ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

Forme abstraite du théorème de capacitabilité

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 83-89

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__83_0>

FORME ABSTRAITE DU THÉORÈME DE CAPACITABILITÉ,

par Gustave CHOQUET, Paris.

Le théorème établissant la capacitabilité des ensembles boréliens et analytiques semble à première vue ne pas pouvoir prendre une forme abstraite (c'est-à-dire ne faisant pas appel à la topologie) puisque les ensembles analytiques sont définis comme images continues de certains ensembles; et en fait la démonstration utilise [1] les notions de produit d'espaces topologiques et de compacité.

Cependant nous allons voir qu'on peut donner à ce théorème une forme et une démonstration purement abstraites. On y gagnera en généralité et en simplicité.

Le passage de ce théorème abstrait au théorème antérieur s'obtient grâce à un théorème reliant les notions d'ensemble $\mathfrak{K}$-analytique et d'ensemble $\mathfrak{K}$-souslinien [2].

A côté de l'énoncé général, nous en donnerons un autre qui, sous des conditions plus faibles, fournit la capacibilité d'ensembles qui sont, dans notre cadre abstrait, l'équivalent des $K_{\sigma\delta}$.

1. Théorème de base.

DÉFINITION 1. — *Soit* E *un ensemble; soit* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathfrak{P}(E)$, *stable par réunion finie et intersection dénombrable, et telle que* $\emptyset \in \mathcal{H}$.

[1] CHOQUET, *Theory of capacities, Annales de l'Institut Fourier*, t. 5, 1953, ch. 6, pp. 221-224.

[2] CHOQUET, *Ensembles $\mathfrak{K}$-analytiques et $\mathfrak{K}$-sousliniens. Cas général et cas métrique*, dans ce même fascicule.

On appelle capacité abstraite *sur* $(E, \mathcal{H})$ *toute application* croissante f de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$, *telle que:*

1) *Pour toute suite* décroissante (H_n) *d'éléments de* $\mathcal{H}$, *on ait*

$$f\left(\bigcap H_n\right) = \lim f(H_n). \tag{1}$$

2) *Pour toute suite* croissante (X_n) *de parties de* E, *on ait*

$$f\left(\bigcup X_n\right) = \lim f(X_n). \tag{2}$$

Exemples. — 1) $\mathcal{H}$ est un σ-corps de parties de E; f est la mesure extérieure associée à une mesure positive finie et dénombrablement additive sur $\mathcal{H}$.

2) E est l'espace $R^n (n \geqslant 3)$; $\mathcal{H}$ est l'ensemble des compacts de E; f est la capacité extérieure associée au noyau de Riesz $r^{\alpha-n} (0 < \alpha \leqslant 2)$.

Définition 2. — *Une partie* X *de* E *est dite* $(f, \mathcal{H})$*-capacitable* (*ou plus simplement capacitable*) *si*

$$f(X) = \sup_{\substack{H \subset X \\ H \in \mathcal{H}}} f(H)$$

Évidemment, pour toute suite croissante (X_n) d'ensembles capacitables, la réunion des X_n est capacitable; en particulier comme tout $X \in \mathcal{H}$ est capacitable, toute réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{H}$ l'est aussi. Le problème consiste maintenant à trouver une vaste classe d'autres ensembles capacitables.

Il est évident que si l'on compose f avec une application continue φ strictement croissante de $\overline{R}$ dans $\overline{R}$, les théories relatives à f et $\varphi(f)$ sont isomorphes. Nous en profiterons pour supposer dans la démonstration qui suit, que f est bornée.

Nous allons utiliser ici des propriétés de l'opération (A); nous renvoyons à un travail antérieur [2] pour la terminologie, les notations et le rappel de ces propriétés.

Théorème 1. — *Soit* f *une capacité abstraite sur* $(E, \mathcal{H})$. *Tout ensemble* $\mathcal{H}$*-souslinien de* E (*donc en particulier tout ensemble* $\mathcal{H}$*-borélien*) *est* $(f, \mathcal{H})$ *capacitable.*

Démonstration. — Soit (H_s) un système déterminant sur $\mathcal{H}$, et soit A son noyau.

Pour tout $s \in S$, posons :

$$A_s = \bigcup_{s \prec \sigma} H_\sigma \qquad \text{puis} \qquad B_s = \bigcup_{s' \leqslant s} A_{s'}.$$

On a les relations :

$$A = \bigcup_n A_n \qquad \text{et} \qquad A_s = \bigcup_n A_{s,n} \text{ (3)},$$

d'où

$$B_s = \bigcup_{\substack{s' \leqslant s \\ n}} A_{s',n}. \tag{3}$$

Donnons nous un nombre $\varepsilon > 0$.

De $A = \bigcup_n A_n$ et de la relation (2) résulte qu'il existe un entier a_1 tel que

$$f(B_{a_1}) > f(A) - \varepsilon/2.$$

Supposons définis les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$. Des relations (2) et (3) résulte qu'il existe un entier a_p tel que

$$f(B_{a_1, a_2, \ldots, a_p}) > f(B_{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}}) - \varepsilon/2^p.$$

Par addition, ces inégalités donnent

$$f(B_{a_1, a_2, \ldots, a_p}) > f(A) - \varepsilon. \tag{4}$$

Posons
$$L_s = \bigcup_{s' \leqslant s} H_s;$$

pour tout s, on a $A_s \subset H_s$, d'où $B_s \subset L_s$.

