ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES ELENCWAJG

Fibrés uniformes de rang élevé sur $\mathbb{P}_2$

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 4 (1981), p. 89-114

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_4_89_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 4 (1981), 89-114.

FIBRÉS UNIFORMES DE RANG ÉLEVÉ SUR $\mathbf{P}_2$

par **Georges ELENCWAJG**

Introduction.

Un fibré vectoriel holomorphe E de rang r sur $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ est dit uniforme s'il existe une suite $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_r$ d'entiers rationnels telle que, pour toute droite $\ell \subset \mathbf{P}_2$, on ait un isomorphisme

$$E|\ell \simeq \mathcal{O}_\ell(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\ell(a_r).$$

Nous dirons que $(a_1,\ldots,a_r)$ est le type (de scindage) du fibré uniforme E.

Van de Ven a commencé la classification de ces fibrés en montrant que les seuls fibrés uniformes de rang 2 sont les sommes directes de deux fibrés en droites sur $\mathbf{P}_n$ ou les fibrés $T_{\mathbf{P}_2}(a)$ (translaté du fibré tangent à $\mathbf{P}_2$ par le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(a)$). La classification des fibrés uniformes sur $\mathbf{P}_n$ de rang $r \leqslant n$, commencée par E. Sato, est donnée dans [6]. Les fibrés uniformes de rang 3 sur $\mathbf{P}_2$ sont classifiés dans [2].

Pour les fibrés uniformes de rang 4 sur $\mathbf{P}_2$, un phénomène nouveau apparaît : il existe de tels fibrés (de type (1,1,0,0)) qui ne sont pas homogènes (voir [3]).

Drezet a montré dans [1] qu'un fibré uniforme de type $(a, a-1, a-1, a-2)$ est somme directe de sous-fibrés uniformes.

Dans le présent article, nous traitons tous les autres cas de fibrés uniformes de rang 4 sur $\mathbf{P}_2$. Plus précisément, désignant par S^nT la puissance symétrique d'ordre n du fibré tangent T à $\mathbf{P}_2$, nous démontrons le

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Tout fibré de rang* 4 *sur* $\mathbf{P}_2$, *uniforme, d'un type distinct de* $(a, a, a-1, a-1)$, *est isomorphe à* $(S^3T)(k)$ *ou bien est* *décomposable en somme directe de fibrés choisis parmi*

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(k), \quad \mathrm{T}(k) \quad \text{ou} \quad (\mathrm{S}^2\mathrm{T})(k) \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Nous nous sommes parfois permis de démontrer des résultats plus généraux (concernant des fibrés uniformes de rang quelconque) qu'il n'est strictement nécessaire pour établir ce théorème.

Le présent travail est un avatar de la troisième partie de la thèse (française...) de l'auteur ([4]).

Je voudrais remercier W. Barth et A. Hirschowitz pour leurs utiles indications.

1. Préliminaires.

Nous utiliserons constamment les notations et résultats de [2].

(1.1). – On désigne par $\mathbf{P}_2$ le plan projectif complexe, par $\mathbf{P}_2^*$ la variété des droites de $\mathbf{P}_2$ (« plan projectif dual ») et par F la variété des drapeaux de $\mathbf{P}_2$, formée des couples $(x,\ell) \in \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2^*$ vérifiant la relation d'incidence $x \in \ell$; cette variété est munie des projections

$$p : \mathrm{F} \to \mathbf{P}_2 \qquad \text{et} \qquad q : \mathrm{F} \to \mathbf{P}_2^*.$$

L'algèbre de cohomologie de $\mathbf{P}_2$ (resp. $\mathbf{P}_2^*$) est engendrée par la classe H d'une droite de $\mathbf{P}_2$ (resp. K d'une droite « tangentielle » de $\mathbf{P}_2^*$). On a alors les relations (dans lesquelles $*$ est la classe d'un point)

$$\mathrm{H}^2 = *, \qquad \mathrm{H}^3 = 0; \qquad \mathrm{K}^2 = *, \qquad \mathrm{K}^3 = 0.$$

Si on pose

$$\mathrm{A} := p^*\mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} := q^*\mathrm{K},$$

les éléments A et B engendrent l'algèbre de cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{F},\mathbf{Z})$ et vérifient les seules relations non banales

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2, \qquad \mathrm{A}^2\mathrm{B} = \mathrm{AB}^2 = *, \qquad \mathrm{A}^3 = \mathrm{B}^3 = 0.$$

(1.2). – On désigne par T le fibré tangent à $\mathbf{P}_2$, par ξ le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$ et par η le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$.

Tout fibré en droites sur F est de la forme $p^*\xi^a \otimes q^*\eta^b$ (où a et b sont des entiers bien déterminés). Pour un fibré E sur $\mathbf{P}_2$ on pose $E(k) := E \otimes \xi^k$. Convention analogue pour un fibré sur $\mathbf{P}_2^*$. On rappelle que $\Omega^1_{\mathbf{P}_2} = T^* \simeq T(-3)$.

La variété des drapeaux F est isomorphe au fibré en droites projectives Proj(T) sur $\mathbf{P}_2$; des résultats classiques sur les images directes de faisceaux et la dualité relative (cf. [7] en particulier Ex. III.8.4 et aussi [2], (3.4.)) permettent d'établir les formules suivantes, où $\omega_{F/\mathbf{P}_2}$ désigne le fibré canonique relatif au morphisme de projection

$$p : \operatorname{Proj} T^* = F \to \mathbf{P}_2 .$$

Formulaire d'images directes

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_F(1) &= p^*\xi \otimes q^*\eta \\ \omega_{F/\mathbf{P}_2} &= p^*\xi \otimes q^*\eta^{-2} \\ p_*(p^*\xi^k \otimes q^*\eta^\ell) &= S^\ell T \otimes \xi^{k-\ell} \\ R^1 p_*(p^*\xi^k \otimes q^*\eta^\ell) &= S^{-\ell-2} T^* \otimes \xi^{k-\ell-3} . \end{aligned}$$

Dans ces formules $S^\ell E$ est la puissance symétrique ℓ-ième du fibré E ; si ℓ est < 0 il faut interpréter $S^\ell E$ comme le fibré nul et $S^0 E$ est par définition le fibré trivial $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}$.

(1.3). — Quelques calculs de cohomologie.

