Annales de l'institut Fourier

André Lichnerowicz

Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les $*_\nu$-produits)

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 1 (1982), p. 157-209

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_1_157_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 1 (1982), 157-209

DÉFORMATIONS D'ALGÈBRES ASSOCIÉES À UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE (LES $*_\nu$-PRODUITS)

par André LICHNEROWICZ

A la mémoire de Jacques Vey qui, dans ce domaine, joua le rôle de pionnier.

INTRODUCTION

Depuis quelques années, je me suis intéressé à l'analyse des dérivations et déformations de ce qu'on peut nommer les algèbres de Lie infinies classiques. En 1974 [1] en collaboration avec M. Flato et D. Sternheimer, j'ai étudié les déformations 1-différentielles de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique (W , F) et montré leurs rapports avec la cohomologie de G. de Rham de la variété. En 1975, dans un article fondamental [2], Jacques Vey a jeté les fondements de l'étude des déformations de l'algèbre associative définie par le produit usuel des fonctions et il a établi, à partir de résultats de Gelfand-Fuks, l'existence, sur les variétés symplectiques à troisième nombre de Betti $b_3(\mathrm{W})$ nul, d'une classe importante de déformations de l'algèbre de Lie de Poisson. Ce sont les déformations de cette classe que j'ai nommées *algèbres de Lie de Vey.* Le prototype de ces déformations est fourni, dans le cas d'une variété symplectique plate, par un crochet qui n'est autre que celui introduit en 1949 par Moyal [3] dans le contexte de la quantification de Hermann Weyl-Wigner. Dans un long article [4], Bayen, Flato, Fronsdal, Sternheimer et moi-même ont montré comment les $*_\nu$-produits et les crochets qu'ils définissent fournissent une approche invariante de la mécanique quantique. Depuis lors, la théorie a été développée par différents auteurs (notamment Michel Cahen, S. Gutt, Arnal, Cortet, O.M. Neroslavsky et A.T. Vlassov) et nous-mêmes.

L'esprit du présent article est purement cohomologique et géométrique. Il est divisé en trois parties. Après avoir rappelé les fondements de la théorie et les principales propriétés des $*_\nu$-produits, on établit dans la partie I un théorème concernant l'équivalence des $*_\nu$-produits et celle des algèbres de Lie qu'ils engendrent (§ 5) et on développe la notion de $*_\nu$-produit de Vey (§ 8), tout $*_\nu$-produit étant équivalent à un $*_\nu$-produit de Vey.

La partie II est consacrée à l'existence et à l'équivalence de $*_\nu$-produits éventuellement généralisés. On établit, dans le cas où $b_3(W) = 0$, le théorème général d'existence des $*_\nu$-produits. On introduit d'autre part la notion de *$*_\nu$-produit faible* et on caractérise les algèbres de Lie engendrées à partir d'un $*_\nu$-produit faible par antisymétrisation : ce sont, à une équivalence près, les algèbres de Lie de Vey (§ 16).

Dans la partie III, on suppose qu'il existe un groupe de Lie G opérant par symplectomorphismes sur la variété symplectique (W, F) ; si (W, F) admet une connexion linéaire G-invariante, elle admet une connexion symplectique G-invariante. Si G est compact connexe et si (W, F) admet un $*_\nu$-produit, il existe sur (W, F) des $*_\nu$-produits de Vey G-invariants. Si deux tels $*_\nu$-produits G-invariants sont équivalents, ils sont invariantivement équivalents. Ce résultat s'applique immédiatement à un espace homogène symplectique. Il permet l'étude de $*_\nu$-produits de Vey G-invariants définis sur le fibré cotangent $T^*(G/H)$ d'un espace homogène G/H. Le cas du groupe T^*G défini par le fibré cotangent d'un groupe de Lie connexe compact G est analysé en détail.

Certains des résultats dont on trouvera ici, pour la première fois, des démonstrations détaillées ont été signalés ailleurs.

I. NOTION DE $*_\nu$-PRODUIT ET PRINCIPALES PROPRIETES

1. Algèbres associées à une variété symplectique.

a) Soit W une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension paire $2n$ et classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés C^∞ et nous posons pour abréger $N = C^\infty(W\,;\mathbf{R})$. Nous désignons par $b_k(W)$ le $k^{\text{ième}}$ nombre de Betti de W pour la cohomologie de G de Rham à supports non restreints.

Une *structure symplectique* est définie sur W par une 2-forme fermée F $(dF = 0)$ partout de rang $2n$. Nous notons $\mu : TW \longrightarrow T^*W$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels donné par $\mu(X) = -\,i(X)\,F$, où $i(.)$ désigne le produit intérieur ; cet isomorphisme s'étend naturellement aux tenseurs. La structure symplectique peut aussi être définie par le 2-tenseur (contravariant antisymétrique) $\Lambda = \mu^{-1}(F)$, vérifiant $[\Lambda\,,\Lambda] = 0$ au sens du crochet de Schouten [14].

Un *champ de vecteurs symplectique* est un champ de vecteurs X tel que $\mathcal{L}(X)\,F = 0$ (où $\mathcal{L}$ est la dérivation de Lie) ; c'est un automorphisme infinitésimal de la structure. Pour que X soit symplectique, il faut et il suffit que la 1-forme $\mu(X)$ soit fermée. Nous notons L l'algèbre de Lie (de dimension infinie) définie par les champs de vecteurs symplectiques. Si $X\,,Y \in L$, on a :

$$\mu([X\,,Y]) = d\; i(\Lambda)\;(\mu(X) \wedge \mu(Y)). \tag{1.1}$$

Soit L^* le sous-espace de L défini par les images inverses des 1-formes exactes $(X_u = \mu^{-1}(du)\,;\ u \in N)$. Un élément de L^* est *un champ de vecteurs hamiltonien.* Considérons l'idéal dérivé $[L\,,L]$ de L : chaque élément de $[L\,,L]$ est somme finie de crochets d'éléments de L. On a établi que $[L\,,L] = L^*$ et on voit naturellement que $\dim . L/L^* = b_1(W)$. Nous sommes conduits à introduire sur N le crochet de Poisson :

$$\{u\,,\,v\} = i(\Lambda)\;(du \wedge dv) = \mathcal{L}(X_u)\,v = P(u\,,v) \tag{1.2}$$

où l'opérateur de Poisson P est un opérateur bidifférentiel d'ordre 1 en chaque argument, nul sur les constantes. On sait que P définit sur N une structure d'algèbre de Lie et $(N\,,P)$ est appelée l'algèbre de Lie de Poisson de la variété $(W\,,F)$. Comme $X_{\{u,v\}} = [X_u\,,X_v]$ on a un homomorphisme naturel de $(N\,,P)$ sur L^*.

b) *Un champ de vecteurs conformément symplectique* est un champ de vecteurs X tel que $(\mathcal{L}(X) + k(X))\,F = 0$ (où $k(X) \in \mathbf{R}$). Nous notons L^c l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformément symplectiques. Si F *n'est pas exacte* (en particulier si W est compacte), on a $L^c = L$; si F *est exacte,* on a $\dim . L^c/L = 1$ et $[L^c\,,L^c] = L$ [7]. Avez et moi-même avons établi [8] :

THEOREME. – *Toute dérivation* D *de l'algèbre de Lie* L (resp. L*) *est donnée par* $D : X \longrightarrow [Z, X]$, *où* $Z \in L^c$; *toute dérivation de* L^c *est intérieure.*

En ce qui concerne l'algèbre de Lie de Poisson, la situation est plus compliquée. On a :

THEOREME. –

1) *Si* (W, F) *est non compacte, toute dérivation de* (N, P) *est donnée par* $Du = (\mathcal{L}(X) + k(X))u$ *où* $X \in L^c$.

2) *Si* (W, F) *est compacte, toute dérivation de* (N, P) *est donnée par* $Du = \mathcal{L}(X)u + k\int_N u F^n$ *où* $X \in L$ *et* $k \in \mathbf{R}$.

3) *Dans tous les cas, les dérivations de* (N, P) *nulles sur les constantes sont données par* $Du = \mathcal{L}(X)u$, *où* $X \in L$.

c) L'espace N est naturellement muni de deux structures algébriques : une structure d'*algèbre associative* (en outre commutative) donnée par le produit usuel des fonctions et une structure d'*algèbre de Lie* donnée par le crochet de Poisson. Il est naturel d'étudier s'il est possible de *déformer* d'une manière cohérente ces deux lois algébriques. De telles déformations jouent un rôle important dans une approche invariante de la Mécanique quantique [4].

2. Notion de $*_\nu$-produit.

a) Soit $E(N;\nu)$ l'espace des fonctions formelles en $\nu \in \mathbf{R}$ à coefficients dans N ; ν est appelé le paramètre de déformation. Une déformation différentielle formelle de l'algèbre associative $(N, \cdot)$ est donnée par une application bilinéaire $N \times N \longrightarrow E(N;\nu)$ décrite par la série formelle :

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u, v) = u \,.\, v + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u, v) \qquad (2.1)$$

qui vérifie formellement l'identité d'associativité :

$$(u *_\nu v) *_\nu w = u *_\nu (v *_\nu w) \qquad (u, v, w \in N). \qquad (2.2)$$

Les $C_r (r \geqslant 1)$ sont ici des applications bilinéaires différentiables $C_r : N \times N \longrightarrow N$; (2.1) définit sur $E(N;\nu)$ une structure d'algèbre associative qui est dite une *algèbre associative formelle* obtenue par déformation. Nous n'envisageons ici que des déformations associatives de la forme

$$u *_\nu v = u \,.\, v + \nu\, P(u\,,v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u\,,v) \qquad (2.3)$$

où les C_r satisfont l'hypothèse suivante :

Hypothèse de parité. – *C_r est paire en $u\,,v$ pour r pair, impaire en $u\,,v$ pour r impair.*

S'il en est ainsi et si les C_r sont *nulles sur les constantes,* nous dirons que *(2.3) définit un $*_\nu$-produit sur* (W, F). On a alors :

$$u *_{-\nu} v = v *_\nu u \qquad u *_\nu 1 = 1 *_\nu u = u\,. \qquad (2.4)$$

b) De même, une déformation différentielle formelle de l'algèbre de Lie de Poisson (N, P) est donnée par une application bilinéaire alternée $N \times N \longrightarrow E(N\,;\lambda)$, où $\lambda \in \mathbf{R}$ est le paramètre de déformation, soit

$$[u\,,v]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u\,,v) = P(u\,,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u\,,v) \qquad (2.5)$$

qui vérifie formellement l'identité de Jacobi. Les C_{2r+1} $(r \geqslant 1)$ sont des applications bilinéaires différentiables *alternées* de $N \times N \longrightarrow N$; (2.5) définit sur $E(N\,;\lambda)$ une structure d'algèbre de Lie qui est dite une algèbre de Lie formelle obtenue par déformation de l'algèbre de Lie de Poisson. Nous n'envisageons ici que des algèbres de Lie formelles telles que C_{2r+1} soit *nulle sur les constantes* pour $r \geqslant 0$.

Un $*_\nu$-produit (2.3) donne naissance par antisymétrisation à une algèbre de Lie formelle (2.5) satisfaisant l'hypothèse précédente, avec, pour $\lambda = \nu^2$:

$$[u\,,v]_\lambda = (2\nu)^{-1}\,(u *_\nu v - v *_\nu u)\,. \qquad (2.6)$$

3. Cohomologie de Hochschild et déformations associatives.

Rappelons et adaptons les éléments principaux de la théorie de Gerstenhaber [9] concernant les déformations des structures algébriques, en particulier des algèbres associatives.

a) Soit W une variété différentiable arbitraire et

$$(N = C^\infty(W\,;\mathbf{R}), \cdot)$$

l'algèbre associative définie par le produit usuel des fonctions. Nous raisonnons sur cette algèbre. Dérivations et déformations procèdent d'une même cohomologie que nous appelons conventionnellement *cohomologie de Hochschild* de $(N, \cdot)$. Une p-cochaîne de $(N, \cdot)$ est une application p-linéaire de N^p dans N. Le cobord de Hochschild de la p-cochaîne C est la $(p+1)$-cochaîne $\tilde{\partial} C$ définie par :

$$\begin{aligned}\tilde{\partial} C(u_0, \dots, u_p) = u_0\, C(u_1, \dots, u_p) &- C(u_0 u_1, u_2, \dots, u_p) \\ &+ C(u_0, u_1 u_2, \dots, u_p) + (-1)^p C(u_0, u_1, \dots, u_{p-1} u_p) \\ &+ (-1)^{p+1} C(u_0, \dots, u_{p-1})\, u_p\,. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

L'associativité implique $\tilde{\partial}^2 = 0$ pour $p \geqslant 1$. Un 1-cocycle de $(N, .)$ est une dérivation de l'algèbre, c'est-à-dire un champ de vecteurs.

Une p-cochaîne est dite *d-différentielle* $(d \geqslant 0)$ si elle est définie par un opérateur multidifférentiel d'ordre maximum d en chaque argument. Si T est un endomorphisme de N (1-cochaîne) qui est $(d+1)$-différentiel, $\tilde{\partial} T$ est d-différentiel. On montre [10] qu'inversement on a :

PROPOSITION. – *Si* T *est un endomorphisme de* N *tel que* $C = \tilde{\partial} T$ *soit d-différentielle* $(d \geqslant 0)$, T *est lui-même* $(d+1)$-*différentiel.*

On note que si $\tilde{\partial} T$ est nulle sur les constantes, il en est de même pour T. Nous désignons par $\tilde{H}^p(N; N)$ le p^e espace de cohomologie de Hochschild pour le complexe défini par les cochaînes différentielles; J. Vey a établi au moyen de résultats de Gelfand et Fuks le théorème suivant [2].

THEOREME (Vey). – $\tilde{H}^p(N; N)$ *est isomorphe à l'espace des p-tenseurs contravariants antisymétriques de la variété* W.

Un tel tenseur définit un *opérateur multidifférentiel antisymétrique,* d'ordre 1 en chaque argument, avec lequel il peut être identifié. L'énoncé de Vey peut être vérifié par des moyens élémentaires dans les cas $p = 2$ et $p = 3$ qui importent seuls ici.

b) Considérons une application bilinéaire quelconque (3.1) de $N \times N$ dans $E(N; \nu)$; on a pour $u, v, w \in N$:

$$(u *_\nu v) *_\nu w - u *_\nu (v *_\nu w) = \sum_{t=1}^{\infty} \nu^t \tilde{D}_t(u, v, w) \qquad (3.2)$$

où $\widetilde{D}_t$ est la 3-cochaîne :

$$\widetilde{D}_t(u, v, w) = \sum_{r+s=t} (C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w))) \; (r, s \geqslant 0). \tag{3.3}$$

Nous sommes conduits à poser :

$$\widetilde{E}_t(u, v, w) = \sum_{r+s=t} (C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w))) \; (r, s \geqslant 1) \tag{3.4}$$

et nous avons l'identité :

$$\widetilde{D}_t \equiv \widetilde{E}_t - \widetilde{\partial} C_t .$$

Si (2.1) est limité à l'ordre q, on a une déformation d'ordre q si la relation d'associativité est satisfaite à l'ordre $(q+1)$ près. S'il en est ainsi, $\widetilde{E}_{q+1}$ est automatiquement un 3-cocycle de $(N, .)$. Pour qu'on puisse trouver une 2-cochaîne C_{q+1} telle que $\widetilde{E}_{q+1} - \widetilde{\partial} C_{q+1} = 0$, il faut et il suffit que $\widetilde{E}_{q+1}$ soit exact. Ainsi $\widetilde{E}_{q+1}$ définit une classe de cohomologie, élément de $\widetilde{H}^3(N ; N)$, qui est *l'obstruction à l'ordre* $(q+1)$ à la construction d'une déformation.

Une déformation d'ordre 1 est dite une déformation infinitésimale. On a $\widetilde{E}_1 = 0$ et ainsi seulement $\widetilde{\partial} C_1 = 0$; C_1 est un 2-cocycle de $(N, .)$. Sur une variété symplectique (W, Λ), P correspondant au 2-tenseur Λ est un *2-cocycle de Hochschild* qui est non exact ; c'est pourquoi nous avons pu prendre $C_1 = P$ dans (2.3).

c) Considérons une série formelle en ν

$$T_\nu = \sum_{s=0}^{\infty} \nu^s T_s = \mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s \tag{3.5}$$

où les $T_s (s \geqslant 1)$ sont des endomorphismes de N ; T_ν opère naturellement sur $E(N ; \nu)$. Considérons une autre application bilinéaire $N \times N \longrightarrow E(N ; \nu)$ correspondant à la série formelle :

$$u *'_\nu v = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C'_r(u, v) \tag{3.6}$$

où les C'_r sont encore des 2-cochaînes différentielles. Supposons que (3.5), (3.6) soient telles qu'on ait formellement l'identité :

$$T_\nu(u *'_\nu v) = T_\nu u *_\nu T_\nu v . \tag{3.7}$$

Cette identité peut se traduire par :

$$C'_t - C_t + \widetilde{G}_t = \widetilde{\partial} T_t \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

où l'on a posé $\widetilde{G}_1 = 0$ et :

$$\widetilde{G}_t(u, v) = \sum_{r+s=t} T_s C'_r(u, v) - \sum_{s+s'=t} T_s u, T_{s'} v - \sum_{r+s=t} (C_r(T_s u, v) + C_r(u, T_s v)) - \sum_{r+s+s'=t} C_r(T_s u, T_{s'} v) \tag{3.9}$$

avec $r, s, s' \geqslant 1$. On note qu'il résulte de la proposition du a) que les $T_s (s \geqslant 1)$ sont nécessairement des opérateurs différentiels. A partir de formules universelles, on établit par récurrence :

PROPOSITION. – *La déformation associative (2.1) étant donnée, toute série formelle (3.5), où les* $T_s (s \geqslant 1)$ *sont des opérateurs différentiels, engendre une application bilinéaire unique (3.6) vérifiant (3.7); cette application est une nouvelle déformation associative qui est dite équivalente à (2.1). En particulier une déformation est dite triviale si elle est équivalente à la déformation identité* ($C_r = 0$ *pour* $r \geqslant 1$).