La relation (4) donne donc

$$f(L_{a_1, a_2, \ldots, a_p}) > f(A) - \varepsilon. \tag{5}$$

Or la suite $(L(p) = L_{a_1, \ldots, a_p})$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{H}$. Posons $L = \bigcap_p L(p)$; c'est un élément de $\mathcal{H}$. La relation (5) donne :

$$f(L) = \lim f(L(p)) > f(A) - \varepsilon.$$

Donc si l'on peut montrer que $L \subset A$, on aura bien montré que A est capacitable.

(3) Nous désignerons par (s, n) la suite finie formée en prolongeant la suite s par l'élément n.

Désignons par α la suite infinie $(a_1, a_2, \ldots)$ et par α_p la suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$; on a :

$$L = \bigcap L(p) = \bigcap_p \Big(\bigcup_{s \leqslant \alpha_p} H_s \Big) = \bigcup_{\sigma \leqslant \alpha} H_\sigma \subset \bigcup H_\sigma = A.$$

De ces relations, la seule non évidente est l'égalité du milieu; c'est une relation algébrique connue qui se démontre facilement en utilisant le fait que, pour tout p, les s qui sont $\leqslant \alpha_p$ sont en nombre fini.

2. Capacitabilité individuelle.

Définition 3. — *Soit* E *un ensemble et soit* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathfrak{P}(E)$, *stable par intersection dénombrable.*

Soit f *une application croissante de* $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $\overline{R}$, *vérifiant la condition* (1) *de la définition* 1.

On appelle suite privilégiée *toute suite* croissante (H_n) *d'éléments de* $\mathcal{H}$ *telle que, pour tout* $X \subset E$, *on ait :*

$$(2') \qquad f\Big(\bigcup (X \cap H_n)\Big) = \lim f(X \cap H_n).$$

On désigne par $\mathcal{H}'_\sigma$ *l'ensemble des parties de* E *qui sont réunion d'une telle suite et par* $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$ *l'ensemble des* $A \subset E$ *de la forme* $A = \bigcap_n A_n$ où $A_n \in \mathcal{H}'_\sigma$.

Théorème. — *Avec les notations de la définition* 3, *tout élément de* $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$ *est* $(f, \mathcal{H})$*-capacitable.*

Démonstration. — Elle est calquée sur une démonstration antérieure (Choquet, *loc. cit.*) :

Soit $A \in \mathcal{H}'_{\sigma\delta}$. On peut écrire $A = \bigcap A_n$ avec $A_n = \bigcup_p A_n^p$, où la suite $p \to A_n^p$ est pour tout n une suite privilégiée.

Soit ε un nombre > 0.

Posons $a_1^p = A \cap A_1^p$; d'après (2)′ on a :

$$f(A) = f\Big(\bigcup a_1^p\Big) = \lim f(a_1^p).$$

Donc il existe p_1 tel que

$$f(A) - f(a_1^{p_1}) < \varepsilon/2.$$

Supposons défini $a_n^{p_n} \subset A$.

Posons $a_{n+1}^{p} = a_n^{p_n} \cap A_{n+1}^{p}$; d'après (2)' il existe p_{n+1} tel que

$$f(a_n^{p_n}) - f((a_{n+1}^{p_{n+1}}) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Ajoutons les n premières inégalités ainsi obtenues; on obtient :

$$f(A) - f(a_n^{p_n}) < \varepsilon.$$

La suite $(a_n^{p_n})$ est décroissante; posons $a_\varepsilon = \bigcap a_n^{p_n}$;

d'où $$a_\varepsilon = A \cap \left[\bigcap A_n^{p_n} \right].$$

Or $A_n^{p_n} \subset A_n$, d'où $\bigcap A_n^{p_n} \subset A$, d'où $a_\varepsilon = \bigcap A_n^{p_n}$.

Ainsi, d'une part $a_\varepsilon \in \mathcal{H}$; d'autre part, si on pose $B_n = \bigcap_1^n A_n^{p_n}$ la relation $a_\varepsilon = \bigcap B_n$ entraîne d'après (1) que

$$f(a_\varepsilon) = \lim f(B_n) \geqslant \lim f(a_n^{p_n}) > f(A) - \varepsilon.$$

Donc $$f(A) = \sup_{\substack{H \subset A \\ H \in \mathcal{H}}} f(H),$$

ce qui démontre le théorème.

Application. — Nous montrerons dans un autre travail que si E est un espace compact, N une application de $E \times E$ dans $[0, +\infty]$, semi-continue inférieurement, et continue hors de la diagonale de $E \times E$, et si f désigne la N-capacité extérieure associée à ce noyau N, on peut appliquer à f le théorème 2.

