*}}^{p-1} Z_p(L_{i+n+1,p},1)(s) - \sum_{\substack{i=0 \\ (i+n)\in \mathbf{Z}_p^*}}^{p-1} Z_p(L_{i+n,p},1)(s)$$

$$= Z_p(L_{n+p,p},1)(s) - Z_p(L_{n,p},1)(s) = \langle n\rangle^s.$$

Remarque. — $G_{p,1}(x,p,1)$ est en fait la fonction $G_p\left(\frac{x}{p}\right)$ de Diamond ([15], [19]).

La formule de Gross-Koblitz implique

$$\operatorname{Log}\left\langle g_f\left(\frac{j}{d}(p^f-1)\right)\right\rangle = \sum_{i=0}^{f-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k+\ll p^i\frac{j}{d}\gg\, \in \mathbf{Z}_p^*}}^{p-1} G_{p,1}\left(k+\ll p^i\frac{j}{d}\gg, p, 1\right).$$

On peut écrire ceci sous la forme :

Proposition 23. — *La fonction définie sur* $\mathbf{Z}_p$

$$s \longmapsto \sum_{i=0}^{f-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k+\ll p^i\frac{j}{d}\gg\, \in \mathbf{Z}_p^*}}^{p-1} Z_p(L_{k+\ll p^i\frac{j}{d}\gg,p},1)(s) - \left\langle g_f\left(\frac{j}{d}(p^f-1)\right)\right\rangle^s$$

a une dérivée nulle pour $s = 0$.

Il serait intéressant de montrer directement cette formule. On peut remarquer que cette formule implique la formule de Gross-Koblitz lorsque l'on connaît le théorème de Stickelberger. C'est à l'aide de cette formule que Ferrero-Greenberg ont montré que $L'_p(\chi,0) \neq 0$, pour les fonctions L p-adiques de Kubota et Leopoldt [20], en utilisant l'expression de $L'_p(\chi,0)$ en fonction de $\operatorname{Log}\Gamma_p$. Nous allons dans le paragraphe suivant généraliser cette expression pour toutes les fonctions L p-adiques des corps de nombres totalement réels.

V. RELATION ENTRE LES FONCTIONS L p-ADIQUES ET LES FONCTIONS Γ-MULTIPLES p-ADIQUES

On a défini

$$L_p(\chi,s) = \frac{1}{(\chi(\mathfrak{c})N(\mathfrak{c})^{1-s}-1)} \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1})\langle N\mathfrak{a}\rangle^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} Z_p(NL_{j,x},\xi_j^{\mu})(s)$$

où

$$L_{j,x}^{(i)}(X) = x^{(i)} + v_{j,1}^{(i)}X_1 + \dots + v_{j,r(j)}^{(i)}X_{r(j)}$$

et

$$NL_{j,x}(X) = \prod_{i=1}^{n} L_{j,x}^{(i)}(X).$$

Nous utiliserons les propriétés suivantes :

LEMME 24. — *Pour tout* ξ *tel que* $\ell = 0$

$$\frac{d}{ds} Z_p\left(\prod_{j=1}^{m} L_{a_j,V_j},\xi\right)(s)|_{s=0} = \sum_{j=1}^{m} G_{p,r}(a_j,V_j,\xi). \tag{41}$$

Preuve. — Par définition

$$Z_p\left(\prod_{j=1}^{m} L_{a_j,V_j},\xi\right)(s) = \sum_{i\in N^{*r}} \frac{\lambda_i(s)}{(1-\xi)^i}$$

où $\lambda_i(s) = \sum_{n=1}^{i} \binom{i-1}{n-1}(-1)^{|n|-r} < \prod_{j=1}^{m} L_{a_j,V_j}(-n)\rangle^s$ la série étant uniformément convergente. Or :

$$\frac{d}{ds}\lambda_i(s)|_{s=0} = \sum_{n=1}^{i} \binom{i-1}{n-1}(-1)^{|n|-r} \operatorname{Log} < \prod_{j=1}^{m} L_{a_j,V_j}(-n) > .$$