Nous traduisons (3.7) en disant que T_ν transforme $*'_\nu$ en $*_\nu$. Si deux déformations sont équivalentes à l'ordre q, $(C'_{q+1} - C_{q+1} + \widetilde{G}_{q+1})$ est automatiquement un 2-cocycle. Sa classe de cohomologie, élément de $\widetilde{H}^2(N ; N)$ est *l'obstruction à l'équivalence à l'ordre* $(q + 1)$. En particulier deux déformations infinitésimales définies respectivement par les 2-cocycles C'_1 et C'_1 sont équivalentes si et seulement si $(C'_1 - C_1)$ est exact. S'il y a équivalence entre $*_\nu$-produits, les $T_s (s \geqslant 1)$ sont *nuls sur les constantes.*

4. Cohomologie de Chevalley et déformation d'algèbres de Lie.

a) D'une manière symétrique, dérivations et déformations d'une algèbre de Lie procèdent d'une même cohomologie, la cohomologie de l'algèbre de Lie à valeur dans l'algèbre même et correspondant à la représentation adjointe ; nous l'appelons *cohomologie de Chevalley* de l'algèbre de Lie.

Soit (W, F) une variété symplectique et (N, P) son algèbre de Poisson. Une p-cochaîne de (N, P) est une application p-linéaire *alternée* de N^p dans N, les 0-cochaînes s'identifiant aux éléments de N. Le cobord de Chevalley de la p-cochaîne C est la $(p + 1)$-cochaîne ∂C donnée par

$$\partial C(u_0, \ldots, u_p) = \epsilon_{0\ldots p}^{\lambda_0\ldots\lambda_p} \Big(\frac{1}{p!} \{u_{\lambda_0}, C(u_{\lambda_1}, \ldots, u_{\lambda_p})\} - \frac{1}{2(p-1)!} C(\{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\}, u_{\lambda_2}, \ldots, u_{\lambda_p}) \Big) \quad (4.1)$$

où $u_\lambda \in N$ et où ϵ est l'indicateur antisymétrique de Kronecker. Un 1-cocycle de (N, P) est une dérivation, un 1-cocycle exact une dérivation intérieure. En ce qui concerne le caractère d-différentiel d'une cochaîne C, on a une définition semblable à celle concernant le complexe de Hochschild, mais on suppose $d \geqslant 1$; si C est différentielle, ∂C est aussi d-différentielle. On a inversement la proposition suivante [1] :

PROPOSITION. – *Si* C *est un 2-cocycle d-différentiel* $(d \geqslant 1)$ *et exact de* (N, P), *il existe un opérateur différentiel* T *d'ordre d tel que* $C = \partial T$.

b) La cohomologie de Chevalley joue exactement le même rôle pour les déformations d'algèbre de Lie que la cohomologie de Hochschild pour les déformations d'algèbres associatives. Considérons une application bilinéaire alternée $N \times N \longrightarrow E(N ; \lambda)$ donnée par :

$$[u, v]_\lambda = P(u, v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r B_r(u, v) \quad (4.2)$$

où les B_r sont des 2-cochaînes différentielles de Chevalley. On a pour $u, v, w \in N$:

$$S[[u, v]_\lambda, w]_\lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda^t D_t(u, v, w) \quad (4.3)$$

où S est la sommation après permutation circulaire et où D_t est la 3-cochaîne

$$D_t(u, v, w) = \sum_{r+s=t} S\, B_r(B_s(u, v), w) \quad (r, s \geqslant 0). \quad (4.4)$$

Si l'on pose :

$$E_t(u, v, w) = \sum_{r+s=t} S\, B_r(B_s(u, v), w) \quad (r, s \geqslant 1) \quad (4.5)$$

on a l'identité

$$D_t \equiv E_t - \partial B_t$$

et des considérations semblables à celles de (§ 3.b) sont valables. De même considérons la série formelle en λ

$$T_\lambda = \mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s \tag{4.6}$$

où les $T_s (s \geqslant 1)$ sont des opérateurs différentiels. Considérons une application alternée $N \times N \longrightarrow E(N ; \lambda)$ donnée par :

$$[u , v]'_\lambda = P(u , v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r B'_r(u , v) \tag{4.7}$$

où les B_r sont encore des 2-cochaînes différentielles. Supposons qu'il existe T_λ tel que :

$$T_\lambda [u , v]'_\lambda = [T_\lambda u , T_\lambda v]_\lambda . \tag{4.8}$$

Cette identité peut se traduire par :

$$B'_t - B_t + G_t = \partial T_t \qquad t = (1 , 2 , \ldots) \tag{4.9}$$

où l'on a posé $G_1 = 0$ et

$$\begin{aligned} G_t(u , v) = & \sum_{r+s=t} T_s B'_r(u , v) - \sum_{s+s'=t} \{T_s u , T_{s'} v\} \\ & - \sum_{r+s=t} (B_r(T_s u , v) + B_r(u , T_s v)) - \sum_{r+s+s'=t} B_r(T_s u , T_{s'} v) \end{aligned} \tag{4.10}$$

avec $r , s , s' \geqslant 1$. Des considérations semblables à celles de (§ 3.c) sont valables. Pour une algèbre de Lie formelle pour laquelle les B_r sont *nulles sur les constantes*, nous réservons le nom d'équivalence au cas où, dans (4.8), les T_s sont aussi *nuls sur les constantes.* Pour des T_s non nuls sur les constantes, nous traduisons (4.8) en disant qu'il y a *équivalence faible.*

5. Algèbres de Lie formelles et $*_\nu$–produits. Unicité et équivalence.

a) Considérons l'algèbre de Lie formelle (2.5) qui est engendrée par anti-symétrisation par le $*_\nu$-produit (2.1) (avec $\lambda = \nu^2$). Nous allons établir que si (2.5) est donnée, le $*_\nu$-produit correspondant est unique. Nous utilisons à cet effet le lemme suivant [10].

LEMME. – *Soit* M *un opérateur bidifférentiel pair, nul sur les constantes. La relation*

$$P(M(u , v) , w) + M(P(u , v) , w) - P(u , M(v , w)) - M(u , P(v , w)) = 0 \tag{5.1}$$

implique $M = 0$.

Considérons le $*_\nu$-produit (2.1) et un autre $*_\nu$-produit, soit

$$u *'_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C'_r(u, v) = uv + \nu P(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C'_r(u, v) \quad (5.2)$$

qui engendrent la même algèbre de Lie. On a $C'_{2r+1} = C_{2r+1}$ pour tout r. Procédons par récurrence ; nous supposons que $C'_{2r} = C_{2r}$ pour $0 \leqslant r \leqslant (t-1)$ (avec $t \geqslant 1$) et nous posons

$$M_{2t} = C'_{2t} - C_{2t}$$

où M_{2t} est un opérateur bidifférentiel pair, nul sur les constantes. On a avec des notations évidentes

$$\widetilde{\partial} C_{2t+1} = \widetilde{E}_{2t+1} \qquad \widetilde{\partial} C_{2t+1} = \widetilde{E}'_{2t+1}$$

et par suite :

$$\widetilde{E}'_{2t+1} - \widetilde{E}_{2t+1} = 0 . \quad (5.3)$$

On peut écrire :

$$\widetilde{E}_{2t+1}(u, v, w) = \sum_{r+s=t} (C_{2r+1}(C_{2s}(u, v), w) + C_{2s}(C_{2r+1}(u, v), w))$$
$$- \sum_{r+s=t} (C_{2r+1}(u, C_{2s}(v, w)) + C_{2s}(u, C_{2r+1}(v, w))) \; (r \geqslant 0, \; s \geqslant 1).$$

Il résulte de l'hypothèse de récurrence que (5.3) peut s'écrire :

$$P(M_{2t}(u, v), w) + M_{2t}(P(u, v), w) - P(u, M_{2t}(v, w))$$
$$- M_{2t}(u, P(v, w)) = 0 . \quad (5.4)$$

On voit que $M_2 = C'_2 - C_2$ satisfait l'hypothèse du lemme et que, par suite, $C'_2 = C_2$. On déduit de l'hypothèse de récurrence et du lemme que $C'_{2t} = C_{2t}$ et $*'_\nu$ coïncide nécessairement avec $*_\nu$. On a :

THEOREME D'UNICITE. — *Si une algèbre de Lie formelle (2.5), où les C_{2r+1} sont nulles sur les constantes est engendrée par un $*_\nu$-produit, ce $*_\nu$-produit est unique.*

Considérons maintenant deux produits tels que, pour tout $u \in N$:

$$u *'_\nu u = u *_\nu u . \quad (5.5)$$

On a pour tout $u, v \in N$:

$$u *'_\nu v + v *'_\nu u = u *_\nu v + v *_\nu u$$

c'est-à-dire $C'_{2r} = C_{2r}$ pour tout r. Un raisonnement analogue montre que nécessairement $C'_{2r+1} = C_{2r+1}$. On a :

PROPOSITION. – *Deux* $*_\nu$*-produits tels que* $u *'_\nu u = u *_\nu u$, *pour tout* $u \in \mathrm{N}$, *coïncident.*

b) Considérons un automorphisme *de l'espace* $\mathrm{E}(\mathrm{N}\,;\nu)$:

$$\mathrm{A}_\nu = \mathrm{A}_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s \mathrm{A}_s \tag{5.6}$$

où A_0 est un automorphisme et les $\mathrm{A}_s (s \geqslant 1)$ des endomorphismes de N ; si $\mathrm{A}_0 = \mathrm{Id}$, on dit que A_ν est *à partie principale triviale.* Donnons-nous un $*_\nu$-produit ; A_ν est un automorphisme de ce $*_\nu$-produit si l'on a :

$$\mathrm{A}_\nu(u *_\nu v) = \mathrm{A}_\nu u *_\nu \mathrm{A}_\nu v\,. \tag{5.7}$$

Nous notons $\mathrm{Aut}(*_\nu)$ le groupe des automorphismes de $*_\nu$, $\mathrm{Aut}_t(*_\nu)$ le sous-groupe invariant de $\mathrm{Aut}(*_\nu)$ défini par les automorphismes à partie principale triviale. Si $\mathrm{A}_\nu \in \mathrm{Aut}_t(*_\nu)$, les $\mathrm{A}_s (s \geqslant 1)$ sont nécessairement des opérateurs différentiels. Les groupes $\mathrm{Aut}(*_\nu)$ et $\mathrm{Aut}_t(*_\nu)$ ont été étudiés dans [10].

Nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME. – *Tout automorphisme* A_ν *à partie principale triviale de l'espace* $\mathrm{E}(\mathrm{N}\,;\nu)$ *admet une racine carrée unique à partie principale triviale.*

En effet si $\mathrm{A}_\nu = \mathrm{Id} + \Sigma\, \nu^s \mathrm{A}_s$ est un tel automorphisme de $\mathrm{E}(\mathrm{N}\,;\nu)$, étudions s'il existe un autre automorphisme $\mathrm{B}_\nu = \mathrm{Id} + \Sigma\, \nu^s \mathrm{B}_s$ tel que :

$$\mathrm{B}_\nu^2 = \mathrm{A}_\nu\,. \tag{5.8}$$

Cette identité se traduit par :

$$2\mathrm{B}_t = \mathrm{A}_t - \sum_{s+s'=t} \mathrm{B}_s \mathrm{B}_{s'} \qquad (s\,,s' \geqslant 1)\,. \tag{5.9}$$

Les relations (5.9) déterminent B_ν par récurrence d'une manière unique. Nous noterons $\mathrm{A}_\nu^{1/2}$ l'automorphisme B_ν de $\mathrm{E}(\mathrm{N}\,;\nu)$ vérifiant (5.8).

Cela posé, considérons deux star-produits équivalents $*_\nu$ et $*'_\nu$ et soit T_ν un opérateur d'équivalence transformant $*'_\nu$ en $*_\nu$. On a :

$$\mathrm{T}_\nu(u *'_\nu v) = \mathrm{T}_\nu u *_\nu \mathrm{T}_\nu v \qquad (u\,,v \in \mathrm{N})\,.$$

En changeant ν en $-\nu$, il vient :

$$T_{-\nu}(v *'_\nu u) = T_{-\nu}v *_\nu T_{-\nu}u \qquad (u, v \in N).$$

On voit que $T_{-\nu}$ est aussi un opérateur d'équivalence transformant $*'_\nu$ en $*_\nu$. Par suite $A_\nu = T_{-\nu} T_\nu^{-1}$ est *un automorphisme de* $*_\nu$ à partie principale triviale vérifiant :

$$A_{-\nu} = A_\nu^{-1}. \tag{5.10}$$

Introduisons l'automorphisme $A_\nu^{1/2}$ de l'espace $E(N; \nu)$. Il résulte de (5.10) et du lemme que l'on a avec des notations évidentes :

$$A_{-\nu}^{1/2} = A_\nu^{-1/2}.$$

Si $A_\nu^{1/2}$ transforme $*_\nu$ en un produit $\hat{*}_\nu$, il transforme $\hat{*}_\nu$ en $*_\nu$. On voit immédiatement, *par récurrence,* à partir de (3.8), (3.9), que nécessairement $\hat{*}_\nu = *_\nu$. Ainsi $A_\nu^{1/2}$ est *un automorphisme de* $*_\nu$.

Considérons l'opérateur d'équivalence $T_\nu^{(p)} : *'_\nu \longrightarrow *_\nu$ défini par :

$$T_\nu^{(p)} = A_\nu^{1/2} T_\nu.$$

On a :

$$T_{-\nu}^{(p)} = A_{-\nu}^{1/2} T_{-\nu} = A_\nu^{1/2} A_\nu^{-1} T_{-\nu} T_\nu^{-1} T_\nu = A_\nu^{1/2} A_\nu^{-1} A_\nu T_\nu$$
$$= A_\nu^{1/2} T_\nu = T_\nu^{(p)}$$

et $T_\nu^{(p)}$ est *pair en* ν. Si nous posons $B_\nu = A_{-\nu}^{1/2}$, on peut énoncer :

PROPOSITION. — *Tout opérateur d'équivalence* $T_\nu : *'_\nu \longrightarrow *_\nu$ *admet une décomposition unique de la forme :*

$$T_\nu = B_\nu T_\nu^{(p)} \tag{5.11}$$

où $T_\nu^{(p)} : *'_\nu \longrightarrow *_\nu$ *est pair en* ν *et où* B_ν *est un automorphisme de* $*_\nu$ *à partie principale triviale satisfaisant :* $B_{-\nu} = B_\nu^{-1}$.

L'existence de la décomposition ayant été établie, il suffit d'établir son unicité. Pour deux décompositions de T_ν correspondant respectivement à B_ν et B'_ν, le produit $B_\nu^{-1} B'_\nu$ est un automorphisme de $*_\nu$ pair en ν. On a donc : $B_\nu^{-1} B'_\nu = B_\nu B'^{-1}_\nu$ ou $B'^2_\nu = B^2_\nu$. Il résulte du lemme que $B'_\nu = B_\nu$.

Ainsi *deux* $*_\nu$*-produits équivalents sont pair-équivalents par rapport à* ν. Il en résulte *que deux algèbres de Lie formelles engendrées par deux* $*_\nu$*-produits équivalents sont effectivement équivalentes par rapport à* $\lambda = \nu^2$.

c) *Remarque.* – Le groupe $G = \mathrm{Aut}_t(*_\nu)$ admet l'involution $S : A_\nu \in G \longrightarrow A_{-\nu} \in G$. Désignons par $H = \mathrm{Aut}_{tp}(*_\nu)$ le sous-groupe des éléments de G invariants par S, c'est-à-dire pairs en ν. Il résulte de la décomposition (5.11) (relative au cas où $*'_\nu = *_\nu$) que l'espace des automorphismes B_ν vérifiant $S(B_\nu) = B_\nu^{-1}$ admet une structure G/H d'*espace homogène symétrique,* qu'il est possible d'étudier.

6. Connexions symplectiques et variétés symplectiques plates.

a) Soit (W, F) une variété symplectique. Une *connexion symplectique* Γ est une connexion linéaire sans torsion sur (W, F) telle que $\nabla F = 0$, où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante défini par Γ. Soit $\overline{\Gamma}$ (définissant l'opérateur de dérivation covariante $\overline{\nabla}$) une connexion linéaire arbitraire sans torsion ; toute connexion Γ sans torsion diffère de $\overline{\Gamma}$ par un tenseur T de type $(1, 2)$ covariantement symétrique. Sur le domaine U d'une carte arbitraire $\{x^i\}$ $(i, j, \ldots = 1, \ldots, 2n)$ de W, on a :

$$\nabla_k F_{ij} = \overline{\nabla}_k F_{ij} - T_{ijk} + T_{jik} \quad (T_{ijk} = F_{ir} T^r_{jk} \,;\, T_{ijk} = T_{ikj}).$$

Si l'on choisit T défini par :

$$T_{ijk} = \frac{1}{3} (\overline{\nabla}_k F_{ij} + \overline{\nabla}_j F_{ik}) \tag{6.1}$$

il vient :

$$\nabla_k F_{ij} = \frac{1}{3} (\overline{\nabla}_i F_{jk} + \overline{\nabla}_j F_{ki} + \overline{\nabla}_k F_{ij}) = 0$$

et Γ est une connexion symplectique. On obtient le même résultat en ajoutant à T un 3-tenseur covariant symétrique arbitraire. On voit qu'une variété symplectique admet une infinité de connexions symplectiques, deux telles connexions différant par un tenseur de type $(1, 2)$ déduit d'un 3-tenseur covariant complètement symétrique arbitraire.

