

JEAN COQUET

**Représentation des entiers naturels et suites
uniformément équiréparties**

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 1 (1982), p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_1_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION DES ENTIERS NATURELS ET SUITE UNIFORMÉMENT ÉQUIRÉPARTIES

par Jean COQUET

1. INTRODUCTION

1.1. Enoncé du résultat.

On précise un résultat obtenu dans l'article [2] dont on reprend les notations et définitions. En particulier, $s(n)$ désigne la somme des chiffres de n en base q (q entier ≥ 2) et $\sigma_\alpha(n)$ la α -somme des chiffres de n , autrement dit la somme des chiffres relative au développement du nombre irrationnel α en fraction continue (voir § 1.3). Dans [2], le résultat suivant est obtenu.

THEOREME 1. — *La suite $xs + y\sigma_\alpha$ est équirépartie modulo 1 si l'un au moins des nombres x et y est irrationnel.*

On précise ici que l'équirépartition est uniforme :

THEOREME 2. — *La suite $xs + y\sigma_\alpha$ est uniformément équirépartie modulo 1 si l'un au moins des nombres x et y est irrationnel.*

Rappelons qu'une suite $\lambda : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ est *uniformément équirépartie modulo 1* («well-distributed», [3] p. 40) si pour tout intervalle $A \subset [0, 1[$, $\frac{1}{N} \text{Card} \{n \in \mathbf{N}; t \leq n < N + t, \{\lambda(n)\} \in A\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ell(A)$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, $\ell(A)$ désignant la longueur de A et $\{u\}$ la partie fractionnaire du réel u .

1.2. Plan de la démonstration.

Comme dans [2], on pose $g(n) = e(xs(n))$, $g'(n) = e(y\sigma_\alpha(n))$ et $G(n) = g(n)g'(n)$. D'après le critère de Weyl ([3], p. 41), il s'agit de vérifier que, lorsque l'un au moins des nombres x et y est irrationnel, $\textcircled{1} \frac{1}{N} \sum_{t \leq n < N+t} G(n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, sachant déjà que G a une moyenne nulle [2].

On donne de très brèves indications sur la démonstration sans entrer dans le détail des calculs. On distingue encore 2 cas :

– Lorsque $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, g est périodique et

$$G(n) = e(xn + y\sigma_\alpha(n))$$

puisque $n \equiv s(n) \pmod{q-1}$.

– Dans le cas contraire, on montre $\textcircled{1}$ en précisant le comportement pseudo-aléatoire de G .

1.3. Rappels [2].

Soit $[a_0; a_1, \dots, a_k, \dots]$ le développement de α en fraction continue, soient $q_0, q_1, \dots, q_k, \dots$ les dénominateurs des réduites successives de α , déterminés par : $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ et $q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Tout entier naturel n s'écrit de manière unique $n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n) q_k$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0(n) \in \{0, \dots, a_1 - 1\} \\ \text{pour tout } k \in \mathbf{N}^*, \epsilon_k(n) \in \{0, \dots, a_{k+1}\} \\ \text{pour tout } k \in \mathbf{N}^*, (\epsilon_k(n) = a_{k+1} \implies \epsilon_{k-1}(n) = 0) \end{array} \right.$$

et $\sigma_\alpha(n)$ est égale à $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n)$ par définition.

Dans le cas où $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, G est *multiplicative relative* à α , autrement dit : $G(0) = 1$ et $G(\overset{\infty}{n}) = \prod_{k=0}^{\infty} G(\epsilon_k(n) q_k)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. CAS OU g EST PERIODIQUE

Lorsque $x(q - 1) \in \mathbf{Z}$ et $y \notin \mathbf{Q}$, on montre dans [2] que : $\mu_k = \frac{1}{q_k} \sum_{n < q_k} G(n) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ et on en déduit que G a une moyenne nulle.

On montre ① de la manière suivante. Soient $N \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{N}$. On pose $K = \text{Max} \{k \in \mathbf{N}^*; \epsilon_k(t) \neq \epsilon_k(N + t)\}$ de sorte que $\epsilon_K(N + t) > \epsilon_K(t)$, $A = \sum_{k > K} \epsilon_k(t) q_k$, $u = \sum_{k < K} \epsilon_k(t) q_k$, $w = q_K(1 + \epsilon_K(t))$. $v = \sum_{k < K} \epsilon_k(N + t) q_k = N + t - A = u + N$, et $M_k = \text{Max} \{|\mu_k|, |\mu_{k-1}|\}$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

On obtient les majorations suivantes :

$$\textcircled{2} \left| \sum_{t < n < N+t} G(n) \right| \leq \left| \sum_{u < m < w} G(m) \right| + \left| \sum_{w < m < v} G(m) \right|$$

$$\textcircled{3} \left| \sum_{w < m < v} G(m) \right| \leq (\epsilon_K(N + t) - \epsilon_K(t) - 1) q_K M_K + \sum_{k < K} \epsilon_k(N + t) q_k M_k .$$

En partageant l'intervalle $]u, w[$ à l'aide des points u_j définis pour $0 \leq j \leq K$ par :

$$u_j = \begin{cases} \sum_{j < k < K} \epsilon_k(t) q_k + (1 + \epsilon_j(t)) q_j & \text{si } \epsilon_j(t) < a_{j+1} \\ \sum_{j < k < K} \epsilon_k(t) q_k + q_{j+1} & \text{si } \epsilon_j(t) = a_{j+1}, \end{cases}$$

on montre la majoration suivante :

$$\textcircled{4} \left| \sum_{u < m < w} G(m) \right| \leq 1 + \sum_{j=1}^K M_{j-1} (u_j - u_{j-1}).$$

De ②, ③, ④, et $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$, on déduit ① par des arguments élémentaires.

3. CAS OU g EST PSEUDO-ALEATOIRE

3.1. Suites uniformément pseudo-aléatoires.

Dans [2], il est établi que, lorsque $x(q-1) \notin \mathbf{Z}$, G est pseudo-aléatoire autrement dit, possède une corrélation γ_G définie par :

$$\gamma_G(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} G(n+h) \overline{G(n)} \text{ pour tout } h \in \mathbf{N}, \text{ et vérifiant}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{h < H} |\gamma_G(h)|^2 = 0.$$

On va prouver que G est *uniformément pseudo-aléatoire*, autrement dit possède la propriété supplémentaire suivante :

$$\textcircled{5} \quad \gamma_G(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t \leq n < N+t} G(n+h) \overline{G(n)}$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, pour tout $h \in \mathbf{N}$. On en déduit

$\textcircled{1}$ à l'aide du lemme suivant qu'on obtient par des arguments classiques (inégalité de Van der Corput par exemple).

LEMME 1. — Si G est une suite uniformément pseudo-aléatoire, on a : $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t \leq n < N+t} G(n) = 0$, uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$.

3.2. G est uniformément pseudo-aléatoire.

Dans [1], Besineau démontre, lorsque $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, le caractère pseudo-aléatoire de $g(n) = e(xs(n))$ en mettant en évidence des partitions de \mathbf{N} conformément au :

LEMME 2. — Pour tout $h \in \mathbf{N}^*$, il existe une partition de \mathbf{N} en progressions arithmétiques \mathfrak{F}_k , $k \in \mathbf{N}$, et une suite (λ_k) telles que : $\forall k \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathfrak{F}_k, s(n+h) - s(n) = \lambda_k$.

Dans [2], on montre que l'existence de $\gamma_{g'}$ (corrélation de g') tient à l'existence, pour tout $h \in \mathbf{N}^*$, d'une partition de \mathbf{N} en sous-ensembles \mathcal{G}_j , $j \in \mathbf{N}$, sur lesquels $\sigma_\alpha(n+h) - \sigma_\alpha(n)$ reste constante. L'indépendance statistique de ces sous-ensembles vis-à-vis des progressions arithmétiques conduit à la relation $\gamma_G(h) = \gamma_g(h) \gamma_{g'}(h)$.

Puisque $g'(n+h) \overline{g'(n)}$ est constante sur les ensembles \mathcal{G}_j , un point essentiel de la preuve de (5) est de montrer que :

$$(6) \quad \delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t \leq n < N+t} \chi(n),$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, χ étant la fonction caractéristique de \mathcal{G}_j et δ sa densité (dont la valeur est donnée dans [2]). Les ensembles \mathcal{G}_j sont de la forme $\mathcal{G}(r, a) = \{n \in \mathbf{N}; \Psi_r(n) = a\}$ où $\Psi_r(n) = \sum_{k \leq r} \epsilon_k(n) q_k$ et $a < q_{r+1}$. La démonstration de (6) se fait en adaptant à χ les calculs de majoration du paragraphe 2 relatifs à G .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BESINEAU, Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction somme des chiffres, *Acta Arithmetica*, 20 (1972), 401-416.
- [2] J. COQUET, G. RHIN, Ph. TOFFIN, Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2, *Annales Institut Fourier*, 31, 1 (1981), 1-15.
- [3] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, Wiley Interscience, New-York, (1974).

Manuscrit reçu le 1^{er} juin 1981
révisé le 15 juillet 1981.

Jean COQUET,
Département de Mathématique
Université de Valenciennes
F - 59326 Valenciennes Cedex.