ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES GIRAUD

Géométrie de la structure adjointe sur un groupe de Lie et algèbres de type $\mathcal{P}_1$

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 1 (1982), p. 139-156

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_1_139_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
32, 1 (1982), 139-156

GÉOMÉTRIE DE LA STRUCTURE ADJOINTE SUR UN GROUPE DE LIE ET ALGÈBRES DE TYPE $\mathcal{R}_1$

par Georges GIRAUD

Introduction.

Une G-structure est k-plate si pour chaque point x de sa base il existe un difféomorphisme local d'un voisinage de x dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ qui établit un contact d'ordre k entre la G-structure considérée et la G-structure plate canonique sur $\mathbf{R}^n$ (voir [5]).

Nous allons nous intéresser à la 2-platitude de la structure adjointe sur un groupe de Lie. Dans [3] nous avons prouvé que la 2-platitude de cette structure entraîne toujours sa 3-platitude.

Nous avons montré dans [4] que la 2-platitude de la structure adjointe équivaut à l'existence, sur l'algèbre de Lie du groupe de Lie de base, d'une structure d'algèbre appelée de type $\mathcal{R}_1$.

Dans le présent article, nous introduisons l'algèbre de Lie des opérateurs symétriques du crochet de g, notée h_g.

Relativement à cette algèbre d'endomorphismes, nous obtenons une décomposition unique d'une algèbre de Lie sans centre en somme directe de deux idéaux caractéristiques b et σ.

b est caractérisé par la propriété d'avoir ses opérateurs symétriques tous nilpotents et σ d'être somme de deux sous-algèbres abéliennes.

Cette décomposition nous permet de préciser, sur une algèbre de Lie g sans centre, les conditions d'existence d'une structure $\mathcal{R}_1$ car b et σ sont aussi des idéaux bilatères pour l'algèbre $\mathcal{R}_1$. Nous prouvons que la structure adjointe d'un groupe de Lie, d'algèbre de Lie σ, est toujours 2-plate et nous en déduisons que l'étude de la 2-platitude de la structure adjointe sur un groupe de Lie $\mathfrak{G}$ se ramène au cas où h_g n'est formé que d'opérateurs nilpotents.

1. Préliminaires.

Nous avons montré dans [4] qu'une algèbre de Lie réelle est sous-jacente à une algèbre de type $\mathcal{P}_1$ si et seulement si, il en est de même de sa complexifiée. Par conséquent, dans l'étude qui va suivre nous supposons que le corps de base des algèbres de Lie considérées est C, sans diminution de généralité.

Rappelons tout d'abord deux définitions.

Une G-structure E(M, G) sur une variété M est un sous-fibré principal du fibré des repères linéaires de M, c'est-à-dire une réduction du groupe linéaire au sous-groupe de Lie G.

On dit que E(M, G) est intégrable (ou plate) si tout point de sa base admet un voisinage muni de coordonnées locales dont le champ de repères canoniques appartient à E(M, G).

a) Définition de la structure adjointe sur un groupe de Lie

Sur un groupe de Lie, $\mathfrak{G}$, complexe, de dimension finie n et d'algèbre de Lie g, considérons un parallélisme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ invariant par les translations à gauche de $\mathfrak{G}$ (i.e. une base de g). Faisons ensuite une extension du groupe structural de ce parallélisme, au groupe $\mathrm{Int}(g)$, formé des automorphismes intérieurs de g. Nous obtenons une G-structure invariante à gauche sur $\mathfrak{G}$. Un autre choix du parallélisme fournit une structure conjuguée. Nous noterons $E(\mathfrak{G}, \mathrm{Int}(g))$ l'unique G-structure, à conjugaison près, ainsi définie et l'appellerons structure adjointe sur $\mathfrak{G}$.

$E(\mathfrak{G}, \mathrm{Int}(g))$ est transitive, c'est-à-dire pour tout couple de points z et z' de E il existe un automorphisme local de E dont le relevé dans le fibré des repères de $\mathfrak{G}$ envoie z sur z'. La démonstration de cette propriété a été faite dans [1] et [7].

L'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{Int}(g)$ est l'idéal de l'algèbre des dérivations constitué par les dérivations intérieures de g ; elle est notée $\mathrm{ad}(g)$.

b) 2-platitude et structure de type $\mathcal{P}_1$.

La connexion dont la dérivée covariante ∇ est définie par $\nabla_u v = \frac{1}{2}\, \mathrm{ad}_u(v)$, $u, v \in g$, est adaptée à la G-structure $E(\mathfrak{G}, \mathrm{Int}(g))$;

c'est la connexion invariante appelée O-connexion de Cartan. Elle est sans torsion :

$$T(u,v) = \frac{1}{2}[u,v] - \frac{1}{2}[v,u] - [u,v] = 0 .$$

Une G-structure est 1-plate si et seulement si elle admet une connexion sans torsion. $E(\mathfrak{G}, \mathrm{Int}(g))$ est donc 1-plate. Le premier prolongement de l'algèbre $\mathrm{ad}(g)$ est l'espace :

$$(\mathrm{ad}(g))^{(1)} = \mathrm{ad}(g) \otimes g^* \cap g \otimes S^2 g^* \qquad \text{(voir [9])}.$$

Des résultats de [5] nous déduisons que la 2-platitude de la G-structure $E(\mathfrak{G}, \mathrm{Int}(g))$ équivaut à l'existence d'une application

$$\lambda : g \longrightarrow (\mathrm{ad}(g))^{(1)} = \mathrm{ad}(g) \otimes g^* \cap g \otimes S^2 g^*$$

telle que

$$\lambda(u)\,v - \lambda(v)\,u = R(u,v)$$

où R est le tenseur de courbure de la O-connexion,

$$R(u,v) = [\nabla_u, \nabla_v] - \nabla_{[u,v]} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_{[u,v]} \qquad u, v \in g$$

donc

$$\lambda(u)\,v - \lambda(v)\,u = -\frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_{[u,v]} .$$