Il résulte de plus de (6.1) que *si* G *est un groupe de Lie opérant par symplectomorphismes sur* (W, F) *et s'il existe sur* (W, F) *une connexion linéaire invariante par* G, *il existe sur* (W, F) *une connexion symplectique invariante par* G.

b) Soit Γ une connexion symplectique sur la variété (W, Λ). Posons $P^0(u, v) = uv$, $P^1 = P$ et introduisons les opérateurs bi-différentiels $P^r = P^r_\Gamma$, d'ordre maximum r en chaque argument, définis, sur chaque domaine U d'une carte arbitraire $\{x^i\}$, par l'expression suivante :

$$P^r(u, v)|_U = P^r_\Gamma(u, v)|_U = \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_r j_r} \nabla_{i_1 \dots i_r} u \, \nabla_{j_1 \dots j_r} v . \tag{6.2}$$

Supposons que (W, Λ) admette une connexion symplectique Γ *sans courbure* ; s'il en est ainsi, la variété (W, Λ, Γ) est dite *une variété symplectique plate.* L'exemple le plus simple est donné par le fibré cotangent de $\mathbf{R}^n$, soit $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; la connexion dont les coefficients dans la carte canonique de $\mathbf{R}^{2n}$ sont tous nuls est une connexion symplectique plate. Pour une telle connexion plate $\nabla_{i_1 \dots i_r}$ est symétrique par rapport aux indices i.

Etant donnée une fonction formelle $f(z)$ à coefficients telle que $f(0) = 1$, substituons P^r à z^r dans le développement de $f(\nu z)$; on obtient ainsi une application bilinéaire

$$(u, v) \in N \times N \longrightarrow f(\nu P) \; (u, v).$$

Nous voulons choisir f de façon à définir ainsi, dans le cas plat, un $*_\nu$-produit. La réponse est donnée par la proposition suivante [11] :

Proposition. — *Si* (W, Λ, Γ) *est une variété symplectique plate, il existe une fonction formelle unique du crochet de Poisson* P *qui engendre un* $*_\nu$*-produit : c'est la fonction exponentielle.*

On obtient ainsi :

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} (\nu^r / r!) \, P^r(u, v) = \exp(\nu P) \; (u, v) \tag{6.3}$$

qui engendre la déformation de l'algèbre de Lie de Poisson $(\lambda = \nu^2)$

$$[u, v]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda^r / (2r+1)!) \, P^{2r+1}(u, v) = \nu^{-1} \, sh(\nu P) \; (u, v) . \tag{6.4}$$

Il est remarquable que, pour $\nu = \hbar/2i$, on déduit de (4.3) un crochet $\frac{2}{\hbar} \sin \left(\frac{\hbar}{2} P \right)$ donné en 1949 par Moyal [3] dans le contexte de la quantification de Hermann Weyl-Wigner. Nous dirons que (6.3) (resp. (6.4)) est *le* $*_\nu$*-produit de Moyal* (resp. le crochet de Moyal).

Considérons le terme P^3 de (6.4). Si ce 2-cocycle de Chevalley était exact, il serait le cobord d'un opérateur différentiel d'ordre 3 d'après la proposition du § 4.a). Mais on voit aisément qu'un tel cobord n'admet jamais de terme de type bidifférentiel $(3, 3)$. Ainsi P^3 n'est pas exact et les déformations (6.3) et (6.4) sont *non triviales* même à l'ordre 1.

7. L'invariant β et l'espace $H^2(N; N)$.

a) La situation de Moyal peut être généralisée comme nous allons le voir. Soit (W, Λ) une variété symplectique arbitraire ; une telle variété admet des atlas dont les cartes sont telles que F ou Λ admet des composantes constantes (carte *naturelle*). Soit Γ une connexion symplectique arbitraire ; P et $P_\Gamma^2/2!$ définissent toujours un $*_\nu$-produit à l'ordre 2 ; par contre $P_\Gamma^3/3!$ ne convient que si Γ est sans courbure.

Si $u \in N$, désignons par $\mathcal{L}(X_u)\Gamma$ le 3-tenseur covariant symétrique déduit de la dérivée de Lie de la connexion Γ par le champ hamiltonien $X_u = \mu^{-1}(du)$. On a localement *dans un carte naturelle* :

$$(\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{i_1 i_2 i_3} = \partial_{i_1 i_2 i_3} u - S\, \Lambda^{k\ell}\Gamma_{k i_1 i_2}\,\partial_{\ell i_3} u - \Lambda^{k\ell}\,\partial_k \Gamma_{i_1 i_2 i_3}\,\partial_\ell u \tag{7.1}$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur i_1, i_2, i_3. Considérons la 2-cochaîne S_Γ^3 de Chevalley définie sur chaque domaine U d'une carte arbitraire $\{x^i\}$ par :

$$S_\Gamma^3(u, v)|_U = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}(\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{i_1 i_2 i_3}(\mathcal{L}(X_v)\Gamma)_{j_1 j_2 j_3}\,. \tag{7.2}$$

Il résulte des propriétés de la dérivation de Lie que S_Γ^3 *est un 2-cocycle de Chevalley* de (N, P), admettant d'après (7.1) même symbole principal que P_Γ^3. Un raisonnement identique à celui du cas plat montre que *le 2-cocycle* S_Γ^3 *n'est jamais exact.* On vérifie aisément que, pour toute connexion symplectique Γ,

$$uv + \nu P(u, v) + (\nu^2/2!)\, P_\Gamma^2(u, v) + (\nu^3/3!)\, S_\Gamma^3(u, v)$$

détermine un $*_\nu$-produit à l'ordre 3.

b) Soit T un 3-tenseur covariant symétrique ; à la connexion symplectique Γ et au tenseur T on peut associer un opérateur différentiel du troisième ordre $A_{\Gamma,T}$ donné par :

$$\mathrm{A}_{\mathrm{T},\Gamma}(u)|_{\mathrm{U}} = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}\,\mathrm{T}_{i_1 i_2 i_3}(\mathscr{L}(\mathrm{X}_u)\Gamma)_{j_1 j_2 j_3}$$
$$= \mathrm{T}^{j_1 j_2 j_3}(\mathscr{L}(\mathrm{X}_u)\Gamma)_{j_1 j_2 j_3}\,. \qquad (7.3)$$

Le tenseur T définit l'opérateur différentiel du second ordre B_T donné par :

$$\mathrm{B}_\mathrm{T}(u)|_{\mathrm{U}} = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}\,\mathrm{T}_{i_1 i_2 i_3}(\mathscr{L}(\mathrm{X}_u)\mathrm{T})_{j_1 j_2 j_3}$$
$$= \mathrm{T}^{j_1 j_2 j_3}(\mathscr{L}(\mathrm{X}_u)\mathrm{T})_{j_1 j_2 j_3}\,. \qquad (7.4)$$

Avec ces notations, on établit aisément :

PROPOSITION. – *La 2-classe β de cohomologie, élément de* $\mathrm{H}^2(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})$, *définie par le 2-cocycle* S^3_Γ *est indépendante du choix de la connexion symplectique* Γ.

En effet considérons deux connexions symplectiques Γ et Γ' et prenons pour T le 3-tenseur covariant symétrique définissant leur différence. On vérifie immédiatement que l'on a :

$$\mathrm{S}^3_{\Gamma'} - \mathrm{S}^3_\Gamma = \partial\left(\mathrm{A}_{\mathrm{T},\Gamma} + \frac{1}{2}\,\mathrm{B}_\mathrm{T}\right).$$

On voit que *la 2-classe de cohomologie* $\beta \in \mathrm{H}^2(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})$ *est un invariant de la structure symplectique de la variété.*

Pour le complexe de Chevalley correspondant aux cochaînes différentielles *nulles sur les constantes* on a pu établir (S. Guth [12] et moi-même)

THEOREME. – *Le second espace* $\mathrm{H}^2(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})$ *de cohomologie de Chevalley admet comme générateurs la classe* β *et les classes définies par les images par* μ^{-1} *des 2-formes fermées de* W.

On voit que $\mathrm{H}^2(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})$, de dimension $1 + b_2(\mathrm{W})$, est déterminé par β et par la cohomologie de G de Rham (ici en dimension 2) de la variété. Il en est de même pour $\mathrm{H}^3(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})$; en particulier tout 3-cocycle de Chevalley 1-différentiel est l'image par μ^{-1} d'une 3-forme fermée de W [1].

8. Les $*_\nu$-produits de Vey.

a) Introduisons les notations suivantes : nous désignons par Q^r un opérateur bidifférentiel d'ordre maximum r en chaque argument, nul sur les constantes, satisfaisant l'hypothèse de parité (§ 2) et dont le symbole principal coïncide avec celui de P_Γ^r. En particulier, nous prenons $Q^0(u, v) = uv$ et $Q^1 = P$. Nous sommes conduits à la définition suivante :

DEFINITION. – *Un $*_\nu$-produit de Vey est un $*_\nu$-produit de la forme :*

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} (\nu^r/r!)\, Q^r(u, v). \tag{8.1}$$

Une algèbre de Lie de Vey est une algèbre de Lie formelle donnée par un crochet de la forme

$$[u, v]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda^r/(2r+1)!)\, Q^{2r+1}(u, v). \tag{8.2}$$

Mon point de vue diffère sensiblement de celui de J. Vey [2] qui considère essentiellement les algèbres de Lie. Considérons un $*_\nu$-produit de Vey à l'ordre 2 ; on montre qu'il existe *une connexion symplectique unique* Γ telle que [4] :

$$Q^2 = P_\Gamma^2 + \widetilde{\partial} H \tag{8.3}$$

où H est un opérateur différentiel *d'ordre maximum 2,* défini à l'addition près d'un opérateur différentiel du premier ordre.

Supposons maintenant que Q^3 soit un 2-cocycle de Chevalley ($\partial Q^3 = 0$) ; il existe de même *une connexion symplectique unique* Γ telle que :

$$Q^3 = S_\Gamma^3 + T + 3\, \partial H \tag{8.4}$$

où T est un 2-tenseur image par μ^{-1} d'une 2-forme fermée de W et H un opérateur différentiel d'ordre maximum 2, défini encore à l'addition près d'un opérateur différentiel du premier ordre. Considérons

$$uv + \nu P(u, v) + (\nu^2/2!)\, Q^2(u, v) + (\nu^3/3!)\, Q^3(u, v). \tag{8.5}$$

Pour que (8.5) donne un $*_\nu$-produit à l'ordre 3, il faut et il suffit que *les connexions symplectiques et les opérateurs* H *qui apparaissent dans (8.3) et (8.4) coïncident.*

b) Une 2-cochaîne de Hochschild est dite *paire* si elle est symétrique en u, v, *impaire* si elle est antisymétrique en u, v. De manière semblable une 3-cochaîne de Hochschild $B(u, v, w)$ est dite *paire* si elle est symétrique en u, w *impaire* si elle est antisymétrique en u, w. Si A est une 1-cochaîne, $\tilde{\partial}A$ est paire. On vérifie immédiatement le lemme suivant

LEMME. — *Si la 2-cochaine* C *est paire (resp. impaire),* $\tilde{\partial}C$ *est impaire (resp. paire).*

Soit C un *2-cocycle* de Hochschild. Il résulte du théorème de Vey (§ 3) que C admet la décomposition

$$C = T^{(2)} + \tilde{\partial}A \tag{8.6}$$

où $T^{(2)}$ est un opérateur bidifférentiel antisymétrique d'ordre 1 donné par un 2-tenseur antisymétrique désigné par la même notation et où A est un opérateur différentiel. Les deux termes du second membre de (8.6) sont respectivement impair et pair. Il en résulte que *si* C *est un 2-cocycle de Hochschild pair (resp. impair), il est exact (resp. non exact et 1-différentiel).*

Soit B un 3-cocycle de Hochschild. D'après le théorème de Vey, on a :

$$B = T^{(3)} + \tilde{\partial}C \tag{8.7}$$

où $T^{(3)}$ est un opérateur tridifférentiel donné par un 3-tenseur antisymétrique et où C est une 2-cochaîne. Décomposons C en sa partie paire et sa partie impaire : $C = C^{(p)} + C^{(i)}$. *Si* B *est un 3-cocycle pair,* on a $B = \tilde{\partial}C^{(i)}$ et B *est exact. Si* B *est un 3-cocycle impair,* on a :

$$B = T^{(3)} + \tilde{\partial}C^{(p)} .$$

c) Etant donnée une 2-cochaîne différentielle C de Hochschild, paire ou impaire, nous supposons que son terme de plus grand type bidifférentiel, ou partie principale, a le type (t, s) $(1 \leqslant s \leqslant t)$; les autres termes de type (t, s') $(s' < s)$ ou (t', s') $(t' < t,\ s' \leqslant t')$ dans une carte locale, sont dits de type inférieur. Nous allons établir le lemme suivant :

LEMME. — *Sur le domaine* U *d'une carte arbitraire, soit* C *une 2-cochaîne de Hochschild, paire ou impaire, qui est exactement de type bidifférentiel* (t, s) *(avec* $s \leqslant t$, $t > 2$*). Si* $s > 1$, *le 3-cocycle* $\tilde{\partial}C$ *est effectivement de plus grand type bidifférentiel* $(t, s-1)$ *en* u, w. *Si* $s = 1$, $\tilde{\partial}C$ *est effectivement de plus grand type bidifférentiel* $(t-1, 1)$ *en* u, w.

On a sur U :

$$C(u\,,v) = C^{i_1\ldots i_t, j_1\ldots j_s}(\partial_{i_1\ldots i_t}u\,\partial_{j_1\ldots j_s}v + \epsilon\,\partial_{i_1\ldots i_t}v\,\partial_{j_1\ldots j_s}u)$$

où $\epsilon = \pm 1$ selon la parité de C. On a :

$$\widetilde{\partial}C(u\,,v\,,w) \simeq C^{i_1\ldots i_t, j_1\ldots j_s}(\partial_{i_1\ldots i_t}(uv)\,\partial_{j_1\ldots j_s}w + \epsilon\,\partial_{i_1\ldots i_t}w\,\partial_{j_1\ldots j_s}(uv) - \partial_{i_1\ldots i_t}u\,\partial_{j_1\ldots j_s}(vw) - \epsilon\,\partial_{i_1\ldots i_t}(vw)\,\partial_{j_1\ldots j_s}u)$$

modulo des termes dépendant de u , v , w eux mêmes.

Pour $s > 1$, le terme de plus grand type bidifférentiel en $u\,,w$ de $\widetilde{\partial}C$ a le type $(t\,,s-1)$ et peut s'écrire $(t > 2)$:

$$s\,C^{i_1\ldots i_t, j_1\ldots j_s}(\partial_{i_1\ldots i_t}u\,\partial_{j_1}v\,\partial_{j_2\ldots j_s}w - \epsilon\,\partial_{i_1\ldots i_t}w\,\partial_{j_1}v\,\partial_{j_2\ldots j_s}u).$$

La nullité de ce terme entraîne bien la nullité de C.

Pour $s = 1$, le terme de plus grand type bidifférentiel en $u\,,w$ de $\widetilde{\partial}C$ a le type $(t-1\,,1)$ et peut s'écrire $(t > 2)$:

$$-\,t\,C^{i_1\ldots i_t, j}(\partial_{i_2\ldots i_t}\partial_{i_1}v\,\partial_j w - \epsilon\,\partial_{i_2\ldots i_t}w\,\partial_{i_1}v\,\partial_j u).$$

Notre lemme est établi.

d) Nous pouvons maintenant établir le théorème suivant

THEOREME. — *Tout* $*_\nu$*-produit de* (W, F) *est équivalent à un* $*_\nu$*-produit de Vey.*

En effet procédons par récurrence et supposons que, par équivalence, notre $*_\nu$-produit ait pu être rendu de Vey à l'ordre $t-1 \geq 2$. On a $C_r = Q^r/r!$ pour $r \leq t-1$. Le terme suivant C_t vérifie $\widetilde{\partial}C_t = \widetilde{E}_t$ où l'on a posé :

$$\widetilde{E}_t(u\,,v\,,w) = \sum_{r+s=t} (1/r!\,s!)\,(Q^r(Q^s(u\,,v)\,,w) - Q^r(u\,,Q^s(v\,,w)))\quad (r\,,s \geq 1). \tag{8.8}$$

Nous notons $\widetilde{E}_t(Q^r/r!)$ le second membre de (8.8). La partie principale de $\widetilde{E}_t$ en $u\,,w$ provient des parties principales des $Q^r/r!$ et on peut écrire localement sur un domaine U :

$$\widetilde{E}_t(u\,,v\,,w) = \sum_{r+s=t} (1/r!\,s!)\,\Lambda^{i_1 j_1}\ldots\Lambda^{i_r j_r}\Lambda^{k_1 \ell_1}\ldots\Lambda^{k_s \ell_s}$$
$$\{\partial_{i_1\ldots i_r}(\partial_{k_1\ldots k_s}u\,\partial_{\ell_1\ldots \ell_s}v)\,\partial_{j_1\ldots j_r}w - \partial_{i_1\ldots i_r}u\,\partial_{j_1\ldots j_r}(\partial_{k_1\ldots k_s}v\,\partial_{\ell_1\ldots \ell_s}w)\} + t.t.i \quad (r\,,s \geq 1)$$

où $t.t.i$ désigne les termes de type inférieur. On voit que $\widetilde{E}_t$ est de plus grand type bidifférentiel $(t, t-1)$ en u, w.