Les formules suivantes de cohomologie nous seront utiles

$$\begin{array}{lll} H^1(\mathbf{P}_2,\xi^k) = 0 & & (k \in \mathbf{Z}) \\ H^1(\mathbf{P}_2,T(k)) = 0 & \text{si} & k \neq -3 \\ H^1(\mathbf{P}_2,T(-3)) \simeq \mathbf{C} & & \\ \Gamma(\mathbf{P}_2,(S^2T)(k)) = 0 & \text{si} & k \leqslant -3 \\ H^1(\mathbf{P}_2,(T^*\otimes T)(k)) = 0 & \text{si} & k \geqslant 0 \\ H^1(\mathbf{P}_2,(S^2T)(k)) = 0 & \text{si} & k \geqslant -3 \end{array}$$

Seules les trois dernières égalités méritent une explication. On part de l'isomorphisme canonique

$$T \otimes T = S^2T \otimes \wedge^2 T$$

qui implique, si l'on se souvient que $\wedge^2 T \simeq \xi^3$,

$$\operatorname{End} T = T^* \otimes T = (S^2T)(-3) \oplus \mathcal{O} \quad (*).$$

Il est connu ([10], lemme (4.1.2)] que T est simple :

$$h^{\circ}(\mathbf{P}_2, T^* \otimes T) = h^{\circ}(\mathbf{P}_2, \mathrm{End}\ T) = 1 .$$

Ceci implique déjà

$$h^{\circ}(\mathbf{P}_2, (S^2T)(k)) = 0 \qquad \text{pour} \qquad k \leqslant -3 .$$

Par ailleurs, la dualité de Serre montre que

$$h^2(\mathbf{P}_2, \mathrm{End}\ T) = h^{\circ}(\mathbf{P}_2, \mathrm{End}\ T \otimes \xi^{-3}) = 0$$

et alors, par Riemann-Roch,

$$h^1(\mathbf{P}_2, \mathrm{End}\ T) = 0 .$$

Si on fixe une droite $\ell \subset \mathbf{P}_2$, il vient une suite exacte

$$0 \to (T^* \otimes T)(k) \to (T^* \otimes T)(k+1) \longrightarrow (T^* \otimes T)(k+1)|_{\ell} \to 0$$

donnant lieu à une suite exacte longue de cohomologie dont un morceau est

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{P}_2, T^* \otimes T \otimes \xi^k) &\to H^1(\mathbf{P}_2, T^* \otimes T \otimes \xi^{k+1}) \\ &\to H^1(\ell, T^* \otimes T \otimes \xi^{k+1}|_{\ell}) . \end{aligned}$$

Comme

$$T^* \otimes T \otimes \xi^{k+1}|_{\ell} \simeq \mathcal{O}_{\ell}(k+2) \oplus 2\mathcal{O}_l(k+1) \oplus \mathcal{O}_l(k)$$

il vient

$$H^1(\mathbf{P}_2, T^* \otimes T \otimes \xi^{k+1}|_{\ell}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant 0 ,$$

et on peut conclure par récurrence sur k sur $h^1(\mathbf{P}_2, (T^* \otimes T)(k)) = 0$ si $k \geqslant 0$. La dernière formule suit alors grâce à $(*)$.

(1.4). — *Extensions.* — Les calculs précédents (1.2) permettent de calculer le groupe des extensions d'un fibré en droites par un fibré en droites sur F.

Ce groupe est en effet de la forme $H^1(F, p^*\xi^k \otimes q^*\eta^{\ell})$ et une suite spectrale de Leray (dégénérée) nous apprend que

$$H^1(F, p^*\xi^k \otimes q^*\eta^{\ell}) \simeq H^1(\mathbf{P}_2, (S^{\ell}T) \otimes \xi^{k-\ell}) \qquad \text{si} \qquad \ell \geqslant -1 .$$

On a de même

$$H^1(F, p^*\xi^k \otimes q^*\eta^{\ell}) \simeq H^{\circ}(\mathbf{P}_2, S^{-\ell-2}T^* \otimes \xi^{k-\ell-3}) \qquad \text{si} \qquad \ell \leqslant -2 .$$

En particulier, d'après (1.3), il vient

$H^1(F,p^*\xi^k \otimes q^*\eta^\ell) = 0$ pour les valeurs suivantes de (k,ℓ)

$$\begin{cases} \ell = 0 & \text{et} \quad k \text{ quelconque} \\ \ell = 2 & \text{et} \quad k \geqslant -1 \\ \ell = -4 & \text{et} \quad k \leqslant 2 \\ \ell = 1 & \text{et} \quad k \neq -2 \\ \ell = -3 & \text{et} \quad k \leqslant 1 \end{cases}$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par la symétrie $(k,\ell) \to (\ell,k)$.

(1.5). — Pour un fibré uniforme E de type $(a_1,\ldots,a_r)$ sur $\mathbf{P}_2$ on démontre l'inégalité

$$c_2(E) \geqslant \sum_{i<j} a_i a_j .$$

L'égalité n'a lieu que si E est de la forme

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(a_i).$$

Pour ces résultats, voir [5] Corollary (2.12).

2. La situation standard.

Soit E un fibré uniforme sur $\mathbf{P}_2$ dont la restriction à une droite $\ell \subset \mathbf{P}_2$ est de la forme

$$E|\ell \simeq k_0\mathcal{O}_\ell(a_0) \oplus k_1\mathcal{O}_\ell(a_1) \oplus \cdots \oplus k_m\mathcal{O}_\ell(a_m)$$

$(k_0,\ldots,k_m \in \mathbf{N}^*$; $a_0,\ldots,a_m \in \mathbf{Z}$ et $a_0 > a_1 > \cdots > a_m)$.

Le fibré « remonté » $p^*E = : \mathscr{E}$ admet une filtration de Grothendieck relative (cf. [6])

$$0 = \mathscr{E}_{-1} \subset \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{E}_j \subset \cdots \subset \mathscr{E}_m = \mathscr{E}$$

dans laquelle $\mathscr{E}_j$ est un fibré sur F de rang $\sum_{i=0}^{j} k_i$.

Le gradué associé à cette filtration est formé de fibrés « remontés » de $\mathbf{P}_2^*$ (à translation près) : plus précisément, il existe sur $\mathbf{P}_2^*$ des fibrés G_j de rang k_j tels que :

$$\mathscr{E}_j/\mathscr{E}_{j-1} \simeq q^*G_j \otimes p^*\xi^{a_j}.$$

La classe totale de Chern de G_j s'écrit

$$c(G_j) = 1 + x_jK + y_jK^2$$

donc

$$c(q^*G_j) = 1 + x_jB + y_jB^2,$$

et par suite ([8] p. 64 ou [9] p. 322)

$$\begin{aligned} c(\mathscr{E}_j/\mathscr{E}_{j-1}) = 1 + k_ja_jA + x_jB + (\frac{1}{2}k_j(k_j-1)a_j^2 \\ + (k_j-1)a_jx_j)A^2 + ((k_j-1)a_jx_j+y_j)B^2 + ((k_j-2)a_jy_j \\ + \frac{1}{2}(k_j-1)(k_j-2)a_j^2x_j) * \quad \text{(GRAD)}. \end{aligned}$$

La filtration de Grothendieck relative donne

$$c(\mathscr{E}) = \prod_{j=0}^{m} c(\mathscr{E}_j/\mathscr{E}_{j-1}),$$

et comme on a (en posant $c_2 := c_2(E)$)

$$\begin{aligned} c(\mathscr{E}) = c(p^*E) = p^*(cE) = p^*\left(1+\left(\sum_{i=0}^{m} k_ia_i\right)H+c_2H^2\right) \\ = 1 + \sum_{i=0}^{m}(k_ia_i)A + c_2A^2 \end{aligned}$$

on obtient l'équation

$$1 + (\sum_{i=0}^{m} k_ia_i)A + c_2A^2 = \prod_{j=0}^{m} c(\mathscr{E}_j/\mathscr{E}_{j-1}) \quad \text{(ES)}.$$

Nous appellerons « équation standard » l'égalité (ES) dans laquelle on substitue à $c(\mathscr{E}_j/\mathscr{E}_{j-1})$ le second membre de (GRAD).