A l'aide d'une section $S : \mathrm{ad}(g) \longrightarrow g$, de l'homomorphisme $\mathrm{ad} : g \longrightarrow \mathrm{ad}(g)$, on définit un produit sur g en posant :

$$u \,.\, v = -4\,S(\lambda(u)\,v) - \frac{1}{2}\{S(\mathrm{ad}_{[u,v]}) - [u,v]\}.$$

Mais $\lambda(u) \in (\mathrm{ad}(g))^{(1)}$, i.e. $\lambda(u)\,v \,.\, w = \lambda(u)\,w \,.\, v$ et $\lambda(u)\,v = -1/4\,\mathrm{ad}_{u.v}$, donc

$$[u \,.\, v, w] = [u \,.\, w, v] .$$

Le produit ainsi défini vérifie :

$$u \,.\, v - v \,.\, u = [u,v] \tag{1}$$

et

$$(u \,.\, v) \,.\, w - w \,.\, (u \,.\, v) = (u \,.\, w) \,.\, v - v \,.\, (u \,.\, w). \tag{2}$$

DEFINITION. – *Un espace vectoriel muni d'un produit bilinéaire vérifiant la relation (2) est appelé algèbre de type* $\mathcal{L}_1$.

L'algèbre des commutateurs d'une algèbre $\mathcal{L}_1$ est une algèbre de Lie. La structure d'algèbre de Lie est alors dite "sous-jacente" au produit $\mathcal{L}_1$.

PROPOSITION. – *La G-structure* $E(\mathcal{G}, \mathrm{Int}(g))$ *est 2-plate si et seulement si* g *est une algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre de type* $\mathcal{P}_1$.

Nous avons vu comment on peut définir un produit $\mathcal{P}_1$ quand E est 2-plate.

Réciproquement, en posant $\lambda(u)(v, w) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_{u.v}(w)$ on définit un élément λ de $(\mathrm{ad}(g))^{(1)} \otimes g^*$ tel que :

$$\lambda(u)\,v - \lambda(v)\,u = -\frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_{[u,v]} = R(u, v).$$

c) Premier prolongement de $\mathrm{ad}(g)$ *et algèbre* h_g .

Dans l'étude de la 2-platitude de $E(\mathcal{G}, \mathrm{Int}(g))$ un rôle essentiel est joué par le premier prolongement de l'algèbre $\mathrm{ad}(g)$.

Désignons par h_g l'ensemble des opérateurs symétriques relativement à l'application bilinéaire antisymétrique de $g \times g$ dans g définie par le crochet de g :

$$h_g = \{f \in \mathrm{End}(g) / [f(x), y] = [f(y), x]\} ;$$

h_g est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(g)$ qui contient comme idéal l'espace $h_g^0 = \{f \in \mathrm{End}(g) / f(g) \subset Z(g)\}$; $Z(g)$ est le centre de g.

La suite d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow h_g^0 \longrightarrow h_g \xrightarrow{\pi} (\mathrm{ad}(g))^{(1)} \longrightarrow 0$$

où $\pi(f)(x, y) = [f(x), y]$ pour $f \in h_g$, est exacte.

La propriété caractéristique des éléments de h_g ,

$$[f(x), y] + [x, f(y)] = 0 \qquad x, y \in g \tag{3}$$

entraîne que, si $f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_p$ est une famille d'endomorphismes dans h_g :

$$[f_1 \circ \ldots \circ f_i \circ \ldots \circ f_p(x), y] + (-1)^{p-1}[x, f_p \circ \ldots \circ f_i \circ \ldots \circ f_1(y)] = 0 \tag{4}$$

en particulier,

$$\forall f \in h_g \; [f^n(x), y)] + (-1)^{n-1}[x, f^n(y)] = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{4'}$$

Par récurrence sur n on montre :

$$(-\lambda - \mu)^n [x, y] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [(f - \lambda I)^k x, (f - \mu I)^{n-k} y]. \tag{5}$$

Il est aisé de montrer que h_g est une algèbre de Lie d'endomorphismes, presque-algébrique, c'est-à-dire que la partie nilpotente et la partie semi-simple d'un élément de h_g, sont encore dans h_g. On vérifie aussi immédiatement, que $\mathrm{der}(g)$, algèbre de Lie des dérivations de g, est inclue dans le normalisateur de h_g.

En désignant par L_u la multiplication à gauche, associée à l'élément u de g et définie par un produit $\mathcal{P}_1$, la propriété pour l'algèbre de Lie g d'être sous-jacente à ce produit $\mathcal{P}_1$ se traduit par les relations : $L_u v - L_v u = [u, v]$ et $L_u \in h_g$.

2. Décomposition d'une algèbre de Lie relative aux opérateurs symétriques de son crochet.

PROPOSITION 1. — *Si h_g contient un élément inversible, alors g est une algèbre de Lie résoluble.*

Considérons une décomposition de Lévi de g, $g = \mathcal{R} \otimes S$ ($\mathcal{R}$ est le radical et S une sous-algèbre de Lévi) et f un élément de h_g. Soit f_1 (resp. f_2) l'application restriction de f à S (resp. à $\mathcal{R}$) composée avec la projection de g sur S. L'égalité

$$[f(s), s'] = [f(s'), s]$$

projetée sur S devient : $[f_1(s), s'] = [f_1(s'), s]$ $s, s' \in S$ ou $f_1 \in h_S$.

Pour $s \in S$ et $r \in \mathcal{R}$ $[f(s), r] = [f(r), s] = [f(r)/\mathcal{R}, s] + [f_2(r), s]$. Le terme $[f_2(r), s]$ est le seul de cette égalité qui appartient à S ; il est donc nul. Le centre de S est nul puisque S est semi-simple, par conséquent $f_2 = 0$.