Supposons que C_t soit de plus grand type bidifférentiel (t', s) avec $s \leqslant t'$. *Si* $s > 1$, $\widetilde{\partial} C_t$ est, d'après le lemme, effectivement de plus grand type bidifférentiel $(t', s-1)$ en u, w ; il est donc impossible dans ce cas que $t' > t$ d'après le type $(t, t-1)$ de $\widetilde{E}_t$. Par suite ou bien C_t est de type (t', s) avec $t' \leqslant t$, $s > 1$ *et nécessairement* $t' = s = t$, ou bien C_t est de plus grand type bidifférentiel $(t', 1)$; dans ce dernier cas $\widetilde{\partial} C_t$ admet $(t'-1, s')$ (avec $1 \leqslant s' \leqslant t'-1$) comme maximum du plus grand type bidifférentiel en u, w *et l'on a nécessairement* $t < t'$.

Cela posé, *supposons* t *impair* : $t = 2q-1$ (avec $q \geqslant 2$). Si C_{2q-1} est de plus grand type bidifférentiel $(t', 1)$ (avec $t' \geqslant 2q$), posons sur le domaine U d'une carte naturelle :

$$C_{2q-1}|_U = B_U + C_U$$

où B_U est exactement de type $(t', 1)$ et C_U d'ordre maximum $(t'-1)$. On a :

$$\partial B_U + \partial C_U = E_{q-1}|_U . \tag{8.9}$$

De l'hypothèse de récurrence, il résulte que E_{q-1} est d'ordre maximum $2q-1 \leqslant t'-1$ et ∂C_U est d'ordre maximum $(t'-1)$. Si $B_U \neq 0$, on vérifie immédiatement que ∂B_U est effectivement d'ordre t'. Il résulte de (8.9) que l'on a donc $B_U = 0$. Ainsi C_{2q-1} est nécessairement de plus grand type bidifférentiel $(2q-1, 2q-1)$.

Introduisons sur U la connexion symplectique plate Γ de composantes nulles dans la carte ; nous définissons ainsi $P^r = P^r_\Gamma$ selon (6.2). On a sur U avec des notations évidentes :

$$\widetilde{\partial}(P^{2q-1}/(2q-1)!) = \widetilde{E}_{2q-1}(P^r/r!) \quad (r \leqslant 2q-2)$$

et l'on a aussi :

$$\widetilde{\partial} C_{2q-1} = \widetilde{E}_{2q-1}(Q^r/r!).$$

On en déduit :

$$\widetilde{\partial}(C_{2q-1} - P^{2q-1}/(2q-1)!) = \widetilde{E}_{2q-1}(Q^r/r!) - \widetilde{E}_{2q-1}(P^r/r!)$$

et l'on voit que $\widetilde{\partial}(C_{2q-1} - P^{2q-1}/(2q-1)!)$ est de plus grand type bidifférentiel inférieur à $(2q-1, 2q-2)$ en u, w. Par suite $C_{2q-1} - P^{2q-1}/(2q-1)!$ admet un type bidifférentiel maximum $(2q-1, s)$ avec $s < (2q-1)$. Ainsi $C_{2q-1} = Q^{2q-1}/(2q-1)!$ et l'hypothèse de récurrence s'étend à $(2q-1)$.

Supposons maintenant $t = 2q$ $(q \geqslant 2)$ et posons sur U

$$C_{2q}|_U = B_U + C_U$$

où B_U est exactement de type $(t', 1)$ (avec $t' \geqslant 2q + 1$) et C_U d'ordre maximum $(t' - 1)$. Avec des notations analogues aux précédentes, on a :

$$\partial C_{2q+1} = E_q(Q^{2r+1}/(2r+1)!\,) \quad (r < q).$$

Si C_{2q+1} est d'ordre $> (2q + 1)$, il résulte des calculs de S. Gutt conduisant à la détermination de $H^2(N\,;N)$ que la partie principale de C_{2q+1} est la partie principale d'un 2-cocycle de Chevalley, donc de ∂A où A est un opérateur différentiel. Dans ce cas transformons le $*_\nu$-produit au moyen de :

$$T_\nu = \mathrm{Id} - \nu^{2q} A$$

ce qui préserve C_r pour $r \leqslant 2q - 1$, C_{2q} et C_{2q+1} étant transformés de façon que C_{2q+1} soit au plus d'ordre $(2q + 1)$. S'il en est ainsi $\widetilde{\partial} C_{2q+1}$ est au plus d'ordre $2q + 1 \leqslant t'$ en u, w.

Or la relation

$$\widetilde{\partial} C_{2q+1} = \widetilde{E}_{2q+1} \tag{8.10}$$

peut s'écrire

$$\widetilde{\partial} C_{2q+1} = \widetilde{F}_{2q+1} + M + M'$$

où l'on a posé :

$$\widetilde{F}_{2q+1}(u, v, w) = \sum_{r+s=2q+1} (1(r!\,s!)\,(Q^r(Q^s(u, v), w) - Q^r(u, Q^s(v, w)))\ (r, s \geqslant 2)$$

$$M'(u, v, w) = P(C_U(u, v), w) + C_U(P(u, v), w) - P(u, C_U(v, w)) - C_U(u, P(v, w))$$

$$M(u, v, w) = P(B_U(u, v), w) + B_U(P(u, v), w) - P(u, B_U(v, w)) - B_U(u, P(v, w))$$

$\widetilde{F}_{2q+1} + M'$ est d'ordre $\leqslant t'$ en u, w et on vérifie aisément que si B_U est $\neq 0$, M est effectivement d'ordre $(t' + 1)$ en ces variables. Il résulte de (8.10) que $B_U = 0$. Ainsi C_{2q} est de plus grand type bidifférentiel $(2q, 2q)$ et le même raisonnement que dans le cas impair montre que $C_{2q} = Q^{2q}/(2q)!$ Nous avons ainsi établi par récurrence que notre $*_\nu$-produit est équivalent à un $*_\nu$-produit de Vey.

II. EXISTENCE ET EQUIVALENCE DE $*_\nu$-PRODUITS

9. Formules et lemmes préliminaires.

a) Considérons une application bilinéaire $N \times N \longrightarrow E(N ; \nu)$ donnée par :

$$uv + \nu P(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u, v) \quad (C_0(u, v) = uv, C_1 = P) \tag{9.1}$$

où les $C_r (r \geqslant 1)$ sont des 2-cochaînes différentielles, nulles sur les constantes, satisfaisant l'hypothèse de parité. A une telle application nous avons associé les 3-cochaînes (voir (3.4)) :

$$\widetilde{E}_t(u, v, w) = \sum_{r+s=t} (C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w))) \quad (r, s \geqslant 1). \tag{9.2}$$

Un calcul direct montre que l'on a au sens de § 8.b) :

LEMME 1. — *Si t est impair (resp. pair), $\widetilde{E}_t$ est une 3-cochaîne de Hochschild paire (resp. impaire).*

b) Etant donnée une 3-cochaîne E de Hochschild, désignons par $\hat{\Sigma} E$ la 3-cochaîne définie par :

$$(\hat{\Sigma} E)(u, v, w) = E(u, v, w) - E(v, u, w) - E(u, w, v). \tag{9.3}$$

On vérifie immédiatement que si C est une 2-cochaîne de Hochschild *paire,* on a :

$$\hat{\Sigma}\, \widetilde{\partial} C = 0. \tag{9.4}$$

Supposons $t = 2q + 2 \ (q \geqslant 0)$ *pair* ; dans l'expression (9.2) de $\widetilde{E}_t = \widetilde{E}_{2q+2}$, r, s sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Dans $\hat{\Sigma}\, \widetilde{E}_{2q+2}$, la contribution des termes correspondant à r, s pairs disparaît et l'on obtient, avec $r = 2r' + 1$, $s = 2s' + 1$:

$$\hat{\Sigma}\, \widetilde{E}_{2q+2}(u, v, w) = 2 S \sum_{r'+s'=q} C_{2r'+1}(C_{2s'+1}(u, v), w) \quad (r', s' \geqslant 0)$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur u, v, w. Si l'on pose $B_{r'} = C_{2r'+1}$, on obtient avec les notations du § 4.

$$\hat{\Sigma}\, \widetilde{E}_{2q+2} = 2 D_q \tag{9.5}$$

ou, d'après (9.4) :

$$\hat{\Sigma}\, \widetilde{D}_{2q+2} = 2 D_q . \tag{9.6}$$

Les identités :

$$\hat{\Sigma}\, \widetilde{D}_{2r+2} = 2\, D_r \quad (r = 0, 1, \ldots, q)$$

conduisent à la conclusion suivante

LEMME 2. – *Si (9.1) est un* $*_\nu$*-produit à l'ordre* $(2q+2)$, *on obtient par antisymétrisation une déformation de l'algèbre de Lie de Poisson d'ordre* q. *En particulier* E_{q+1} *est un 3-cocycle de Chevalley.*

On note que, comme $D_{q+1} = E_{q+1} - \partial B_{q+1}$, il en est de même pour D_{q+1}.

10. Le théorème de Neroslavsky et Vlassov.

a) Considérons un $*_\nu$-produit d'ordre 2. On peut l'écrire :

$$uv + \nu P(u, v) + \nu^2 C_2(u, v) \tag{10.1}$$

où l'on a $C_2 = (1/2) P_\Gamma^2 + \widetilde{\partial} A$ (avec les notations de § 8.d)).

Nous allons procéder par récurrence. Choisissons un *entier impair* $t = 2q + 1$ $(q \geqslant 1)$ et supposons qu'il existe un $*_\nu$-produit d'ordre $t - 1 = 2q$ pair prolongeant (10.1). Le 3-cocycle de Hochschild $\widetilde{E}_t$ est pair donc exact (voir § 8.b)) et il existe une 2-cochaîne différentielle C_t *impaire*, nulle sur les constantes, telle que :

$$\widetilde{E}_t = \widetilde{\partial} C_t . \tag{10.2}$$

Choisissons cette 2-cochaîne impaire C_t *qui est définie à un opérateur bidifférentiel impair* T *près d'ordre 1.* Nous obtenons ainsi un $*_\nu$-produit d'ordre $t = 2q + 1$ impair. Nous nous proposons d'étudier le 3-cocycle de Hochschild impair $\widetilde{E}_{t+1} = \widetilde{E}_{2q+2}$ qui peut s'écrire :

$$\widetilde{E}_{2q+2} = T^{(3)} + \widetilde{\partial} C^{(p)} \tag{10.3}$$

où $T^{(3)}$ est un opérateur tridifférentiel donné par un 3-tenseur antisymétrique et où $C^{(p)}$ est une 2-cochaîne paire. On a d'après (9.4)

$$3\, T^{(3)} = \hat{\Sigma}\, \widetilde{E}_{2q+2}$$

soit, d'après (9.5) :

$$T^{(3)} = (2/3)\, D_q . \tag{10.4}$$

Il résulte du lemme 2 appliqué à l'ordre $2q$ que D_q est un 3-cocycle de Chevalley de (N, P). *Ainsi* $T^{(3)}$ *est un 3-cocycle de Chevalley ;* un tel cocycle est l'image par μ^{-1} d'une 3-forme fermée de W et il est exact si et seulement si la 3-forme est exacte.

b) Cherchons à modifier $C_t = C_{2q+1}$ de façon que $T^{(3)}$ soit nul. Si on change C_{2q+1} en $C_{2q+1} + T^{(2)}$, où $T^{(2)}$ correspond à un 2-tenseur antisymétrique arbitraire, on a d'après (10.4) :

$$D_q \longrightarrow D_q - \partial T^{(2)} \quad \text{et} \quad T^{(3)} \longrightarrow T^{(3)} - (2/3)\,\partial T^{(2)} .$$

On peut ainsi annuler $T^{(3)}$ lorsque le 3-cocycle de Chevalley mis en évidence est exact.

Il en est certainement ainsi *si l'on suppose* $b_3(W) = 0$. Sous cette hypothèse, $\widetilde{E}_{2q+2}$ est un 3-cocycle de Hochschild exact pour un choix convenable de C_{2q+1} et il existe une 2-cochaîne paire $C_{2q+2} = C^{(p)}$ telle qu'on obtienne un $*_\nu$-produit d'ordre $t+1 = 2q+2$. Nous avons ainsi établi par récurrence l'existence sur (W, F) d'un $*_\nu$-produit. On a [15] :

THEOREME. — *Sur toute variété symplectique* (W, F) *telle que* $b_3(W) = 0$ *il existe des* $*_\nu$*-produits.*

Ce théorème d'existence a été obtenu en 1979 par O.M. Neroslavsky et A.T. Vlassov (non publié).

c) Sous l'hypothèse faite, on peut cependant obtenir un résultat plus précis. Considérons un $*_\nu$-produit de Vey à l'ordre 3

$$uv + \nu P(u, v) + (\nu^2/2!)\, Q^2(u, v) + (\nu^3/3!)\, Q^3(u, v) \tag{10.5}$$

où l'on a selon (8.3) et (8.4) :

$$Q^2 = P^2_\Gamma + \widetilde{\partial} H \tag{10.6}$$

et

$$Q^3 = S^3_\Gamma + T^{(2)} + 3\,\partial H \quad (\partial Q^3 = 0) \tag{10.7}$$

le 2-cocycle de Chevalley 1-différentiel $T^{(2)}$ *pouvant être choisi arbitrairement.* Le raisonnement de Neroslavsky-Vlassov permet de prolonger (10.5) en un $*_\nu$-produit de (W, F) qui est équivalent à un $*_\nu$-produit de Vey (§ 8.d). On a donc :

PROPOSITION. – *Sur toute variété symplectique* (W, F) *telle que* $b_3(W) = 0$, *il existe des* $*_\nu$*-produits de Vey pour lesquels le 2-cocycle* Q^3 *peut être donné arbitrairement par (10.7). On peut prendre en particulier* $Q^3 \in \beta$.

Par antisymétrisation du $*_\nu$-produit de Vey, on déduit de cette proposition :

COROLLAIRE. – *Sur toute variété symplectique* (W, F) *telle que* $b_3(W) = 0$, *il existe des algèbres de Lie de Vey telles que* $Q^3 \in \beta$.

Ce résultat avait été établi par J. Vey [2] par une méthode directe, complètement différente, mettant en œuvre certains résultats de Gelfand-Fuks.

11. Introduction d'une connexion symplectique.

Sur la variété symplectique (W, F), soit Γ une connexion symplectique que nous fixons. Une p-cochaîne différentielle C de Hochschild, nulle sur les constantes peut s'écrire d'une manière unique :

$$C = \Sigma\, C_{(r_1, \ldots, r_p)} \quad (r_1, \ldots, r_p \geqslant 1) \tag{11.1}$$

où la p-cochaîne $C_{(r_1, \ldots, r_p)}$ peut s'écrire localement sur le domaine U d'une carte locale arbitraire :

$$C_{(r_1, \ldots, r_p)}(u_1, \ldots, u_p)|_U = C_{(r_1, \ldots, r_p)}^{i_1^1 \ldots i_{r_1}^1, \ldots, i_1^p \ldots i_{r_p}^p} \nabla_{i_1^1 \ldots i_{r_1}^1} u_1 \ldots \nabla_{i_1^p \ldots i_{r_p}^p} u_p; \tag{11.2}$$

les coefficients du second membre sont supposés symétriques en $(i_1^k \ldots i_{rk}^k)$ $(k = 1, \ldots, p)$. Ils définissent sur W des tenseurs contravariants. Nous dirons que $C_{(r_1, \ldots, r_p)}$ est, relativement à la connexion Γ, le terme de type multidifférentiel $(r_1, \ldots, r_p)$.

Nous nous intéresserons dans la suite aux 2-cochaînes différentielles, nulles sur les constantes, C telles que $C_{(1,1)} = 0$ pour une connexion symplectique Γ donnée. Nous dirons que C est *à partie de type (1, 1) nulle relativement à* Γ. Un $*_\nu$-produit tel que toutes les 2-cochaînes $C_{2r}(r > 1)$ soient à parties de type $(1, 1)$ nulles pour Γ est dit *à partie de type (1, 1) triviale pour cette connexion.*

12. Le cas où $b_2(\mathrm{W}) = 0$.

Pour une variété symplectique (W, F) telle que $b_2(\mathrm{W}) = 0$, la 2-forme F est exacte et $\mathrm{H}^2(\mathrm{N}\,;\mathrm{N})$ admet β comme seul générateur. Beaucoup de résultats généraux se déduisent de l'étude de ce cas particulier.