Le « système standard » sera celui obtenu en écrivant l'égalité des coefficients de B, A^2, B^2, $*$ dans les deux membres de l'équation standard.

3. Plan de la démonstration du théorème principal.

Quitte à translater le fibré uniforme par un entier rationnel, nous le supposerons de type $(0,-a,-b,-c)$ avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$.

Au § 3 nous traitons les cas généraux

- $a = 0$ et $b \geqslant 2$
- $a = 1$ et $b \geqslant 3$
- $a \geqslant 2$.

Au § 4 nous traitons le cas $(0,0,0,-1)$,
au § 5 le cas $(0,0,-1,-2)$ et
au § 6 le cas $(0,-1,-2,-3)$.

Le cas $(0,0,0,0)$ est réglé par le théorème de Van de Ven : un fibré uniforme de type $(0,0,\ldots,0)$ (rang arbitraire) sur $\mathbf{P}_n$ est trivial (cf. [10], § 1, Theorem (3.2.1)).

Pour le cas $(0,-1,-1,-2)$ nous renvoyons à [1]. Le cas $(0,0,-1,-1)$ ne relève pas du Théorème Principal; pour l'étude des fibrés de ce type, on renvoie à [1] et à [3].

Tous les autres types d'uniformité se ramènent à ceux qu'on vient d'énumérer par dualisation et translation. Rappelons que les fibrés uniformes de rang 2 sur $\mathbf{P}_2$ sont, d'après [12], tous de la forme $\mathrm{T}(a)$ ou $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(b)$. Dans [2] on montre que tout fibré uniforme de rang 3 sur $\mathbf{P}_2$ est isomorphe à l'un des fibrés

$$(\mathrm{S}^2\,\mathrm{T})(a), \qquad \mathrm{T}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(b) \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(c).$$

Ces résultats seront évidemment constamment utilisés dans l'étude des fibrés uniformes de rang 4. Enfin, signalons que nous avons donné des énoncés plus généraux (concernant le rang r) que ne l'exige le Théorème principal lorsque les démonstrations ne sont pas sensiblement plus compliquées que pour le rang 4.

4. Les types généraux.

L'outil principal dans ce paragraphe est un cas particulier (facile à démontrer directement, cf. [4]) d'un théorème de Spindler, pour lequel on pourra consulter [11] et [10].

(4.1) THÉORÈME. — *Soit* E *un fibré uniforme de type* $(a_1,\dots,a_r)$ *sur* $\mathbf{P}_n$. *Supposons qu'il existe un indice* i $(1\leqslant i\leqslant r-1)$ *pour lequel* $a_i\geqslant a_{i+1}+2$. *Alors le fibré* E *s'insère dans une suite exacte de fibrés*

$$0 \to \mathrm{S} \to \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0$$

où S *et* Q *sont des fibrés uniformes de types respectifs* $(a_1,\dots,a_i)$ et $(a_{i+1},\dots,a_r)$.

On peut maintenant démontrer le

(4.2) THÉORÈME. — *Tout fibré uniforme de type* $(0,\dots,0,-a,-b)$ (k *zéros,* $2\leqslant a\leqslant b$) est isomorphe à l'un des fibrés

$$k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \qquad \text{ou} \qquad k\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-a-2).$$

Démonstration. — D'après (4.1) le fibré E s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{S} \to \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0$$

où S est uniforme de type $(0,\dots,0)$ et Q uniforme de type $(-a,-b)$. D'après Van de Ven, on a les isomorphismes $\mathrm{S} \simeq k\mathcal{O}$ et $\mathrm{Q} \simeq \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b)$ ou $\mathrm{Q} \simeq \mathrm{T}(-a-2)$ (et dans ce cas $b = a+1$). Dans les deux cas, le groupe des extensions $\mathrm{H}^1(\mathbf{P}_2, \mathrm{Q}^*\otimes\mathrm{S})$ est nul, ce qui prouve l'isomorphisme annoncé $\mathrm{E} \simeq \mathrm{S} \oplus \mathrm{Q}$.

Démontrons maintenant par une technique analogue

(4.3) THÉORÈME. — *Tout fibré uniforme de type* $(0,-1,-a,-b)$ $(2\leqslant a\leqslant b)$ *est isomorphe à l'un des fibrés*

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b), \qquad \mathrm{T}(-2) \oplus \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b)$$

ou, si $b = a+1$,

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathrm{T}(-a-2), \qquad \mathrm{T}(-2) \oplus \mathrm{T}(-a-2).$$

Démonstration. — On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{S} \to \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0$$

où S est uniforme de type $(0,-1)$ et Q uniforme de type $(-a,-b)$. Par suite

$$\mathrm{S} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{S} \simeq \mathrm{T}(-2)$$

et $Q \simeq \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b)$ ou $Q \simeq T(-a-2)$ (et alors $b=a+1$). Dans tous les cas, $H^1(\mathbf{P}_2, Q^* \otimes S) = 0$ d'après (1.3) et on a bien $E \simeq S \oplus Q$.

Enfin, dans la même ligne démontrons

(4.4) THÉORÈME. — *Tout fibré uniforme de type*

$$(0, -a, -b, -c) \ (2 \leqslant a \leqslant b \leqslant c)$$

est isomorphe à l'un des fibrés

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \oplus \mathcal{O}(-c),$$
$$\mathcal{O} \oplus T(-a-2) \oplus \mathcal{O}(-c) \quad (\textit{et alors } b = a+1),$$
$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-a) \oplus T(-b-2) \quad (\textit{et alors } c = b+1),$$
$$\mathcal{O} \oplus (S^2 T \otimes \mathcal{O}(-a-4)) \quad (\textit{et alors } b = a+1,\ c = a+2).$$

Démonstration. — On a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to Q \to 0$$

où Q est un fibré uniforme de type $(-a, -b, -c)$.

D'après la classification de [3] on déduit que Q est isomorphe à l'un des fibrés

$$\mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \oplus \mathcal{O}(-c), \qquad T(-a-2) \oplus \mathcal{O}(-c) \quad (\text{et } b=a+1),$$
$$\mathcal{O}(-a) \oplus T(-b-2) \quad (\text{et } c=b+1),$$
$$S^2 T \otimes \mathcal{O}(-a-4) \quad (\text{et } b=a+1,\ c=a+2).$$

Dans tous les cas, les formules (1.3) montrent que $H^1(\mathbf{P}_2, Q^* \otimes \mathcal{O}) = 0$ ce qui implique $E \simeq \mathcal{O} \oplus Q$.

Addendum. — Le Théorème (4.1) morcelle l'étude des fibrés uniformes en deux problèmes :

a) étude des fibrés uniformes « tassés » i.e. des fibrés uniformes de type $(a_1, \ldots, a_r)$ pour lesquels toutes les différences $a_{i+1} - a_i$ sont égales à zéro ou un

b) Calcul des extensions successives de fibrés « tassés ».

Cette remarque permet déjà de déterminer la structure de nombreux fibrés uniformes.