Soit K la forme de Killing de S. Les éléments de $\mathrm{ad}(g)$ sont anti-symétriques pour cette forme donc

$$K(\mathrm{ad}_{f_1 s_1} s_2, s_3) = - K(s_2, \mathrm{ad}_{f_1 s_1} s_3)$$

ou

$$K([f_1 s_1, s_2], s_3) = - K([f_1 s_1, s_3], s_2).$$

La forme trilinéaire $K([f_1 s_1, s_2], s_3)$ est donc antisymétrique par rapport à deux variables et symétrique par rapport à deux autres variables (puisque $[f_1 s_1, s_2] = [f_1 s_2, s_1]$) ; une telle forme est nécessairement nulle. K étant non dégénérée, $K([f_1 s_1, s_2], s_3) = 0$ quel que soit $s_1, s_2, s_3 \in S$, entraîne $f_1 = 0$.

Ainsi, tout endomorphisme élément de h_g, est à valeur dans $\mathcal{R}$. Il ne pourra exister un élément inversible que si $g = \mathcal{R}$.

DEFINITION. – *Nous dirons qu'une algèbre de Lie est de type σ quand elle est somme directe de deux sous-algèbres abéliennes (somme directe en tant qu'espaces vectoriels).*

Exemple. – Toute algèbre de Lie 2-résoluble $\mathcal{L}$, sans centre, est une algèbre de type σ.

Ceci se montre en utilisant l'écriture de $\mathcal{L}$ sous la forme de somme de son idéal central descendant infini $\mathcal{L}^\infty$ et d'une sous-algèbre de Lie nilpotente k. La nullité du centre et le fait que l'idéal dérivé soit abélien entraînent que k est nécessairement abélienne. Ainsi, l'idéal $\mathcal{L}^\infty$ qui est abélien admettra une sous-algèbre supplémentaire k_1, abélienne.

PROPOSITION 2. – *Une algèbre de Lie g possède un opérateur symétrique relativement au crochet, qui est inversible, si et seulement si elle est de type σ.*

Soit f un élément inversible de h_g ; f^{-1} est encore dans h_g. Notons $g_{\lambda_i} = \{x \in g / (f - \lambda_i \mathrm{I})^k x = 0$ pour un certain $k\}$, le sous-espace caractéristique de f, associé à la valeur propre λ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

La propriété de f indiquée par la formule (5) implique $[x, y] = 0$ pour $x \in g_{\lambda_i}$ et $y \in g_{\lambda_j}$ quand $\lambda_j \neq -\lambda_i$. Cela a pour conséquence que chaque espace g_{λ_i} tel que $-\lambda_i$ ne soit pas valeur propre, est inclus dans le centre de g.

Nous désignerons par $\mathcal{A}$ le sous-espace du centre de g, somme de tous ces g_{λ_i}.

Une autre conséquence de (5) est que chaque g_{λ_i} est abélien. Posons $\sigma^+ = \sum_i g_{\lambda_i}$ (sommation pour λ_i parcourant $v = \{$valeurs propres dont la partie réelle est positive, ou si elle est nulle, dont la partie imaginaire est positive et telles que l'opposée soit encore valeur propre$\}$) et $\sigma^- = \sum_i g_{-\lambda_i} \oplus \mathcal{A}$. Les espaces σ^+ et σ^- sont alors deux sous-algèbres abéliennes de g. Ainsi $g = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ et g est une algèbre de type σ. Réciproquement, si g est une algèbre σ, il existe au moins un élément inversible dans h_g. On en définit un en posant

$$f(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in \sigma^+ \quad \text{et} \quad f(x) = -x \quad \text{pour} \quad x \in \sigma^- .$$

De la proposition 1 nous déduisons que toute algèbre σ est résoluble.

Théorème de décomposition suivant les opérateurs symétriques du crochet.

THEOREME. – *Toute algèbre de Lie, sans centre, admet une décomposition unique en somme directe, d'une algèbre de Lie σ (de type somme de deux abéliennes) et d'une algèbre de Lie b dont les opérateurs symétriques du crochet sont tous nilpotents.*

$$g = b \oplus \sigma .$$

LEMME 1. – *Soit g une algèbre de Lie, sans centre, somme de sous-espaces $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tels que $[g_i, g_j] = 0$ quand $i \neq j$. Alors chaque espace g_i est un idéal de Lie et même un idéal caractéristique de g.*

$[x, \alpha_i]_j$ désignant la projection sur l'espace g_j du crochet d'un élément x quelconque de g par un élément α_i de g_i, on a les égalités :

$$\begin{aligned}[][[x, \alpha_i]_j, y] = [[x_i, \alpha_i]_j, y] &= [[x_i, \alpha_i], y_j] \\ &= [[x_i, y_j], \alpha_i] + [x_i, [\alpha_i, y_j]] = 0\end{aligned}$$

donc $[x, \alpha_i]_j = 0$ pour $j \neq i$ et $[x, \alpha_i] \in g_i$.

Si D est une dérivation de g,

$$[(\mathrm{D}\alpha_i)_j, y] = [\mathrm{D}\alpha_i, y_j] = \mathrm{D}[\alpha_i, y_j] - [\alpha_i, \mathrm{D}y_j] = -[\alpha_i, \mathrm{D}y_j].$$

Le premier membre de cette égalité est dans g_j, le dernier dans g_i ; ils sont donc tous deux nuls et $(\mathrm{D}\alpha_i)_j = 0$, $j \neq i$.

LEMME 2. – *Toute décomposition d'une algèbre de Lie, sans centre g, en somme directe d'idéaux $(g = g_1 \oplus g_2)$ est respectée par les opérateurs symétriques du crochet et de plus : $h_g = h_{g_1} \oplus h_{g_2}$.*

Soit $x_1 \in g_1$, $x_2 \in g_2$ et $\varphi \in h_g$

$$[(\varphi x_1)_2, x_2] = [\varphi x_1, x_2] = [\varphi x_2, x_1] = [(\varphi x_2)_1, x_1].$$

Le premier membre de cette égalité est dans g_2, le second dans g_1 donc $[(\varphi x_1)_2, x_2] = [(\varphi x_2)_1, x_1] = 0$ et vu la nullité du centre de g, $(\varphi x_1)_2 = 0$ et $(\varphi x_2)_1 = 0$ ainsi $\varphi x_1 \in g_1$ et $\varphi x_2 \in g_2$.