Nous nous proposons d'établir

PROPOSITION. – *Pour une variété symplectique* (W, F) *telle que* $b_2(\mathrm{W}) = 0$, *tous les* $*_\nu$*-produits existants sont équivalents.*

Considérons en effet sur W deux $*_\nu$-produits :

$$u *_\nu v = uv + \nu \mathrm{P}(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r \mathrm{C}_r(u, v) \tag{12.1}$$

et :

$$u *'_\nu v = uv + \nu \mathrm{P}(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r \mathrm{C}'_r(u, v).$$

Nous utilisons pour les transformations les formules (3.8) et (3.9). Procédant par récurrence, nous supposons que, par transformation de (12.1), on ait fait en sorte que $\mathrm{C}'_r = \mathrm{C}_r$ pour $r \leqslant 2q - 1$ (avec $q \geqslant 1$). Le 2-cocycle de Hochschild pair $(\mathrm{C}'_{2q} - \mathrm{C}_{2q})$ est exact et l'on a :

$$\mathrm{C}'_{2q} = \mathrm{C}_{2q} + \tilde{\partial}\mathrm{A} \tag{12.2}$$

où A est un opérateur différentiel. Transformant (12.1) au moyen de $\mathrm{T}_\nu = \mathrm{Id} + \nu^{2q}\mathrm{A}$, on peut maintenant supposer que l'on a :

$$\mathrm{C}'_r = \mathrm{C}_r \quad (r = 1, \dots, 2q).$$

S'il en est ainsi, $(\mathrm{C}'_{2q+1} - \mathrm{C}_{rq+1})$ est un 2-cocycle à la fois de Hochschild et de Chevalley et l'on a :

$$\mathrm{C}'_{2q+1} - \mathrm{C}_{2q+1} = \mathrm{T}$$

où T est un opérateur bidifférentiel d'ordre 1 donné par un 2-tenseur antisymétrique, noté encore T, image par μ^{-1} d'une 2-forme fermée de W. Comme $b_2(\mathrm{W}) = 0$, cette forme est exacte et le 2-cocycle T de Chevalley l'est aussi ; il existe un vecteur Z de W tel que :

$$\mathrm{T} = \partial \mathcal{L}(\mathrm{Z}).$$

Considérons le nouveau produit, noté $*''_\nu$, déduit de (12.1) à partir de

$T_\nu = \mathrm{Id} + \nu^{2q} \mathcal{L}(Z)$. Avec des notations évidentes on a $C''_r = C_r = C'_r$ pour $r = 1, \ldots, 2q$. De plus

$$C''_{2q+1} - C_{2q+1} = -\widetilde{G}_{2q+1}$$

avec :

$$\widetilde{G}_{2q+1}(u, v) = \mathcal{L}(Z)\, P(u, v) - P(\mathcal{L}(Z)\, u, v) - P(u, \mathcal{L}(Z)\, v).$$

Il vient :

$$\widetilde{G}_{2q+1} = -\partial \mathcal{L}(Z) = -T$$

et par suite :

$$C''_{2q+1} - C_{2q+1} = T.$$

On voit que $C''_{2q+1} = C'_{2q+1}$. Nous avons établi par récurrence que tous les $*_\nu$-produits de (W, F) sont équivalents.

13. Normalisation par équivalence.

Soit (W, F) une variété symplectique quelconque admettant un $*_\nu$-produit. En transformant ce $*_\nu$-produit par équivalence, on peut l'astreindre à certaines conditions.

a) Soit Γ une connexion symplectique que nous fixons. Donnons-nous une 2-cochaîne paire de Hochschild C et considérons la classe des 2-cochaînes qui lui sont cohomologues. Une 2-cochaîne arbitraire de la classe, soit C', peut s'écrire :

$$C' = C + \widetilde{\partial} A \tag{13.1}$$

où A est un opérateur différentiel qu'on peut supposer à partie de type 1 nulle relativement à Γ. La partie de C de type $(1, 1)$ pour Γ détermine un 2-tenseur symétrique $S_{(2)}$ et par suite un opérateur différentiel d'ordre 2 dont le cobord redonne, au facteur $(-1/2)$ près, la partie de type $(1, 1)$ de C.

Posons :

$$B \equiv C' - C = \widetilde{\partial} A \tag{13.2}$$

où A est un opérateur différentiel à partie de type 1 nulle pour Γ. Notons $C_{(r,s)}$ (resp. $C'_{(r,s)}, B_{(r,s)}$) la partie de type (r, s) de C (resp. de C', de B), $A_{(r)}$ la partie de type r de A. La relation (13.2) peut s'expliciter sur le domaine d'une carte arbitraire selon :

$$B_{(r,s)}^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s} = -\frac{(r+s)!}{r!\ s!}\ A_{(r+s)}^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s} \qquad (r+s \geqslant 2) \quad (13.3)$$

où l'on voit que le premier membre de 13.3) est nécessairement symétrique par rapport à l'ensemble des indices i et j.

Si $C_{(k,1)}$ (resp. $C'_{(k,1)}$) est la partie de type $(k, 1)$ de C (resp. C'), où $k \geqslant 1$, introduisons les opérateurs différentiels $S_{(k+1)}$ et $S'_{(k+1)}$ définis par :

$$S_{(k+1)}(u) = C_{(k,1)}^{(i_1\dots i_k,i_0)}\ \nabla_{i_0 i_1\dots i_k} u\,,\ S'_{(k+1)}(u) = C'^{(i_1\dots i_k,i_0)}_{(k,1)}\ \nabla_{i_0 i_1\dots i_k} u \qquad (13.4)$$

où il y a symétrisation de $C_{(k,1)}$ (resp. $C'_{(k,1)}$) par rapport aux indices $(i_0, i_1, \dots, i_k)$.

On a d'après (13.3) (avec $r = k$, $s = 1$)

$$C'^{i_1\dots i_k,i_0}_{(k,1)} - C^{i_1\dots i_k,i_0}_{(k,1)} = -(k+1)\ A^{i_0 i_1\dots i_k}_{(k,1)}\,.$$

On en déduit par symétrisation des deux membres :

$$A_{(k+1)} = -(1/(k+1))\ (S'_{(k+1)} - S_{(k+1)})\,.$$

Si $h = \max\,(r+s)$ dans C et C', il vient :

$$A = -\sum_{k=1}^{h}\ (1/(k+1))\ (S'_{(k+1)} - S_{(k+1)})\,.$$

Il en résulte :

$$C' - C = -\sum_{k=1}^{h}\ (1/(k+1))\ (\widetilde{\partial} S'_{(k+1)} - \widetilde{\partial} S_{(k+1)})\,.$$

Nous sommes conduits à poser :

$$\overline{C} = C + \sum_{k=1}^{h}\ (1/(k+1))\ \widetilde{\partial} S_{(k+1)} = C' + \sum_{k=1}^{h}\ (1/(k+1))\ \widetilde{\partial} S'_{(k+1)}\,. \qquad (13.5)$$

La 2-cochaîne $\overline{C}$, cohomologue à C, vérifie avec des notations évidentes :

$$\sum_{k=1}^{h}\ 1/(k+1)\ \widetilde{\partial}\ \overline{S}_{(k+1)} = 0\,. \qquad (13.6)$$

Cette relation est équivalente à l'ensemble des conditions :

$$\overline{S}_{(k+1)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots)\,. \qquad (13.7)$$

En particulier C est à partie de type $(1, 1)$ nulle pour Γ. Nous avons établi :

LEMME. — *Etant donnée une connexion symplectique* Γ, *la classe des 2-cochaînes paires de Hochschild cohomologues à une 2-cochaîne donnée* C *contient un représentant unique* $\overline{C}$ *à partie de type* $(1, 1)$ *nulle vérifiant (13.7).*

b) Partons d'un $*_\nu$-produit déterminé. La 2-cochaîne C_2 est cohomologue à $(1/2)P^2_\Gamma$ qui est à partie de type $(1, 1)$ nulle pour Γ et satisfait trivialement les conditions (13.7). Par transformation, on peut faire en sorte que $C_2 = (1/2)P^2_\Gamma$. En raisonnant par récurrence, on voit de même qu'à toute 2-cochaîne paire C_{2q}, on peut substituer, par une transformation de la forme $\mathrm{Id} + \nu^{2q} A_{2q}$, la 2-cochaîne paire cohomologue $\overline{C}_{2q}$ à partie de type $(1, 1)$ nulle relativement à Γ et vérifiant les conditions (13.7).

On a donc établi :

PROPOSITION. — *Une connexion symplectique* Γ *étant choisie sur la variété symplectique* (W, F), *tout* $*_\nu$*-produit de* (W, F) *est équivalent à un* $*_\nu$*-produit à partie de type* $(1, 1)$ *triviale relativement à* Γ, *dont les 2-cochaînes de rang pair* C_{2q} *vérifient les conditions :*

$$S^{2q}_{(k+1)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{13.8}$$

où $S^{2q}_{(k+1)}$ *se déduit par symétrisation de la partie de* C_{2q} *de type* $(k, 1)$ *pour* Γ.

c) Considérons un $*_\nu$-produit de (W, F). On a à l'ordre $2q + 1$:

$$\widetilde{\partial} C_{2q+1} = \widetilde{E}_{2q+1} \tag{13.9}$$

et

$$\partial C_{2q+1} = E_q . \tag{13.10}$$

Une autre 2-cochaîne impaire C'_{2q+1} satisfaisant (13.9) et (13.10) s'écrit :

$$C'_{2q+1} = C_{2q+1} + T$$

où T est un opérateur bidifférentiel antisymétrique d'ordre 1 vérifiant $\partial T = 0$. On voit par récurrence que, pour qu'il existe un produit $*'_\nu$ équivalent à $*_\nu$ admettant pour $(2q + 1)$ premières cochaînes $C'_r = C_r$ $(r = 1, \ldots, 2q)$ et C'_{2q+1}, il faut et il suffit que T soit exact ; il existe un vecteur Z de W tel que :

$$C'_{2q+1} = C_{2q+1} + \partial \mathcal{L}(Z) . \tag{13.11}$$

Nous considérons la classe des 2-cochaînes ainsi définies par (13.11). Désignons par $\hat{C}_{2q+1}$ la 2-cochaîne obtenue en privant C_{2q+1} (ou C'_{2q+1}) de sa partie de type $(1,1)$ relativement à Γ. On a :

$$C_{2q+1} = \hat{C}_{2q+1} + U \qquad C'_{2q+1} = \hat{C}_{2q+1} + U'$$

où U et U' sont donnés pas deux 2-tenseurs antisymétriques et sont tels que :

$$U' - U = \partial \mathcal{L}(Z). \tag{13.12}$$

Cela posé, *supposons* W *compacte* et munissons-la d'une métrique riemannienne $\mathbf{g}$ arbitraire. Nous pouvons prendre pour connexion Γ la connexion symplectique déduite de la connexion riemannienne au sens de (§ 6.a). Soit β et β' les 2-formes images par μ de U et U'. La décomposition de G. de Rham relativement à $\mathbf{g}$ donne :

$$\beta = \gamma + d\alpha \qquad \beta' = \gamma' + d\alpha'$$

où γ et γ' sont cofermées pour $\mathbf{g}$ et α, α' des 1-formes. D'après (13.12), $\beta' - \beta$ est homologue à zéro et $\gamma' = \gamma$. Il existe ainsi un 2-tenseur V tel que :

$$C_{2q+1} = (\hat{C}_{2q+1} + V) + \partial \mathcal{L}(X_{2q+1}),$$
$$C'_{2q+1} = (\hat{C}_{2q+1} + V) + \partial \mathcal{L}(X'_{2q+1}) \tag{13.13}$$

où X_{2q+1}, X'_{2q+1} sont des vecteurs. Nous sommes conduits à poser :

$$\overline{C}_{2q+1} = \hat{C}_{2q+1} + V = C_{2q+1} - \partial \mathcal{L}(X_{2q+1}) = C'_{2q+1} - \partial \mathcal{L}(X'_{2q+1}). \tag{13.14}$$

A toute 2-cochaîne C_{2q+1} de la classe envisagée, la métrique $\mathbf{g}$ permet d'attacher d'une manière unique un 2-cocycle exact $\partial \mathcal{L}(X_{2q+1})$ pour lequel on a :

$$C_{2q+1} = \overline{C}_{2q+1} + \partial \mathcal{L}(X_{2q+1}).$$

La 2-cochaîne $\overline{C}_{2q+1}$ appartient à la classe et est caractérisée par la condition que le 2-cocycle exact qui lui est attaché est nul. Nous avons établi :

Proposition. — *Soit* (W, F) *une variété symplectique compacte munie d'une métrique riemannienne* $\mathbf{g}$ *et de la connexion symplectique* Γ *déduite de la connexion riemannienne au sens du* (§ 6.a). *Dans chaque classe d'équivalence de* $*_\nu$*-produits de* (W, F), *il existe un* $*_\nu$*-produit unique dont les 2-cochaînes paires vérifient les conditions (13.8) et les 2-cochaines impaires vérifient :*

$$\partial \mathcal{L}(X_{2q+1}) = 0 \tag{13.15}$$

où $\partial \mathcal{L}(W_{2q+1})$ *est le 2-cocycle exact attaché à* C_{2q+1} *par* $\mathbf{g}$.

14. Equivalence faible d'algèbres de Lie formelles.

a) Considérons une algèbre de Lie formelle définie par un crochet de la forme :

$$[u, v]_\lambda = P(u, v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r B_r(u, v) \tag{14.1}$$

où les B_r $(r \geqslant 1)$ sont des 2-cochaînes différentielles de (N, P) *nulles sur les constantes.* Introduisons :

$$T_\lambda = \mathrm{Id}_N + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s \tag{14.2}$$

où les T_s sont de la forme :

$$T_s u = \overline{T}_s u + k_s u$$

$\overline{T}_s$ étant un opérateur différentiel nul sur les constantes et k_s *une constante.* Par transformation par (14.2), on passe de (14.1) à un crochet *satisfaisant la même hypothèse.*

Considérons une variété symplectique (W, F) *telle que* $b_2(W) = 0$. La 2-forme F étant exacte, L^c est différent de L. Le lemme suivant est utile.

LEMME. — *Soit* $D = \mathcal{L}(Z) + k(Z)$, *où* $Z \in L^c$, *une dérivation de l'algèbre de Lie de Poisson. Si* Γ *est une connexion symplectique arbitraire et si* T *est le 3-tenseur covariant défini par* $\mathcal{L}(Z)\Gamma$, *on a* :

$$\begin{aligned} DS^3_\Gamma(u, v) - S^3_\Gamma(Du, v) - S^3_\Gamma(u, Dv) &= 2k(Z)\, S^3_\Gamma(u, v) \\ &\quad + (\partial A_{\Gamma,T})\,(u, v) \end{aligned} \tag{14.3}$$

où $A_{\Gamma,T}$ *est défini par (7.3).*

On voit en effet que si X_u est le champ hamiltonien défini par $u \in N$

$$\mathcal{L}(Z)\, X_u = k(Z)\, X_u + X_{\mathcal{L}(Z)u}. \tag{14.4}$$

Le premier membre de (14.3) est égal à :

$$\mathcal{L}(Z)\; S^3_\Gamma(u, v) - S^3_\Gamma(\mathcal{L}(Z)u, v) - S^3_\Gamma(u, \mathcal{L}(Z)v) - k(Z)\, S^3_\Gamma(u, v)$$

soit en explicitant $\mathcal{L}(Z)\,S^3_\Gamma(u\,,v)$ à l'aide de (14.4) et compte-tenu de la définition de $A_{\Gamma,T}$:

$$2k(Z)\,S^3_\Gamma(u\,,v) + (\partial A_{\Gamma,T})\,(u\,,v)\,.$$

b) Si deux crochets (14.1) sont transformés l'un de l'autre par un opérateur (14.2), nous dirons que cet opérateur définit entre les algèbres de Lie correspondantes *une équivalence faible.* Nous allons établir [12] :

PROPOSITION (S. Gutt). – *Si* $b_2(W) = 0$, *toutes les algèbres de Lie formelles (14.1) telles que* $B_1 = Q^3/3!$ *sont faiblement équivalentes. Il en est ainsi, en particulier, pour toutes les algèbres de Lie de Vey.*

Nous allons utiliser pour les transformations les formules (4.9) et (4.10). Considérons deux algèbres de Lie formelles données respectivement par (14.1) et

$$[u\,,v]'_\lambda = P(u\,,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r B'_r(u\,,v) \tag{14.5}$$

et satisfaisant les hypothèses de la proposition : on a $B_1 = Q^3/3!$ et $B'_1 = Q'^3/3!$ où :

$$Q^3 = S^3_\Gamma + 3\partial H \qquad Q'^3 = S^3_{\Gamma'} + 3\partial H'$$

Γ et Γ' étant des connexions symplectiques convenables, H et H′ des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant 2$, nuls sur les constantes. Le 2-cocycle de Chevalley :

$$Q'^3 - Q^3 = S^3_{\Gamma'} - S^3_\Gamma + 3\partial(H' - H)$$

est exact. En utilisant des transformations s'exprimant au moyen d'opérateurs nuls sur les constantes on peut supposer que l'on a pour la connexion symplectique Γ

$$B'_1 = B_1 = S^3_\Gamma/3!$$

Le 2-cocycle de Chevalley $(B'_2 - B_2)$ peut s'écrire :

$$B'_2 - B_2 = \ell B_1 + \partial K \qquad (\ell \in \mathbf{R}) \tag{14.6}$$

où K est un opérateur différentiel nul sur les constantes ; par équivalence, nous pouvons supposer $K = 0$. Considérons la nouvelle algèbre de Lie définie par un crochet noté $[\ ,\ ]''_\lambda$ et déduite de (14.1) à partir de la transformation :

$$T_\lambda = \mathrm{Id} + \lambda D \tag{14.9}$$

où D est une dérivation de (N, P). Comme $\partial D = 0$, on a avec une notation évidente $B_1'' = B_1 = B_1'$. De plus :

$$B_2'' - B_2 = - G_2$$

où

$$G_2(u, v) = DB_1(u, v) - B_1(Du, v) - B_1(u, Dv) - \{Du, Dv\}.$$

Or

$$\{Du, Dv\} = -(1/2)(\partial D^2)(u, v).$$

Il résulte du lemme que si $D = \mathcal{L}(Z) + k(Z)$ (avec $Z \in L^c$) :

$$G_2 = 2k(Z) B_1 + \partial\left(\frac{1}{6} A_{\Gamma,T} - \frac{1}{2} D^2\right).$$

On peut choisir $Z \in L^c$ tel que $2k(Z) = -\ell$. On obtient :

$$B_2'' - B_2 = -\partial\left(\frac{1}{6} A_{\Gamma,T} - \frac{1}{2} D^2\right).$$

Une nouvelle transformation à opérateurs non nuls sur les constantes donne $B_2'' = B_2'$. On poursuit par récurrence et suppose que, par transformation de (14.1), on ait fait en sorte que $B_r' = B_r$ pour $r \leqslant q$ $(q \geqslant 2)$. Par équivalence le 2-cocycle de Chevalley $(B'_{q+1} - B_{q+1})$ peut s'écrire :

$$B'_{q+1} - B_{q+1} = \ell_q B_1 \qquad (\ell_q \in \mathbf{R}).$$

Considérons $[\ ,\ ]''_\lambda$ déduit de (14.1) à partir de la transformation (mêmes notations) : $T_\lambda = \mathrm{Id} + \lambda^q D$. On a $B_r'' = B_r = B_r'$ pour $r = 1, \dots, q$. De plus :

$$B''_{q+1} - B_{q+1} = - G_{q+1}$$

où

$$\begin{aligned} G_{q+1}(u, v) &= DB_1(u, v) - B_1(Du, v) - B_1(u, Dv) \\ &= 2k(Z) B_1(u, v) + \frac{1}{6}(\partial A_{\Gamma,T})(u, v). \end{aligned}$$

Pour $2k(Z) = -\ell_q$, on obtient :

$$B''_{q+1} - B'_{q+1} = -\frac{1}{6}\partial A_{\Gamma,T}.$$

Nous avons établi par récurrence que les algèbres de Lie considérées sont faiblement équivalentes.