A titre d'échantillon, mentionnons les résultats suivants, que le lecteur démontrera facilement

(4.5) PROPOSITION. — *Soit* E *un fibré uniforme de type* $(a_1,\ldots,a_r)$. *Si toutes les différences* $a_{i+1} - a_i$ *sont* $\neq 1$, *le fibré* E *est complètement scindé :*

$$\mathrm{E} \simeq \bigoplus_{i-1}^{r} \mathcal{O}(a_i).$$

(4.6) PROPOSITION. — *Tout fibré uniforme de type*

$$(0,\ldots,0,-a,-b,-c) \quad (2 \leqslant a \leqslant b \leqslant c)$$

sur $\mathbf{P}_2$ *est isomorphe à l'un des fibrés*

$$k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \oplus \mathcal{O}(-c), \qquad k\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-a-2) \oplus \mathcal{O}(-c),$$
$$k\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-a) \oplus \mathrm{T}(-b-2)$$

ou

$$k\mathcal{O} \oplus (\mathrm{S}^2\mathrm{T} \otimes \mathcal{O}(-a-4)).$$

Nous ne nous écarterons pas plus de notre but, qui est de donner la classification des fibrés uniformes de rang 4 sur $\mathbf{P}_2$.

5. Le type $(0,\ldots,0-1)$.

Dans ce paragraphe nous démontrons

(5.1) THÉORÈME. — *Tout fibré* E *de rang* r *sur* $\mathbf{P}_2$ *uniforme de type* $(0,\ldots,0,-1)$ *est isomorphe à* $(r-1)\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ *ou à* $(r-2)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-2)$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur r le cas $r = 1$ étant trivial. Les notations sont celles du § 2.

La filtration de Grothendieck relative se réduit à

$$0 = \mathscr{E}_{-1} \subset \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 = p^*.\mathrm{E} \quad (\mathrm{rg}\,\mathscr{E}_0 = r-1)$$

(et on a $\mathscr{E}_0 = q^*_{.}\mathrm{G}_0$).

L'équation standard est

$$1 - A + c_2 A^2 = (1 + x_0 B + y_0 B^2)(1 - A + x_1 B)$$

dont on déduit le système standard

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ - x_0 = c_2 \\ - x_0 + x_0 x_1 + y_0 = 0 \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Un calcul élémentaire montre que $x_0 = 0$ ou -1.

Premier cas : $x_0 = 0$:

Alors le système standard a pour solution $x_0 = x_1 = y_0 = c_2 = 0$. Soit λ une droite de $\mathbf{P}_2^*$; elle correspond à un point $x \in \mathbf{P}_2$. Posons

$$G_0|\lambda = \bigoplus_{j=1}^{r-1} \mathcal{O}_\lambda(b_j).$$

Comme $G_0|_\lambda \simeq \mathcal{E}_0|p^{-1}(x)$ et $\mathcal{E}_0|p^{-1}(x) \subset p^*E|p^{-1}(x)$ on voit que les b_j sont $\leqslant 0$ (car $p^*E|p^{-1}(x)$ est un fibré trivial).

Par ailleurs $\sum_{j=1}^{r-1} b_j = c_1(G_0) = x_0 = 0$ et par suite, tous les b_j sont nuls. Le fibré G_0 est alors uniforme de type $(0,\dots,0)$ et donc trivial. Il en est de même de $\mathcal{E}_0 = q^*G_0$.

Le fibré G_1, de rang 1, est trivial puisque $c_1 G_1 = x_1 = 0$. Par suite

$$\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0 \simeq p^*\xi^{-1} \otimes q^*G_1 \simeq p^*\xi^{-1}$$

et on a la suite exacte sur F

$$0 \to (r-1)\mathcal{O}_F \to p^*E \to p^*\xi^{-1} \to 0$$

dont on déduit la suite exacte longue (!) des images directes sous p

$$0 \to (r-1)\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to E \to \xi^{-1} \to 0$$

qui scinde et fournit l'isomorphisme $E \simeq (r-1)\mathcal{O} \oplus \xi^{-1}$.

Deuxième cas : $x_0 = -1$.

Alors le système standard a pour solution

$$x_0 = -1, \qquad x_1 = 1, \qquad y_0 = 0, \qquad c_2 = 1$$

et on a $G_1 = \eta$ puisque $c_1 G_1 = x_1 = 1$.

Si λ est une droite de $\mathbf{P}_2^*$ et si on pose

$$G_0|\lambda \cong \bigoplus_{j=1}^{r-1} \mathcal{O}_\lambda(b_j)$$

on voit (cf. raisonnement analogue dans le premier cas) que tous les b_j sont $\leqslant 0$ et comme $\Sigma b_j = c_1(G_0) = x_0 = -1$ le fibré G_0 est uniforme de type $(0,\ldots,0,-1)$. Par hypothèse de récurrence G_0 est isomorphe à $(r-2)\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \oplus \eta^{-1}$ ou à $(r-3)\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \oplus T_{\mathbf{P}_2^*}(-2)$.

Le deuxième cas est exclu puisqu'on sait déjà que $c_2 G_0 = y_0 = 0$: donc $G_0 \simeq (r-2)\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \oplus \eta^{-1}$ et de là vient la suite exacte sur F

$$0 \to (r-2)\mathcal{O}_F \oplus q^*\eta^{-1} \to p^*E \to p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta \to 0.$$

Par images directes sous p, il vient (cf. (1.2))

$$0 \to (r-2)\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to E \to T \otimes \xi^{-2} \to 0.$$

Cette suite exacte scinde (1.3) et on obtient l'isomorphisme

$$E \simeq (r-2)\mathcal{O} \oplus T(-2).$$

Remarque. — On n'a pas utilisé le résultat de Van de Ven (cas $r = 2$) et on obtient donc ainsi une nouvelle démonstration de ce résultat.

6. Le type $(0,\ldots,0,-1,-2)$.

Dans ce paragraphe nous démontrons

(6.1) THÉORÈME. — *Tout fibré* E *de rang* r *sur* $\mathbf{P}_2$ *uniforme de type*

$$(0,\ldots,0,-1,-2)$$

est isomorphe à l'un des fibrés

$$(r-2)\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2),$$
$$(r-2)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-3), \qquad (r-3)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-2) \oplus \mathcal{O}(-2)$$

ou

$$(r-3)\mathcal{O} \oplus (\mathrm{S}^2\,\mathrm{T})(-4).$$

Démonstration. – La filtration standard est

$$0 = \mathscr{E}_{-1} \subset \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}_2 = p^*\mathrm{E}$$
$$(\mathrm{rg}\,\mathscr{E}_0 = r-2, \mathrm{rg}\,\mathscr{E}_1 = r-1).$$

L'équation standard est

$$1 - 3\mathrm{A} + c_2\mathrm{A}^2 = (1 + x_0\mathrm{B} + y_0\mathrm{B}^2)(1 - \mathrm{A} + x_1\mathrm{B})(1 - 2\mathrm{A} + x_2\mathrm{B})$$

d'où on déduit le système standard

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ 2 - 3x_0 - 2x_1 - x_2 = c_2 \\ -3x_0 - 2x_1 - x_2 + y_0 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0 \\ 2x_0 - 3y_0 - 2x_0x_1 - x_0x_2 = 0. \end{cases}$$

On trouve (en confiant ces calculs à une lycéenne, par exemple) que les solutions de ce système sont celles consignées dans le tableau suivant :

Numéro du cas	x_0	y_0	x_1	x_2	c_2
1	0	0	0	0	2
2	0	0	− 1	1	3
3	− 1	0	1	0	3
4	− 3	3	2	1	6
5	− 2	0	0	2	6
6	− 3	2	1	2	7

Examinons successivement tous ces cas.