Donc :

$$\frac{d}{ds}\lambda_i(s)|_{s=0} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{i} \binom{i-1}{n-1}(-1)^{|n|-r} \operatorname{Log} < L_{a_j,V_j}(-n) >$$

d'où la proposition

LEMME 25. — *Pour tout* ξ *tel que* $\ell = 0$, $P_a \in K[X_1,\ldots,X_r]$, $Z(P_a,\xi)(0)$ *ne dépend que de* ξ.

Preuve. — $Z(P_a,\xi)(0) = R(P_a^0)(\xi) = R(1)(\xi)$.

LEMME 26. — *Soit* $m \in K_p$, $|m| = 1$. *Alors, pour tout* $s \in \mathbf{Z}_p$,

i) *pour tout* ξ, *tel que* $\ell = 0$

(42) $$Z_p(P_a,\xi)(s) = Z_p\left(\frac{P_a}{m},\xi\right)(s)\langle m\rangle^{-s}$$

ii) *pour tout* ξ

(43) $$Z_p(L_{a,V},\xi)(s) = Z_p(L_{\frac{a}{m},\frac{V}{m}},\xi)(s)\langle m\rangle^{-s}$$

iii) *pour tout* ξ

(44) $$G_{p,r}(a,V,\xi) = G_{p,r}\left(\frac{a}{m},\frac{V}{m},\xi\right) + Z_p(L_{\frac{a}{m},\frac{V}{m}},\xi) \operatorname{Log}\langle m\rangle .$$

Preuve. — (44) est une conséquence immédiate de (43). Pour montrer (42) et (43), on considère k entier $k \geqslant 0$, $k \equiv 0 \bmod (p^{f_p}-1)$. Pour tout ξ tel que $\ell \neq 0$

$$Z_p(P_a,\xi)(-k) = R(P_a^k)(\xi) = m^k R\left(\frac{P_a^k}{m^k}\right)(\xi).$$

Pour tout ξ

$$Z_p(L_{a,V},\xi)(-k) = \frac{1}{(k+1)\dots(k+\ell)\prod_{\alpha=1}^{\ell} v_\alpha}$$

$$\cdot \sum_{j\geqslant 1} \frac{\lambda_j(a,V,k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}} \sum_{j\geqslant 1} \frac{\lambda_j(a,V,k)}{\prod_{\alpha=1}^{\ell} j_\alpha \prod_{\beta=\ell+1}^{r} (1-\xi_\beta)^{j_\beta}}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+\ell} \left[e^{at} \cdot \prod_{\alpha=1}^{\ell} \frac{v_\alpha t}{e^{v_\alpha t} - 1} \prod_{\beta=\ell+1}^{r} \frac{1}{1 - \xi_\beta e^{v_\beta t}} \right]_{t=0}$$

$$= m^{k+\ell} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k+\ell} \left[e^{\frac{a}{m}t} \prod_{\alpha=1}^{\ell} \frac{\frac{v_\alpha}{m} t}{e^{\frac{v_\alpha}{m}t} - 1} \prod_{\beta=\ell+1}^{r} \frac{1}{1 - \xi_\beta e^{\frac{v_\beta}{m}t}} \right]_{t=0}.$$

PROPOSITION 27. –

$$(45)\quad L'_p(\chi,0) = \sum_{\mathrm{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathrm{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} \sum_{i=1}^{r} G_{p,r(j)}(x^{(i)}, V^{(i)},1)$$
$$+ \frac{\chi(c)\langle Nc\rangle \operatorname{Log}\langle Nc\rangle}{\chi(c)\langle Nc\rangle - 1} L_p(\chi,0)$$
$$+ \frac{1}{(\chi(c)\langle Nc\rangle - 1)} \sum_{\mathrm{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathrm{a}^{-1}) \operatorname{Log}\langle N\mathrm{a}\rangle \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \frac{\xi_x^\mu}{(1-\xi_j^\mu)}.$$