15. $*_\nu$-produits faibles.

Nous sommes conduits à introduire la définition suivante

DEFINITION. – *Un $*_\nu$-produit faible est donné par une déformation associative de la forme :*

$$u *_\nu v = u \,.\, v + \nu P(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u, v) \qquad (15.1)$$

où les 2-cochaînes différentielles C_r satisfont l'hypothèse de parité et où celles de rang impair sont nulles sur les constantes.

Les 2-cochaînes de rang pair ne sont pas nécessairement nulles sur les constantes. Par antisymétrisation, le $*_\nu$-produit faible (15.1) engendre une algèbre de Lie formelle donnée par le crochet :

$$[u, v]_\lambda = P(u, v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u, v) \qquad (15.2)$$

où les cochaînes C_{2r+1} sont nulles sur les constantes, c'est-à-dire un crochet du type (14.1). Nous notons que $\widetilde{E}_{2t+1} = \widetilde{\partial} C_{2t+1}$ est nul sur les constantes pour $t = 1, 2, \ldots$

a) Pour étudier les $*_\nu$-produits faibles, nous établissons d'abord le lemme suivant

LEMME. – *Soit C une 2-cochaîne différentielle de Hochschild telle que $\widetilde{\partial} C = E$ soit nulle sur les constantes. Si C est impaire, elle est nulle sur les constantes. Si C est paire, elle admet la forme suivante :*

$$C(u, v) = \overline{C}(u, v) + auv \quad (a \in N) \qquad (15.3)$$

où $\overline{C}$ est nulle sur les constantes.

En effet :

$$\widetilde{\partial} C(u, v, w) = u\, C(v, w) - C(uv, w) + C(u, vw) - C(u, v)\, w\,.$$

Nous notons que le cobord de la cochaîne auv est nul. Si $\widetilde{\partial} C = E$ est nulle sur les constantes, prenons $v, w = 1$; on obtient $C(u, 1) = au$, où $a = C(1, 1)$. Si C est *impaire* $C(1, 1) = 0$ et par suite $C(u, 1) = 0$; ainsi C est nulle sur les constantes. Si C est *paire*, on peut écrire localement sur le domaine d'une carte $\{x^i\}$:

$$C(u, v) = \overline{C}(u, v) + \sum_t C^{i_1 \ldots i_t}(u\, \partial_{i_1 \ldots i_t} v + v\, \partial_{i_1 \ldots i_t} u) + auv$$

où $\overline{C}$ est nulle sur les constantes et $a = C(1, 1)$. Par suite :

$$C(u, 1) = \sum_t C^{i_1 \ldots i_t}\, \partial_{i_1 \ldots i_t} u + au = au$$

et le premier terme du second membre est nécessairement nul. On a donc (15.3).

Cela posé, considérons le $*_\nu$-produit faible (15.1) ; $\widetilde{E}_2 = \widetilde{\partial} C_2$ étant nulle sur les constantes, on a :

$$C_2(u, v) = \overline{C}_2(u, v) + a_2 uv \qquad (a_2 \in N)$$

où $\overline{C}_2$ est nulle sur les constantes. Considérons :

$$\widetilde{E}_3(u, v, w) = C_2(P(u, v), w) + P(C_2(u, v), w) - C_2(u, P(v, w)) - P(u, C_2(v, w)) ;$$

$\widetilde{E}_3$ étant nulle sur les constantes, il en est de même pour :

$$a_2 P(u, v), w + P(a_2 uv, w) - a_2 u P(v, w) - P(u, a_2 vw).$$

Si $u = 1$, on a donc $P(a_2 v, w) = a_2 P(v, w)$ pour tout $v, w \in N$, ce qui implique $a_2 = \text{const.} = k_2 \in \mathbf{R}$.

Raisonnons par récurrence et supposons que l'on ait :

$$C_{2r}(u, v) = \overline{C}_{2r}(u, v) + k_{2r} uv \qquad (k_{2r} \in \mathbf{R})$$

où $\overline{C}_{2r}$ est nulle sur les constantes pour $r = 1, \ldots t-1$ $(t \geqslant 2)$. En analysant l'expression de $\widetilde{E}_{2t}$, on voit que cette 3-cochaîne est nulle sur les constantes. On en déduit à partir du lemme :

$$C_{2t}(u, v) = \overline{C}_{2t}(u, v) + a_{2t} uv \qquad (a_{2t} \in N).$$

$\widetilde{E}_{2t+1}$ étant nulle sur les constantes, on voit aisément qu'il en est de même pour la 3-cochaîne :

$$C_{2t}(P(u, v), w) + P(C_{2t}(u, v), w) - C_{2t}(u, P(v, w)) - P(u, C_{2t}(v, w))$$

et le même raisonnement que ci-dessus donne $a_{2t} = \text{const.} = k_{2t} \in \mathbf{R}$. Nous avons établi :

PROPOSITION. — *Les 2-cochaînes de rang pair d'un $*_\nu$-produit faible sont de la forme :*

$$C_{2r}(u\,,v) = \overline{C}_{2r}(u\,,v) + k_{2r}uv \qquad (k_{2r} \in \mathbf{R}) \tag{15.4}$$

où les $\overline{C}_{2r}$ *sont nulles sur les constantes.*

Nous allons prouver :

PROPOSITION. – *Tout* $*_\nu$*-produit faible est faiblement équivalent à un* $*_\nu$*-produit.*

Considérons un $*_\nu$-produit faible (15.1) et supposons que, par transformation, on ait obtenu $k_{2r} = 0$ pour $0 \leqslant 2r \leqslant 2(q-1)$. On a :

$$C_{2q}(u\,,v) = \overline{C}_{2q}(u\,,v) + k_{2q}uv \qquad (k_{2q} \in \mathbf{R})\,.$$

Introduisons la transformation :

$$T_\nu = \mathrm{Id} - \nu^{2q}\,k_{2q}\,. \tag{15.5}$$

De l'algèbre de Lie formelle (15.2) on déduit, au moyen de (15.5), une nouvelle algèbre de Lie formelle dont les 2-cochaînes sont toujours nulles sur les constantes. On en déduit donc de (15.1) au moyen de (15.5) un nouveau $*_\nu$-produit faible que nous notons $*'_\nu$. Avec des notations évidentes, on a $C'_r = C_r$ pour $r = 1\,,\ldots,2q-1$. De plus :

$$C'_{2q} = C_{2q} + \widetilde{\partial}\,T_{2q}$$

c'est-à-dire

$$C'_{2q}(u\,,v) = C_{2q}(u\,,v) - k_{2q}uv = \overline{C}_{2q}(u\,,v)\,.$$

Nous avons établi la proposition par récurrence.

b) Nous dirons qu'un $*_\nu$-produit faible est *un* $*_\nu$*-produit de Vey faible* si l'on a :

$$C_{2r}(u\,,v) = Q^{2r}(u\,,v)/(2r)! + k_{2r}uv\,,$$

$$C_{2r+1}(u\,,v) = Q^{2r+1}(u\,,\nu)/(2r+1)!\,. \tag{15.6}$$

Par antisymétrisation, un $*_\nu$-produit de Vey faible engendre une algèbre de Lie de Vey. Les raisonnements du (§ 8.d) conduisent au théorème suivant :

THEOREME. – *Tout* $*_\nu$*-produit faible de* (W , F) *est équivalent à un* $*_\nu$*-produit de Vey faible.*

c) Le théorème du (§ 5.a) s'étend aux $*_\nu$-produits faibles, mais sa démonstration est plus délicate. Nous allons établir :

THEOREME D'UNICITE. — *Si une algèbre de Lie formelle (15.2) pour laquelle les* C_{2r+1} *sont nulles sur les constantes est engendrée par un* $*_\nu$*-produit faible, ce* $*_\nu$*-produit faible est unique.*

Considérons le $*_\nu$-produit faible (15.1) et un autre $*_\nu$-produit faible :

$$u *'_\nu v = uv + \nu P(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C'_r(u, v)$$

qui engendrent la même algèbre de Lie. Pour tout r, on a $C'_{2r+1} = C_{2r+1}$ et

$$C_{2r} = \overline{C}_{2r}(u, v) + k_{2r}uv \qquad C'_{2r}(u, v) = \overline{C}'_{2r}(u, v) + k'_{2r}uv.$$

Si $\overline{C}'_2 - \overline{C}_2 = \overline{M}_2$, la relation $\widetilde{E}'_3 - \widetilde{E}_3 = 0$ s'écrit :

$$\overline{M}_2(P(u, v), w) + P(\overline{M}_2(u, v), w) - \overline{M}_2(u, P(v, w)) \\ - P(u, \overline{M}_2(v, w)) = 0$$

et il résulte du lemme du (§ 5.a) que l'on a $\overline{C}'_2 = \overline{C}_2$.

Supposons que l'on ait

$$C'_{2r} = C_{2r} (r = 0, \ldots, q-1 \,;\, q \geqslant 1) \qquad \overline{C}'_{2q} = \overline{C}_{2q}.$$

Ainsi :

$$C'_{2q}(u, v) = C_{2q}(u, v) + h_{2q}uv \qquad (h_{2q} = k'_{2q} - k_{2q}).$$

Un calcul analogue à celui du (§ 5.a) donne :

$$\widetilde{E}'_{2q+2} - \widetilde{E}_{2q+2} = - h_{2q}\, \widetilde{\partial}\, \overline{C}_2.$$

Si nous posons $\overline{C}'_{2q+2} - \overline{C}_{2q+2} = \overline{M}_{2q+2}$, il vient :

$$\widetilde{\partial}(\overline{M}_{2q+2} + h_{2q}\overline{C}_2) = 0. \tag{15.8}$$

Cela posé, la relation $\widetilde{E}'_{2q+3} - \widetilde{E}_{2q+3} = 0$ s'écrit :

$$\overline{M}_{2q+2}(P(u, v), w) + P(\overline{M}_{2q+2}(u, v), w) - \overline{M}_{2q+2}(u, P(v, w)) \\ - P(u, \overline{M}_{2q+2}(v, w)) - h_{2q}\widetilde{\partial} C_3(u, v, w) = 0.$$

Or on a :

$$\widetilde{\partial} C_3(u, v, w) = \widetilde{E}_3(u, v, w) = \overline{C}_2(P(u, v), w) + P(\overline{C}_2(u, v), w) \\ - \overline{C}_2(u, P(v, w)) - P(u, \overline{C}_2(v, w)).$$

Si l'on pose $\overline{K}_{2q+2} = \overline{M}_{2q+2} - h_{2q}\overline{C}_2$, il vient :

$$\overline{K}_{2q+2}(P(u, v), w) + P(\overline{K}_{2q+2}(u, v), w) - \overline{K}_{2q+2}(u, P(v, w)) \\ - P(u, \overline{K}_{2q+2}(v, w)) = 0.$$

Il résulte du lemme du (§ 5.a) que l'on a $\overline{\mathrm{M}}_{2q+2} = h_{2q}\overline{\mathrm{C}}_2$. Si h_{2q} était $\neq 0$, (15.8) s'écrirait : $h_{2q}\tilde{\partial}\overline{\mathrm{C}}_2 = 0$ et $\overline{\mathrm{C}}_2$ serait un 2-cocycle ce qui implique contradiction. On a donc $h_{2q} = 0$ et $\overline{\mathrm{M}}_{2q+2} = 0$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{C}'_{2q} = \mathrm{C}_{2q} \qquad \overline{\mathrm{C}}'_{2q+2} = \overline{\mathrm{C}}_{2q+2}.$$

L'unicité est ainsi prouvée.

16. Algèbres de Lie engendrées par un $*_\nu$-produit faible et algèbres de Lie de Vey.

a) Considérons, sur une variété symplectique arbitraire, une algèbre de Lie formelle

$$[u, v]_{\nu^2} = \mathrm{P}(u, v) + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r}\,\mathrm{C}_{2r+1}(u, v) \tag{16.1}$$

où les C_{2r+1} sont nulles sur les constantes.

Supposons que $\mathrm{C}_3 = \mathrm{Q}^3/3!$

Soit U un domaine contractile de W et introduisons la restriction de (16.1) à U. Comme $b_2(\mathrm{U}) = 0$, il résulte de la proposition du (§ 14.b) que cette algèbre de Lie sur (U, F/U) est *faiblement équivalente* à l'algèbre de Lie de Moyal sur U, engendrée par le produit de Moyal défini à partir d'une carte de Darboux de F de domaine U.

Il en résulte que notre algèbre de Lie $\{\mathrm{C}_{2r+1}|_{\mathrm{U}}\}$ $(r = 0, 1, \ldots)$ sur U est engendrée par un $*_\nu$-produit faible $\{\mathrm{C}_{2r(\mathrm{U})}, \mathrm{C}_{2r+1}|_{\mathrm{U}}\}$ défini sur U. Nous posons

$$\mathrm{C}_{2r(\mathrm{U})}(u, v) = \overline{\mathrm{C}}_{2r(\mathrm{U})}(u, v) + k_{2r(\mathrm{U})}uv \qquad (k_{2r(\mathrm{U})} \in \mathbf{R})$$

où $\overline{\mathrm{C}}_{2r(\mathrm{U})}$ est nulle sur les constantes. Considérons deux domaines contractiles U, V de W tels que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \neq \phi$. On déduit du théorème d'unicité du (§ 15.c) qu'on a sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$:

$$\overline{\mathrm{C}}_{2r(\mathrm{U})}(u, v) + k_{2r(\mathrm{U})}uv = \overline{\mathrm{C}}_{2r(\mathrm{V})}(u, v) + k_{2r(\mathrm{V})}uv.$$

On voit que $k_{2r(\mathrm{U})} = k_{2r(\mathrm{V})} = k_{2r}$ et que $\overline{\mathrm{C}}_{2r(\mathrm{U})} = \overline{\mathrm{C}}_{2r(\mathrm{U})}$ sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$. Il existe ainsi sur W des opérateurs bidifférentiels $\overline{\mathrm{C}}_{2r}$ nuls sur les constantes tels que $\overline{\mathrm{C}}_{2r(\mathrm{U})} = \overline{\mathrm{C}}_{2r}|_{\mathrm{U}}$. Les k_{2r} et les $\overline{\mathrm{C}}_{2r}, \mathrm{C}_{2r+1}$ définissent sur W un $*_\nu$-produit faible qui engendre l'algèbre de Lie donnée.