(6.2) *Les cas* 1 *et* 2. – On a $\mathscr{E}_0 \simeq q^*\mathrm{G}_0$; comme dans le § 5 on montre que G_0 est trivial et par suite $\mathscr{E}_0$ aussi (on utilise $x_0 = 0$).

Le fibré $\mathscr{E}_2 = p^*\mathrm{E}$ sur F possède un sous-fibré trivial de rang $r - 2$ et il en est de même du fibré E sur $\mathbf{P}_2$: on a une suite exacte

$$0 \to (r-2)\mathcal{O} \to \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0. \tag{6.2.1}$$

Comme Q est uniforme de type $(-1, -2)$ il est isomorphe à $\mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}(-2)$ ou à $\mathrm{T}(-3)$.

Dans le cas numéro 1 on a $c_2\mathrm{E} = c_2\mathrm{Q} = 2$ et par suite $\mathrm{Q} \simeq \xi^{-1} \oplus \xi^{-2}$. La suite exacte (6.2.1) scinde et on trouve

$$\mathrm{E} \simeq (r-2)\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2).$$

Dans le cas numéro 2 on prouve de façon analogue l'isomorphisme

$$\mathrm{E} \simeq (r-2)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-3).$$

(6.3) *Le cas* 3. – Du fait que $x_2 = 0$ on déduit l'isomorphisme

$$\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2}.$$

Donc il existe sur F une suite exacte

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to p^*\mathrm{E} \to p^*\xi^{-2} \to 0.$$

Après dualisation puis translation par $p^*\xi^{-2}$ on obtient

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \to p^*(\mathrm{E}^*(-2)) \to \mathscr{E}_1^*(-2) \to 0$$

et de là une suite exacte de fibrés sur $\mathbf{P}_2$

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathrm{E}^*(-2) \to \mathrm{Q} \to 0. \tag{6.3.1}$$

Le fibré $\mathrm{E}^*(-2)$ est uniforme de type $(0, -1, -2, \ldots, -2)$ et par suite Q est uniforme de type $(-1, -2, \ldots, -2)$.

De (6.3.1) on tire

$$0 \to \mathrm{Q}^*(-2) \to \mathrm{E} \to \xi^{-2} \to 0. \tag{6.3.2}$$

Le fibré uniforme $\mathrm{Q}^*(-2)$ est justiciable du § 5 : sachant que $c_2\mathrm{E} = 3$ on calcule que $c_2(\mathrm{Q}^*(-2)) = 1$ et donc (Théorème (5.1))

$$\mathrm{Q}^*(-2) \simeq (r-3)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-2).$$

La suite exacte (6.3.2) scinde et on obtient

$$\mathrm{E} \simeq (r-3)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-2) \oplus \mathcal{O}(-2).$$

(6.4) *Le cas* 4. – Du fait que $x_2 = 1$ on déduit

$$\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta$$

et de là une suite exacte sur F

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to p^*\mathrm{E} \to p^*\xi^{-2} \oplus q^*\eta \to 0. \qquad (6.4.1)$$

Mais alors, pour une fibre $p^{-1}(x)$ quelconque,

$$\mathscr{E}_1 | p^{-1}(x) \simeq (r-2)\mathcal{O}_{p^{-1}(x)} \oplus \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)$$

ce qui implique que $p_*\mathscr{E}_1$ est localement libre de rang $(r-2)$ et que $\mathrm{R}^1 p_*\mathscr{E}_1 = 0$.

D'où la suite exacte sur $\mathbf{P}_2$

$$0 \to p_*\mathscr{E}_1 \to \mathrm{E} \to \mathrm{T}(-3) \to 0. \qquad (6.4.2)$$

Le fibré $p_*\mathscr{E}_1$ est alors uniforme de type $(0,\ldots,0)$ donc trivial et la suite (6.4.2) scinde, démontrant

$$\mathrm{E} \simeq (r-2)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-3).$$

(6.5) *Le cas* 5. – Commençons par dégager

(6.5.1) Lemme. – $\mathscr{E}_0 \simeq q^*\eta^{-2} \oplus (r-3)\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$.

Démonstration de (6.5.1). – On sait que $\mathscr{E}_0 = q^*\mathrm{G}_0$ et comme $q^*\mathrm{G}_0$ s'injecte dans $p^*\mathrm{E}$ on déduit que, pour une droite $\lambda \subset \mathbf{P}_2^*$, $\mathrm{G}_0|\lambda$ est de la forme

$$\mathrm{G}_0|\lambda \simeq \bigoplus_{i=d}^{r-2} \mathcal{O}_\lambda(b_i) \qquad \text{avec} \qquad b_i \leqslant 0.$$

On sait que $c_1(\mathrm{G}_0) = -2$ et on en déduit :

soit $\quad \mathrm{G}_0|\lambda \simeq 2\mathcal{O}_\lambda(-1) + (r-4)\mathcal{O}_\lambda,$

soit $\quad \mathrm{G}_0|\lambda \simeq \mathcal{O}_\lambda(-2) \oplus (r-3)\mathcal{O}_\lambda.$

La première possibilité est exclue d'après (1.5) puisque $c_2 G_0 = y_0 = 0$. Donc G_0 est uniforme de type $(-2,0,\ldots,0)$ et, d'après (4.5),

$$G_0 \simeq \eta^{-2} \oplus (r-3)\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*},$$

d'où

$$\mathcal{E}_0 \simeq q^*\eta^{-2} \oplus (r-3)\mathcal{O}_F, \qquad \text{ce qui démontre (6.5.1).}$$

Le sous-fibré de p^*E trivial de rang $(r-3)$ ainsi obtenu fournit une suite exacte sur $\mathbf{P}_2$

$$0 \to (r-3)\mathcal{O} \to E \to Q \to 0 \tag{6.5.2}$$

où Q est uniforme de type $(0,-1,-2)$.

Le fibré Q relève de la classification dans [2] (cf. §3) et on a (compte tenu de ce que $c_2 Q = c_2 E = 6$)

$$Q \simeq S^2(T(-2)).$$

En consultant le formulaire (1.3) on constate que (6.5.2) scinde

$$E \simeq (r-3)\mathcal{O} \oplus S^2(T(-2)).$$

(6.6) *Le cas* 6. – Le fibré $\mathcal{E}_0$ est de la forme q^*G_0 et un raisonnement analogue à celui fait dans l'étude du cas 5 montre que G_0 est uniforme de type $(0,\ldots,0,-1,-2)$. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence et obtenir (en utilisant $c_2(G_0) = 2$) l'isomorphie

$$G_0 \simeq (r-4)\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \oplus \eta^{-1} \oplus \eta^{-2}$$

et donc

$$\mathcal{E}_0 = q^*G_0 \simeq (r-4)\mathcal{O}_F \oplus q^*\eta^{-1} \oplus q^*\eta^{-2}. \tag{6.6.1}$$