On vérifie que la restriction de φ à g_1, notée φ_1, est un élément de h_{g_1}. Ainsi tout φ de h_g s'écrit : $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_1 \in h_{g_1}$ et $\varphi_2 \in h_{g_2}$. Les algèbres de Lie h_{g_1} et h_{g_2} peuvent être considérées comme des idéaux supplémentaires dans h_g.

LEMME 3. — *L'espace caractéristique g_0^f pour la valeur propre 0, et la somme σ^f de tous les autres espaces caractéristiques, relatifs à $f \in h_g$, sont des idéaux de g invariants par tout élément de h_g.*

Soit $g = g_0^f \oplus \sum_{\lambda_i} (g_{\lambda_i} \oplus g_{-\lambda_i}) \oplus \sum_{\mu_j} g_{\mu_j}$ la décomposition de g en somme de sous-espaces caractéristiques relatifs à $f \in h_g$. λ_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ désigne une valeur propre de f dont l'opposée est encore valeur propre tandis qu'au contraire μ_j est une valeur propre dont l'opposée n'est pas valeur propre. L'espace caractéristique g_0^f correspond à la valeur propre 0. La formule (5), à savoir

$$(-\lambda - \mu)^n [x , y] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [(f - \lambda I)^k x , (f - \mu I)^{n-k} y]$$

montre que : $[g_0^f , g_{\lambda_i}] = 0$, $[g_0^f , g_{\mu_j}] = 0$, $[g_{\lambda_i} , g_{\mu_j}] = 0$ et que chaque espace g_{λ_i} (ou g_{μ_i}) est abélien. L'espace $\sum_{\mu_j} g_{\mu_j}$ est égal à $\{0\}$ car inclus dans le centre de g.

En posant : $\sigma^f = \sum_{\lambda_i} g_{\lambda_i} \oplus \sum_{\lambda_i} g_{-\lambda_i}$ la décomposition de g s'écrit : $g = g_0^f \oplus \sigma^f$ avec $[g_0^f , \sigma^f] = 0$.

Le lemme 1 précise que g_0^f et σ^f sont des idéaux caractéristiques de g ; le lemme 2 que ces idéaux de g sont invariants par tout élément de h_g.

Démonstration du théorème. — Soit

$$b = \bigcap_{f \in h_g} g_0^f \quad \text{et} \quad \sigma = \sum_{f \in h_g} \sigma^f .$$

Si $g = g_0^f$ pour tout f de h_g, alors $\sigma^f = 0$ et $\sigma = 0$. D'autre part, $g = \bigcap_{f \in h_g} g_0^f = b$. Le théorème est donc vérifié dans ce cas.

Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de g. Nous supposons qu'il existe un $f \in h_g$ tel que $g_0^f \neq g$. Le lemme 2 indique que tout élément de h_g applique g_0^f dans lui-même et que h_g induit sur g_0^f une algèbre d'endomorphismes de g_0^f qui est

$h_{g_0^f}$. En désignant par $\mathcal{L}$ l'algèbre g_0^f, l'hypothèse de récurrence s'écrit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ où $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ sont des idéaux de $\mathcal{L}$

$$\left(\mathcal{L}_0 = \bigcap_{\alpha \in h_{\mathcal{L}}} \mathcal{L}_0^\alpha , \mathcal{L}_1 = \sum_{\alpha \in h_{\mathcal{L}}} \mathcal{L}_1^\alpha\right).$$

Les espaces $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ sont donc des idéaux de g qui sont invariants par h_g. Ainsi $g = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \sigma^f$ et $b = \mathcal{L}_0$;

$$\mathcal{L}_1 \oplus \sigma^f \subseteq \sum_{f \in h_g} \sigma^f \subseteq \bigcap_i (h_g^*)^i (g) \quad \text{car} \quad \sigma^f = \bigcap_i f^i(g)$$

(h_g^* désigne l'algèbre enveloppe associative de h_g).

L'algèbre induite par h_g^* sur b est formée d'endomorphismes nilpotents, donc il existe N tel que $(h_g^*)^{\mathrm{N}} (b) = 0$. Alors

$$(h_g^*)^{\mathrm{N}} (g) = (h_g^*)^{\mathrm{N}} (b) + (h_g^*)^{\mathrm{N}} (\mathcal{L}_1 + \sigma^f)$$

et

$$(h_g^*)^{\mathrm{N}} (g) \subseteq (h_g^*)^{\mathrm{N}} (\mathcal{L}_1 + \sigma^f) \subseteq \mathcal{L}_1 + \sigma^f ,$$

d'où

$$\mathcal{L}_1 + \sigma^f \subseteq \sum_{f \in h_g} \sigma^f \subseteq \bigcap_i (h_g^*)^i (g) \subseteq (h_g^*)^{\mathrm{N}} (g) \subseteq \mathcal{L}_1 + \sigma^f$$

donc

$$\mathcal{L}_1 + \sigma^f = \sum_{f \in h_g} \sigma^f = \sigma \quad \text{et} \quad g = b \oplus \sigma .$$

Ces idéaux b et σ sont des idéaux caractéristiques de g.

3. Structure et existence d'une algèbre $\mathfrak{L}_1$ dont g est l'algèbre de Lie des commutateurs.

a) *Décomposition d'un produit* $\mathfrak{L}_1$.