Ce $*_\nu$-produit faible étant équivalent à un $*_\nu$-produit de Vey faible (§ 15.b), l'algèbre de Lie formelle (16.1) où $C_3 = Q^3/3!$ est équivalente à une algèbre de Lie de Vey. Il en est de même pour une algèbre de Lie (16.1) telle que :

$$C_3 = Q^3/3! + \partial A \tag{16.2}$$

où A est un opérateur différentiel nul sur les constantes. Nous avons établi :

THEOREME. — *Pour qu'une algèbre de Lie formelle (15.2) soit équivalente à une algèbre de Lie de Vey, il faut et il suffit que le 2-cocycle de Chevalley* C_3 *correspondant soit cohomologue à un 2-cocycle de la forme* $Q^3/3!$.

b) Nous avons vu qu'une telle algèbre de Lie est engendrée par un $*_\nu$-produit faible. Inversement considérons une algèbre de Lie formelle (15.2) qui est engendrée par un $*_\nu$-produit faible ; celui-ci étant équivalent à un $*_\nu$-produit de Vey faible, notre algèbre de Lie est équivalente à une algèbre de Lie de Vey. On a :

THEOREME. — *Pour qu'une algèbre de Lie formelle (15.2) soit engendrée par un* $*_\nu$*-produit faible, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à une algèbre de Lie de Vey.*

c) On en déduit

COROLLAIRE. — *Une algèbre de Lie de Vey est engendrée par un* $*_\nu$*-produit de Vey faible.*

En effet notre algèbre de Lie, de cochaînes $Q^{2r+1}/(2 + 1)!$ est engendrée par un $*_\nu$-produit faible. Raisonnons par récurrence ; comme $C_3 = Q^3/3!$, on a nécessairement $C_2 = Q^2/2 + k_2$. Supposons que notre $*_\nu$-produit faible soit de Vey jusqu'à l'ordre $2q - 1$ $(q \geqslant 2)$. On a

$$C_{2r}(u , v) = Q^{2r}(u , v)/(2r)! + k_{2r}uv$$

pour $r < q$ et

$$C_{2q+1} = Q^{2q+1}/(2q + 1)!$$

Le raisonnement du (§ 8.d) montre, d'après (8.10), que C_{2q} est de plus grand type bidifférentiel $(2q , 2q)$ et que par suite :

$$C_{2q}(u, v) = Q^{2q}(u, v)/(2q)! + k_{2q}uv$$

ce qui établit le corollaire.

17. Algèbres de Lie de Vey engendrées par un $*_\nu$-produit.

a) Considérons sur (W, F) un $*_\nu$-produit faible :

$$u *_\nu v = uv + \nu P(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u, v). \qquad (17.1)$$

Les 2-cochaînes C_r peuvent s'écrire :

$$C_{2r}(u, v) = \overline{C}_{2r}(u, v) + k_{2r}uv, \; C_{2r+1}(u, v) = \overline{C}_{2r+1}(u, v) \quad (k_{2r} \in \mathbf{R})$$

où les $\overline{C}_r$ sont nulles sur les constantes ; (17.1) peut être mis sous le forme :

$$u *_\nu v = k_{\nu^2} uv + \nu P(u, v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r \overline{C}_r(u, v) \qquad (17.2)$$

où l'on a posé :

$$k_{\nu^2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r} k_{2r}.$$

Introduisons la série formelle :

$$h_{\nu^2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r} h_{2r} \qquad (h_{2r} \in \mathbf{R}).$$

On peut transformer (17.2) à partir de l'équivalence faible définie par :

$$T_{\nu^2} u = h_{\nu^2} u = \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r} h_{2r}\right) u. \qquad (17.3)$$

On définit ainsi un nouveau $*_\nu$-produit faible, noté $*'_\nu$, donné par :

$$u *'_\nu v = h_{\nu^2}(u *_\nu v). \qquad (17.4)$$

Nous dirons que $*'_\nu$ *se déduit de* $*_\nu$ *par produit par la constante* h_{ν^2}. Pour que (17.4) soit un $*_\nu$-produit, il faut et il suffit que l'on ait :

$$h_{\nu^2}, k_{\nu^2} = 1 \qquad (17.5)$$

h_{ν^2} est ainsi définie d'une manière unique. On a :

PROPOSITION. – *Etant donné un $*_\nu$-produit faible, il existe un $*_\nu$-produit unique qui s'en déduit par produit par une constante.*

b) Considérons une algèbre de Lie de Vey

$$[u\,,v]_{\nu^2} = \mathrm{P}(u\,,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r}(\mathrm{Q}^{2r+1}(u\,,v)/(2r+1)!)\,. \tag{17.6}$$

Par transformation de (17.6) à partir de (17.3), on obtient une algèbre de Lie de Vey donnée par

$$[u\,,v]'_{\nu^2} = h_{\nu^2}[u\,,v]_{\nu^2}\,. \tag{17.7}$$

L'algèbre de Lie de Vey (17.6) est engendrée par un $*_\nu$-produit de Vey faible (17.2), où $\overline{\mathrm{C}}_r = \mathrm{Q}^r/r!$. Pour que l'algèbre de Lie (17.7) soit engendrée par un $*_\nu$-produit de Vey, il faut et il suffit que $h_{\nu^2} = k_{\nu^2}^{-1}$. Il en résulte :

Proposition. – *Etant donnée une algèbre de Lie de Vey, il existe une algèbre de Lie de Vey unique s'en déduisant par produit par une constante, qui soit engendrée par un $*_\nu$-produit de Vey.*

c) Notons que, si la restriction d'un $*_\nu$-produit faible à un domaine U est un $*_\nu$-produit sur U, le $*_\nu$-produit faible envisagé sur W est nécessairement lui-même un $*_\nu$-produit. On en déduit :

Proposition. – *Etant donnée une algèbre de Lie de Vey, si sa restriction à un domaine contractile* U *est équivalente à une algèbre de Lie de Moyal sur* U, *l'algèbre de Lie de Vey envisagée est engendrée par un $*_\nu$-produit de Vey.*

III. $*_\nu$-PRODUITS INVARIANTS

18. Existence de $*_\nu$-produits invariants.

Soit (W, F) une variété symplectique sur laquelle opère effectivement, par symplectomorphismes, *un groupe de Lie* G. Nous notons K_g l'action sur la variété (W, F) de $g \in \mathrm{G}$. Nous avons vu (§ 7.a) que si (W, F) admet une connexion linéaire invariante par G (ou G-*invariante*), elle admet une *connexion symplectique* G-*invariante* Γ. Nous supposons qu'il en est ainsi dans la suite. Toutes les cochaînes introduites sont supposées désormais *nulles sur les constantes.*

a) Sous ces hypothèses, nous allons établir le lemme suivant :

LEMME 1. – *Soit* C *un 2-cocycle différentiel de Hochschild exact et* G*-invariant; C est le cobord d'une 1-cochaîne* G*-invariante admettant, relativement à* Γ, *une partie de type 1 nulle.*

En effet nous pouvons écrire : $C = \tilde{\partial} T$ où T est un opérateur différentiel choisi de façon que sa partie de type 1 relativement à Γ soit nulle. La connexion symplectique Γ étant G-invariante, pour tout $g \in G$ les opérateurs différentiels $K_g T$ sont aussi à partie de type 1 nulle pour Γ. Tout difféomorphisme commutant avec $\tilde{\partial}$, on a : $C = \tilde{\partial} K_g T$ et par suite : $\tilde{\partial}(K_g T - T) = 0$. Ainsi $(K_g T - T)$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 qui ne peut être que nul d'après la condition sur la partie de type 1 de T. Pour tout $g \in G$, on a $K_g T = T$ et T est nécessairement G-invariant, ce qui démontre le lemme.

Un raisonnement semblable, un peu plus délicat, permet d'établir

LEMME 2. – *Soit* E *un 3-cocycle différentiel de Hochschild exact et* G*-invariant; E est le cobord d'une 2-cochaîne* G*-invariante admettant, relativement à* Γ, *une partie de type (1, 1) nulle.*

En effet nous pouvons écrire : $E = \tilde{\partial} C$ où C est une 2-cochaîne différentielle dont nous supposons nulle la partie de type (1, 1) relativement à Γ. La connexion Γ étant G-invariante, les 2-cochaînes différentielles $K_g C$ (où $g \in G$) jouissent de la même propriété. Décomposons E (resp. C) en ses parties paires $E^{(p)}$ (resp. $C^{(p)}$) et impaires $E^{(i)}$ (resp. $C^{(i)}$); $E^{(p)}$ et $E^{(i)}$ sont encore G-invariants et l'on a :

$$E^{(p)} = \tilde{\partial} C^{(i)} \qquad E^{(i)} = \tilde{\partial} C^{(p)} .$$

Le raisonnement du lemme 1 donne :

$$\tilde{\partial}(K_g C^{(i)} - C^{(i)}) = 0 \qquad \tilde{\partial}(K_g C^{(p)} - C^{(p)}) = 0 .$$

Le 2-cocycle de Hochschild impair $(K_g C^{(i)} - C^{(i)})$ est un opérateur bidifférentiel de type (1, 1) qui ne peut être que nul en vertu de la condition sur la partie de type (1, 1) de C. Ainsi $C^{(i)}$ est G-invariante.

D'autre part, pour tout $g \in G$, $(K_g C^{(p)} - C^{(p)})$ est un 2-cocycle de Hochschild pair, à partie de type (1, 1) nulle qui est nécessairement exact. D'après le lemme du (§ 13.a), on peut substituer à $C^{(p)}$ la 2-cochaîne $\overline{C}^{(p)}$ cohomologue vérifiant les conditions (13.7), pour laquelle on a encore : $E^{(i)} = \widetilde{\partial}\,\overline{C}^{(p)}$. La 2-cochaîne cohomologue $K_g \overline{C}^{(p)}$ vérifie encore les mêmes conditions et l'on a $K_g \overline{C}^{(p)} = \overline{C}^{(p)}$ pour tout $g \in G$. Ainsi la 2-cochaîne $\overline{C}^{(p)}$ est G-invariante, ce qui démontre le lemme.

b) Nous avons vu (§ 8.a) que, sur une variété symplectique, un $*_\nu$-produit de Vey détermine d'une manière unique une connexion symplectique Γ telle que : $Q^2 = P^2_\Gamma + \widetilde{\partial} H$ où H est un opérateur différentiel d'ordre 2. On en déduit :

PROPOSITION. — *Pour une variété symplectique* (W, F) *sur laquelle opère par symplectomorphismes un groupe de Lie* G, *l'existence d'un* $*_\nu$*-produit de Vey* G*-invariant entraîne celle d'une connexion symplectique* G*-invariante.*

D'un point de vue inverse, nous allons établir, dans le cas où G est compact, le théorème suivant

THEOREME. — *Soit* (W, F) *une variété symplectique sur laquelle opère par symplectomorphismes un groupe de Lie compact connexe* G. *S'il existe sur* (W, F) *un* $*_\nu$*-produit, il existe un* $*_\nu$*-produit de Vey* G*-invariant équivalent.*

Nous allons d'abord établir

PROPOSITION. — *Sous les hypothèses du théorème, il existe un* $*_\nu$*-produit* G*-invariant équivalent, à partie de type* (1, 1) *triviale pour une connexion symplectique* G*-invariante* Γ.

En effet le groupe G étant compact, il existe sur (W, F) une connexion linéaire G-invariante et par suite *une connexion symplectique* G*-invariante* Γ. Par hypothèse (W, F) admet un $*_\nu$-produit que nous pouvons, par équivalence, supposer de la forme :

$$u *_\nu v = uv + \nu P(u, v) + (\nu^2/2) P^2_\Gamma(u, \nu) + \sum_{r=3}^{\infty} \nu^r C_r(u, v). \quad (18.1)$$

En particulier $C_2 = (1/2) P^2_\Gamma$ est G-invariant.

Procédons par récurrence. Supposons que, par transformation, on ait fait en sorte que (18.1) soit tel que les C_r soient G-invariantes pour $r \leqslant 2q - 1$ $(q \geqslant 1)$; $\widetilde{E}_{2q}$ étant un 3-cocycle de Hochschild exact et G-invariant, il résulte du lemme 2 qu'il existe une 2-cochaîne G-invariante C'_{2q} à partie de type $(1,1)$ nulle, telle que $\widetilde{\partial} C'_{2q} = \widetilde{E}_{2q}$. On a $\widetilde{\partial}(C'_{2q} - C_{2q}) = 0$ et $C'_{2q} - C_{2q}$ est un 2-cocycle pair donc exact. Il existe un opérateur différentiel A tel que $C'_{2q} - C_{2q} = \widetilde{\partial} A$. En transformant (18.1) au moyen de $T_\nu = \mathrm{Id} + \nu^{2q} A$, on peut donc supposer que C_{2q} est G-invariant.

S'il en est ainsi, $\widetilde{E}_{2q+1} = \widetilde{\partial} C_{2q+1}$ est un 3-cocycle de Hochschild exact et G-invariant. Il existe donc une 2-cochaîne G-invariante C'_{2q+1}, à partie de type $(1,1)$ nulle, telle que $\widetilde{E}_{2q+1} = \widetilde{\partial} C'_{2q+1}$. Ainsi $(C'_{2q+1} - C_{2q+1})$ est un 2-cocycle de Hochschild impair :

$$C'_{2q+1} - C_{2q+1} = T \tag{18.2}$$

où T est un opérateur bidifférentiel impair d'ordre 1 défini par un 2-tenseur désigné par la même notation. Comme $\partial C'_{2q+1}$ et $\partial C_{2q+1} = E_q$ sont G-invariants, on voit que ∂T est *G-invariant.*

Ainsi T est l'image par μ^{-1} d'une 2-forme β de W telle que $d\beta$ soit G-invariante. Désignons par $\overline{\beta}$ la moyenne des transformées de β par les éléments de G au sens de *la mesure de Haar* attachée au groupe G. La 2-forme $\overline{\beta}$ est G-invariante et vérifie : $d\overline{\beta} = d\beta$. Il existe ainsi une 2-forme *fermée* γ telle que : $\beta = \overline{\beta} + \gamma$. On sait que, le groupe G étant connexe, la transformée $g^*\gamma$ de γ par $g \in G$ *est homologue à* γ. Par suite la 2-forme $\overline{\gamma}$, moyenne des transformées de γ par les éléments de G au sens de la mesure de Haar, est homologue à γ et l'on a : $\gamma = \overline{\gamma} + d\alpha$ où $\overline{\gamma}$ est G-invariante et où α est une 1-forme. Il vient : $\beta = \overline{\beta} + \overline{\gamma} + d\alpha$. Si $\overline{T}$ est le 2-tenseur *G-invariant* image par μ^{-1} de la 2-forme G-invariante $(\overline{\beta} + \overline{\gamma})$ on a :

$$T = \overline{T} + \partial \mathscr{L}(Z) \tag{18.3}$$

où Z est le vecteur $\mu^{-1}(\alpha)$. On a ainsi :

$$(C'_{2q+1} - \overline{T}) - C_{2q+1} = \partial \mathscr{L}(Z)$$

et l'on peut passer par équivalence de C_{2q+1} à la 2-cochaîne G-invariante $(C'_{2q+1} - \overline{T})$. On a ainsi établi par récurrence qu'il existe un $*_\nu$-produit G-invariant à partie de type $(1,1)$ triviale pour Γ, équivalent au $*_\nu$-produit dont nous étions partis.

c) Cela posé, reprenons à partir de ce $*_\nu$-produit G-invariant le raisonnement du (§ 8.d). Supposons que, par équivalence, un tel $*_\nu$-produit G-invariant ait pu être rendu de Vey à l'ordre $(2q-2)$ (avec $q \geqslant 2$). Il résulte du (§ 8.d) que cette hypothèse s'étend immédiatement à l'ordre $(2q-1)$.

Considérons la partie principale de C_{2q+1} qui est G-invariante. Si elle est d'ordre $> (2q+1)$ c'est la partie principale de ∂A, où A est un opérateur différentiel. Substituons à A la moyenne $\overline{A}$ des transformés de A pour les éléments de G, au sens de la mesure de Haar; la partie principale de $\partial \overline{A}$ coïncide avec la partie principale G-invariante de ∂A. Par transformation du $*_\nu$-produit au moyen de $T_\nu = \mathrm{Id} - \nu^{2q}\overline{A}$ on obtient un $*_\nu$-produit G-invariant et, d'après (§ 8.d), on peut supposer C_{2q+1} d'ordre au plus $(2q+1)$. On a alors $C_{2q} = Q^{2q}/(2q)!$ Nous avons établi par récurrence que notre $*_\nu$-produit est équivalent à *un $*_\nu$-produit de Vey* G-invariant.

d) un raisonnement analogue à celui de b) permet d'établir

PROPOSITION. — *Soit* (W, F) *une variété symplectique sur laquelle opère par symplectomorphismes un groupe de Lie compact* G. *Si deux $*_\nu$-produits* G-*invariants sont équivalents ils sont invariantement équivalents.*

En effet soient $*_\nu$ et $*'_\nu$ les deux produits G-invariants équivalents considérés, dont nous notons les 2-cochaînes C_r et C'_r. Supposons que, par transformation G-invariante, on ait fait en sorte que $C_r = C'_r$ pour $r \leqslant 2q-1$ (avec $q \geqslant 1$). On a $\widetilde{\partial}(C'_{2q} - C_{2q}) = 0$ et il vient : $C'_{2q} - C_{2q} = \widetilde{\partial} A_q$ où A_q est, d'après le lemme 1, un opérateur différentiel *G-invariant.* En transformant $*_\nu$ à l'aide de la transformation invariante $T_\nu = \mathrm{Id} + \nu^{2q} A_q$, on obtient $C_{2q} = C'_{2q}$. Après cette transformation on a : $C'_{2q+1} - C_{2q+1} = T$ où T est donné par un 2-tenseur antisymétrique et vérifie $\partial T = 0$. Il résulte de l'équivalence de $*_\nu$ et $*'_\nu$ que T est nécessairement exact (§ 13.c) : il existe un vecteur Z de W tel que

$$C'_{2q+1} - C_{2q+1} = \partial \mathcal{L}(Z)$$

où $\partial \mathcal{L}(Z)$ est G-invariant. La 1-forme $\alpha = \mu(Z)$ est telle que $d\alpha$ est G-invariante ; si $\overline{\alpha}$ est la moyenne au sens de la mesure de Haar des transformées de α par les éléments de G, on a $d\alpha = d\overline{\alpha}$ et il existe un vecteur G-invariant $\overline{Z} = \mu^{-1}(\overline{\alpha})$ tel que $\partial \mathcal{L}(Z) = \partial \mathcal{L}(\overline{Z})$. A l'aide de la transformation $\mathrm{Id} + \nu^{2q} \mathcal{L}(\overline{Z})$ on étend l'hypothèse de récurrence à $r = 2q + 1$, ce qui démontre la proposition.

e) Remarquons que dans le cas où G compact est non connexe, on établit par la méthode du b) et le raisonnement de Neroslavsky-Vlassov la proposition suivante :

PROPOSITION. – *Soit* (W, F) *une variété symplectique telle que* $b_3(W) = 0$ *sur laquelle opère par symplectomorphismes un groupe de Lie compact* G. *Il existe sur* (W, F) *un* $*_\nu$*-produit de Vey* G-*invariant.*

On déduit aussi du théorème de b) l'énoncé suivant :

COROLLAIRE. – *Soit* (W = G/H, F) *un espace homogène symplectique à* G *compact. Si* (W, F) *admet un* $*_\nu$*-produit, il existe sur cette variété un* $*_\nu$*-produit de Vey* G*-invariant.*

Ce résultat s'applique aux orbites associées à la représentation coadjointe de G au sens de Kirilov-Kostant-Souriau lorsqu'une telle orbite admet un $*_\nu$-produit.