Par ailleurs, du fait que

$$\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0 \simeq p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta^{x_1} = p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta$$

et

$$\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^{x_2} = p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^2,$$

la suite exacte sur F

$$0 \to \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \to 0$$

s'écrit

$$0 \to p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta \to \mathscr{E}_2/\mathscr{E}_0 \to p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^2 \to 0$$

et scinde d'après le formulaire (1.5) :

$$\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_0 \simeq p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta \oplus p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^2 .$$

En rapprochant cette dernière formule de (6.6.1) il vient

$$\begin{aligned} 0 \to (r-4)\mathcal{O}_{\mathrm{F}} \oplus q^*\eta^{-1} \oplus q^*\eta^{-2} & \\ \to \mathscr{E}_2 \to p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta \oplus p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^2 \to 0 \end{aligned}$$

et par passage aux images directes sous p (remarquer que $p_*\mathscr{E}_2 = p_*p^*\mathrm{E} = \mathrm{E}$)

$$0 \to (r-4)\mathcal{O} \to \mathrm{E} \to \mathrm{T}(-2) \oplus (\mathrm{S}^2\mathrm{T})(-4) \to \mathcal{O}(-1)\,\mathrm{H} \to 0 \quad (6.6.2)$$

(on s'est servi du formulaire (1.2)); comme

$$\mathrm{Hom}\,(\mathrm{T}(-2), \mathcal{O}(-1)) = 0$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}(-2) \oplus (\mathrm{S}^2\mathrm{T})(-4) \to \mathcal{O}(-1)) & \\ = \mathrm{T}(-2) \oplus \mathrm{Ker}\,((\mathrm{S}^2\mathrm{T})(-4) \to \mathcal{O}(-1)) & \\ = \mathrm{T}(-2) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) & \end{aligned}$$

(la dernière égalité vient de ce que le noyau cherché est uniforme de type $(0, -2)$).

Donc (6.6.2) implique l'existence d'une suite exacte

$$0 \to (r-4)\mathcal{O} \to \mathrm{E} \to \mathrm{T}(-2) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2) \to 0$$

qui scinde et fournit l'isomorphisme cherché

$$\mathrm{E} \simeq (r-3)\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-2) \oplus \mathcal{O}(-2).$$

7. Le type $(0, -1, -2, -3)$.

Pour terminer, nous allons démontrer

(7.1) THÉORÈME. — *Tout fibré sur* $\mathbf{P}_2$, *uniforme de type* $(0, -1, -2, -3)$

est somme directe de fibrés uniformes de rang < 4 *ou est isomorphe à* $(S^3T)(-6)$.

(7.1.1) *Remarque.* — Une liste explicite de ces fibrés se trouve dans la dernière colonne du tableau (7.2) infra.

Démonstration. — La filtration standard est ici

$$0 = \mathscr{E}_{-1} \subset \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}_2 \subset \mathscr{E}_3 = p^*\mathrm{E} \quad (\mathrm{rg}\mathscr{E}_i = \mathrm{i}+1)$$

et la graduation associée s'écrit

$$\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1} \simeq p^*\xi^{-i} \otimes q^*\eta^{x_i} \qquad (0 \leqslant i \leqslant 3).$$

L'équation standard est donc

$$1 - 6\mathrm{A} + c_2\mathrm{A}^2 = (1+x_0\mathrm{B})(1-\mathrm{A}+x_1\mathrm{B})(1-2\mathrm{A}+x_2\mathrm{B})(1-3\mathrm{A}+x_3\mathrm{B})$$

et fournit le système standard

$$\mathrm{S} \quad \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 11 - 6x_0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 = c_2 \\ -\ 6x_0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 \\ \qquad\qquad + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ 11x_0 + 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_0x_1 - 4x_0x_2 - 3x_0x_3 \\ \qquad\qquad - 3x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

En éliminant x_0 on obtient le système

$$\mathrm{S}' \quad \begin{cases} 11 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 = c_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0 \\ -\ 5x_1 - 8x_2 - 9x_3 + 5x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 \\ \qquad\qquad + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations de (S′) représentent chacune un ellipsoïde de $\mathbf{P}^3$, ce qui prouve que le système (S′) (et donc aussi le système (S)) n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.

Une quelconque méthode élémentaire permet de calculer ces solutions, que nous rassemblons dans le tableau ci-dessous. Le reste du paragraphe sera consacré à justifier la dernière colonne.

Numéro du cas	x_0	x_1	x_2	x_3	c_2	Fibré
1	0	0	0	0	11	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)$
2	-1	1	0	0	12	$\mathrm{T}(-2) \oplus \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)$
3	0	-1	1	0	12	$\mathcal{O} \oplus \mathrm{T}(-3) \oplus \mathcal{O}(-3)$
4	0	0	-1	1	12	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathrm{T}(-4)$
5	-1	1	-1	1	13	$\mathrm{T}(-2) \oplus \mathrm{T}(-4)$
6	-2	0	2	0	15	$(\mathrm{S}^2\mathrm{T})(-4) \oplus \mathcal{O}(-3)$
7	0	-2	0	2	15	$\mathcal{O} \oplus (\mathrm{S}^2\mathrm{T})(-5)$
8	-1	-2	2	1	16	n'existe pas
9	-2	1	-1	2	16	n'existe pas
10	-2	-2	2	2	19	n'existe pas
11	-3	0	0	3	20	n'existe pas
12	-3	-1	1	3	21	$\mathrm{S}^3\mathrm{T})(-6)$

Tableau (7.2).

(7.3). – Dans les cas 1, 3, 4, 7 on a $x_0 = 0$, le fibré $p^*\mathrm{E}$ admet un sous-fibré trivial et il en est de même de E; la suite exacte sur $\mathbf{P}_2$

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0 \qquad (7.3.1)$$

définit un fibré uniforme Q, de type $(-1, -2, -3)$.

Le fibré Q est alors déterminé par la classification [2] et on constate que (7.3.1) scinde : ceci justifie le résultat annoncé dans la dernière colonne du Tableau.

De façon duale, si $x_3 = 0$, le fibré $\mathrm{E}^*(-3)$ est uniforme de type $(0, -1, -2, -3)$ et admet un sous-fibré trivial de rang 1 ; on peut alors de nouveau déterminer $\mathrm{E}^*(-3)$ puis E. Ceci règle les cas 2 et 6.

(7.4). – Sur la variété des drapeaux F on a la suite exacte

$$0 \to q^*\eta^{x_0} \to \mathscr{E}_1 \to p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta^{x_1} \to 0$$

qui scinde certainement si le groupe d'extensions

$$\mathrm{Ext}^1(p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta^{x_1}, q^*\eta^{x_0}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{F}, p^*\xi \otimes q^*\eta^{x_0-x_1})$$

est nul. Ce groupe est certainement nul (d'après (1.4)) dans les cas 8, 9, 10 et 11 : dans chacun de ces cas on a

$$\mathscr{E}_1 \simeq q^*\eta^{x_0} \oplus p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta^{x_1}. \tag{7.4.1}$$

De façon analogue, la suite exacte sur F

$$0 \to \mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_3/\mathscr{E}_2 \to 0$$

s'écrit

$$0 \to p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^{x_2} \to \mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1 \to p^*\xi^{-3} \otimes q^*\eta^{x_3} \to 0. \quad (7.4.1\ bis)$$

Le groupe des extensions correspondant est $H^1(F, p^*\xi \otimes q^*\eta^{x_2-x_3})$: d'après (1.4) il est nul dans les cas 8, 10 et 11.