PROPOSITION. – *Toute algèbre de type $\mathfrak{L}_1$ dont l'algèbre de Lie des commutateurs est sans centre, se décompose de façon unique en une somme directe d'idéaux bilatères, l'un b tel que tout élément de h_b est nilpotent, l'autre σ, somme de deux sous-algèbres de Lie abéliennes.*

Considérons la décomposition $g = b \oplus \sigma$ fournie par le théorème et supposons que la structure de Lie de g soit sous-jacente à un produit $\mathcal{P}_1$. On vérifie aisément que la relation $x \circ y = (x \,.\, y)_\sigma$, où x et y appartiennent à σ, définit un produit $\mathcal{P}_1$ sur σ ($(x \,.\, y)_\sigma$ est la projection sur σ du produit de x et y). De même $\alpha * \beta = (\alpha \,.\, \beta)_b$ définit un produit $\mathcal{P}_1$ sur b. On montre que la sous-algèbre de Lie σ (resp. b) est sous-jacente au produit $\mathcal{P}_1$ noté $\circ$ (resp. noté $*$) et que $u \,.\, v = u_\sigma \circ v_\sigma + u_b * v_b$ quel que soit u et v dans g. Les idéaux de Lie b et σ sont donc des idéaux bilatères pour la structure $\mathcal{P}_1$.

b) *Algèbres de Lie de type* σ.

PROPOSITION. – *Toute algèbre de Lie de type σ est l'algèbre des commutateurs d'un produit $\mathcal{P}_1$.*

Soit une algèbre de Lie σ, somme des deux sous-algèbres abéliennes σ^+ et σ^-. Pour u et v dans σ posons :

$$u \,.\, v = [u^+, v^-]^+ + [u^-, v^+]^- .$$

Cela définit un produit $\mathcal{P}_1$ sur σ tel que $u \,.\, v - v \,.\, u = [u, v]$.

COROLLAIRE. – *Une algèbre de Lie, sans centre, est sous-jacente à un produit $\mathcal{P}_1$ si et seulement si son idéal b est l'algèbre des commutateurs d'un produit $\mathcal{P}_1$.*

Ceci est une conséquence immédiate du théorème et de la proposition précédente.

c) *Algèbre de Lie b, sous-jacente à un produit $\mathcal{P}_1$ dont l'algèbre h_b n'est formée que d'endomorphismes nilpotents.*

L'algèbre b, apparue dans la décomposition énoncée dans le théorème, est sans centre et sous-jacente à un produit $\mathcal{P}_1$ s'il en est de même de g. Les endomorphismes appartenant à h_b sont tous nilpotents. Ils engendrent une sous-algèbre associative de l'algèbre des endomorphismes de b, notée h_b^* et appelée l'algèbre enveloppe associative de h_b.

$h_b^*(b)$ désigne l'espace engendré par les vecteurs $A^*(x)$, $x \in b$ et $A^* \in h_b^*$. On pose

$$b_0 = b\,,\ b_1 = h_b^*(b)\,,\ b_2 = (h_b^*)^2(b)\ ,\ldots,\ b_{N-1} = (h_b^*)^{N-1}(b)\,,\ b_N = 0$$

N est l'entier tel que, toute composition de N éléments de h_b soit nulle. b_{N-1} est évidemment un sous-espace de $\bigcap_{\varphi \in h_b} \operatorname{Ker} \varphi$.

Soit :

$$\alpha_i = \varphi_i \circ \varphi_{i-1} \circ \ldots \circ \varphi_1(\alpha) \quad \alpha \in b \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_i \in h_b$$

$$\beta_j = \varphi_j' \circ \varphi'_{-1} \circ \ldots \circ \varphi_1'(\beta) \quad \beta \in b \quad \varphi_1', \ldots, \varphi_j' \in h_b$$

$$[\alpha_i, \beta_j] = [\varphi_i \circ \ldots \circ \varphi_1(\alpha), \varphi_j' \circ \ldots \circ \varphi_1'(\beta)]$$
$$= (-1)^{i-1} [\alpha, \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_i \circ \varphi_j' \circ \ldots \circ \varphi_1(\beta)].$$

Si $i + j \geqslant N$, alors

$$\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_i \circ \varphi_j' \circ \ldots \circ \varphi_1'(\beta) = 0 \quad \text{et} \quad [\alpha_i, \beta_j] = 0.$$

Conséquences

- l'espace b_i est abélien pour $i \geqslant [N/2] + 1$
- $[b_{[N/2]+1}, b_{[N/2]}] = 0$ d'où $b_{[N/2]+1}$ est abélien
- $[b_{N-1}, b_1] = 0$ et $[b_{N-i}, b_i] = 0$.

L'algèbre de Lie b est sous-jacente à un produit $\mathcal{P}_1$, donc

$$u, v \in b \quad [u, v] = L_u v - L_v u \quad \text{avec} \quad L_u \in h_b.$$

Si, $u, v \in b_i$, $L_u v \in b_{i+1}$ et $L_v u \in b_{i+1}$, donc

$$[u, v] \in b_{i+1} \subset b_1.$$

Les espaces b_i sont des sous-algèbres de b et de plus les quotients b_i / b_{i+1} sont abéliens. Les b_i sont mêmes des idéaux de b. Ceci provient du fait que $\operatorname{der}(g)$ est inclus dans le normalisateur de h_g (donc $[\operatorname{ad}_X, \varphi] \in h_g$ quand $\varphi \in h_g$) ; l'égalité

$$[X, \varphi v] = \varphi[X, v] + [\operatorname{ad}_X, \varphi] v, \quad \varphi \in h_g$$

se généralisant : si $\psi \in h_g^*$ $[X, \psi v] = \psi[X, v] + \operatorname{ad}_X(\psi)(v)$ où ad_X est considérée comme la transformation de h_g^* telle que : $\operatorname{ad}_X(\psi) = [\operatorname{ad}_X, \psi]$ si $\psi \in h_g$. Cette transformation envoie : $(h_g^*)^i$ dans $(h_g^*)^i$ donc $[b, b_i] \subset b_i$.

Puisque, pour $u, v \in b$ on a $[u, v] = L_u v - L_v u$, l'idéal dérivé b' de b est inclus dans b_1. De même, le $k^{\text{ième}}$ idéal dérivé de b, $b^{(k)}$, est contenu dans b_k. En particulier pour $k = N$, $b^{(N)}$ est contenu dans $b_N = 0$ et, par conséquent, l'ordre de résolubilité de b est inférieur ou égal à N. De même l'inclusion de $b^{([N/2]+1)}$

dans $b_{[N/2]+1}$ entraîne que l'ordre de résolubilité de b est inférieur ou égal à $[N/2] + 2$.

Mais nous avons montré que $[b_{N-1}, b_1] = 0$ donc, $[b_{N-1}, b'] = 0$, c'est-à-dire b_{N-1} est inclus dans le centralisateur de b', noté $\complement\, b'$. De même $[b_{N-i}, b_i] = 0$ entraîne $b_{N-i} \subset \complement\, b^{(i)}$.

Nous allons prouver que la nullité du centre de b entraîne que b_{N-1} est inclus dans b^∞ (intersection des idéaux centraux descendants). Nous venons de voir que $b_{N-1} \subset \complement\, b' \subset \complement\, b^\infty$. Or, Schenkman a montré que toute algèbre de Lie se décompose sous la forme $b = b^\infty + k$ où k est une sous-algèbre nilpotente de b. Soit $\ell = \complement\, b^\infty + k$; cette sous-algèbre de b s'écrit aussi $\ell = \ell^\infty + k_1$. Mais $\ell^\infty = (\complement\, b^\infty + k)^\infty \subset \complement\, b^\infty$ puisque k est nilpotent et $\complement\, b^\infty$ est un idéal de b. Nous avons $b = b^\infty + k$ et $\ell = \complement\, b^\infty + k$ donc $b = b^\infty + \ell = b^\infty + (\ell^\infty + k_1)$. Or $\ell^\infty \subset b^\infty$ puisque ℓ est une sous-algèbre de b donc $b = b^\infty + k_1$. On vérifie directement que $\complement\, b^\infty \cap k_1$ est un idéal de k_1. Soit c_1 le centre de k_1, vu que $b = b^\infty + k_1$, l'idéal $\complement\, b^\infty \cap c_1$ est contenu dans le centre de b, donc est nul. L'idéal $\complement\, b^\infty \cap k_1$ de l'algèbre de Lie nilpotente k_1 a nécessairement une intersection non nulle avec le centre c_1 de k_1. Ceci serait contradictoire avec $\complement\, b^\infty \cap c_1 = 0$ donc $\complement\, b^\infty \cap k_1 = 0$. Alors l'inclusion de ℓ^∞ dans $\complement\, b^\infty$ entraîne l'égalité $\ell^\infty = \complement\, b^\infty$ car $\ell = \ell^\infty + k_1$. Ainsi $\complement\, b^\infty = \ell^\infty \subset b^\infty \subset b'$. Ceci a pour conséquence que :

$$b_{N-1} \subset b^\infty \quad \text{et} \quad b_{N-1} \subset b' \cap \complement\, b' = z(b').$$

d) *Remarques sur le cas où* g *est de centre non nul.*

Considérons la suite centrale ascendante de g définie comme suit

$$g^{[0]} = z(g) \qquad g^{[1]} = \{x \in g/[x, g] \subset g^{(0)}\}$$

$$g^{[i]} = \{x \in g/[x, g] \subset g^{[i-1]}\}$$

$$g^{[0]} \subset g^{[1]} \subset \ldots \subset g^{[i]} \subset \ldots \subset g^{[p]} \subset g^{[p]}$$

p désigne l'indice à partir duquel cette suite est stationnaire.

Remarquons tout d'abord que ces idéaux de Lie de g, sont des idéaux bilatères pour le produit $\mathcal{P}_1$.

$$x \in g \quad z \in g \quad y \in g^{[i]}, \quad [x . y, z] = [x . z, y].$$

Par définition de $g^{[i]}$, $[x . z, y] \in g^{[i-1]}$, donc il en est de même de $[x \, . \, y \, , z]$ et $x \, . \, y \in g^{[i]}$. Mais $yx - xy = [y \, , x]$ implique $y \, . \, x \in g^{[i]}$. Ainsi, le produit $\mathcal{P}_1$ induit un produit de même nature sur le quotient $g/g\,[p]$ qui est soit nul (g nilpotent) soit une algèbre de Lie, sans centre, notée k.

Le théorème et la proposition du paragraphe 3.a) seront alors applicables sur l'algèbre k. Cependant, si k est sous-jacente d'un produit $\mathcal{P}_1$ il peut ne pas en être de même pour une algèbre extension centrale de k. Soit $0 \longrightarrow z \longrightarrow g \longrightarrow k \longrightarrow 0$ une extension centrale de k. Un produit $\mathcal{P}_1$

$$(\mathrm{L}_x y - \mathrm{L}_y x = [x \, , y] \, , \; [\mathrm{L}_x y \, , z] = [\mathrm{L}_x z \, , y])$$

se relèvera en une algèbre $\mathcal{P}_1$ sur g, si et seulement si

$$f(\mathrm{L}_x y \, , z) = f(\mathrm{L}_x z \, , y) \, ,$$

f désignant un cocycle de l'extension. On vérifie aisément que cette propriété porte en fait sur la classe de cohomologie de l'extension. L'exemple 1. b) est une extension centrale d'une algèbre de Lie de type σ, qui n'est sous-jacente à aucun produit $\mathcal{P}_1$.

Exemple 1. – Soit g l'algèbre de Lie sur le corps K (K = R ou C), de base $(e_1 \, , e_2 \, , e_3 \, , e_4)$ dont le crochet est défini comme suit :

$$\begin{array}{lll} [e_1 \, , e_2] = (\alpha - 1) e_2 & [e_2 \, , e_3] = e_4 & \\ [e_1 \, , e_3] = e_3 & [e_2 \, , e_4] = 0 & \\ [e_1 \, , e_4] = \alpha e_4 & [e_3 \, , e_4] = 0 & \alpha \in \mathrm{K} \end{array}$$

avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. g est sans centre, résoluble d'ordre trois et l'algèbre h_g est composée des endomorphismes nilpotents de la forme

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha \mathrm{C} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \mathrm{B} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{K} \, .$$

Construisons la suite b_i associée à h_g :

$$b_3 = \{0\} \quad b_2 = \{e_4\} \quad b_1 = \{e_4 \, , e_3 \, , e_2\} \quad b_0 = g \, .$$

Ces sous-espaces vérifient toutes les propriétés requises pour que b puisse être sous-jacente à un produit $\mathcal{P}_1$.

En effet, $b_2 \subset g' \cap \complement g'$ et même b_2 coïncide avec le centre de g' qui est le deuxième idéal dérivé.

$$b_1 \subset \complement g^{(2)}$$

et, en plus

$$b_1 = \complement g^{(2)} = g'$$

b_2 est bien un idéal dans b_1 et b_1 un idéal dans b. Aussi

$$[b_1, b_1] \subset b_2 = g^{(2)}.$$

Il existe effectivement des produits $\mathcal{P}_1$ sur g; ils sont tous donnés par

$$\mathrm{L}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\mathrm{C} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\mathrm{B} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L}_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\alpha-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{B} & 0 & 1-1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{C} & -1/\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L}_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_4 \in b_2$ est un élément de $\bigcap_{\varphi \in h_g} \operatorname{Ker} \varphi$ donc tout produit $\mathcal{P}_1$ vérifie $\mathrm{L}_{e_4} x - \mathrm{L}_x e_4 = [e_4 \ \ x] \ \forall x \in g$ avec $\mathrm{L}_x e_4 = 0$, donc $\mathrm{L}_{e_4} = \mathrm{ad}_{e_4}$.

Exemple 2. – Considérons l'algèbre de Lie de base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dont le crochet est défini comme à l'exemple 1 mais avec $\alpha = 0$. Cette algèbre g possède un centre $\mathrm{Z}(g) = \{e_4\}$.

h_g est composée des endomorphismes dont l'écriture matricielle dans la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & u & v & w \end{pmatrix}$$

Nous voyons que h_g contient des endomorphismes non nilpotents, en particulier φ celui qui est l'identité sur le centre de g et nul partout ailleurs. La décomposition primaire de g relativement à cet élément φ de h_g donne

$$g = \sigma \oplus Z \quad \text{ou} \quad \sigma = \{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{et} \quad Z = \{e_4\}.$$

σ n'est pas une sous-algèbre de Lie de g puisque $[e_2, e_3] \notin \sigma$ mais est une algèbre de Lie munie du crochet :

$$[\![x, y]\!] = [x, y]_\sigma \quad x, y \in \sigma$$

$$(\text{i.e. } [\![e_2, e_3]\!] = 0, \ [\![e_1, e_2]\!] = -e_2, \ [\![e_1, e_3]\!] = e_3).$$

h_σ est formé des endomorphismes représentés dans la base (e_1, e_2, e_3) par les matrices :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & -a & 0 \\ h & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad a, d, h \in \mathrm{K}.$$

Cette algèbre de Lie σ est 2-résoluble et s'écrit $g = g' + a$ où g' est l'idéal dérivé qui est abélien et $a = \{e_2\}$ un supplémentaire abélien aussi. σ est donc une algèbre de Lie de "type σ". g n'est qu'une extension centrale de σ par K : $0 \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow g \longrightarrow \sigma \longrightarrow 0$. Aucun produit $\mathcal{P}_1$ de σ ne s'étend à g ; cette dernière n'est donc pas une algèbre de Lie sous-jacente à un produit $\mathcal{P}_1$. Ceci peut être vu géométriquement car h_g n'est formé que d'endomorphismes à valeur dans le centre (i.e. $h_g = h_g^0$) donc $(\mathrm{ad}\,(g))^{(1)}$, isomorphe à h_g/h_g^0, est nul. Il s'ensuit que la G-structure $\mathrm{E}(\mathcal{G}, \mathrm{Int}(g))$ n'est pas 2-plate.

Exemple 3. – Considérons l'algèbre de Lie, toujours définie comme à l'exemple 1 mais maintenant avec $\alpha = 1$. Elle est 2-résoluble sans centre donc de type σ. Dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) les opérateurs symétriques du crochet sont représentés par les matrices :

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & c & 0 \\ b & -a & d & c \\ f & 0 & a & 0 \\ j & f & -b & a \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d, f, j \in \mathrm{K}.$$

Nous apercevons un élément inversible de h_g ($a = 1$, et tous les autres coefficients nuls).

e) *2-platitude de la structure adjointe.*

Vu l'équivalence entre la 2-platitude de la structure adjointe, $\mathrm{E}(\mathcal{G}, \mathrm{Int}(g))$ et l'existence d'un produit $\mathcal{P}_1$ auquel l'algèbre de Lie g est sous-jacente, le corollaire du théorème peut s'énoncer

PROPOSITION 1. – *La G-structure* $E(\mathcal{G}, \mathrm{Int}(g))$ *est 2-plate si et seulement si il en est de même de la structure adjointe sur* β, $E(\beta, \mathrm{Int}(b))$.

g est sans centre, b désigne l'idéal de g intervenant dans la décomposition $g = b \oplus \sigma$ et β est un sous groupe de Lie de $\mathcal{G}$ d'algèbre de Lie b.

PROPOSITION 2. – *Une algèbre de Lie sans centre telle que* $E(\mathcal{G}, \mathrm{Int}(g))$ *soit munie d'une connexion invariante sans courbure ni torsion, est une algèbre de type* $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ *avec en plus* $[\sigma^+, \sigma^-] \subset \sigma^+$.

En effet, nous avons vu dans [4] qu'une telle connexion correspond à une structure d'algèbre à associateur symétrique à gauche dont le produit est de la forme $u \,.\, v = \mathrm{ad}_{f(u)} v$ où f est un endomorphisme de g qui vérifie $[u, v] = [f(u), v] + [u, f(v)]$ et $[f[u, v], w] = [[f(u), f(v)], w]$ $u, v, w \in g$. Posons $\varphi = f - \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_g$; le centre de g étant nul on vérifie immédiatement que $\varphi \in h_g$ et $\varphi[u, v] = [\varphi u, \varphi v] - \frac{1}{4}[u, v]$. Soit α un élément du noyau de φ et $v \in g$. Par décomposition g en somme des espaces caractéristiques relatifs à φ et par utilisation de la relation (5) il vient : $[\alpha, v] = [\alpha, v_0]$ car $\alpha \in g_0$. La propriété vérifiée par φ donne $\varphi[\alpha, v] = -\frac{1}{4}[\alpha, v]$ i.e. $[\alpha, v] \in g_{-1/4}$. En utilisant Jacobi on montre alors que $[\alpha, v]$ est dans le centre de g donc que $\alpha = 0$. φ est donc un élément inversible de h_g.

Le théorème indique que g est une algèbre σ (b étant nul). Mais plus précisément, λ désignant une valeur propre arbitraire de φ, soit $u \in g_\lambda$ et $v \in g_{-\lambda}$:

$$\varphi[u, v] = [\varphi u, \varphi v] - \frac{1}{4}[u, v] = -\lambda^2 [u, v] - \frac{1}{4}[u, v].$$

D'après le lemme 1, $g_\lambda \oplus g_{-\lambda}$ est une sous-algèbre de g donc nécessairement $-\lambda^2 - 1/4 = \pm\lambda$. Cela donne pour λ les deux valeurs possibles $\lambda = -1/2$ et $\lambda = 1/2$. La relation

$$(\varphi + 1/2)[u, v] = [(\varphi + 1/2)u, (\varphi + 1/2)v]$$

entraîne : $(\varphi + 1/2)^p [u, v] = [(\varphi + 1/2)^p u, (\varphi + 1/2)^p v]$ ce qui prouve que $g_{-1/2}$ est un idéal de g. Ainsi, en posant $\sigma^+ = g_{-1/2}$ et $\sigma^- = g_{1/2}$ on a : $g = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ avec $[\sigma^+, \sigma^-] \subset \sigma^+$.

Réciproquement, si g est une algèbre de type $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ avec $[\sigma^+, \sigma^-] \subset \sigma^+$, alors g est sous-jacente à un produit symétrique à gauche adapté à l'algèbre $\mathrm{ad}(g)$ (f est alors défini comme étant la projection de g sur σ^-).

Ceci n'est qu'une autre démonstration du théorème énoncé dans [4].

Exemple. – Nous allons étudier la platitude de la structure adjointe d'un groupe de Lie dont l'algèbre est libre et nilpotente.

Une algèbre de Lie nilpotente libre de rang m et de classe c, est le quotient g/g^{c+1}, d'une algèbre de Lie libre de rang m par le $(c+1)^{\text{ième}}$ idéal de sa suite centrale descendante. On suppose $c > 2$. Une telle algèbre de Lie est graduée :

$$g = \sum_{n=0}^{n=c} g_n \quad \text{avec} \quad [g_n, g_n] \subset g_{n+n'} \quad \text{si} \quad n + n' \leqslant c$$

$g_0 = 0$ $g_1 = (\mathrm{X}_i)$ espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs X_i $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$[g_n, g_{n'}] = 0 \quad \text{si} \quad n + n' > c.$$

Cela nous permettra d'étudier les éléments de h_g et d'en déduire :

Pour une algèbre de Lie nilpotente de rang arbitraire et de classe supérieure à 2, la G*-structure* $\mathrm{E}(\mathfrak{G}, \mathrm{Int}(g))$ *n'est pas 2-plate.*

La démonstration se fait en considérant un élément arbitraire f de h_g et ses projections sur les sous-espaces g_n $\left(f = \sum_{n=0}^{n=c} f_n\right)$. On montre que les composantes f_1 et f_2 sont nulles (i.e. que f est à valeurs dans $\sum_{n=3}^{n=c} g_n$). Un produit $\mathcal{P}_1$ se caractérisant par $\mathrm{L}_u v - \mathrm{L}_v u = [u, v]$ et $\mathrm{L}_u \in h_g$ pour $u, v \in g$, on voit qu'un tel produit ne peut exister car $\mathrm{L}_u v - \mathrm{L}_v u$ est nul en projection sur g_2 alors que $[u, v] \in g_2$ et $[u, v] \neq 0$ quand u et v sont dans g_1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. ALBERT, Introduction à l'étude des variétés lisses, Thèse, Montpellier, (1974).

[2] C. BUTTIN et P. MOLINO, Théorème général d'équivalence pour les pseudo-groupes de Lie plats transitifs, *J. of Diff. Geometry,* (9) (1074), 347-354.

[3] G. GIRAUD, Note aux *C.R.A.S.* t. 288 (23 avril 1979).

[4] G. GIRAUD et A. MEDINA, Existence de certaines connexions plates invariantes sur les groupes de Lie, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, XXVII, Fasc. 4 (1977), 233-245.

[5] V. GUILLEMIN, The integrability problem for G-structures, *Trans. of Amer. Math. Soc.,* 116 (1965), 544-560.

[6] N. JACOBSON, *Lie algebras,* Interscience Publishers, (1962).

[7] P. MOLINO, Sur quelques propriétés des G-structures, *Journal of Diff. Geometry,* (7) (1972), 489-518.

[8] A. POLLACK, The integrability problem for pseudogroup structures, *J. of Diff. Geometry,* (9) (1974), 355-390.

[9] SINGER-STERNBERG, The infinite groups of Lie and Cartan, *J. Ann. Math.,* Jerusalem, 15 (1965), 1-114.

Manuscrit reçu le 22 janvier 1981.

Georges GIRAUD,
Université des Sciences & Techniques
du Languedoc
Institut de Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34060 Montpellier Cedex.