19. Le fibré cotangent d'un espace homogène.

a) Soit M une variété différentielle connexe, paracompacte, de dimension n et classe C^∞. Le fibré cotangent $\pi : T^*M \longrightarrow M$ admet la 1-forme canonique ω de Liouville et, par suite, la 2-forme symplectique exacte $F = d\omega$.

Soit $\{x^\alpha\}$ (α, β, tout indice grec $= 1, \ldots, n$) une carte de M de domaine U ; nous notons $\{x^i\} = \{x^\alpha, x^{\overline{\alpha}} = p_\alpha\}$ (i, j, tout indice latin $= 1, \ldots, 2n$; $\overline{\alpha} = \alpha + n$) la carte de T^*M de domaine $\pi^{-1}(U)$ définie par la carte $\{x^\alpha\}$. On a : $\omega|_{\pi^{-1}(U)} = p_\alpha \, dx^\alpha$.

Soit X un champ de vecteur de M. Nous notons $\hat{X}$ *le champ hamiltonien* de (T^*M, F) défini par le scalaire

$$f = \omega(X) \in C^\infty(T^*M ; \mathbf{R}) ;$$

ce champ qui se projette sur M selon X est dit le relèvement canonique de X sur T^*M. Dans la carte $\{x^\alpha, x^{\bar\alpha} = p_\alpha\}$ introduite, $\hat X$ admet pour composantes :

$$\hat X^\alpha = X^\alpha \qquad \hat X^{\bar\alpha} = -p_\rho\, \partial_\alpha X^\rho . \tag{19.1}$$

Dans un changement de cartes de M, on a :

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta) \qquad x^\beta = x^\beta(x^{\alpha'}) .$$

Nous posons :

$$A^{\alpha'}_\beta = \partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta \qquad A^\beta_{\alpha'} = \partial x^\beta/\partial x^{\alpha'} .$$

Il vient pour le changement de cartes correspondant de T^*M :

$$x^{\bar\beta'} = \sum_\alpha A^\alpha_{\beta'} x^{\bar\alpha}$$

et par suite

$$A^{\bar\beta'}_{\bar\alpha'} = \partial x^{\bar\beta'}/\partial x^{\bar\alpha} = A^\alpha_{\beta'} . \tag{19.2}$$

b) Soit Γ une connexion linéaire sans torsion sur M et ∇ l'opérateur de dérivation covariante correspondant. Cherchons sur T^*M une connexion linéaire sans torsion $\hat\Gamma$ (pour laquelle $\hat\nabla$ est la dérivation covariante) satisfaisant les deux conditions suivantes qui sont manifestement intrinsèques d'après (19.2)

C_1) *Pour tout champ de vecteurs* X *de* M, *on a en chaque point* $\hat x \in T^*M$ (*avec* $\pi\hat x = x \in U$)

$$(\hat\nabla_{\bar\beta} \hat X^\alpha)(\hat x) = 0 \qquad (\hat\nabla_{\bar\beta} \hat X^{\bar\alpha})(\hat x) = -(\nabla_\alpha X^\beta)(x) . \tag{19.3}$$

C_2) *Pour tout champ de vecteurs* X *de* M, *on a en chaque point* $\hat x \in T^*M$

$$(\hat\nabla_{\hat Y} \hat X)(\hat x) = (\nabla_Y X)\hat{}\,(\hat x) \tag{19.4}$$

où Y *est un champ arbitraire de* M *tel qu'en* $x \in U$, *on ait* $(\nabla Y)(x) = 0$.

On a

$$\hat\nabla_{\bar\beta} \hat X^\alpha = \hat\Gamma^\alpha_{i\bar\beta} \hat X^i \qquad \hat\nabla_{\bar\beta} \hat X^{\bar\alpha} = -\partial_\alpha X^\beta + \hat\Gamma^{\bar\alpha}_{i\bar\beta} \hat X^i .$$

Il en résulte que la condition (C_1) se traduit par :

$$\hat\Gamma^\alpha_{\bar\beta i} = 0 \qquad \hat\Gamma^{\bar\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma} = 0 \qquad \Gamma^{\bar\alpha}_{\bar\beta\gamma} = -\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} . \tag{19.5}$$

Nous allons établir

LEMME. – *La condition* (C_2) *se traduit dans une carte* $\{x^\alpha, x^{\overline{\alpha}}\}$ *par les relations :*

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \qquad \hat{\Gamma}^{\overline{\alpha}}_{\beta\gamma} = p_\rho(-\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\gamma\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta}). \quad (19.6)$$

En effet soit Y un champ de vecteurs de M tel que $(\nabla Y)(x) = 0$, soit en x :

$$\partial_\alpha Y^\gamma + \Gamma^\gamma_{\tau\alpha} Y^\tau = 0.$$

Etudions le vecteur $\hat{V}$ en $\hat{x}$ défini par $\hat{V} = (\nabla_Y X)\hat{}$. Il vient :

$$\hat{V}^\alpha = Y^\gamma \nabla_\gamma X^\alpha = Y^\gamma(\partial_\gamma X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\beta) \qquad (19.7)$$

et

$$\hat{V}^{\overline{\alpha}} = -p_\rho\,\partial_\alpha(Y^\gamma \nabla_\gamma X^\rho) = -p_\rho Y^\gamma \partial_\alpha(\partial_\gamma X^\rho + \Gamma^\rho_{\beta\gamma} X^\beta) - p_\rho\,\partial_\alpha Y^\gamma \nabla_\gamma X^\rho.$$

Il vient :

$$\hat{V}^{\overline{\alpha}} = \hat{Y}^\gamma \partial_\gamma \hat{X}^{\overline{\alpha}} - p_\rho\,\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\gamma} X^\beta Y^\gamma - p_\rho \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\partial_\alpha X^\beta Y^\gamma + p_\rho \Gamma^\tau_{\gamma\alpha} Y^\gamma(\partial_\tau X^\rho + \Gamma^\rho_{\beta\tau} X^\beta).$$

Or :

$$\hat{Y}^{\overline{\beta}}\,\partial_{\overline{\beta}}\hat{X}^{\overline{\alpha}} = p_\rho\,\partial_\beta Y^\rho\,\partial_\alpha X^\beta = -p_\rho \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\partial_\alpha X^\beta Y^\gamma.$$

Il en résulte

$$\hat{V}^{\overline{\alpha}} = \hat{Y}^i \partial_i \hat{X}^{\overline{\alpha}} - p_\rho\,\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\gamma} X^\beta Y^\gamma + p_\rho \Gamma^\tau_{\gamma\alpha}\Gamma^\rho_{\tau\beta} X^\beta Y^\gamma - \Gamma^\tau_{\gamma\alpha}\hat{X}^{\overline{\tau}} Y^\gamma. \qquad (19.8)$$

Il vient d'autre part, compte-tenu de (19.5) :

$$(\hat{\nabla}_{\hat{Y}}\hat{X})^\alpha = Y^\gamma(\partial_\gamma X^\alpha + \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} X^\beta) \qquad (19.9)$$

et

$$(\hat{\nabla}_{\hat{Y}}\hat{X})^{\overline{\alpha}} = \hat{Y}^i \partial_i \hat{X}^{\overline{\alpha}} + \hat{\Gamma}^{\overline{\alpha}}_{\beta\gamma} X^\beta Y^\gamma + \hat{\Gamma}^{\overline{\alpha}}_{\beta\overline{\gamma}} X^\beta \hat{Y}^{\overline{\gamma}} + \hat{\Gamma}^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}\gamma} \hat{X}^{\overline{\beta}} Y^\gamma,$$

soit :

$$(\hat{\nabla}_{\hat{Y}}\hat{X})^{\overline{\alpha}} = \hat{Y}^i \partial_i \hat{X}^{\overline{\alpha}} + \hat{\Gamma}^{\overline{\alpha}}_{\beta\gamma} X^\beta Y^\gamma - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} X^\beta \hat{Y}^{\overline{\sigma}} - \Gamma^\tau_{\gamma\alpha}\hat{X}^{\overline{\tau}} Y^\gamma \quad (19.10)$$

où l'on a :

$$\hat{Y}^{\overline{\sigma}} = -p_\rho\,\partial_\sigma Y^\rho = p_\rho \Gamma^\rho_{\sigma\gamma} Y^\gamma.$$

D'après (19.7) et (19.9), il vient :

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma},$$

et d'après (19.8) et (19.10)

$$\hat{\Gamma}^{\overline{\alpha}}_{\beta\gamma} - p_\rho \Gamma^\sigma_{\beta\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\gamma} = p_\rho(-\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \Gamma^\sigma_{\gamma\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta}),$$

ce qui est équivalent aux formules (19.6).

Les relations (19.5) et (19.6) définissent d'une manière unique sur le fibré cotangent T^*M une connexion sans torsion. Nous avons établi [16] :

PROPOSITION. – *Toute connexion linéaire sans torsion* Γ *sur une variété différentielle* M *détermine d'une manière unique, par les conditions* (C_1) *et* (C_2), *une connexion linéaire sans torsion* $\hat{\Gamma}$ *sur le fibré cotangent* T^*M ; $\hat{\Gamma}$ *est dite la connexion relèvement de* Γ *sur* T^*M [6].

De la connexion relèvement $\hat{\Gamma}$, on déduit immédiatement d'après (6.1) *une connexion symplectique* $\widetilde{\Gamma}$ sur (T^*M, F) bien déterminée. Si l'on pose $\widetilde{\Gamma}_{ijh} = F_{ir}\widetilde{\Gamma}^r_{jh}$, $\hat{\Gamma}_{ijh} = F_{ir}\hat{\Gamma}^r_{jh}$, on a dans une carte pour laquelle F a des composantes constantes :

$$\widetilde{\Gamma}_{ijh} = \frac{1}{3}(\hat{\Gamma}_{jhi} + \hat{\Gamma}_{hij} + \hat{\Gamma}_{ijh}). \tag{19.11}$$

On en déduit que *la connexion symplectique* $\widetilde{\Gamma}$ *a mêmes coefficients que* $\hat{\Gamma}$ *dans la carte* $\{x^\alpha, x^{\overline{\alpha}}\}$ *à l'exception de :*

$$\widetilde{\Gamma}^{\overline{\alpha}}_{\beta\gamma} = \frac{1}{3} p_\rho S(-\partial_\alpha \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + 2\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha}) \tag{19.12}$$

où S *est la sommation après permutation circulaire sur* α, β, γ.

c) Soit $M = G/H$ un espace homogène à G compact ; M admet une métrique riemannienne et par suite une connexion riemannienne Γ G-invariantes. Le groupe G opère par symplectomorphismes sur la variété symplectique (T^*M, F). Il résulte du *b* que (T^*M, F) admet une connexion symplectique G-invariante $\widetilde{\Gamma}$ déduite de Γ. On déduit du théorème de § 18 l'énoncé suivant :

PROPOSITION. – *Soit* G/H *un espace homogène à* G *compact. Si* $T^*(G/H)$ *admet un* $*_\nu$*-produit, cette variété symplectique admet un* $*_\nu$*-produit de Vey* G*-invariant.*

20. Le fibré cotangent d'un groupe de Lie.

a) Soit G un groupe de Lie connexe arbitraire ; nous notons L_g la translation à gauche par g G, et R_g la translation à droite. Considérons le fibré cotangent T^*G et munissons-le de la loi de composition définie de la manière suivante : si (g, p), (g', p') T^*G, nous posons :

$$(g, p) . (g', p') = (gg', (L_{g^{-1}})^* p' + (R_{g'^{-1}})^* p) . \qquad (20.1)$$

On vérifie immédiatement que cette loi est associative et que $(e, 0)$ est élément neutre; l'élément (g, p) de T^*G admet l'élément inverse :

$$(g, p)^{-1} = (g^{-1}, - L_g^* R_g^* p) .$$

On voit que (20.1) définit sur T^*G *une structure de groupe de Lie.* L'ensemble des éléments de T^*G de la forme $(e, \overline{p})$, où $\overline{p}$ est cotangent en e, définit un sous-groupe invariant P de T^*G ; on a :

$$(g, p) . (e, \overline{p}) . (g, p)^{-1} = (e, (\mathrm{Ad}\, g^{-1})^* \overline{p}) \qquad (20.2)$$

et tout élément (g, p) de T^*G peut se mettre sous l'une des deux formes

$$(g, p) = (g, 0) . (e, L_g^* p) = (e, R_g^* p) . (g, 0) . \qquad (20.3)$$

Ainsi T^*G *est le produit semi-direct de* P *par* G *déterminé par* $(\mathrm{Ad} . g^{-1})^*$.

La 2-forme symplectique F de T^*G est trivialement invariante par l'action à gauche ou à droite de G sur T^*G, mais on peut vérifier qu'elle n'est pas invariante par les actions de T^*G sur lui-même. Le groupe G admet une connexion linéaire sans torsion G-biinvariante. Il résulte du § 19 qu'il existe sur T^*G une connexion symplectique G-biinvariante.

b) Si G est compact, on peut appliquer le théorème du (§ 18.b). Il vient

PROPOSITION. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe ; le groupe de Lie* T^*G *admet une structure symplectique et une connexion symplectique biinvariante par* G. *Si* G *est compact et si* T^*G *admet un* $*_\nu$*-produit,* T^*G *admet un* $*_\nu$*-produit de Vey* G*-biinvariant.*

Je tiens à remercier M.M. Arnal, M. Cahen, M. Flato, Ch. Marle pour d'utiles observations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. FLATO, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, Déformations 1-différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact, *C.R. Acad. Sc.*, t. 279, A (1974), 877. *Compos. Matem.*, t. 31 (1975), 47-82.

[2] J. VEY, Déformations du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comm. Math. Helv.*, t. 50 (1975), 421-454.

[3] J.E. MOYAL, *Proc. Cambridge Philos Soc.*, t. 45 (1949), 99-124.

[4] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ et D. STERNHEIMER, Deformation theory and quantization, *Ann. of Phys.*, t. 11 (1978), 61-110 et 111-151.

[5] A. LICHNEROWICZ, Existence et équivalence des $*_\nu$-produits sur une variété symplectique, *C.R. Acad. Sc.*, t. 289, A (1979), 349.

[6] A. LICHNEROWICZ, Connexions symplectiques et $*_\nu$-produits invariants, *C.R. Acad. Sc.*, t. 291, A (1980), 413-463.

[7] A. AVEZ, A. LICHNEROWICZ, A. DIAZ-MIRANDA, Sur l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique, *J. Diff. Geom.*, t. 9 (1974), 1-40.

[8] A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ, Dérivations et premier groupe de cohomologie pour les algèbres de Lie attachées à une variété symplectique, *C.R. Acad. Sc.*, t. 275, A (1972), 113.

[9] M. GERSTENHABER, Deformation theory of algebraic structures, *Ann. of Math.*, t. 79 (1964), 59-90.

[10] A. LICHNEROWICZ, Sur les algèbres formelles associées par déformation à une variété symplectique, *Ann. di Matem.*, t. 123 (1980), 287-330.

[11] M. FLATO, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, Crochet de Moyal-Vey et quantification, *C.R. Acad. Sc.*, t. 283, A (1976), 19.

[12] S. GUTT, Cohomology associated with the Poisson Lie algebra, *Lett. in Math. Phys.*, t. 3 (1979), 297-310.

[13] A. LICHNEROWICZ, Existence and equivalence of twisted products on a symplectic manifold, *Lett. in Math. Phys.*, t. 3 (1979), 495-502.

[14] J.A. SCHOUTEN, *Conv. Int. Geom. Diff.*, Cremonese Roma, (1954), 1-7 ; A. NIJENHUIS *Indag. Math.*, t. 17 (1955), 390.

[15] O.M. NEROSLAVSKY et A.T. VLASSOV, Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique (1979), à paraître en russe ; *C.R. Acad. Sc.*, (1980), à paraître.

[16] K. YANO et S. ISHIHARA, Tangent and cotangent Bundles, Marcel Dekker, New-York (1973), p. 268-270 ont donné une autre solution du même problème, qui diffère de la nôtre par des termes de courbure.

Manuscrit reçu le 4 février 1981.

André LICHNEROWICZ,
Collège de France
11, place Marcelin Berthelot
75005 Paris.