Dans chacun de ces cas on a donc

$$p^*E/\mathscr{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^{x_2} \oplus p^*\xi^{-3} \otimes q^*\eta^{x_3}. \tag{7.4.2}$$

De la suite exacte sur F

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to p^*E \to p^*E/\mathscr{E}_1 \to 0$$

on déduit la suite exacte longue sur $\mathbf{P}_2$

$$0 \to p_*\mathscr{E}_1 \to E \to p_*(p^*E/\mathscr{E}_1) \to R^1p_*\mathscr{E}_1 \to 0 \tag{7.4.3}$$

qui, jointe à (7.4.1) ou (7.4.2), nous sera très utile dans la suite.

(7.5) *Le cas* 5. — Ici on a la suite exacte sur F

$$0 \to q^*\eta^{-1} \to \mathscr{E}_1 \to p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta \to 0.$$

Par passage aux images directes sous p et en tenant compte du Formulaire (1.2), il vient la suite exacte

$$0 \to p_*\mathscr{E}_1 \to T(-2) \to 0 \text{ i.e. } p_*\mathscr{E}_1 \simeq T(-2)$$

et $0 \to R^1p_*\mathscr{E}_1 \to 0$ i.e. $R^1p_*\mathscr{E}_1 = 0$.

De (7.4.1 *bis*) on déduit par passage aux images directes

$$p_*(p^*E/\mathscr{E}_1) \simeq T(-4).$$

Alors (7.4.3) s'écrit

$$0 \to T(-2) \to E \to T(-4) \to 0.$$

Cette suite scinde (1.3) ce qui prouve

$$E \simeq T(-2) \oplus T(-4).$$

(7.6). *Le cas* 8. – Ici (7.4.1) et (7.4.2) s'écrivent respectivement

$$\mathscr{E}_1 \simeq q^*\eta^{-1} \oplus p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta^{-2}$$

et

$$p^*E/\mathscr{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^2 \oplus p^*\xi^{-3} \otimes q^*\eta$$

et (7.4.3) devient (compte tenu de (1.2))

$$0 \to E \to S^2T \otimes \xi^{-4} \oplus T \otimes \xi^{-4} \to \xi^{-2} \to 0.$$

Mais il ne saurait exister une telle suite exacte de fibrés sur $\mathbf{P}_2$: d'une part

$$\mathrm{Hom}\,(S^2T\otimes\xi^{-4}.\xi^{-2}) \simeq \Gamma(\mathbf{P}_2,S^2T^*\otimes\xi^{2)} \simeq \Gamma(\mathbf{P}_2,S^2T\otimes\xi^{-4})$$

est nul d'après (1.3) et d'autre part les morphismes

$$T \otimes \xi^{-4} \to \xi^{-2}$$

ne sont jamais surjectifs. (En effet, ces morphismes s'identifient à des sections sur $\mathbf{P}_2$ de $T^* \otimes \xi^2 \simeq T(-1)$ et s'annulent obligatoirement en un point de $\mathbf{P}_2$). Le cas 8 ne se produit donc pas.

(7.7) *Le cas* 9. – De (7.4.1) et (7.4.2) on déduit

$$\mathscr{E}_1 \simeq q^*\eta^{-2} \oplus p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta$$

et

$$p^*E/\mathscr{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^{-1} \oplus p^*\xi^{-3} \otimes q^*\eta^2$$

et (7.4.3) devient

$$0 \to T(-2) \to E \to S^2T \otimes \xi^{-5} \to \xi^{-1} \to 0. \quad (7.7.1)$$

Le noyau N du morphisme surjectif

$$S^2T \otimes \xi^{-5} \to \xi^{-1} \to 0$$

est uniforme de type $(-2,-3)$ et donne lieu à une suite exacte

$$0 \to N \to S^2T \otimes \xi^{-5} \to \xi^{-1} \to 0$$

non scindée (puisque $S^2T \otimes \xi^{-5}$ est indécomposable !) ce qui prouve que N est indécomposable et donc, d'après Van de Ven, $N \simeq T(-4)$.

Alors de l'exactitude de (7.7.1) on déduit la suite exacte

$$0 \to T(-2) \to E \to T(-4) \to 0.$$

Mais ceci est absurde car $c_2(E) = 16$ (d'après le Tableau (7.2)) alors que $c_2(T(-2) \oplus T(-4)) = 13$.

Le cas 9 ne peut donc pas se produire.

(7.8) *Le cas* 10.

On a

$$\mathscr{E}_1 \simeq q^*\eta^{-2} \oplus p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta^{-2}$$

et

$$p^*E/\mathscr{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta^2 \oplus p^*\xi^{-3} \otimes q^*\eta^2.$$

Alors (7.4.3) devient

$$0 \to E \to S^2T \otimes \xi^{-4} \oplus S^2T \otimes \xi^{-5} \xrightarrow{\varphi} \xi^{-1} \oplus \xi^{-2} \to 0. \quad (7.8.1)$$

Mais

$$\mathrm{Hom}\,(S^2T\otimes\xi^{-5},\xi^{-2}) \simeq \Gamma(\mathbf{P}_2,S^2T\otimes\xi^{-3}) = 0 \quad (\text{cf. } (1.3))$$

et alors *a fortiori*

$$\mathrm{Hom}\,(S^2T\otimes\xi^{-4},\xi^{-2}) = 0.$$

Donc si dans (7.8.1) on écrit φ sous la forme $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ (décomposition en somme directe de $\xi^{-1} \oplus \xi^{-2}$), on voit que $\varphi_2 = 0$ ce qui empêche φ d'être surjective. Il est donc impossible d'avoir la suite exacte (7.8.1) et le cas 10 ne se présente pas.

(7.9) *Le cas* 11. – Comme $x_1 = 0$, (7.4.1) prouve que p^*E admet $p^*\xi^{-1}$ comme sous-fibré de rang 1. Par suite, sur $\mathbf{P}_2$, le fibré E admet

ξ^{-1} comme sous-fibré en droites et il existe une suite exacte de fibrés

$$0 \to \xi^{-1} \to E \to Q \to 0.$$

Le fibré Q est uniforme de type $(0. -2, -3)$ et, à partir de la relation $c(E) = c(Q).c(\xi^{-1})$, on calcule facilement que $c_2(Q) = 15$.

Or la classification de [2] montre qu'il n'existe pas de tel fibré uniforme : le cas 11 ne peut donc pas se produire.

(7.10) *Le cas* 12. — On commence par dégager le

(7.10.1) LEMME. — *Sur* $\mathbf{P}_2$ *tout morphisme de fibrés*

$$f : S^3(T(-2)) \to T(-3)$$

est nul.

Preuve. — Soit $x \in \mathbf{P}_2$ un point quelconque. Nous allons montrer que la fibre en x de Ker f contient un cône engendrant la fibre en x de $S^2(T(-2))$.