Preuve. –

$$(46)\quad L'_p(\chi,0) = \frac{\chi(c)\langle Nc\rangle \operatorname{Log}\langle Nc\rangle}{(\chi(c)\langle Nc\rangle - 1)} L_p(\chi,0)$$
$$+ \frac{1}{\chi(c)\langle Nc\rangle - 1} \sum_{\mathrm{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathrm{a}^{-1}) \operatorname{Log}\langle N\mathrm{a}\rangle \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \frac{\xi_x^\mu}{(1-\xi_j^\mu)}$$
$$+ \frac{1}{\chi(c)\langle Nc\rangle - 1} \sum_{\mathrm{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathrm{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu \sum_{i=1}^{r} G_{p,r(j)}(x^{(i)}, V_j^{(i)}, \xi_j^\mu)$$

en utilisant les lemmes 24 et 25.

On veut maintenant écrire la dernière ligne, sans faire apparaître c. Pour cela on va utiliser les propriétés des séries complexes.

D'après [7], on peut écrire, pour tout $s \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(s) > r$

$$\sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu Z(L_{x^{(i)},V_j^{(i)}}, \xi_j^\mu)(s) = - \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{a} \\ \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_1 \\ \alpha \gg 0}} (\alpha^{(i)})^{-s} + \mathrm{N}\mathfrak{c} \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{ac} \\ \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_1 \\ \alpha \gg 0}} (\alpha^{(i)})^{-s}.$$

Donc pour tout $s \in \mathbf{C}$

$$\sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu Z(L_{x^{(i)},V_j^{(i)}}, \xi_j^\mu)(s)$$
$$= (\chi(\mathfrak{c})\langle \mathrm{N}\mathfrak{c}\rangle - 1) \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z(L_{x^{(i)},V_j^{(i)}}, 1)(s).$$

On en déduit donc pour tout $s \in \mathbf{Z}_p$

$$\sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu Z_p(L_{x^{(i)},V_j^{(i)}}, \xi_j)(s)$$
$$= (\chi(\mathfrak{c})\langle \mathrm{N}\mathfrak{c}\rangle - 1) \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z_p(L_{x^{(i)},V_j^{(i)}}, 1)(s).$$

Donc

$$\sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_j^x \, G_{p,r(j)}(x^{(i)}, V^{(i)}, \xi_j^\mu)$$
$$= (\chi(\mathfrak{c})\langle \mathrm{N}\mathfrak{c}\rangle - 1) \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} G_{p,r(j)}(x^{(i)}, V^{(i)}, 1),$$

d'où la proposition.

THÉORÈME 28. — *Si pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* K, *il existe* $a \in \mathrm{K}$ *tel que* $\mathrm{N}\mathfrak{a} = \mathrm{N}a$, *on a*

$$L_p'(\chi, 0) = \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} \sum_{i=1}^{r} G_{p,r(j)}\left(\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}, \frac{V_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right).$$

Preuve. — Soit $a \in \mathrm{K}$ tel que $\mathrm{N}\mathfrak{a} = \mathrm{N}a$. Puisque $(\mathfrak{a},(p)) = 1$, alors $((a),(p)) = 1$. Notons

$$\frac{V_j^{(i)}}{a^{(i)}} = \left(\frac{v_{j1}^{(i)}}{a^{(i)}}, \ldots, \frac{v_{j,r(j)}^{(i)}}{a^{(i)}}\right).$$

On a d'après le lemme

$$L_p(\chi,s) = \frac{1}{(\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle^{1-s}-1)} \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}))$$

$$\sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu Z_p\left(\prod_{i=1}^{r} L_{x^{(i)}}\frac{}{a^{(i)}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^\mu\right)(s)$$

Donc

$$L_p'(\chi,0) = \frac{\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle \operatorname{Log}\langle N\mathfrak{c}\rangle}{\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle - 1} L_p(\chi,0) + \frac{1}{\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle - 1} \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1})$$

$$\sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu \sum_{i=1}^{r} G_{p,r(j)}\left(\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}, \frac{V_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^\mu\right).$$

On a, pour tout $s \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(s) > r$

$$\sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu Z\left(L_{\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^\mu\right)(s) = - \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{a} \\ \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_1 \\ \alpha \gg 0}} \left(\frac{\alpha^{(i)}}{a^{(i)}}\right)^{-s} + N\mathfrak{c} \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{a} \\ \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_1 \\ \alpha \gg 0}} \left(\frac{\alpha^{(i)}}{a^{(i)}}\right)^{-s}.$$

Supposons que $\mathfrak{c} = (c)$, $c \in \mathcal{O}_K$. Alors pour tout $s \in \mathbf{C}$

$$\sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu Z\left(L_{\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^\mu\right)(s)$$

$$= (\chi\theta^{-1}(\mathfrak{c})N\mathfrak{c}(c^{(i)})^{-s}-1) \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z\left(L_{\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right)(s).$$

Donc, pour tout $s \in \mathbf{Z}_p$

$$\sum_{\mathfrak{a}} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu Z_p\left(L_{\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^\mu\right)(s)$$

$$= (\chi\theta^{-1}(\mathfrak{c})N\mathfrak{c}\langle c^{(i)}\rangle^{-s}-1) \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z_p\left(L_{\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right)(s).$$

Alors

$$\sum_{\mathfrak{a}} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu G_{p,r(j)}\left(\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}, \frac{V_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^\mu\right)$$

$$= - \chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}) \operatorname{Log}\langle c^{(i)}\rangle \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z_p\left(L_{\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right)(0)$$

$$+ (\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle - 1) \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} G_{p,r(j)}\left(\frac{x^{(i)}}{a^{(i)}}, \frac{V_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right).$$

Mais

$$\sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z_p\left(\frac{L_{x^{(i)}}}{a^{(i)}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right)(0)$$

$$= \frac{1}{(\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle - 1)} \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} Z\left(\frac{L_{x^{(i)}}}{a^{(i)}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^{\mu}\right)(0)$$

$$= \frac{1}{(\chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle - 1)} \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_j^{\mu} Z\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{L_{x^{(i)}}}{a^{(i)}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, \xi_j^{\mu}\right)(0).$$

Donc

$$\sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z_p\left(\frac{L_{x^{(i)}}}{a^{(i)}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right)(0) = L_p(\chi, 0)$$

et,

$$\sum_{i=1}^{r} \chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle \operatorname{Log} \langle c^{(i)}\rangle \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_1} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{a}^{-1}) \sum_{L_{j,x}} Z_p\left(\frac{L_{x^{(i)}}}{a^{(i)}}, \frac{v_j^{(i)}}{a^{(i)}}, 1\right)(0)$$
$$= \chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle \operatorname{Log} \langle N\mathfrak{c}\rangle L_p(\chi, 0)$$

ce qui achève de prouver le théorème.

Nous voulons maintenant donner le théorème sous la forme utilisée par Ferrero-Greenberg [16] :

PROPOSITION 29. — *Les hypothèses sont celles du théorème* 28. *On suppose en outre que le conducteur de* $\chi\theta^{-1}$ *est* $\mathfrak{f}$ *tel que* $((p), \mathfrak{f}) = 1$ *et* $\mathfrak{f} = (f)$. *Alors :*

$$(47) \quad L_p'(\chi, 0) = L_p(\chi, 0) \operatorname{Log} \langle f \rangle + \sum_{\mathfrak{b} \bmod \mathfrak{f}} \chi\theta^{-1}(\mathfrak{b}^{-1}) \sum_{\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \bmod (p)} \sum_{L_{j,x}} \sum_{i=1}^{r} G_{p, r(j)}\left(\frac{x^{(i)}}{(af)^{(i)}}, \frac{V_j^{(i)}}{(af)^{(i)}}, 1\right).$$

La preuve est immédiate, il suffit d'utiliser le lemme 26. Cette formule dans le cas où $r = 1$ est exactement la formule de Ferrero-Greenberg

$$L_p'(\chi, 0) = (1 - \chi\theta^{-1}(p)) B_{1, \chi\theta^{-1}} \operatorname{Log} f + \sum_{c=1}^{f} \chi\theta^{-1}(c) \operatorname{Log} \Gamma_p\left(\frac{c}{d}\right).$$

La formule (47) est à rapprocher de la conjecture de Gross [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice et J. Fresnel, Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, *Acta Arithm.*, Warsawa, 20 (1972), 353-384.

[2] E. W. Barnes, The theory of the double gamma function, *Philosophical Transactions of the Royal Society* (A), 196 (1901), 265-388.

[3] E. W. Barnes, On the theory of the multiple gamma function, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 19 (1904), 373-425.

[4] M. Boyarski, P-adic Gamma functions and Dwork cohomology, *Trans. of the A.M.S.*, vol. 257, n° 2 (1980), 359-369.

[5] P. Cassou-Noguès, *Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique*, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux I, 1971.

[6] P. Cassou-Noguès, Analogues p-adiques de quelques fonctions arithmétiques, *Publ. Math. Bordeaux*, année 1974-1975, 1-43.

[7] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, *Inventiones Math.*, 51 (1979), 29-59.

[8] P. Cassou-Noguès, Analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples, *Astérisque*, 61 (1979), 43-55.

[9] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme I, (en préparation).

[10] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme II, (en préparation).

[11] A. Chung-Ming, A generalization of Epstein zeta functions, *Michigan Math. J.*, 21 (1974), 45-48.

[12] A. Chung-Ming, A note on a functional equation, *J. Austral. Math. Soc.*, 15 (1973), 385-388.

[13] J. Coates, p-adic L-functions and Iwasawa theory, *Durham symposium in algebraic number field* (A. Fröhlich éd.) New York, London, Academic Press (1977).

[14] P. Deligne, K. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, *Inventiones Math.*, 59 (1980), 227-286.

[15] J. Diamond, The p-adic Log gamma function and p-adic Euler constants, *Transactions A.M.S.*, 233 (1977), 321-337.

[16] B. Ferrero and R. Greenberg, On the behaviour of p-adic L-functions at $s = 0$, *Inventiones Math.*, 50 (1978), 91-102.

[17] B. Gross, *On the behaviour of p-adic L-functions* (preprint).

[18] B. Gross and N. Koblitz, Gauss sum and the p-adic Γ-function, *Annals Math.*, 109 (1979), 569-581.

[19] N. Koblitz, *A short course on some current research in p-adic analysis* (Talks given at the Hanoi Mathematical Institute in July 1978).

[20] T. Kubota und H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie des Zetawerte I, Einführung der p-adischen Dirichletschen L-functionen, *J. für die reine und angew. Math.*, 214-215 (1964), 328-339.

[21] H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte II, *J. reine angew. Math.*, 274-275 (1975), 224-239.

[22] K. Mahler, Über einer Satz von Mellin, *Math. Ann.*, 100 (1928), 384-395.

[23] H. Mellin, Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht, *Acta Soc. Scient. Fennicae*, 29 (1900), Nr 4.

[24] Y. Morita, A p-adic analogue of the Γ-function, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 22 (1975), 255-266.

[25] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers, *J. of Fac. of Sc. Univ. of Tokyo*, section 1 (1976), 393-417.

[26] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 30, n° 1 (1978), 136-167.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1980
révisé le 5 janvier 1981.

Pierrette Cassou-Noguès,

U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
F 33405 Talence Cedex.