Plus précisément, si on prend pour $\mathcal{H}$ l'ensemble des compacts de E, on montre que toute suite (H_n) d'éléments de $\mathcal{H}$ qui est *régulièrement croissante* [4] *est privilégiée.* En particulier, si tout ouvert de E est un F_σ, tout G_δ de E appartient à $\mathcal{H}'_{\sigma\delta}$; il en résulte que tout G_δ et tout F_σ de E sont capacitables. Ce résultat suffit aux besoins de la théorie du potentiel.

3. Extensions du théorème 1.

Le théorème 1 ne couvre pas l'ensemble des cas dans lesquels on a besoin d'un théorème de capacitabilité. Il est peu

[4] La suite (H_n) est dite *régulièrement croissante* si elle est croissante et si tout H_n possède un voisinage V_n tel que $V_n \cap H_p$ soit constant à partir d'un certain p

commode d'énoncer un théorème contenant toutes les variantes possibles; il vaut mieux, dans chaque cas particulier, essayer d'adapter la démonstration du théorème 1. Nous ne donnerons ici que les indications pour quelques extensions possibles; nous n'envisagerons pas le cas des capacités à valeurs vectorielles ou à valeurs dans un ensemble ordonné.

1) La capacité f peut n'être définie que sur une partie de $\mathfrak{P}(E)$. Plus précisément, soit E un ensemble et soient $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathfrak{P}(E)$.

On suppose que $\mathcal{H}$ est stable par réunion finie et intersection dénombrable et que $\mathcal{G}$ contient la réunion de toute suite croissante d'éléments de $\mathcal{G}$.

Une capacité abstraite sur $(E, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ est une application croissante f de $\mathcal{G}$ dans $\overline{R}$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la définition 1 (dans (2) on suppose en outre que $X_n \in \mathcal{G}$).

La capacitabilité d'un élément de $\mathcal{G}$ se définit comme dans la définition 2.

Suivant les cas, deux voies sont possibles :

a) Si $\mathcal{G}$ est stable par intersection dénombrable, on étend f à $\mathfrak{P}(E)$ en posant, pour tout $X \subset E$:

$$f(X) = \inf_{\substack{X \subset G \\ G \in \mathcal{G}}} f(G).$$

On vérifie que f est alors une capacité abstraite sur $(E, \mathcal{H})$ et l'on peut appliquer le théorème 1.

b) Si $\mathcal{G}$ contient tout ensemble $\mathcal{H}$-souslinien, on peut reprendre mot pour mot la démonstration du théorème 1 et montrer que tout ensemble $\mathcal{H}$-souslinien est capacitable.

Application. — Soit A un ensemble et $\mathcal{G}_0$ l'ensemble des applications de A dans $\overline{R}$; on désigne par $\mathcal{H}_0$ une partie de $\mathcal{G}_0$ stable par les opérations « enveloppe supérieure finie » et « enveloppe inférieure dénombrable » (par exemple les fonctions semi-continues inférieurement lorsque A est topologique).

Soit f_0 une application croissante de $\mathcal{G}_0$ dans $\overline{R}$ telle que, pour toute suite décroissante (φ_n) d'éléments de $\mathcal{H}_0$ (resp. croissante d'éléments de $\mathcal{G}_0$), on ait

$$f_0 (\lim \varphi_n) = \lim f_0(\varphi_n).$$

Pour étudier la capacitabilité associée à f, on se ramène au schéma ensembliste suivant : On pose $E = A \times \overline{R}$; on appelle $\mathcal{G}$ l'ensemble des parties X de E qui sont réunion de demi-droites $x \times [-\infty, a]$ ou $x \times [-\infty, a[$; il existe une application canonique $X \to \varphi_X$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}_0$; on appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des X de $\mathcal{G}$ tels que $\varphi_X \in \mathcal{H}_0$.

Si l'on pose enfin : $f(X) = f_0(\varphi_X)$, la fonction f est une capacité abstraite sur $(E, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ et on vérifie immédiatement qu'on est ici à la fois dans les cas a) et b).

2) On peut donner au théorème 1 une formulation plus abstraite en supposant que la capacité f n'est plus définie sur $\mathfrak{P}(E)$ mais sur un ensemble ordonné :

Soient P un ensemble ordonné (pour la relation $\prec$), $\mathcal{H}$ une partie de P et f une application croissante de P dans $\overline{R}$. On dit que l'élément a de P est capacitable si

$$f(a) = \sup_{\substack{x \prec a \\ x \in \mathcal{H}}} f(x).$$

On suppose définies sur P une notion de suite croissante (resp. décroissante) convergente; et en oûtre une application $(a, x) \to (a \frown x)$ de $P \times \mathcal{H}$ dans P.

Si ces diverses notions satisfont à quelques conditions destinées à remplacer les conditions (1) et (2) de la définition (1), on montre que tout $x \in \mathcal{H}_{\sigma\delta}$ est capacitable (c'est-à-dire un x qui est limite d'une suite décroissante de limites de suites croissantes d'éléments de $\mathcal{H}$).

Si on suppose en oûtre que P est réticulé, dénombrablement vers le bas, de façon complète vers le haut, avec une distributivité convenable, on peut définir une notion d'éléments $\mathcal{H}$-sousliniens de P, et montrer leur capacitabilité.