Soit $d \subset \mathbf{P}_2$ une droite passant par x. Le fibré $T(-2)|d$ contient un unique sous-fibré trivial; soit δ la fibre en x de ce sous-fibré. Il est alors clair que $(\text{Ker } f)_x$ contient la droite $S^3\,\delta$. Lorsque d varie, δ parcourt l'ensemble des droites de $(T(-2))_x$ et la réunion des $S^3\,\delta$ n'est rien d'autre que le sous-ensemble de la fibre en x de $S^3(T(-2))$ formé des vecteurs $S^3 v = v.v.v$ où v parcourt l'espace vectoriel $(T(-2)_x$. Ce sous-ensemble est le cône générateur annoncé et le lemme est prouvé.

Revenons au cas 12.

De la suite exacte sur F

$$0 \to q^*\eta^{-3} \to \mathscr{E}_1 \to p^*\xi^{-1} \otimes q^*\eta^{-1} \to 0$$

on déduit par passage aux images directes sous p

$$p_*\mathscr{E}_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad R^1p_*\mathscr{E}_1 \simeq R^1p_*(q^*\eta^{-3}) \simeq T(-3).$$

Par ailleurs, (7.4.1 *bis*) s'écrit ici

$$0 \to p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta \to \mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1 \to p^*\xi^{-3} \otimes q^*\eta^3 \to 0$$

et on déduit, d'après ([2] 6.1.4),

$$\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1 \simeq p^*\xi^{-2} \otimes q^*\eta \oplus p^*\xi^{-3} \otimes q^*\eta^3$$

ou

$$\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1 \simeq p^*(\mathrm{T}(-4)) \otimes q^*\eta^2 .$$

Donc

$$p_*(\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1) \simeq \mathrm{T}(-3) \oplus \mathrm{S}^3(\mathrm{T}(-2))$$

ou

$$p_*(\mathscr{E}_3/\mathscr{E}_1) \simeq \mathrm{S}^2(\mathrm{T}(-2)) \oplus \mathrm{T}(-2).$$

Or ces deux fibrés sont isomorphes (voir (7.10.2) plus bas) et on a donc de toutes façons la suite exacte

$$0 \to \mathrm{E} \to \mathrm{T}(-3) \oplus \mathrm{S}^3(\mathrm{T}(-2)) \to \mathrm{T}^* \to 0$$

et (7.10.1) permet de conclure à l'isomorphisme

$$\mathrm{E} \simeq \mathrm{S}^3(\mathrm{T}(-2)).$$

Prouvons pour finir le

(7.10.2) LEMME. — *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* 2. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathrm{E} \otimes \wedge^2 \mathrm{E}) \oplus \mathrm{S}^3\mathrm{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^2\mathrm{E} \otimes \mathrm{E}.$$

Preuve. — L'isomorphisme est déterminé par ses restrictions aux deux facteurs de son domaine

$$\mathrm{E} \otimes \wedge^2 \mathrm{E} \to \mathrm{S}^2\mathrm{E} \otimes \mathrm{E} : x \otimes \mathrm{E} : x \otimes (y \wedge z) \longmapsto (x.y) \otimes z - (x.z) \otimes y$$

$$\mathrm{S}^3\mathrm{E} \to \mathrm{S}^2\mathrm{E} \otimes \mathrm{E} : x.y.z \longmapsto \frac{1}{3}((x.y) \otimes x + (y.z) \otimes x + (z.x) \otimes y).$$

(7.11) *Un complément.* — A titre d'exemple d'utilisation de nos techniques, nous allons prouver (comme nous y a invité O. Forster) qu'étant donné un entier $m > 0$ les « caractères numériques » $x_j (j=0,\ldots,m)$ et c_2 de tous les fibrés uniformes de type $(0, -1, \ldots, -m)$ sur $\mathbf{P}_2$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs (notations du § 2). Soit donc E un tel fibré. L'équation standard est

$$1 - \left(\sum_{j=0}^{m} j\right)\mathrm{A} + c_2\mathrm{A}^2 = \prod_{j=0}^{m} (1 - j\mathrm{A} + x_j\mathrm{B}).$$

En identifiant les coefficients de B, A^2, B^2 il vient la partie suivante du système standard (où on a posé $\sigma = 1 + 2 + \cdots + m$ et $\Sigma = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} i.j$)

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + \cdots + x_m = 0 \\ c_2 = \Sigma - \sum_{j=0}^{m} (\sigma - j)x_j = 0 \\ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant m} x_i x_j - \sum_{j=0}^{m} (\sigma - j)x_j = 0. \end{cases}$$

La première équation, après élévation au carré, donne

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant m} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m} x_j^2$$

et en reportant dans la troisième il vient

$$\sum_{j=0}^{m} x_j^2 + 2 \sum_{j=0}^{m} (\sigma - j)x_j = 0.$$

C'est l'équation d'une sphère de $\mathbf{R}^{m+1}$ (muni de sa métrique standard), sur laquelle ne se trouvent qu'un nombre fini de points à coordonnées entières ; comme c_2 est fonction des x_j (deuxième équation du système), notre assertion est prouvée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Drezet, Fibrés uniformes sur $\mathbf{P}_2$, Thèse 3e cycle, (1980).

[2] G. Elencwajg, Les fibrés uniformes de rang 3 sur $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ sont homogènes, *Math. Ann.*, 231 (1978), 217-227.

[3] G. Elencwajg, Des fibrés uniformes non homogènes, *Math. Ann.*, 239 (1979), 185-192.

[4] G. Elencwajg, Thèse de Doctorat d'État, Nice (1979).

[5] G. Elencwajg et O. Forster, Bounding Cohomology groups of Vector Bundles on $\mathbf{P}_n$, *Math. Ann.*, 246 (1980), 251-270.

[6] G. Elencwajg, A. Hirschowitz et M. Schneider, Les fibrés uniformes de rang au plus n sur $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ sont ceux qu'on croit, *Proceedings of the Nice Conference* 1979 *on Vector Bundles and Differential equations*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[7] R. Hartshorne, Algebraic Geometry. Graduate texts in mathematics, Vol. 52, Berlin, Heidelberg, New-York, Springer-Verlag, 1977.

[8] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, 3rd ed. Berlin, Heidelberg, New-York. Springer Verlag 1966.

[9] S. Kleiman, The enumerative theory of singularities, *Real and Complex Singularities*, Oslo 1976, Sÿthoff et Noordhoof (1977).

[10) C. Okonek, M. Schneider et H. Spindler, Vector Bundles on Complex Projective Spaces, *Progress in Mathematics*, 3, Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1980.

[11] H. Spindler, Der Satz von Grauert-Mülich für beliebige semistabile holomorphe Vektorraumbündel über dem *n*-dimensionalen komplex-projektiven Raum, *Math. Ann.*, 243 (1979), 131-141.

[12] A. Van de Ven. On uniform vector bundles, *Math. Ann.*, 195 (1972), 246-248.

Ajouté lors de la correction des épreuves : [1] a été publié dans le présent journal (31,1 (1981), 99-134) sous le titre : « Fibrés uniformes de type $(1, 0, \ldots, 0, -1)$ sur $\mathbf{P}_2$.

Manuscrit reçu le 6 novembre 1980
révisé le 23 avril 1981.

Georges Elencwajg,
Université de Nice
Institut de Mathématiques
et Sciences Physiques
Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex.