ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ABDEREMANE MOHAMED

Étude spectrale d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples. I

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 3 (1982), p. 39-90

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_39_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 3 (1982), 39-90

ÉTUDE SPECTRALE D'OPÉRATEURS HYPOELLIPTIQUES À CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES - I

par Abderemane MOHAMED

1. INTRODUCTION

Soit Ω une variété C^∞, compacte sans bord, de dimension n, munie d'une densité C^∞, positive dx et soit $T^*\Omega\backslash 0$ le fibré cotangent de Ω, privé de la section nulle. On considère un opérateur pseudo-différentiel classique $P(x, D)$, d'ordre m, défini sur Ω, formellement auto-adjoint au sens suivant :

$$\int_\Omega P(x, D)u \,.\, \bar{v}\, dx = \int_\Omega u \,.\, \overline{P(x, D)v}\, dx \tag{1.1}$$

$\forall u$ et $v \in C^\infty(\Omega)$.

On désigne par $p_m(x, \xi)$ son symbole principal et on suppose que :

$$p_m(x, \xi) \geqslant 0 \quad ; \quad \forall (x, \xi) \in T^*\Omega\backslash 0 \,. \tag{1.2}$$

On suppose que $P(x, D)$ est non elliptique et que l'ensemble caractéristique : $\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*\Omega\backslash 0 \,;\, p_m(x, \xi) = 0\}$ est une sous-variété conique, fermée, de codimension $2d$ dans $T^*\Omega\backslash 0$.

On suppose de plus que Σ est symplectique, c'est-à-dire que la restriction de la 2-forme canonique à Σ est non dégénérée.

Par o.p.d. classique, on entend que, dans un système de coordonnées symplectiques (x, ξ), $P(x, D)$ a un symbole complet $p(x, \xi)$ qui admet le développement asymptotique :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x, \xi)$$

où $p_{m-j}(x, \xi)$ est homogène de degré $m - j$ en ξ.

On se place dans le cadre des articles de J. Sjöstrand [17] et L. Boutet de Monvel [3] (cf. également [4], [5], [7] et [8]) pour l'étude de l'hypoellipticité.

On suppose donc que, pour un entier k tel que $0 < k < m$,

$$\begin{cases} p_{m-j} & \text{s'annule à l'ordre } [2k-2j]_+ \text{ sur } \Sigma \\ \text{et } p_m & \text{s'annule exactement à l'ordre } 2k \text{ sur } \Sigma \\ & \text{(au sens de [3] ou [17]).} \end{cases} \tag{1.3}$$

Soit $\zeta \in \Sigma$ et soit ω la 2-forme canonique $\left(\omega = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j\right)$.

Soit ω_ζ la valeur de ω au point ζ ; c'est une forme bilinéaire antisymétrique sur $T_\zeta(T^*\Omega\backslash 0) \times T_\zeta(T^*\Omega\backslash 0)$, dont la restriction à $T_\zeta\Sigma \times T_\zeta\Sigma$ est non dégénérée (car Σ est symplectique).

On peut donc identifier $T_\zeta(T^*\Omega\backslash 0)/T_\zeta\Sigma$ à $(T_\zeta\Sigma)^\perp$, l'orthogonal de $T_\zeta\Sigma$ pour ω_ζ, et $\omega_\zeta/(T_\zeta\Sigma)^\perp$ définit sur $(T_\zeta\Sigma)^\perp$ une structure symplectique. D'après [7], on peut associer à P, pour tout choix de coordonnées symplectiques sur $(T_\zeta\Sigma)^\perp$, un opérateur différentiel, à coefficients polynomiaux opérant sur $\mathbf{R}^d$, et noté :

$$P_\zeta = P_\zeta(t, D_t) .$$

Le choix de P_ζ n'est pas canonique, mais il est montré dans [7] que, si $\widetilde{P}_\zeta$ désignait un autre choix de P_ζ, on pourrait trouver un opérateur unitaire U sur $L^2(\mathbf{R}^d)$, continu de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ tel que :

$$UP_\zeta U^* = \widetilde{P}_\zeta . \tag{1.4}$$

Il résulte de [3] et [17] (cf. également [5] et [7]) que, si :

$$\operatorname{Ker} P_\zeta(t, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) = \{0\} \quad ; \quad \forall \zeta \in \Sigma \tag{1.5}$$

(hypothèse invariante grâce à (1.4)), l'opérateur $P(x, D)$ est hypoelliptique dans Ω avec perte de k-dérivées et admet une paramétrixe dans la classe de L. Boutet de Monvel [3] $\mathrm{OPS}^{-m,-2k}(\Omega, \Sigma)$.

Cette dernière permet de démontrer que :

$$\forall s \in \mathbf{R}, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \tag{1.6}$$

$$P(x, D)\, u \in H^s(\Omega) \Longrightarrow u \in H^{s+m-k}(\Omega) .$$

Soit P, l'opérateur non borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ de domaine :

$$D(P) = \{u \in L^2(\Omega)/P(x, D)\, u = Pu \in L^2(\Omega)\}.$$

P est un opérateur fermé et il résulte de (1.6) l'inclusion :

$$D(P) \subset H^{m-k}(\Omega). \tag{1.7}$$

Plus précisément, l'existence de la paramétrixe nous assure que :

$$D(P) = H^{m,2k}(\Omega, \Sigma)$$

où $H^{m,2k}(\Omega, \Sigma)$ est l'espace naturel associé (dans [3]) à la classe $OPS^{m,2k}(\Omega, \Sigma)$ à partir de $L^2(\Omega)$.

Il est montré dans [3] que $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^{m,2k}(\Omega)$; par conséquent D(P) est égal au domaine minimal et, $P(x, D)$ étant formellement autoadjoint, k étant strictement inférieur à m, l'injection de D(P) dans $L^2(\Omega)$ est compacte (grâce à (1.7)).

Le spectre de P est donc réel, discret et réduit au spectre ponctuel. Nous désignerons par $(\lambda_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ la suite des valeurs propres de P rangée dans l'ordre habituel, chacune d'elle étant répétée autant de fois que sa multiplicité :

$$\cdots\cdots \leqslant \lambda_{-j} \leqslant \cdots\cdots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} \leqslant 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots\cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \cdots\cdots,$$

et pour tout $\lambda > 0$ par $N_+(\lambda) = \sum_{0<\lambda_j<\lambda} 1$, resp.

$$N_-(\lambda) = \sum_{-\lambda<\lambda_j\leqslant 0} 1$$

le nombre des valeurs propres de P contenues dans l'intervalle $]0, \lambda[$, resp. $]-\lambda, 0[$.

Rappelons maintenant brièvement la définition de quelques invariants associés à l'opérateur $P(x, D)$ (nous renvoyons à [7] pour plus de précisions).

Pour tout $\zeta \in \Sigma$, l'opérateur $P_\zeta(t, D_t)$ introduit plus haut est, de même que $P(x, D)$, formellement auto-adjoint.

Il est du type étudié par V.V. Grushin dans [6]; $P_\zeta(t, D_t)$ admet donc une réalisation unique P_ζ sur $L^2(\mathbf{R}^d)$, auto-adjointe, de domaine compact, contenant $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Le spectre de P_ζ est donc discret et réduit au spectre ponctuel. Nous désignerons par

$(\mu_j(\zeta))_{j\in \mathbf{Z}-0}$ la suite des valeurs propres de P_ζ rangées dans l'ordre habituel de croissance. Il résulte de (1.5) que la suite $(\mu_j(\zeta))_{j\in \mathbf{Z}-0}$ est un invariant canoniquement associé à P en un point ζ de Σ.

Un autre invariant associé à $P(x, D)$ est le Hessien d'ordre $2k$ de p_m défini en tout point ζ de Σ et sur $T_\zeta \Sigma^\perp$ par :

$$\mathrm{Hess}^{2k}\, p_m(\zeta)(X) = \frac{1}{2k!}(\widetilde{X}^{2k} p_m)(\zeta) \tag{1.8}$$

$\forall X \in (T_\zeta \Sigma)^\perp$, $\widetilde{X}$ étant un champ sur $T^*\Omega$ tel que : $\widetilde{X}(\zeta) = X$.

On déduit de (1.2) que :

$$\mathrm{Hess}^{2k}\, p_m(\zeta)(X) > 0 \quad ; \quad \forall X \in (T_\zeta \Sigma)^\perp \quad X \neq 0. \tag{1.9}$$

On peut donc définir, pour tout $\zeta \in \Sigma$

$$\nu(p_m)(\zeta) = \int_{\mathrm{Hess}^{2k}\, p_m(\zeta)(X) < 1} dX \tag{1.10}$$

où dX désigne la mesure canonique relative à la structure symplectique sur $(T_\zeta \Sigma)^\perp$: $dX = \frac{(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}}{d!}\, \mathring{\omega}_\zeta^d$ ($\mathring{\omega}_\zeta$ étant la restriction de ω_ζ à $T_\zeta \Sigma^\perp$).

Nous noterons dans la suite, $dx\, d\xi$, la mesure canonique sur $T^*\Omega\backslash 0$, $dx\, d\xi = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\, \omega^n$, Σ étant une sous-variété symplectique de $T^*\Omega\backslash 0$, on a de même une mesure canonique sur Σ que nous noterons $d\zeta$.

L'objet de notre travail est de démontrer le théorème suivant :

THEOREME (1.1). – *On suppose que Σ est symplectique, alors sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), le comportement asymptotique des valeurs propres de* P *est le suivant :*

i) *Si* $md - kn > 0$

$$N_+(\lambda) = \lambda^{\frac{n}{m}} a_1 + o\left(\lambda^{\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

$$N_-(\lambda) = o\left(\lambda^{\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

ii) *Si* $md - kn = 0$

$$N_+(\lambda) = \lambda^{\frac{n}{m}} \operatorname{Log}\left(\lambda^{\frac{n}{m}}\right) a_2 + o\left(\lambda^{\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \lambda^{\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

$$N_-(\lambda) = o\left(\lambda^{\frac{n}{m}} \operatorname{Log}\left(\lambda^{\frac{n}{m}}\right)\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

iii) *Si* $md - kn < 0$

$$N_+(\lambda) = \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3^+ + o\left(\lambda^{\frac{n-d}{n-k}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

$$N_-(\lambda) = \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3^- + o\left(\lambda^{\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

où

$$a_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{p_m(x,\xi)<1} dx\, d\xi$$

$$a_2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{d}{n} \int_{\nu(p_m)(\zeta)>1} d\zeta$$

$$a_3^+ = \frac{1}{(2\pi)^{n-d}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_j(\zeta)<1} d\zeta$$

$$a_3^- = \frac{1}{(2\pi)^{n-d}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_{-j}(\zeta)>-1} d\zeta \,.$$

Remarques. – 1) Comme nous le verrons plus loin l'intégrale donnant a_1 ne converge que si $md - kn > 0$, et les séries donnant a_3^+ et a_3^- ne convergent que si $md - kn < 0$.

2) L'intégrale donnant a_1 est clairement invariante par transformation canonique, de même il résultera de [7] que les expressions définissant a_2, a_3^+ et a_3^- sont invariantes par transformation canonique.

A. Menikoff et J. Sjöstrand [13] et [15] (cf. également [14], [18] et [19]) ont obtenu ce résultat dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles (le cas $k = 1$) en étudiant la trace de e^{-tP} au voisinage de 0. La technique de l'équation des ondes est aussi utilisée par R.B. Melrose [12] dans un cas bien particulier. Les méthodes semblent s'adapter difficilement au cas $k > 1$.

P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai [2] obtiennent des résultats analogues dans le cas où $d = 1$, mais pour des problèmes aux limites. Ces auteurs utilisent la méthode d'Agmon [1] basée sur l'étude de la trace de la résolvante de P, $P_\lambda = (P + i\lambda)^{-1}$; $\lambda \in \mathbf{R}\backslash 0$.

Nous avons suivi la méthode de ces derniers qui s'adapte bien à notre problème. Certes P_λ n'est un opérateur à trace que si $m - k > n$, mais on se ramène toujours à ce cas, en considérant P^{2j+1}, où j est un entier positif assez grand. $(P(x, D))^{2j+1}$ vérifie les mêmes hypothèses que $P(x, D)$ avec $m(2j + 1)$ à la place de m et $k(2j + 1)$ à la place de k, et, d'après [7], l'opérateur différentiel à coefficients polynomiaux associé à $(P(x, D))^{2j+1}$ en un point $\zeta \in \Sigma$ est $(P_\zeta(t, D_t))^{2j+1}$.

On vérifie de même que les constantes a_1, a_2, a_3^+ et a_3^- associées à P^{2j+1} sont les mêmes que celles associées à P.

On peut donc toujours se ramener au cas où $m - k$ et k sont aussi grands que l'on veut.

Si $m - k > n$, P_λ est un opérateur d'Hilbert-Schmidt de noyau $K_\lambda(x, z)$, continu sur $\Omega \times \Omega$ et on a, comme dans [1],

$$\operatorname{Tr} P_\lambda = \int_\Omega K_\lambda(x, x)\, dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j + i\lambda} \cdot \tag{1.11}$$

Nous établirons le comportement asymptotique de (1.11) quand λ tend vers $+\infty$ et on déduira d'un théorème taubérien le comportement asymptotique de $N_+(\lambda)$ et $N_-(\lambda)$.

Le plan de ce travail est le suivant :

– Au chapitre 2, nous rappelons quelques propriétés d'une classe d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dépendant d'un paramètre.

– Au chapitre 3, nous introduisons une classe de symboles à la Boutet de Monvel dépendant d'un paramètre et faisons une estimation de leur trace.

– Au chapitre 4, nous faisons une étude microlocale de la résolvante.

– Enfin au chapitre 5, nous faisons l'étude globale de la résolvante et démontrons le théorème 1.

Ce travail nous a été proposé par B. Helffer et Pham The Lai; nous les remercions vivement pour leurs constants encouragements et leurs nombreux conseils qui m'ont permis de simplifier beaucoup de démonstrations.

2. ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX

Considérons sur $\mathbf{R}^d$, un opérateur différentiel de la forme :

$$P_\omega(t, D_t) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant 2k} a_{\alpha,\beta}(\omega)\, t^\alpha D_t^\beta$$

où pour tout α, β, $a_{\alpha,\beta}(\omega)$ est une fonction C^∞ du paramètre ω, ω parcourant une variété C^∞ Λ.

On suppose que, pour tout $\omega \in \Lambda$, $P_\omega(t, D_t)$ est formellement auto-adjoint, i.e. :

$$\int_{\mathbf{R}^d} P_\omega(t, D_t) u \,.\, \bar{v}\, dt = \int_{\mathbf{R}^d} u \,.\, \overline{P_\omega(t, D_t)\, v}\, dt \tag{2.1}$$

$$\forall u \quad \text{et} \quad v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$

De plus, pour tout ω,

$$\operatorname{Ker} P_\omega(t, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) = \{0\}. \tag{2.2}$$

Enfin $P_\omega(t, D_t)$ est elliptique au sens suivant : pour tout compact K de Λ, il existe une constante positive C_K telle que pour tout $\omega \in K$, tout $(t, \tau) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, on ait :

$$P_{\omega,2k}(t, \tau) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2k} a_{\alpha,\beta}(\omega)\, t^\alpha \tau^\beta \geqslant C_K(|t| + |\tau|)^{2k}. \tag{2.3}$$

Pour tout réel m, notons par $S^m(\mathbf{R}^n)$, la classe des fonctions $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, telles que, pour tout multi-indice γ dans $\mathbf{N}^n$, $\langle x \rangle^{-m-|\gamma|} D_x^\gamma a(x)$ soit borné sur $\mathbf{R}^n$, où on a posé : $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$.

Si $a(x) = a_\omega(x)$ dépend de manière C^∞ du paramètre $\omega \in \Lambda$, on dira que $a_\omega(x) \in S^m(\Lambda \times \mathbf{R}^n)$ si et seulement si, pour tous champs de vecteurs C^∞ sur $\Lambda : X_1, \ldots, X_N$, pour tout multi-indice γ,

$\langle x \rangle^{-m-|\gamma|} D_x^\gamma X_1 \ldots X_N a_\omega(x)$ est bornée sur tout ensemble de la forme $K \times \mathbf{R}^m$ où K est un compact de Λ. Le symbole $P_\omega(t, \tau)$ de $P_\omega(t, D_t)$ est alors dans $S^{2k}(\Lambda \times \mathbf{R}^{2d})$. Soit μ un paramètre réel, alors : $P_\omega(t, \tau) + i\mu^{2k} \in S^{2k}(\Lambda \times \mathbf{R}^{2d+1})$. On construit, comme dans [16], une paramétrixe à droite de $P_\omega(t, D_t) + i\mu^{2k}$ de symbole : $b_{\omega,\mu}(t, \tau) = b_\omega(\mu, t, \tau) \in S^{-2k}(\Lambda \times R^{2d+1})$, $b_\omega(\mu, t, \tau)$ admet le développement asymptotique suivant :

$$b_\omega(\mu, t, \tau) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_{\omega,j}(\mu, t, \tau), \tag{2.4}$$

où $b_{\omega,j}(\mu, t, \tau)$ est homogène de degré $-2k-j$ en (μ, t, τ) et C^∞ par rapport à ω avec, $b_{\omega,0}(\mu, t, \tau) = \dfrac{1}{P_{\omega,2k}(t, \tau) + i\mu^{2k}}$.

Le développement asymptotique (2.4) est à comprendre au sens suivant : si χ est une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$ égale à 0 sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et égale à 1 en dehors de $]-1, 1[$,

$$b_\omega(\mu, t, \tau) - \sum_{j=0}^{N-1} b_{\omega,j}(\mu, t, \tau)_\rho \chi(\sqrt{|\mu|^2 + |t|^2 + |\tau|^2}) \in S^{-2k-N}(\Lambda \times \mathbf{R}^{2d}).$$

Remarquons maintenant que $P_\omega(t, D_t) + i\mu^{2k}$ est, compte-tenu de (2.1) et (2.2), injectif dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ pour tout μ et qu'il est globalement elliptique en (t, τ, μ).

Il résulte du théorème (3.1) de [5] que $P_\omega(t, D_t) + i\mu^{2k}$ est inversible et que son inverse est un opérateur pseudo-différentiel, $\sigma_\omega(\mu, t, D_t)$ dont le symbole est dans $S^{-2k}(\Lambda \times \mathbf{R}^{2d+1})$ admettant le développement asymptotique (2.4).

PROPOSITION (2.1). – *On garde les hypothèses précédentes, et on suppose de plus que* $k > d$.

Alors l'opérateur $\sigma_\omega(\mu, t, D_t)$ *est un opérateur à trace et on a :*

$$\operatorname{Tr} \sigma_\omega(\mu, t, D_t) = (2\pi)^{-d} \iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \sigma_\omega(\mu, t, \tau)\, dt\, d\tau . \tag{2.5}$$

De plus, on a le comportement asymptotique suivant de la trace lorsque μ *tend vers l'infini.*

Pour tout compact K *de* Λ, *il existe une constante positive,* C_K, *telle que pour tout* $\omega \in \Lambda$, *on ait :*

$$|\operatorname{Tr} \sigma_\omega(\mu, t, D_t) - \mu^{-2k+2d}(2\pi)^{-d} \frac{d}{2k}\left[\frac{\pi}{\cos \frac{\pi d}{2k}} - i \frac{\pi}{\sin \frac{\pi d}{2k}}\right] \times \iint_{P_{\omega,2k}(t,\tau)<1} dt\, d\tau | \leqslant C_K\, \mu^{-2k+2d-1} . \qquad (2.6)$$

Démonstration. – Démonstration de (2.5) : $\sigma_\omega(\mu, t, D_t)$ étant un opérateur pseudo-différentiel global classique, on sait (cf. [10] ou [16]) que si $\iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |\sigma_\omega(\mu, t, \tau)|\, dt\, d\tau \leqslant C$ alors $\sigma_\omega(\mu, t, D_t)$ est un opérateur à trace et que sa trace est donnée par la formule (2.5).

Démonstration de (2.6): l'inégalité (2.6) étant évidente à partir de (2.9) pour $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, on peut donc supposer $\mu \geqslant 1$.

D'après (2.4)

$$\sigma'_\omega(\mu, t, \tau) = \sigma_\omega(\mu, t, \tau) - \frac{1}{P_{\omega,2k}(t, \tau) + i\mu^{2k}} \qquad (2.7)$$

vérifie l'estimation : pour tout compact K, il existe une constante C_K telle que pour tout $\omega \in K$, tout $\mu \geqslant 1$ on ait :

$$|\sigma'_\omega(\mu, t, \tau)| < C_K (|t| + |\tau| + |\mu|)^{-2k-1} . \qquad (2.8)$$

Pour tout $\mu \geqslant 1$, posons :

$$A = (2\pi)^{-d} \iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \frac{dt\, d\tau}{P_{\omega,2k}(t, \tau) + i\mu^{2k}} .$$

Le calcul de A se fait comme dans [1].

On pose $t = \mu \tilde{t}$ et $\tau = \mu \tilde{\tau}$.

On déduit de l'homogénéité de $P_{\omega,2k}(t, \tau)$ que :

$$A = \mu^{2d-2k} (2\pi)^{-d} \iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \frac{dt\, d\tau}{P_{\omega,2k}(t, \tau) + i} .$$

Soit : $$\sigma(\lambda) = \iint_{P_{\omega,2k}(t,\tau)<\lambda} dt\, d\tau .$$

Par homogénéité on a : $\sigma(\lambda) = \sigma(1)\, \lambda^{d/k}$.

On déduit alors que :

$$A = \mu^{2d-2k}(2\pi)^{-d} \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda + i}$$

$$= \mu^{2d-2k}(2\pi)^{-d} \frac{d}{k} \left(\iint_{p_{\omega,2k}(t,\tau)<1} dt\, d\tau \right) \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{d}{k}-1}}{\lambda + i} d\lambda \, .$$

Enfin, en utilisant la formule connue des fonctions beta,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\gamma^{a-1}}{\gamma + 1} d\gamma = \frac{\pi}{\sin \pi a} \, , 0 < a < 1$$

on montre que :

$$A = \mu^{2d-2k}(2\pi)^{-d} \frac{d}{2k} \left[\frac{\pi}{\cos\left(\frac{d\pi}{2k}\right)} - \frac{i\pi}{\sin\left(\frac{d\pi}{2k}\right)} \right] \times \iint_{p_{\omega,2k}(t,\tau)<1} dt\, d\tau \, . \tag{2.9}$$

Alors l'estimation (2.6) découle de (2.5), (2.7), (2.8) et (2.9).

Remarque (2.1). – On désigne par B^{2k} le sous espace de L^2 :

$B^{2k}(\mathbf{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^d) \ ; \ t^\alpha D_t^\beta u \in L^2(\mathbf{R}^d) \ ; \ \forall \alpha, \beta \ ; \ |\alpha| + |\beta| \leqslant 2k\}$.

D'après [6], l'opérateur auto-adjoint, $P_\omega(t, D_t)$ de domaine $B^{2k}(\mathbf{R}^d)$ admet un spectre réel et discret car $B^{2k}(\mathbf{R}^d)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(\mathbf{R}^d)$. Soit $(\mu_j(\omega))_{j \in \mathbf{Z}\setminus 0}$ la suite des valeurs propres de $P_\omega(t, D_t)$ rangées par ordre de croissance. Du théorème tauberien de Hardy-Littlewood (théorème [5.2]) et de (2.6), on déduit que, pour tout compact K de Λ, il existe une constante C_K telle que pour tout $\omega \in K$ on ait :

$$\sum_{|\mu_j(\omega)| < \lambda} 1 \leqslant C_K \lambda^{d/k} \quad ; \quad \forall \lambda > 0 \, .$$

Par conséquent,

$$\sum_{|\mu_j(\omega)| < \lambda^{k/d}} 1 \leqslant C_K \lambda \quad ; \quad \forall \lambda > 0 \, .$$

On en déduit alors que pour tout compact K de Λ il existe une constante $C_K > 0$, telle que pour tout $\omega \in K$ et pour tout $j \in \mathbf{Z}\setminus 0$ on ait :

$$|\mu_j(\omega)| \geqslant C_K \, j^{k/d} \, . \tag{2.10}$$

3. CLASSE DE SYMBOLES DE L. BOUTET de MONVEL A PARAMETRES

3.1. Rappels sur les classes de L. Boutet de Monvel [3].

Soit X une variété C^∞, paracompacte, de dimension n et soit $T^* X\backslash 0$ le fibré cotangent privé de la section nulle. Soit U un sous-cône ouvert de $T^* X\backslash 0$ et soit Δ un sous-cône fermé de U.

On peut toujours construire une fonction r, strictement positive, C^∞, homogène de degré 1 sur U et une fonction d_Δ, dont le carré est la somme d'une fonction strictement positive homogène de degré -1 et d'une fonction homogène de degré 0, strictement positive hors de Δ et s'annulant exactement à l'ordre 2 sur Δ.

L. Boutet de Monvel a introduit la classe suivante :

DEFINITION (3.1). – *Soient m et k deux réels, on désigne par $S^{m,k}(U, \Delta)$ l'espace des fonctions a C^∞ sur U telle que, pour tous champs de vecteurs sur U : $X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q$, C^∞, homogènes de degré 0, tels que les X_j soient tangents à Δ, on ait : $|X_1 \ldots X_p \; Y_1 \ldots Y_q \; a| \leqslant r^m d_\Delta^{k-q}$.*

(Si f et g sont deux fonctions positives, C^∞, définies sur U, on écrit que : $f \leqslant g$, si, pour tout sous-cône $V' \subset V$ à base compacte et tout $\epsilon > 0$, il existe une constante positive C telle que : $f \leqslant Cg$, lorsque $r > \epsilon$). Rappelons très brièvement les propriétés de ces classes de symboles. L'application,

$$\begin{aligned} S^{m,k}(U, \Delta) \times S^{m',k'}(U, \Delta) &\longrightarrow S^{m+m',k+k'}(U, \Delta) \\ (a, b) &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

est continue.

On a l'injection continue $S^{m,k}(U, \Delta) \hookrightarrow S^{m',k'}(U, \Delta)$ si et seulement si $m \leqslant m'$ et $m - k/2 \leqslant m' - k'/2$.

Lorsque $U = T^* X\backslash 0$, on notera simplement $S^{m,k}(T^* X\backslash 0, \Delta)$ par $S^{m,k}(X, \Delta)$ ou même $S^{m,k}(X)$ si cela ne prête pas à confusion.

On a l'injection continue :

$$S^{m,k}(X,\Delta) \hookrightarrow S^{m-1/2\,k_-}_{1/2,1/2}(X) \qquad (3.1)$$

avec $k_- = -\sup(0,-k)$ et $S^{m-1/2\,k_-}_{1/2,1/2}(X)$ étant la classe de L. Hörmander (cf. [9]).

Rappelons que si k est un entier positif et si a est un symbole classique d'ordre m, i.e. admettant un développement asymptotique de la forme : $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}$ où a_{m-j} est homogène de degré $m-j$, alors $a \in S^{m,k}(U,\Delta)$ si et seulement si a_{m-j} s'annule à l'ordre $[k-2j]_+$ sur Δ.

Les classes ainsi introduites étant bien adaptées à l'utilisation des transformations canoniques, on pourra se ramener souvent au cas où U est un cône de $T^*\ \mathbf{R}^n\backslash 0$ et où $\Delta = \Sigma_0$ est défini comme l'ensemble :

$$\Sigma_0 = \{(z,\zeta) = (y,t,\eta,\tau) \in \mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^d \cap U \text{ tels que } t = \tau = 0\}. \qquad (3.2)$$

On peut alors prendre :

$$r = |\zeta| \quad \text{et} \quad d_{\Sigma_0}(z,\zeta) = \sqrt{|t|^2 + \frac{|\tau|^2}{|\zeta|^2} + \frac{1}{|\zeta|}}.$$

3.2. Classe de symboles à paramètre.

Soit μ un paramètre réel, $\mu \geqslant 1$; on pose la définition :

DEFINITION (3.2). – *Soient m et k deux réels. On désigne par $S_0^{m,k}(U,\Delta)$ l'espace des fonctions a_μ dépendant du paramètre μ, C^∞ sur $\overline{U}$ (uniformément en μ) telles que, pour tous champs de vecteurs $X_1,\ldots,X_p, Y_1,\ldots,Y_q$ C^∞, homogènes de degré zéro sur U, tels que les X_j $(j=1,\ldots,p)$ soient tangents à Δ, on ait :*

$$|X_1 \ldots X_p\, Y_1 \ldots Y_q\, a_\mu| \lessapprox r^m\, d_\Delta^{k-q} \qquad (*)$$

* (Si f_μ et g_μ sont deux fonctions positives C^∞, définies sur U et dépendant d'un paramètre μ, on écrira $f_\mu \lessapprox g_\mu$ si et seulement si, pour tout sous-cône $U' \subset V$ à base compacte, il existe ϵ et $c > 0$ indépendants de μ tels que : $f_\mu \leqslant c\, g_\mu$ dès que $r > \epsilon$).

La classe $S_0^{m,k}(U, \Delta)$ est donc la classe des symboles de L. Boutet de Monvel dépendant uniformément de μ. Dans la suite, nous aurons besoin des classes plus générales suivantes pour lesquelles nous posons la définition :

DEFINITION (3.3). – *Soient q et θ deux réels positifs. Nous dirons qu'un symbole a_μ, dépendant du paramètre μ, est dans la classe $S_{q,\theta}^{m,k}(U, \Delta)$ si et seulement si :*

$$a_\mu \in S_0^{m,k}(U, \Delta) \quad \text{et} \quad \mu^q a_\mu \in S_0^{m+q(\theta+1/2),k+q}(U, \Delta).$$

On suppose maintenant que $U = T^* X \backslash 0$.

DEFINITION (3.4). – *Nous dirons qu'un opérateur pseudo-différentiel A_μ dépendant du paramètre μ, est dans $\mathrm{OP}\, S_{q,\theta}^{m,k}(X, \Delta)$ s'il existe $a_\mu \in S_{q,\theta}^{m,k}(X, \Delta)$ tel que l'opérateur : $\mu^q(A_\mu - a_\mu(x, D_x))$ soit un opérateur dont le noyau $K_\mu(x, x')$ est C^∞, uniformément par rapport à μ.*

Dans le cas où X est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ voisinage de l'origine et où Δ est donné par (3.2), l'espace $S_{q,\theta}^{m,k}(X, \Delta)$ peut être caractérisé comme l'ensemble des fonctions C^∞ $a_\mu(x, \xi)$ sur $X \times \mathbf{R}^n$ dépendant du paramètre μ telles que pour tout compact K de X, pour tout multi-indice $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,K} > 0$ telle que, pour tout $\mu \geqslant 1$ et tout (x, ξ),

$$\left\{\begin{aligned} & |\partial_t^\alpha\, \partial_y^\beta\, \partial_\tau^\gamma\, \partial_\eta^\delta\, a_\mu(x, \xi)| \\ & \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,K}\, \langle \xi \rangle^{m-k/2-|\delta|-|\gamma|/2+|\alpha|/2} \\ & \times (1 + \mu \langle \xi \rangle^{-\theta} + |t| \langle \xi \rangle^{1/2} + |\tau| \langle \xi \rangle^{-1/2})^{-q} \\ & \times (1 + |t| \langle \xi \rangle^{1/2} + |\tau| \langle \xi \rangle^{-1/2})^{k+q-|\alpha|-|\gamma|}. \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

La démonstration est laissée au lecteur. On peut étendre les propriétés mentionnées au § 3.1 pour les classes de L. Boutet de Monvel à ces classes plus générales. Nous utiliserons dans la suite les propriétés suivantes. L'application :

$$\begin{aligned} S_{q,\theta}^{m,k}(X, \Delta) \times S_{q',\theta}^{m',k'}(X, \Delta) &\longrightarrow S_{q+q',\theta}^{m+m',k+k'}(X, \Delta) \\ (a, b) &\longrightarrow a \,.\, b \end{aligned} \tag{3.4}$$

est continue, uniformément par rapport à μ.

On a les injections continues :

$$S^{m,k}_{q,\theta}(X, \Delta) \hookrightarrow S^{m,k}_{q',\theta}(X, \Delta) \tag{3.5}$$

si $q \geqslant q'$,

$$S^{m,k}_{q,\theta}(X, \Delta) \hookrightarrow S^{m',k'}_{q,\theta}(X, \Delta) \tag{3.6}$$

si et seulement si $m \leqslant m'$ et $m - k/2 \leqslant m' - k'/2$.

Si $a_\mu(x, \xi) \in S^{m,k}_{q,\theta}(X, \Delta)$ et si $b_\mu(x, \xi) \in S^{m',k'}_{q',\theta}(X, \Delta)$ le support de b_μ étant à base compacte indépendante de μ, on a :

$$a_\mu(x, D) \circ b_\mu(x, D) \in \mathrm{OPS}^{m+m',k+k'}_{q+q',\theta}(X, \Delta) \tag{3.7}$$

et si $b^*_\mu(x, D_x)$ désigne l'adjoint de $b_\mu(x, D_x)$, on a :

$$b^*_\mu(x, D_x) \in \mathrm{OPS}^{m',k'}_{q',\theta}(X, \Delta). \tag{3.8}$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner les démonstrations des propositions (3.2) et (3.6) de [3].

3.3. Estimations pour la trace d'une classe d'o.p.d. à paramètres.

On se place maintenant dans le cadre du § 1, i.e. : $X = \Omega$, $\Delta = \Sigma$, m est un réel et n, d et k sont des entiers strictement positifs tels que : $m - k > 0$ et $n > d$. Σ est un sous-cône symplectique de codimension $2d$ dans $T^* \Omega\backslash 0$. θ est désormais fixé égal à :

$$\theta = \frac{m-k}{2k}. \tag{3.9}$$

On omettra dans la suite la référence à θ dans les classes $S^{r,l}_{q,\theta}$ qu'on notera désormais $S^{r,l}_q$. On gardera les notations classiques de [9]. Σ étant symplectique, on sait (cf. [3] ou [17]) que pour tout $\zeta \in \Sigma$ il existe un voisinage conique V_ζ de ζ dans $T^* \Omega\backslash 0$ et une transformation canonique $\mathcal{K}_\zeta$, de V_ζ dans $T^* \mathbf{R}^n\backslash 0$, telle que $\mathcal{K}_\zeta(V_\zeta \cap \Sigma)$ soit donné dans $\widetilde{V}_\zeta = \mathcal{K}_\zeta(V_\zeta)$ par (3.2). De plus, si on note $\Gamma = \{(\gamma, -\mathcal{K}_\zeta(\gamma))\,;\ \gamma \in V_\zeta\}$, il existe, d'après [17], un Fourier intégral U_ζ associé à $\mathcal{K}_\zeta$, $U_\zeta \in I^0(\mathbf{R}^n \times \Omega\,; \Gamma)$ tel que :

$$\begin{cases} \mathrm{WF}'(U^*_\zeta U_\zeta - I) \cap V_\zeta = \emptyset \\ \mathrm{WF}'(U_\zeta U^*_\zeta - I) \cap \widetilde{V}_\zeta = \emptyset. \end{cases} \tag{3.10}$$

On peut construire une partition de l'unité pseudo-différentielle $(\chi_j(x, D))_{j=0,1,\dots,N}$ d'opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés, classiques d'ordre zéro tels que :

$$\mathrm{WF}'\Big(\sum_{j=0}^{N} \chi_j(x, D) - I\Big) = \phi \tag{3.11}$$

$$\mathrm{WF}'(\chi_0(x, D)) \cap \Sigma = \phi \tag{3.12}$$

et, pour tout $j = 1, \dots, N$, il existe $\zeta_j \in \Sigma$ tel que

$$\mathrm{WF}'(\chi_j(x, D)) \subset \mathring{V}_{\zeta_j} \tag{3.13}$$

où V_{ζ_j} est celui défini précédemment. Soit maintenant $A_\mu \in \mathrm{OPS}_q^{r,l}(\Omega, \Sigma)$; d'après (3.7) on a :

$$A_\mu^{(j)} \overset{\text{déf}}{=} A_\mu \circ \chi_j(x, D_x) \in \mathrm{OPS}_q^{r,l}(\Omega, \Sigma)\,. \tag{3.14}$$

Considérons maintenant l'opérateur pseudo-différentiel,

$$\widetilde{A}_\mu^{(j)} = U_{\zeta_j}\, A_\mu^{(j)}\, U_{\zeta_j}^*\,.$$

Compte tenu de (3.13) et des propositions (3.12) et (3.13) de [3],

$$\widetilde{A}_\mu^{(j)} \in \mathrm{OPS}_q^{r,l}(\mathbf{R}^n, \Sigma_0) \tag{3.15}$$

où Σ_0 est défini en (3.2).

On pose : $\mathrm{OPS}_q^{-\infty} = \bigcap_p \mathrm{OPS}_q^{p,0}$.

On a également la propriété suivante ; si $\widetilde{a}_\mu^{(j)}(z, \zeta)$ est le symbole de $\widetilde{A}_\mu^{(j)}$ (défini modulo $S_q^{-\infty}(T^*\mathbf{R}^n\backslash 0, \Sigma_0)$) on a :

$$\widetilde{a}_\mu^{(j)}(z, \zeta) \in S_q^{-\infty,0}((T^*\mathbf{R}^n\backslash 0)\backslash \widetilde{V}_{\zeta_j}, \Sigma_0)\,. \tag{3.16}$$

Remarquons maintenant que quitte à remplacer U_{ζ_j} par $U'_{\zeta_j} = \Psi_j(z)\, U_{\zeta_j}$, où Ψ_j est à support compact et est égal à 1 sur la projection de $\widetilde{V}_j$ sur $\mathbf{R}^n$, on peut choisir $\widetilde{a}_\mu^{(j)}(z, \zeta)$ à support compact en z (indépendant de μ) et tel que : $\widetilde{A}_\mu^{(j)} - \widetilde{a}_\mu^{(j)}(z, D_z)$ soit un opérateur dont le noyau $K_\mu^{(j)}(z, z')$ est C^∞ et à support compact (indépendant de μ).

Compte tenu de la définition (3.4), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\mu \geqslant 1$, pour tout $j = 1, \dots, N$, on ait :

$$|\operatorname{Tr}(\widetilde{A}_\mu^{(j)} - \widetilde{a}_\mu^{(j)}(z, D_z))| \leqslant C\,\mu^{-q}\,. \tag{3.17}$$

De même, d'après (3.13), il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $\mu \geqslant 1$, on ait :

$$\iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \widetilde{V}_j} |\widetilde{a}_\mu^{(j)}(z, \zeta)| \, dz \, d\zeta \leqslant C \mu^{-q} . \tag{3.18}$$

Remarquons enfin que l'on peut toujours supposer que V_{ζ_j} a été choisi assez petit de sorte que si $(z, \zeta) \in \widetilde{V}_{\zeta_j}$ on ait :

$$|\tau| < |\eta| \; ((z, \zeta) = (y, t, \eta, \tau) \in \mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^d) . \tag{3.19}$$

L'objet des propositions qui vont suivre est de donner un comportement grossier, lorsque μ tend vers $+\infty$, des traces de différentes classes d'o.p.d.

PROPOSITION (3.1). — *Soit* $A_\mu \in OPS_{2k}^{-m-p,-2k-p}(\Omega, \Sigma)$ *avec* : $m - k > n$, $k > d$, $o \leqslant p < \operatorname{Inf}(2d, n)$.

Alors A_μ *est un opérateur à trace et on a :*

i) *Si* $md - kn - p\left(\frac{m}{2} - k\right) > 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-p}{m}}\right) \quad ; \qquad \mu \longrightarrow +\infty$$

ii) *Si* $md - kn - p\left(\frac{m}{2} - k\right) = 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-p}{m}} \operatorname{Log} \mu\right) \quad ; \qquad \mu \longrightarrow +\infty$$

iii) *Si* $md - kn - p\left(\frac{m}{2} - k\right) < 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\left(\frac{n-d-p/2}{m-k}\right)_+}\right) \quad ; \qquad \mu \longrightarrow +\infty .$$

Démonstration. — Nous désignerons par C toute constante positive ne dépendant pas de μ. D'après (3.1) et (3.8) A_μ et A_μ^* sont dans $OPS_{1/2,1/2}^{-m+k-p/2}(\Omega)$ et par conséquent continus de $L^2(\Omega)$ dans $H^{m-k+p/2}(\Omega)$.

Comme $m - k + p/2 > n$, on en déduit (cf. [1] et [10]) que A_μ est un opérateur à trace.

Les $A_\mu^{(j)}$ étant définis en (3.14), il résulte de (3.11) que :

$$A_\mu - \sum_{j=0}^{N} A_\mu^{(j)} \in OPS_{2k}^{-\infty}(\Omega, \Sigma)$$

et par conséquent :

$$\operatorname{Tr} A_\mu = \sum_{j=0}^{N} \operatorname{Tr} A_\mu^{(j)} + O(\mu^{-2k}). \tag{3.20}$$

On est donc ramené au calcul de $\operatorname{Tr} A_\mu^{(j)}$ pour $j = 0, \ldots, N$.

Le cas $j = 0$

Compte tenu de (3.12), $A_\mu^0 \in OPS_{2k}^{-m-p,0}(\Omega, \Sigma)$.

Par conséquent, si $a_\mu^0(x, \xi)$ est un symbole de A_μ^0 dans un système de coordonnées, on a : $|a_\mu^0(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-m-p}$ et

$$|a_\mu^0(x, \xi)| \leqslant C\mu^{-2k}(1 + |\xi|)^{-m-p+2k\left(\frac{m-k}{2k} + \frac{1}{2}\right)} \leqslant C\mu^{-2k}(1 + |\xi|)^{-p}.$$

En particulier, on en déduit :

$$|a_\mu^0(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-p}(|\xi|^m + \mu^{2k})^{-1}. \tag{3.21}$$

Par conséquent :

$$|\operatorname{Tr} a_\mu^0(x, D_x)| \leqslant C \int_{\mathbf{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|)^p(|\xi|^m + \mu^{2k})}$$

$$\leqslant C\mu^{-2k+2k\left(\frac{n-p}{m}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}\, dr}{r^p(1 + r^m)}.$$

Compte tenu des relations $n > p$ et $m > n$, on a donc :

$$\operatorname{Tr} a_\mu^0(x, D_x) = O\left(\mu^{-2k+2k\left(\frac{n-p}{m}\right)}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty.$$

Par ailleurs : $\operatorname{Tr}(A_\mu^0 - a_\mu^0(x, D_x)) = O(\mu^{-2k})$.

D'où :

$$\operatorname{Tr} A_\mu^0 = O\left(\mu^{-2k+2k\left(\frac{n-p}{m}\right)}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty. \tag{3.22}$$

Le cas $j \geqslant 1$

On remarque que :

$$U_{\zeta_j}^* \widetilde{A}_\mu^{(j)} U_{\zeta_j} - A_\mu^{(j)} \in OPS_{2k}^{-\infty}(\Omega, \Sigma)$$

et que par conséquent :

$$\mathrm{Tr}(U^*_{\zeta_j}\widetilde{A}^{(j)}_\mu U_{\zeta_j} - A^{(j)}_\mu) = O(\mu^{-2k}) . \tag{3.23}$$

Compte tenu des propriétés des traces, on a :

$$\mathrm{Tr}(U^*_{\zeta_j}\widetilde{A}^{(j)}_\mu U_{\zeta_j}) = \mathrm{Tr}(\widetilde{A}^{(j)}_\mu U_{\zeta_j} U^*_{\zeta_j}) . \tag{3.24}$$

Mais d'après (3.10) :

$$\mathrm{Tr}\,\widetilde{A}^{(j)}_\mu - \mathrm{Tr}(\widetilde{A}^{(j)}_\mu U_{\zeta_j} U^*_{\zeta_j}) = O(\mu^{-2k}) . \tag{3.25}$$

Compte tenu de (3.18), (3.23), (3.24) et (3.25), on a donc :

$$\mathrm{Tr}\,A^{(j)}_\mu - (2\pi)^{-n}\iint_{\widetilde{V}_j}\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z,\zeta)\,dz\,d\zeta = O(\mu^{-2k}), \quad \mu \longrightarrow +\infty . \tag{3.26}$$

On utilise maintenant la propriété que :

$$\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z,\zeta) \in S^{-m-p,-2k-p}_{2k}(T^*\mathbf{R}^n\backslash 0, \Sigma_0)$$

et que le support conique de $\widetilde{a}^{(j)}_\mu$ est compact.

Par conséquent, d'après (3.3), on a dans $\widetilde{V}_j$:

$$\begin{aligned}|\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z,\zeta)| \leqslant{} & C\langle\eta\rangle^{-m+k-p/2}(1+|t|\langle\eta\rangle^{1/2}+|\tau|\langle\eta\rangle^{-1/2})^{-p} \\ & \times (1+\mu\langle\eta\rangle^{\frac{m-k}{2k}}+|t|\langle\eta\rangle^{1/2}+|\tau|\langle\eta\rangle^{-1/2})^{-2k} .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Rappelons également que $|t| \leqslant C$ dans $\widetilde{V}_j$.

Posons :

$$I^{(j)}_{\mu,1} = \iint_{|\zeta|<\mu^{\frac{2k}{m}}}\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z,\zeta)\,dz\,d\zeta ,$$

$$I^{(j)}_{\mu,2} = \iint_{\mu^{\frac{2k}{m}}<|\zeta|<\mu^{\frac{2k}{m-k}}}\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z,\zeta)\,dz\,d\zeta$$

et

$$I^{(j)}_{\mu,3} = \iint_{|\zeta|>\mu^{\frac{2k}{m-k}}}\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z,\zeta)\,dz\,d\zeta .$$

LEMME (3.1). — *On a :*

$$I^{(j)}_{\mu,1} = O\Big(\mu^{-2k+2k\frac{n-p}{m}}\Big).$$

Preuve. – D'après (3.27) on a :

$$|\mathrm{I}_{\mu,1}^{(j)}| \leqslant C\,\mu^{-2k} \iiint_{\substack{|\eta|\leqslant \mu^{\frac{2k}{m}} \\ |\tau|\leqslant|\eta| \\ |t|\leqslant C'}} |\eta|^{-p/2}(1+|t|\,|\eta|^{1/2} + |\tau|\,|\eta|^{-1/2})^{-p}\,dt\,d\tau\,d\eta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k} \iiint_{\substack{|\eta|\leqslant \mu^{\frac{2k}{m}} \\ |\tau|\leqslant 1 \\ |t|\leqslant C'}} |\eta|^{-p+d}(|t|+|\tau|)^{-p}\,dt\,d\tau\,d\eta$$

(C′ étant une constante positive indépendante de μ).

Comme $p < 2d$ et $p < n$, on a bien le lemme (3.1).

LEMME (3.2). – *On a :*

$$\mathrm{I}_{\mu,3}^{(j)} = \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d-p/2}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty .$$

Preuve. – Comme $k > d$ et $m-k > n-d$, on déduit de (3.27) que :

$$|\mathrm{I}_{\mu,3}^{(j)}| \leqslant C \iiint_{|\eta|\geqslant \mu^{\frac{2k}{m-k}}} |\eta|^{-m+k-p/2}(1+|t|\,\eta^{1/2} + |\tau|\,|\eta|^{-1/2})^{-2k-p}\,dt\,d\tau\,d\eta$$

$$\leqslant C \int_{|\eta|> \mu^{\frac{2k}{m-k}}} |\eta|^{-m+k-p/2}\,d\eta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d-p/2}{m-k}} .$$

D'où le lemme (3.2).

LEMME (3.3). – *Quand* $\mu \longrightarrow +\infty$, *on a :*

$$\mathrm{I}_{\mu,2}^{(j)} = \begin{cases} \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-p}{m}}\right) & ;\ \underline{si}\ md-kn-p\left(\frac{m}{2}-k\right) > 0 \\ \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-p}{m}}\,\mathrm{Log}\,\mu\right) & ;\ \underline{si}\ md-kn-p\left(\frac{m}{2}-k\right) = 0 \\ \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\left(\frac{n-d-p/2}{m-k}\right)_+}\right) & ;\ \underline{si}\ md-kn-p\left(\frac{m}{2}-k\right) < 0 . \end{cases}$$

Preuve. – On utilise (3.27) sous la forme :

$$|\widetilde{a}_\mu^{(j)}(z,\zeta)| \leqslant C(|\eta|^{1/2}+|t|\,|\eta|+|\tau|)^{-p}\,(\mu^{2k}+|\eta|^{m-k} + |t|^{2k}\,|\eta|^m + |\tau|^{2k}\,|\eta|^{m-2k})^{-1}$$

pour (z,ζ) dans $\widetilde{\mathrm{V}}_j$ et $|\zeta| \geqslant 1$.

On fait alors le changement de variable :

$$\left(\mu^{-\frac{2k}{m-k}}\eta\,,\ \mu^{-\frac{k}{m-k}}|\eta|^{-1/2}\tau\,,\ \mu^{\frac{k}{m-k}}|\eta|^{1/2}t\right)=(\eta',\tau',t')\,. \tag{3.28}$$

On obtient alors que :

$$\iint_{\substack{\mu^{\frac{2k}{m}}\leqslant|\zeta|\leqslant\mu^{\frac{2k}{m-k}}\\ |\tau|\leqslant|\eta|}}|\widetilde{a}_\mu^{(j)}(z\,,\zeta)|\,dz\,d\zeta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d-p/2}{m-k}}\int_{1/2\,\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}}\leqslant|\eta|\leqslant 2}|\eta|^{-m+k-p/2}$$

$$\times\left(\iint_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}(1+|t|+|\tau|)^{-p}\,(|\eta|^{-m+k}+1+|t|^{2k}+|\tau|^{2k})^{-1}\,dt\,d\tau\right)d\eta\,.$$

Comme $p<2d$, on a :

$$\iint_{\substack{\mu^{\frac{2k}{m}}\leqslant|\zeta|\leqslant\mu^{\frac{2k}{m-k}}\\ |\tau|\leqslant|\eta|}}|\widetilde{a}_\mu^{(j)}(z\,,\zeta)|\,dz\,d\zeta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d-p/2}{m-k}}\int_{1/2\,\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}}\leqslant|\eta|\leqslant 2}|\eta|^{-m+k-p/2}$$

$$\times\left(\iint_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}(|t|+|\tau|)^{-p}\,(|\eta|^{-m+k}+1+|t|^{2k}+|\tau|^{2k})^{-1}\,dt\,d\tau\right)d\eta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d-p/2}{m-k}}\int_{1/2\,\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}}\leqslant|\eta|\leqslant 2}|\eta|^{-p/2-\left(\frac{2d-p}{2k}\right)(m-k)}\,d\eta\,.$$

Compte tenu de (3.26), on en déduit que :

$$|\mathrm{I}_{\mu,2}^{(j)}|\leqslant C\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d-p/2}{m-k}}\int_{1/2\,\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}}}^{2}r^{-\frac{dm-kn-p(m/2-k)}{k}-1}\,dr+\mu^{-2k}\right).$$

Le lemme (3.3) s'en suit alors aisément.

La proposition (3.1) se déduit alors de (3.22), (3.26) et des lemmes (3.1), (3.2) et (3.3). C.Q.F.D.

On a le corollaire suivant :

COROLLAIRE (3.1). – *Soit* $\mathrm{A}_\mu\in\mathrm{OPS}_{2k}^{-m-1,-2k-1}(\Omega\,,\Sigma)$ *où l'on a :* $m-k>n$ *et* $k>d$.

Alors A_μ *est un opérateur à trace et on a :*

i) *si* $md - kn \geqslant 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

ii) *si* $md - kn \leqslant 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty .$$

Nous aurons également besoin des propositions suivantes et de leurs corollaires.

PROPOSITION (3.2). – *Soit* $A_\mu \in \mathrm{OPS}_{2k}^{-m,-2k+1}(\Omega, \Sigma)$.
On suppose toujours que : $m - k > n$ *et* $k > d$.
Alors A_μ *est un opérateur à trace et on a :*

i) *si* $md - kn + \frac{m}{2} > 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

ii) *si* $md - kn + \frac{m}{2} = 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \mu\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

iii) *si* $md - kn + \frac{m}{2} < 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d-1/2}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty .$$

COROLLAIRE (3.21). – *Sous les hypothèses de la proposition (3.2), on a :*

i) *si* $md - kn = 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

ii) *si* $md - kn < 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty .$$

PROPOSITION (3.3). — *Soit* $A_\mu \in OPS^{-m-1,-2k-2}_{2k+2}(\Omega, \Sigma)$.
On suppose toujours que : $m - k > n$ *et* $k > d$.
Alors A_μ *est un opérateur à trace et on a :*

i) si $md - kn - (m - k) > 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-1}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

ii) si $md - kn - (m - k) = 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-1}{m}} \operatorname{Log} \mu\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

iii) si $md - kn - (m - k) < 0$

$$\operatorname{Tr} A_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty.$$

COROLLAIRE (3.3). — *Sous les hypothèses de la proposition (3.3), et si* $md - kn > 0$, *on a :*

$$\operatorname{Tr} A_\mu = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty.$$

Démonstration de la proposition (3.2). — Elle suit les mêmes étapes que la démonstration de la proposition (3.1). La majoration de $\operatorname{Tr} A^0_\mu$ ne pose pas de problèmes nouveaux. On se ramène donc, comme précédemment, à l'étude de $\operatorname{Tr} \widetilde{a}^{(j)}_\mu(z, D_z)$ $(j = 1, \dots, N)$. L'estimation (3.27) est remplacée par l'estimation suivante,

$$\begin{aligned} |\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z, \zeta)| \leqslant C \langle\eta\rangle^{-m+k-1/2}(1 + |t| \langle\eta\rangle^{1/2} + |\tau| \langle\eta\rangle^{-1/2}) \\ \times (1 + \mu \langle\eta\rangle^{-\frac{m-k}{2k}} + |t| \langle\eta\rangle^{1/2} + |\tau| \langle\eta\rangle^{-1/2})^{-2k} \quad (3.29) \end{aligned}$$

dans $\widetilde{V}_j$, $j = 1, \dots, N$.

On en déduit que le lemme (3.1) est encore valable (avec $p = 0$) et que :

$$\begin{aligned} |I^{(j)}_{\mu,3}| &= \left| \iint_{|\zeta| > \mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{a}^{(j)}_\mu(z, \zeta)\, dz\, d\zeta \right| \\ &\leqslant C \int_{|\eta| > \mu^{\frac{2k}{m-k/2}}} |\eta|^{-m+k-1/2}\, d\eta \\ &\leqslant C \mu^{-2k+2k\frac{n-d-1/2}{m-k}} \quad (3.30) \end{aligned}$$

LEMME (3.4). – *Soit* $\mathrm{I}^{(j)}_{\mu,2} = \iint_{\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\zeta| \leqslant \mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{a}^{(j)}_{\mu}(z\,,\zeta)\, dz\, d\zeta.$

On a :

i) si $md - kn + \dfrac{m}{2} > 0$

$$\mathrm{I}^{(j)}_{\mu,2} = \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

ii) si $md - kn + \dfrac{m}{2} = 0$

$$\mathrm{I}^{(j)}_{\mu,2} = \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \mu\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

iii) si $md - kn + \dfrac{m}{2} < 0$

$$\mathrm{I}^{(j)}_{\mu,2} = \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d-1/2}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty .$$

Preuve. – On utilise (3.29) sous la forme,

$$|\widetilde{a}^{(j)}_{\mu}(z\,,\zeta)| \leqslant \mathrm{C}\,(|\eta|^{-1/2} + |t| + |\tau|\,|\eta|^{-1}) \times (|\eta|^{m-k} + \mu^{2k} + |t|^{2k}\,|\eta|^{m} + |\tau|^{2k}\,|\eta|^{m-2k})^{-1} \quad \text{sur} \quad \mathrm{V}_j .$$

Le changement de variable (3.28) permet d'obtenir :

$$\iint_{\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\zeta| \leqslant \mu^{\frac{2k}{m-k}}} |\widetilde{a}^{(j)}_{\mu}(z\,,\zeta)|\, dz\, d\zeta$$

$$\leqslant \mathrm{C}\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d-1/2}{m-k}} \int_{1/2\,\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}} \leqslant |\eta| \leqslant 2} |\eta|^{-m+k-1/2}$$

$$\left(\iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} (1 + |t| + |\tau|)\,(|\eta|^{-m+k} + 1 + |t|^{2k} + |\tau|^{2k})^{-1}\, dt\, d\tau\right) d\eta$$

$$\leqslant \mathrm{C}\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d-1/2}{m-k}} \int_{1/2\,\mu^{-\frac{2k}{m(m-k)}} \leqslant |\eta| \leqslant 2} \left(|\eta|^{-\frac{d}{k}(m-k)-1/2} + |\eta|^{-\frac{(m-k)(2d+1)+k}{2k}}\right) d\eta\,.$$

Par conséquent :

$$|I^{(j)}_{\mu,2}| \leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d-1/2}{m-k}} \int_{\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}}}^{2} r^{-\frac{dm-kn+m/2}{k}-1}\,dr\,.$$

Le lemme (3.4) s'en déduit alors aisément.

La proposition (3.2) est donc démontrée.

Démonstration de la proposition (3.3). – Elle est identique aux précédentes à part quelques modifications mineures.

(3.21) devient :

$$|a^0_\mu(x\,,\xi)| \leqslant C\,(1+|\xi|)^{-1}\,(|\xi|^m + \mu^{2k+2})^{-1}\,.$$

On en déduit que :

$$\operatorname{Tr} a^0_\mu(x\,,D_x) = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-1}{m}-2+2\frac{n-1}{m}}\right).$$

Comme $n < m$ on a donc :

$$\operatorname{Tr} A^0_\mu = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-1}{m}}\right). \tag{3.31}$$

L'estimation (3.27) devient :

$$|\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z\,,\zeta)| \leqslant C\,\langle\eta\rangle^{-m+k}\,(1+\mu\,\langle\eta\rangle^{-\frac{m-k}{2k}} + |t|\,\langle\eta\rangle^{1/2} + |\tau|\,\langle\eta\rangle^{-1/2})^{-2k-2}$$

dans $\widetilde{V}_j$, pour $j = 1\,,\,\ldots\,,N$.

On a alors :

$$\iint_{\substack{|\zeta|<\mu^{\frac{2k}{m}}\\ |\tau|\leqslant|\eta|}} |\widetilde{a}^{(j)}_\mu(z\,,\zeta)|\,dz\,d\zeta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k} \iiint_{\substack{|\eta|<2\mu^{\frac{2k}{m}}\\ |\tau|\leqslant|\eta|\\ |t|\leqslant C'}} \left(1+\mu\,\langle\eta\rangle^{-\frac{m-k}{2k}} + |t|\,\langle\eta\rangle^{1/2} + |\tau|\,\langle\eta\rangle^{-1/2}\right)^{-2} dt\,d\tau\,d\eta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k} \iiint_{\substack{|\eta|<2\mu^{\frac{2k}{m}}\\ |\tau|\leqslant|\eta|\\ |t|\leqslant C'}} \left(1+\mu^{\frac{k}{m}} + |t|\,\langle\eta\rangle^{1/2} + |\tau|\,\langle\eta\rangle^{-1/2}\right)^{-2} dt\,d\tau\,d\eta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k-\frac{2k}{m}} \iint_{\substack{|\eta|\leqslant\mu^{\frac{2k}{m}}\\ |\tau|\leqslant|\eta|}} d\tau\,d\eta\,.$$

Par conséquent on a :

$$|I^{(j)}_{\mu,1}| \leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-1}{m}} . \tag{3.33}$$

Comme dans la démonstration du lemme (3.2), on déduit de (3.32) que :

$$|I^{(j)}_{\mu,3}| \leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} . \tag{3.34}$$

LEMME (3.5). – *Quand $\mu \longrightarrow +\infty$, on a :*

$$I^{(j)}_{\mu,3} = \begin{cases} O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-1}{m}}\right) & ; \ \underline{si}\ \ md - kn - (m-k) > 0 \\ O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-1}{m}}\operatorname{Log}\mu\right) & ; \ \underline{si}\ \ md - kn - (m-k) = 0 \\ O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) & ; \ \underline{si}\ \ md - kn - (m-k) < 0 . \end{cases}$$

Preuve. – Le changement de variable (3.28) et (3.32) montrent que :

$$\iint_{\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\zeta| \leqslant \mu^{\frac{2k}{m-k}}} |\widetilde{a}^{(j)}_{\mu}(z,\zeta)|\,dz\,d\zeta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} \iiint_{\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)/2}} \leqslant |\eta| \leqslant 2} |\eta|^{-m+k}\left(1+|\eta|^{-\frac{m-k}{2k}} + |t| + |\tau|\right)^{-2k-2} dt\,d\tau\,d\eta$$

$$\leqslant C\,\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} \int_{\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)/2}} \leqslant |\eta| \leqslant 2} |\eta|^{-\frac{d}{k}(m-k)+\frac{m-k}{k}}\,d\eta .$$

On en déduit alors facilement le lemme (3.5).

La proposition (3.3) se déduit alors aisément de (3.31), (3.33), (3.34) et du lemme (3.5).

C.Q.F.D.

4. ETUDE MICRO-LOCALE DE LA RESOLVANTE

Soit $P(x, D_x)$ l'opérateur pseudo-différentiel classique du § 1 sur Ω.

On sait qu'en tout point ζ_0 de la variété caractéristique de $P(x, D_x)$, Σ, il existe un voisinage conique V de ζ_0, une transformation canonique, $\mathcal{K} : V \longrightarrow T^* R^n \backslash 0$, et un Fourier intégral elliptique, d'ordre zéro, associé à $\mathcal{K}$, U, tel que :

$$\mathrm{WF}'(U^* U - I) \cap V = \phi ,$$
$$\mathrm{WF}'(U U^* - I) \cap \widetilde{V} = \phi \qquad (\widetilde{V} = \mathcal{K}(V))$$

et $\widetilde{\Sigma} = \mathcal{K}(\Sigma \cap V)$ est donné par (3.2).

Alors, $\widetilde{P}(z, D_z) = U P(x, D_x) U^*$ est un opérateur pseudo-différentiel classique, admettant un symbole, $\widetilde{p}(z, \zeta)$, ayant un développement asymptotique en termes homogènes,

$$\widetilde{p}(z, \zeta) \equiv \widetilde{p}_m(z, \zeta) + \cdots + \widetilde{p}_{m-j}(z, \zeta) + \cdots$$

$\widetilde{p}_{m-j}(z, \zeta)$ étant homogène de degré $m - j$ et sa restriction à $\widetilde{V}$ s'annulant à l'ordre $[2k - 2j]_+$ sur $\widetilde{\Sigma}$.

A l'aide de la formule de Taylor on peut écrire dans $\widetilde{V}$:

$$\widetilde{p}_{m-j}(z, \zeta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2k-2j} a^{(j)}_{\alpha,\beta}(z, \zeta)\, t^\alpha \tau^\beta \qquad (j = 0, 1, \ldots, k)$$

avec $$a^{(j)}_{\alpha,\beta}(z, \zeta) \in S_{1,0}^{m-k+\frac{|\alpha|}{2}-\frac{|\beta|}{2}}(R^n).$$

Soit alors,

$$\widetilde{p}_\Sigma(z, \zeta) = \widetilde{p}_\Sigma(y, t; \eta, \tau) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2k-2j} a^{(j)}_{\alpha,\beta}(y, 0, \eta, 0)\, t^\alpha \tau^\beta$$

On peut écrire :

$$\widetilde{p}_\Sigma(y, t; \eta, \tau) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2k} a_{\alpha,\beta}(y, \eta)\, t^\alpha \tau^\beta$$

avec $$a_{\alpha,\beta}(y, \eta) \in S_{1,0}^{m-k+\frac{|\alpha|}{2}-\frac{|\beta|}{2}}(R^{n-d}).$$

Pour tout $\zeta \in \Sigma \cap V$, on choisit sur $(T_\zeta \Sigma)^\perp$ des coordonnées symplectiques ; alors l'opérateur différentiel à coefficients polynomiaux $P_\zeta(t, D_t)$ du § 1 associé à $P(x, D_x)$ a, d'après [7], le même spectre que $\widetilde{P}_{(y,\eta)}(t, D_t)$ de symbole, $\widetilde{p}_\Sigma(y, t, \eta, \tau)$, si $\mathcal{K}(\zeta) = (y, 0; \eta, 0)$.

On identifie $(y, 0; \eta, 0)$ à (y, η).

Par conséquent, compte tenu des hypothèses du théorème 1.1, pour tout $(y, \eta) \in \widetilde{\Sigma}$, $\widetilde{P}_{(y,\eta)}(t, D_t)$ réalise un isomorphisme sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et grâce à (1.1), $\widetilde{P}_{(y,\eta)}(t, D_t)$ est formellement auto-adjoint. Mais (1.2) nous dit que : $\widetilde{p}_m(z, \zeta) \geq 0$; $\forall (z, \zeta) \in \widetilde{V}$ et, comme $\widetilde{p}_m(z, \zeta)$ s'annule éxactement à l'ordre $2k$ sur $\widetilde{\Sigma}$, on a bien :

$$p_{\Sigma,2k} = \sum_{|\alpha| + |\beta| = 2k} a_{\alpha,\beta}(y, \eta)\, t^\alpha \tau^\beta > 0 \quad ,$$

$$\forall (y, \eta) \in \widetilde{\Sigma} \text{ et } \forall (t, \tau) \in \mathbf{R}^{2d} \backslash 0 .$$

Par conséquent, pour tout $(y, \eta) \in \widetilde{\Sigma}$, l'opérateur différentiel $\widetilde{P}_{(y,\eta)}(t, D_t)$ vérifie les hypothèses du § 2 et, pour tout réel μ, $\widetilde{P}_{(y,\eta)}(t, D_t) + i\mu^{2k}\, \mathrm{I}$ réalise un isomorphisme de $\mathrm{B}^{2k}(\mathbf{R}^d)$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ d'inverse $\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, D_t)$. Il résulte du § 2 que, pour tout $(y, \eta) \in \Sigma$, $\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, D_t)$ admet un symbole complet,

$$\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau) \in \mathrm{S}^{-2k}(\mathbf{R}^{2d}) .$$

Mais $\widetilde{p}_\Sigma(y, t, \eta, \tau)$ vérifie la propriété suivante :

$$\widetilde{p}_\Sigma(y, s^{-1/2} t, s\eta, s^{1/2} \tau) = s^{m-k}\, \widetilde{p}_\Sigma(y, t, \eta, \tau) \quad ; \quad \forall s > 0 . \tag{4.1}$$

On en déduit que $\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)$ vérifie :

$$\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau) = s^{m-k}\, \sigma_{(y,s\eta)}\left(s^{\frac{m-k}{2k}} \mu, s^{-1/2} t, s^{1/2} \tau\right), \quad \forall s > 0 . \tag{4.2}$$

On a en particulier :

$$\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau) = |\eta|^{-(m-k)}\, \sigma_{(y, \frac{\eta}{|\eta|})}\left(|\eta|^{-\frac{(m-k)}{2k}} \mu, |\eta|^{1/2} t, |\eta|^{-1/2} \tau\right) \tag{4.3}$$

Par conséquent, d'après le § 2 :

$$\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau) \in \mathrm{S}^{-2k}(\Sigma \times \mathbf{R}^{2d+1}) .$$

On en déduit que, pour tout multi-indice $(\alpha, \beta, \theta, \gamma)$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta,\theta,\gamma} > 0$, telle que, pour tout $(y, \eta) \in \widetilde{\Sigma}$, pour tout $(t, \tau) \in \mathbf{R}^{2d}$ et pour tout $\mu \geq 0$ on ait :

$$|\partial_y^\theta\, \partial_t^\alpha\, \partial_\eta^\gamma\, \partial_\tau^\beta\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)| \leq C_{\alpha,\beta,\theta,\gamma}\, |\eta|^{-m+k-|\gamma| - \frac{|\beta|}{2} + \frac{|\alpha|}{2}}$$

$$\times \left(1 + \mu |\eta|^{-\frac{m-k}{2k}} + |\eta|^{1/2} |t| + |\eta|^{-1/2} |\tau|\right)^{-2k-|\alpha|-|\beta|} . \tag{4.4}$$

Soit $\chi(z, \zeta) = \chi(y, t, \eta, \tau)$ une fonction C^∞, positive, homogène de degré zéro (i.e. $\chi(z, s\zeta) = \chi(z, \zeta)$, $\forall s > 0$, $|\zeta|$ et $|s\zeta| > 1/2$) à support dans $\widetilde{V}$.

Soit $\widetilde{\sigma}_\mu(z, \zeta)$ le symbole

$$\widetilde{\sigma}_\mu(z, \zeta) = \widetilde{\sigma}_\mu(y, t ; \eta, \tau) = \chi(y, t, \eta, \tau) . \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau) . \tag{4.5}$$

On a d'après (4.4) : $\widetilde{\sigma}_\mu(z, \zeta) \in S_{2k}^{-m,-2k}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma})$.

Proposition (4.1). – *Sous les hypothèses du théorème (1.1) et (4.5), si* V *est choisi assez petit on a :*

$$(\widetilde{P}(z, D_z) + i\mu^{2k} I)\ \widetilde{\sigma}_\mu(z, D_z) = \chi(z, D_z) + r_{\mu,0}(z, D_z) + r_{\mu,1}(z, D_z)$$

où $\chi(z, D_z)$ *est l'o.p.d. de symbole complet* $\chi(z, \zeta)$ *et :*

$$r_{\mu,0}(z, D_z) \in OPS_{2k}^{-1,-1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma})$$
$$r_{\mu,1}(z, D_z) \in OPS_{2k}^{0,1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}) .$$

Démonstration. – On peut toujours supposer que V est choisi assez petit de façon qu'il existe $\chi'(z, \zeta) \in S_{1,0}^0(\mathbf{R}^n)$, homogène de degré 1, égal à 1 sur $\widetilde{V}$, de support à base compacte inclus dans un cône $\widetilde{V}'$ tel que : $\widetilde{V}' \subset \{(y, t, \eta, \tau) ; |\eta| \geqslant 1/2 ; |\tau| \leqslant |\eta|\}$ et $WF'(U U^* - I) \cap \widetilde{V}' = \phi$.

Dans ce cas on a :

$$(\widetilde{P}(z, D_z) - \widetilde{p}_\Sigma(z, D_z))\ \chi'(z, D_z) \in OPS^{m,2k+1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma})$$

et donc

$$r_{\mu,1}(z, D_z) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{P}(z, D_z) - \widetilde{p}_\Sigma(z, D_z))\ \chi'(z, D_z)\ \widetilde{\sigma}_\mu(z, D_z)$$
$$r_{\mu,1}(z, D_z) \in OPS_{2k}^{0,1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}) \tag{4.6}$$

et

$$(\widetilde{P}(z, D_z) - \widetilde{p}_\Sigma(z, D_z))(1 - \chi'(z, D_z))\ \widetilde{\sigma}_\mu(z, D_z) \in OPS_{2k}^{-\infty}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}) .$$

Ecrivons que :

$$(\widetilde{p}_\Sigma(z, D_z) + i\mu^{2k} I)\ \widetilde{\sigma}_\mu(z, D_z) = c_\mu(z, D_z)$$

avec $c_\mu(z, D_z)$ de symbole complet :

$$c_\mu(z, \zeta) = (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} e^{iz'\zeta'} (p_\Sigma(z, \zeta + \zeta') + i\mu^{2k}) \times \chi(y - y', t - t' ; \eta, \tau)\, \sigma_{(y-y',\eta)}(\mu, t - t', \tau)\, dz'\, d\zeta' .$$

Comme $p_\Sigma(y, t, D_y, D_t)$ est différentiel en t d'ordre $2k$, on a :

$$c_\mu(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq 2k} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \iint_{\mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^{n-d}}$$
$$e^{iy'\eta'} \partial_\tau^\alpha (p_\Sigma(y, t, \eta + \eta', \tau) + i\mu^{2k}) \times \partial_t^\alpha \widetilde{\sigma}_\mu(y - y', t, \eta, \tau)\, dy'\, d\eta' .$$

Posons :

$$c_{\mu,0}(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq 2k} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\tau^\alpha (p_\Sigma(y, t, \eta, \tau) + i\mu^{2k})\, \partial_t^\alpha \widetilde{\sigma}_\mu(y, t, \eta, \tau) .$$

Comme $\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, D_t)$ est l'inverse de $(\widetilde{P}_{(y,\eta)}(t, D_t) + i\mu^{2k} I)$ dès que $(y, \eta) \in \widetilde{\Sigma}$, on en déduit que :

$$c_{\mu,0}(z, \zeta) = \chi(z, \zeta) + \sum_{|\alpha|=1}^{2k} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\tau^\alpha p_\Sigma(y, t, \eta, \tau)$$
$$\times \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \frac{\alpha}{\beta!(\alpha - \beta)!} \partial_t^\beta \chi(z, \zeta)\, \partial_t^{\alpha-\beta} \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau).$$

Mais, d'après la formule de Taylor, on a pour tout entier $M \geq 1$:

$$c_\mu(z, \zeta) - c_{\mu,0}(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq 2k} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \sum_{1 \leq |\gamma| < M} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \partial_\eta^\gamma \partial_\tau^\alpha p_\Sigma(y, t, \eta, \tau)$$
$$\times \partial_y^\gamma \partial_t^\alpha \widetilde{\sigma}_\mu(y, t, \eta, \tau) + r_{\mu,M}(z, \zeta)$$

avec

$$r_{\mu,M}(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq 2k} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} M \sum_{|\gamma|=M} \frac{i^{-|\gamma|}}{\gamma!} \iint_{\mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^{n-d}} e^{iy'\eta'}$$
$$\times \left(\int_0^1 (1 - s)^{M-1} \partial_\eta^\gamma \partial_t^\alpha p_\Sigma(y, t, \eta + s\eta', \tau)\, ds \right)$$
$$\times \partial_y^\gamma \partial_t^\alpha \widetilde{\sigma}_\mu(y - y', t, \eta, \tau)\, dy'\, d\eta' .$$

On vérifie alors aisément grâce à la proposition 2.1 de [3] que,

$$c_\mu(z, \zeta) - c_{\mu,0}(z, \zeta) \in S_{2k}^{-1,-1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}) . \tag{4.8}$$

Et comme $\chi(z, \zeta) \in S_{1,0}^0(\mathbf{R}^n)$, on déduit de (4.6) que :

$$c_{\mu,0}(z, \zeta) - \chi(z, \zeta) \in S_{2k}^{-1,-1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}) . \tag{4.9}$$

Par conséquent (4.6), (4.8) et (4.9) prouvent la proposition (4.1).

Notons maintenant $\widetilde{\chi}(y,\eta)$ la fonction positive, homogène, définie sur $\widetilde{\Sigma}$ par, $\widetilde{\chi}(y,\eta) \equiv \chi\left(y, 0, \frac{\eta}{|\eta|}, 0\right)$.

Remarquons que, pour tout $(y,\eta) \in \widetilde{\Sigma}$, on a :

$$\mathrm{Hess}^{2k}\ \widetilde{p}_m(y,0,\eta,0)(t,\tau) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2k} a_{\alpha,\beta}(y,\eta)\, t^\alpha \tau^\beta$$

et

$$\nu(\widetilde{p}_m)(y,\eta) = \iint_{\left(\sum_{|\alpha|+|\beta|=2k} a_{\alpha,\beta}(y,\eta)\, t^\alpha \tau^\beta\right) < 1} dt\, d\tau .$$

Proposition (4.2). — *Sous les hypothèses du théorème (1.1), si $m-k>n$ et $k>d$ $\widetilde{\sigma}_\mu(z, \mathrm{D}_z)$ (défini en (4.5)) est un opérateur à trace et, quand $md-kn \leqslant 0$, sa trace admet le comportement asymptotique suivant lorsque μ tend vers l'infini :*

i) *Si* $md - kn < 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\widetilde{\sigma}_\mu(z,\mathrm{D}_z) &= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} (2\pi)^{-(n-d)} \frac{n-d}{2(m-k)} \\ &\times \Bigg\{ \frac{\pi}{\cos\left(\frac{n-d}{2(m-k)}\pi\right)} \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_j(y,\eta)<1} \widetilde{\chi}(y,\eta)\, dy\, d\eta \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_{-j}(y,\eta)>-1} \widetilde{\chi}(y,\eta)\, dy\, d\eta \Bigg) \\ &\quad - i \frac{\pi}{\sin\left(\frac{n-d}{2(m-k)}\pi\right)} \sum_{j\in \mathbf{Z}\setminus 0} \int_{|\mu_j(y,\eta)|<1} \widetilde{\chi}(y,\eta)\, dy\, d\eta \Bigg\} \\ &\quad + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\end{aligned}$$

ii) *Si* $md - kn = 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\widetilde{\sigma}_\mu(z,\mathrm{D}_z) &= \mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \mu^{2k\frac{n}{m}} (2\pi)^{-n} \frac{d}{n} \\ &\times \left(\frac{n\pi}{2m\cos\left(\frac{n\pi}{2m}\right)} - i \frac{n\pi}{2m\sin\left(\frac{n\pi}{2m}\right)} \right) \int_{\nu(\widetilde{p}_m)(y,\eta)>1} \widetilde{\chi}(y,\eta)\, dy\, d\eta \\ &\quad + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\end{aligned}$$

où $(\mu_j(y, \eta))_{j\in \mathbf{Z}\setminus 0}$ *désigne la suite des valeurs propres de* $\widetilde{\mathrm{P}}_{(y,\eta)}(t, \mathrm{D}_t)$ *rangée dans l'ordre habituel.*

Démonstration. – Dans la suite C désignera toute constante positive indépèndante de μ. Comme $\widetilde{\sigma}_\mu(z, \zeta)$ (de $\mathrm{S}_{2k}^{-m,-2k}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma})$) a son support à base compacte, la démonstration de la proposition (3.1) nous dit que l'on a la formule :

$$\mathrm{Tr}\, \widetilde{\sigma}_\mu(z, \mathrm{D}_z) = (2\pi)^{-n} \iint \widetilde{\sigma}_\mu(z, \zeta)\, dz\, d\zeta.$$

Par conséquent on a :

$$\mathrm{Tr}\, \widetilde{\sigma}_\mu(z, \mathrm{D}_z) = \begin{cases} \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) & ; \quad \text{si } md - kn < 0 \\ \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \mu\right) & ; \quad \text{si } md - kn = 0 \end{cases}$$

quand $\mu \longrightarrow +\infty$.

Comme $\chi(z, \zeta)$ (de $\mathrm{S}_{1,0}^0(\mathbf{R}^n)$) a son support dans $\widetilde{\mathrm{V}}$, si $\psi(z, \zeta) = \psi(y, t, \eta, \tau)$ est un symbole classique d'ordre zéro, égal à 1 sur le support de $\chi(z, \zeta)$ et de support à base compacte et inclus dans un voisinage conique de $\widetilde{\Sigma}$ de la forme $\{|\eta| \geqslant 1/2 ; |\tau| < |\eta|\}$, on déduit de la définition de $\widetilde{\chi}(y, \eta)$ que :

$$\psi(y, t, \eta, \tau)\, (\chi(y, t, \eta, \tau) - \widetilde{\chi}(y, \eta))\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau) \in \mathrm{S}_{2k}^{-m,-2k+1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma})$$

et que son support est à base compacte.

La démonstration de la proposition (3.2) nous permet de dire que :

$$\iiiint |\psi(y, t, \eta, \tau)\, (\chi(y, t, \eta, \tau) - \widetilde{\chi}(y, \eta))\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)|\, dt\, dy\, d\tau\, d\eta$$

$$< \mathrm{C} \begin{cases} \mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} & ; \quad \text{si } md - kn + \dfrac{m}{2} > 0 \\ \mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \mu & ; \quad \text{si } md - kn + \dfrac{m}{2} = 0 \\ \mu^{-2k+2k\frac{n-d-1/2}{m-k}} & ; \quad \text{si } md - kn + \dfrac{m}{2} < 0\,. \end{cases}$$

Et donc, pour tout $C' > 0$ indépendant de μ, on a :

$$\iiiint_{\substack{|\eta|>1/2 \\ |t|+\frac{|\tau|}{|\eta|}\leq C'}} (\chi(y,t,\eta,\tau)-\tilde{\chi}(y,\eta))\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu,t,\tau)\,dt\,d\tau\,d\eta\,dy$$

$$= \begin{cases} O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) & ; \quad \text{si} \quad md-kn=0 \\ o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) & ; \quad \text{si} \quad md-kn<0\,. \end{cases} \tag{4.10}$$

LEMME (4.1). — *Si* $md-kn<0$, *on a :*

$$\operatorname{Tr}\tilde{\sigma}_\mu(z,D_z) = (2\pi)^{-n}\iiiint \tilde{\chi}(y,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu,t,\tau)\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\,.$$

Preuve. — Grâce à (4.4), on a les estimations

$$\iiiint_{\substack{|t|+\frac{|\tau|}{|\eta|}\geq C' \\ |\eta|\geq 1/2}} |\tilde{\chi}(y,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu,t,\tau)|\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau$$

$$\leq C\iiint_{\substack{|t|+\frac{|\tau|}{|\eta|}\geq C' \\ |\eta|\geq 1/2}} |\eta|^{-(m-k)}(1+\mu\,|\eta|^{-\frac{(m-k)}{2k}}+|\eta|^{1/2}\,|t| + |\eta|^{-1/2}\,|\tau|)^{-2k}dt\,d\tau\,d\eta$$

$$\leq C\int_{|\eta|\geq 1/2} |\eta|^{-(m-k)}\left(1+\mu\,|\eta|^{-\frac{(m-k)}{2k}}+|\eta|^{1/2}\right)^{-2k+2d} d\eta\,.$$

On fait le changement de variable, $\mu^{\frac{-2k}{m}}\,\eta=\eta'$.

On en déduit alors que :

$$\iiiint_{\substack{|t|+\frac{|\tau|}{|\eta|}\geq C' \\ |\eta|\geq 1/2}} |\tilde{\chi}(y,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu,t,\tau)|\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau$$

$$\leq C\,\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\int_{|\eta|\geq \mu^{-\frac{2k}{m}}/2} |\eta|^{-\frac{d}{k}(m-k)}\left(1+|\eta|^{\frac{m}{2k}}\right)^{-2k+2d} d\eta\,. \tag{4.11}$$

Comme $dm-kn<0$, on a alors :

$$\iiiint_{\substack{|t|+\frac{|\tau|}{|\eta|}\geq C' \\ |\eta|\geq 1/2}} |\tilde{\chi}(y,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu,t,\tau)|\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau \leq C\,\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\,. \tag{4.12}$$

Mais $\widetilde{\sigma}_\mu(z, \zeta) \in S_{2k}^{-m,-2k}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma})$ et donc on a :

$$\iint_{|\zeta| \leqslant C'} \widetilde{\sigma}_\mu(z, \zeta)\, dz\, d\zeta = O(\mu^{-2k}). \tag{4.13}$$

Par conséquent, en remarquant que : $\dfrac{n-d}{m-k} > \dfrac{n}{m}$ quand $dm - kn < 0$, on déduit aisément de (4.10), (4.12) et (4.13) que, si $dm - kn < 0$:

$$\operatorname{Tr} \widetilde{\sigma}_\mu(z, D_z) = (2\pi)^{-n} \iiiint_{|\eta| \geqslant 1/2} \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty. \tag{4.14}$$

En utilisant (4.4) et en faisant le changement de variable (3.28), on a :

$$\iiiint_{|\eta| \leqslant 1/2} |\widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)|\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau$$

$$\leqslant C \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} \iiint_{|\eta| \leqslant \mu^{-\frac{2k}{m-k/2}}} |\eta|^{-(m-k)} \left(|\eta|^{-\frac{(m-k)}{2k}} + |t| + |\tau| + 1\right)^{-2k} dt\, d\tau\, d\eta$$

$$\leqslant C \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} \int_{|\eta| \leqslant \mu^{-\frac{2k}{m-k/2}}} |\eta|^{-(m-k)\frac{d}{k}} \left(|\eta|^{\frac{m-k}{2k}} + 1\right)^{-2k+2d} d\eta.$$

On en déduit alors que, si $dm - kn < 0$:

$$\iiiint_{|\eta| \leqslant 1/2} \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dt\, d\tau\, d\eta = O(\mu^{-2k+2d}). \tag{4.15}$$

Le lemme (4.1) résulte alors de (4.14) et (4.15).

Lemme (4.2). – *Si $md - kn = 0$, on a :*

$$\operatorname{Tr} \widetilde{\sigma}_\mu(z, D_z) = (2\pi)^{-n} \iiiint_{\mu^{\frac{2k}{m}}/2 \leqslant |\eta| \leqslant 2\mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau + O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty.$$

Preuve. – Les lemmes (3.1) et (3.2) montrent que si $md - kn = 0$,

$$\iint \sigma_\mu(z\,,\zeta)\,dz\,d\zeta = \iint_{\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\zeta| \leqslant \mu^{\frac{2k}{m-k}}} \sigma_\mu(z\,,\zeta)\,dz\,d\zeta + \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\,. \tag{4.16}$$

Mais (4.10) nous dit que, si $md - kn = 0$, on a :

$$\iiiint_{\substack{1/2\,\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\eta| \leqslant 2\mu^{\frac{2k}{m-k}} \\ |t| + \frac{|\tau|}{|\eta|} \leqslant C'}} |(\chi(y\,,t\,,\eta\,,\tau) - \widetilde{\chi}(y\,,\eta))\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu\,,t\,,\tau)|\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau = \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\,. \tag{4.17}$$

D'après (4.4) on a aisément :

$$\iiiint_{\substack{1/2\,\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\eta| \leqslant 2\,\mu^{\frac{2k}{m-k}} \\ |t| + \frac{|\tau|}{|\eta|} \geqslant C'}} |\widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu\,,t\,,\tau)|\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau$$

$$\leqslant C \iiiint_{\substack{1/2\,\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\eta| \leqslant 2\mu^{\frac{2k}{m-k}} \\ |t| + |\tau| \geqslant C'\,|\eta|^{1/2}}} |\eta|^{-(m-k)}\left(\mu\,|\eta|^{-\frac{m-k}{2k}} + 1 + |t| + |\tau|\right)^{-2k} dt\,d\tau\,d\eta$$

$$\leqslant C \int_{1/2\,\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\eta| \leqslant 2\mu^{\frac{2k}{m-k}}} |\eta|^{-(m-k)}\left(\mu\,|\eta|^{-\frac{m-k}{2k}} + |\eta|^{1/2}\right)^{-2k+2d} d\eta\,.$$

On fait alors le changement de variable

$$\mu^{-\frac{2k}{m}}\,\eta = \eta'\,.$$

On en déduit alors, pour $md - kn = 0$, l'estimation :

$$\iiiint_{\substack{1/2\,\mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\eta| \leqslant 2\mu^{\frac{2k}{m-k}} \\ |t| + \frac{|\tau|}{|\eta|} > C'}} \widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu\,,t\,,\tau)\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau = \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{k}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\,. \tag{4.18}$$

Le lemme (4.2) résulte alors de (4.16), (4.17) et (4.18).

LEMME (4.3). – *Si* $md - kn < 0$ *alors,*

$$(2\pi)^{-n} \iiiint \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau$$
$$= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} (2\pi)^{-n+d} \frac{n-d}{2(m-k)} \left\{ \frac{\pi}{\cos\left(\pi \frac{n-d}{2(m-k)}\right)} \right.$$
$$\sum_{j\in \mathbf{Z}-0} \iint_{|\mu_j(y,\eta)|<1} \widetilde{\chi}(y, \eta) \operatorname{sgn} \mu_j(y, \eta)\, dy\, d\eta$$
$$\left. - i \frac{\pi}{\sin\left(\pi \frac{n-d}{2(m-k)}\right)} \sum_{j\in \mathbf{Z}-0} \iint_{|\mu_j(y,\eta)|<1} \widetilde{\chi}(y, \eta)\, dy\, d\eta \right\}.$$

Preuve. – D'après la définition de $\sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)$, on a :

$$(2\pi)^{-n} \iiiint \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau$$
$$= (2\pi)^{-n+d} \iint \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \operatorname{Tr} \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, D_t)\, dy\, d\eta$$
$$= (2\pi)^{-n+d} \sum_{j\in \mathbf{Z}\backslash 0} \iint \widetilde{\chi}(y, \eta) \frac{1}{\mu_j(y, \eta) + i\, \mu^{2k}}\, dy\, d\eta .$$

Mais d'après (4.1) les valeurs propres $(\mu_j(y, \eta))_{j\in \mathbf{Z}\backslash 0}$ ont la propriété d'homogénéité suivante :

$$\mu_j(y, \eta) = r^{-(m-k)} \mu_j(y, r\eta) \quad ; \quad \forall r > 0 \qquad (4.19)$$

et comme $\widetilde{\chi}(y, \eta)$ est homogène de degré zéro, on en déduit que :

$$(2\pi)^{-n} \iiiint \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau$$
$$= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} (2\pi)^{-n+d} \sum_{j\in \mathbf{Z}\backslash 0} \iint \frac{\widetilde{\chi}(y, \eta)}{\mu_j(y, \eta) + i} dy\, d\eta .$$

On passe en coordonnées polaires :
$(r, \omega) \in \mathbf{R} \times S^{n-d-1}$ (S^{n-d-1} désigne la sphère unité de dimension $n - d - 1$) puis on fait le changement de variable :

$$\left(\mu_j(y, \omega)^{\frac{1}{m-k}} r, \omega\right) = (r', \omega) \quad , \quad \text{si } j > 0$$

et

$$\left((-\mu_j(y, \omega))^{\frac{1}{m-k}} r, \omega\right) = (r', \omega) \quad , \quad \text{si } j < 0$$

alors compte tenu de (4.19) on a :

$$(2\pi)^{-n} \iiiint \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau$$

$$= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} (2\pi)^{-n+d} \sum_{j \in \mathbf{Z}-0} \iint \frac{\widetilde{\chi}(y, \eta)}{\mu_j^2(y,\eta)+1} (\mu_j(y, \eta) + i)\, dy\, d\eta$$

$$= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} (2\pi)^{-n+d} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-d+m-k-1}}{r^{2(m-k)}+1} dr \right.$$

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}-0} \iint_{\mathbf{R}^{n-d} \times S^{n-d-1}} \widetilde{\chi}(y, \omega)$$

$$|\mu_j(y, \omega)|^{-\frac{n-d}{m-k}} \operatorname{sgn} \mu_j(y, \omega)\, dy\, d\omega$$

$$- i \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-d-1}}{r^{2(m-k)}+1} dr$$

$$\left. \sum_{j \in \mathbf{Z}-0} \iint_{\mathbf{R}^{n-d} \times S^{n-d-1}} \widetilde{\chi}(y, \omega) |\mu_j(y, \omega)|^{-\frac{n-d}{m-k}} dy\, d\omega \right\}$$

Remarquons que $dm - kn < 0 \Longleftrightarrow \dfrac{k}{d}\, \dfrac{n-d}{m-k} > 1$ et, compte tenu de (2.10), on voit aisément que l'expression précédente est absolument convergente si $md - kn < 0$.

En utilisant les formules bien connues des fonctions beta (cf. § 2), on obtient que, si $md - kn < 0$:

$$\left\{\begin{aligned} &(2\pi)^{-n} \iiiint \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau \\ &= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} (2\pi)^{-n+d} \frac{1}{2(m-k)} \left\{ \frac{\pi}{\cos\left(\pi \dfrac{n-d}{2(m-k)}\right)} \right. \\ &\times \sum_{j \in \mathbf{Z} \setminus 0} \iint_{\mathbf{R}^{n-d} \times S^{n-d-1}} \widetilde{\chi}(y, \omega) |\mu_j(y, \omega)|^{-\frac{n-d}{m-k}} \operatorname{sgn} \mu_j(y, \omega)\, dy\, d\omega \\ &- i \frac{\pi}{\sin\left(\pi \dfrac{n-d}{2(m-k)}\right)} \sum_{j \in \mathbf{Z} \setminus 0} \iint_{\mathbf{R}^{n-d} \times S^{n-d-1}} \\ &\qquad \left. \widetilde{\chi}(y, \omega)\, |\mu_j(y, \omega)|^{-\frac{n-d}{m-k}} dy\, d\omega \right\}. \end{aligned}\right. \tag{4.20}$$

Remarquons enfin que l'homogénéité de $\widetilde{\chi}(y\,,\eta)$ et celle (4.19) de $\mu_j(y\,,\eta)$ impliquent que :

$$\iint_{\mathbf{R}^{n-d}\times \mathbf{S}^{n-d-1}} \widetilde{\chi}(y\,,\omega)\,|\mu_j(y\,,\omega)|^{-\frac{n-d}{m-k}}\,dy\,d\omega = (n-d)\iint_{|\mu_j(y,\eta)|<1} \widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,dy\,d\eta\,.$$

Le lemme (4.3) en résulte alors aisément, compte tenu de (4.20).

LEMME (4.4). – *Si* $md - kn = 0$ *alors :*

$$(2\pi)^{-n}\iiiint_{\mu^{\frac{2k}{m}}/2 \leq |\eta| \leq 2\mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu\,,t\,,\tau)\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau$$

$$= \mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\,\mathrm{Log}\,\mu^{2k\frac{n}{m}}\,(2\pi)^{-n}\,\frac{d}{n}\left[\frac{n}{2m}\,\frac{\pi}{\cos\left(\frac{n\pi}{2m}\right)} - i\,\frac{n}{2m}\,\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n\pi}{2m}\right)}\right]\times\int_{\nu(\hat{p}_m)(y,\eta)>1}\widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,dy\,d\eta$$

$$+\,\mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right)\quad ;\quad \mu \longrightarrow +\infty\,.$$

Preuve. – Faisons le changement de variable (3.28), alors compte tenu de (4.4) on a :

$$\iiiint_{\mu^{\frac{2k}{m}}/2 \leq |\eta| \leq 2\mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu\,,t\,,\tau)\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau = \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\iiiint_{\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}}/2\leq|\eta|\leq 2} \widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(1\,,t\,,\tau)\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau\,.$$

On passe en coordonnées polaires et toujours grâce à (4.4) on en déduit que :

$$\iiint_{1/2\,\mu^{\frac{2k}{m}} \leq |\eta| \leq 2\,\mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{\chi}(y\,,\eta)\,\sigma_{(y,\eta)}(\mu\,,t\,,\tau)\,dy\,dt\,d\eta\,d\tau$$

$$= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\int_{\mu^{-\frac{2k^2}{m(m-k)}}/2}^{2} dr\left(\iiiint_{\mathbf{R}^{n-d}\times\mathbf{S}^{n-d-1}\times\mathbf{R}^{2d}} r^{-(m-k)}\,\widetilde{\chi}(y\,,\omega)\,\sigma_{(y,\omega)}\,\sigma_{(y,\omega)}\left(r^{-\frac{m-k}{2k}}\,,t\,,\tau\right)dy\,d\omega\,dt\,d\tau\right)\,.$$

Alors l'estimation (2.6) de la proposition (2.1) montre que, pour tout (y, ω) dans le support de $\widetilde{\chi}(y, \omega)$:

$$\left| \iint \sigma_{(y,\omega)}\left(r^{-\frac{m-k}{2k}}, t, \tau\right) dt\, d\tau - \left[\frac{d}{2k} \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi d}{2k}\right)} - i \frac{d}{2k} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi d}{2k}\right)}\right] \right.$$

$$\left. \times\, r^{m-k-\frac{d}{2}(m-k)} \times \iint_{\widetilde{\mathrm{P}}_{\Sigma,2k}(y,\omega,t,\tau)<1} dt\, d\tau \right| \leqslant \mathrm{C}\, r^{m-k-\frac{d}{k}(m-k)+\frac{m-k}{2k}} .$$

On en déduit alors aisément que, si $dm - kn = 0$:

$$\iiiint_{1/2\, \mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\eta| \leqslant 2\, \mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau$$

$$= \mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}} \frac{d}{2k} \left[\frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi d}{2k}\right)} - i \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi d}{2k}\right)}\right]$$

$$\times \left(\int_{\mu^{-2}\frac{k^2}{m(m-k)}/2}^{2} r^{-\frac{d}{k}(m-k)}\, dr\right) \iint_{\mathbf{R}^{n-d}\times \mathrm{S}^{n-d-1}} \widetilde{\chi}(y, \omega)$$

$$\left(\iint_{\widetilde{\mathrm{P}}_{\Sigma,2k}(y,\omega,dtd\tau,t,\tau)<1}\right) dy\, d\omega + \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right);\ \mu \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent, si $dm - kn = 0$, on a :

$$\left\{\begin{aligned} &\iiiint_{1/2\, \mu^{\frac{2k}{m}} \leqslant |\eta| \leqslant 2\mu^{\frac{2k}{m-k}}} \widetilde{\chi}(y, \eta)\, \sigma_{(y,\eta)}(\mu, t, \tau)\, dy\, dt\, d\eta\, d\tau \\ &= \mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \mu^{2k\frac{n}{m}} \frac{k}{n(m-k)} \left[\frac{d}{2k} \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi d}{2k}\right)}\right. \\ &\left. - i \frac{d}{2k} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi d}{2k}\right)}\right] \iint_{\mathbf{R}^{n-d}\times \mathrm{S}^{n-d-1}} \widetilde{\chi}(y, \omega)\, \nu(\hat{p}_m)(y, \omega)\, dy\, d\omega \\ &\qquad + \mathrm{O}\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty . \end{aligned}\right. \tag{4.21}$$

Mais grâce à (4.1) on vérifie que $\nu(\hat{p}_m)(y, \eta)$ a l'homogénéité suivante :

$$\nu(\hat{p}_m)(y, \eta) = r^{\frac{d}{k}(m-k)}\, \nu(\hat{p}_m)(y, r\eta), \qquad \forall r > 0 . \tag{4.22}$$

Alors l'homogénéité de $\widetilde{\chi}$ et (4.22) montrent que si $dm - kn = 0$:

$$\iint_{\mathbf{R}^{n-d} \times S^{n-d-1}} \widetilde{\chi}(y, \omega)\, \nu(\hat{p}_m)(y, \omega)\, dy\, d\omega = (n-d) \iint_{\nu(\hat{p}_m)(y,\eta) > 1} \widetilde{\chi}(y, \eta)\, dy\, d\eta\,. \qquad (4.23)$$

Le lemme (4.4) découle alors de (4.21) et (4.23).

Les lemmes (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) prouvent la proposition (4.2).

5. ETUDE GLOBALE DE LA RESOLVANTE

5.1. Construction de la paramétrixe de $\mathrm{P} + i\lambda\,\mathrm{I}$.

On se place toujours sous les hypothèses du théorème (1.1). λ sera un réel positif (assez grand) que l'on écrira, $\lambda = \mu^{2k}$ avec $\mu > 0$. Toute constante positive ne dépendant pas de μ sera toujours notée par C.

Remarquons que, si dans un système de coordonnées locales, la densité dx est donnée par $g(z)\,dz$, où $g \in \mathrm{C}^\infty$, $g > 0$ et dz est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$; alors si ϕ est le difféomorphisme,

$$\phi(z) = z' \quad ; \quad z'_1 = \int_0^z \frac{1}{g(s, z_2, \ldots, z_n)}\, ds \quad ; \quad z'_j = z_j \quad , \quad j = 2, \ldots, n$$

par partition de l'unité on construit une densité C^∞, positive, dx' sur Ω, donnée dans les coordonnées z' par une mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, dz', et une transformation unitaire,

$$\mathrm{U} : \mathrm{L}^2(\Omega, dx) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega, dx')$$
$$\mathrm{U}(v)(z') = w(z') = v(\phi^{-1}(z'))\,.$$

Comme U est un Fourier intégral elliptique, il résulte de [9] que l'opérateur UPU^* vérifie les mêmes propriétés que P.

On peut donc toujours supposer qu'il existe un système de coordonnées locales tel que la mesure densité dx soit une mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ dans chaque carte locale.

PROPOSITION (5.1). — *Sous les hypothèses du théorème (1.1), il existe un opérateur* $A_\mu(x, D_x) \in OP\, S_{2k}^{-m,-2k}(\Omega, \Sigma)$ *tel que :*

$$(P + i\mu^{2k} I) \circ A_\mu(x, D_x) = I + M_\mu^0(x, D_x) + M_\mu^1(x, D_x)$$

avec,

$$M_\mu^0(x, D_x) \in OP\, S_{2k}^{-1,0}(\Omega, \Sigma) \quad et \quad M_\mu^1(x, D_x) \in OP\, S_{2k}^{-1,-2}(\Omega, \Sigma).$$

De plus si $m - k > n$, $k > d$ et $md - kn > 0$, *on a :*

$$\operatorname{Tr} A_\mu(x, D_x) = \mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} \frac{n}{2m} \left[\frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi n}{2m}\right)} - i \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi n}{2m}\right)} \right] a_1 + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty .$$

Démonstration. — Dans une carte locale où la densité dx est une mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, on considère $A_\mu(x, D_x)$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole total :

$$a_\mu(x, \xi) = (p_m(x, \xi) + d_{m-k}(x, \xi) + i\mu^{2k})^{-1}$$

où $\qquad d_{m-k}(x, \xi) = |\xi|^{m-k}, \quad$ dès que $|\xi| \geqslant 1$.

On vérifie alors comme dans [3] que : $a_\mu(x, \xi) \in S_{2k}^{-m,-2k}(\Omega, \Sigma)$.

Si $p(x, \xi)$ est un symbole de $P(x, D_x)$ dans la carte locale, on vérifie aisément que :

$$(p(x, D_x) + i\mu^{2k} I) \circ a_\mu(x, D_x) = I + r_\mu(x, D_x)$$

$r_\mu(x, D_x)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole complet $r_\mu(x, \xi)$ vérifiant, pour tout entier $N > 0$:

$$r_\mu(x, \xi) = (p(x, \xi) - p_m(x, \xi) - d_{m-k}(x, \xi))\, a_\mu(x, \xi) + \sum_{|\alpha|=1}^{N} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)\, \partial_x^\alpha a_\mu(x, \xi) + r_{\mu,N}(x, \xi)$$

avec :

$$r_{\mu,N}(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|=N+1} (N+1) \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \iint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} e^{-ix',\xi'} \times \left(\int_0^1 (1-s)^N \partial_\xi^\alpha p(x, \xi + s\xi')\, ds \right) \partial_x^\alpha a_\mu(x - x', \xi)\, dx'\, d\xi' .$$

Comme $\partial_\xi^\alpha p(x, \xi) \in S_{1,0}^{m-|\alpha|}(\Omega)$, on vérifie, comme dans la démonstration de la proposition (3.5) de [3], que :

$$r_{\mu,N}(x, \xi) \in S_{2k}^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{2},0}(\Omega, \Sigma).$$

Mais, $\quad r_\mu(x, \xi) - r_{\mu,N}(x, \xi) \in S_{2k}^{-1,-2}(\Omega, \Sigma)$.

Donc, si : $M_\mu^1(x, D_x) = r_\mu(x, D_x) - r_{\mu,N}(x, D_x)$

on obtient que, pour N assez grand :

$$(P(x, D) + i\mu^{2k} I) \circ A_\mu(x, D_x) - I - M_\mu^1(x, D_x)$$
$$= M_\mu^0(x, D_x) \in OPS_{2k}^{-1,0}(\Omega, \Sigma).$$

Comme $p_m(x, \xi)$ est homogène de degré m et s'annule exactement à l'ordre $2k$ sur Σ, on vérifie aisément, compte tenu de (1.2), que :

$$\int_{T^*\Omega} (p_m(x, \xi) + i)^{-1}\, dx\, d\xi$$

converge si et seulement si, $m > n$ et $md - kn > 0$.

On déduit alors, du choix de $a_\mu(x, \xi)$, que :

$$\operatorname{Tr} A_\mu(x, D) = \mu^{-2k+2k\frac{n}{m}} (2\pi)^{-n} \int_{T^*\Omega} (p_m(x, \xi) + i)^{-1}\, dx\, d\xi$$
$$+ o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty$$

si $m > n$ et $md - kn > 0$. C.Q.F.D.

Soit maintenant $(\chi_j(x, D_x))_{j=0,1,\ldots,N}$ la partition pseudo-différentielle de l'unité de $T^*\Omega \backslash 0$ introduite dans § (3.3). Pour tout $j = 0, 1, \ldots, N$, notons par $\chi_j^0(\zeta)$ la partie principale du symbole de $\chi_j(x, D_x)$. $\chi_j^0(\zeta)$ est homogène de degré zéro et positif. De plus, on déduit de (3.11) et (3.12) que :

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_j^0(\zeta) = 1 \quad \text{au voisinage de } \Sigma. \tag{5.1}$$

Dans tout V_j, $j = 1, \ldots, N$, on peut faire la construction du § 4 sur $\mathcal{K}_j(V_j) = \widetilde{V}_j$. On prend alors dans (4.5),

$$\chi(y, t, \eta, \tau) = \widetilde{\chi}_j^0(y, t, \eta, \tau) = \widetilde{\chi}_j^0(z, \zeta) = \chi_j^0(\mathcal{K}_j^{-1}(z, \zeta))$$

(modulo une troncature pour le rendre nul dans un voisinage de $\zeta = 0$). On obtient ainsi une opérateur pseudo-différentiel $\widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)$ de symbole total dans $S_{2k}^{-m,-2k}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}_j)$ et à support dans $\widetilde{V}_j$.

Posons :

$$\sigma_{\mu,j}(x, D_x) = U_j\, \widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)\, U_j^* \quad ; \quad j = 1, \dots, N .$$

D'après ce qui précède :

$$\sigma_{\mu,j}(x, D_x) \in S_{2k}^{-m,-2k}(\Omega, \Sigma) \quad ; \quad j = 1, \dots, N .$$

Soit : $\sigma_{\mu,0}(x, D_x) = A_\mu(x, D_x) \circ \chi_0(x, D_x)$, où $A_\mu(x, D_x)$ est l'opérateur pseudo-différentiel de la proposition 5.1. Posons enfin : $\sigma_\mu(x, D_x) = \sum_{j=0}^{N} \sigma_{\mu,j}(x, D_x)$. On a le résultat suivant :

PROPOSITION (5.2). — *Sous les hypothèses du théorème 1.1, on a :*

$$(P(x, D_x) + i\mu^{2k} I) \circ \sigma_\mu(x, D_x) = I + L_\mu^0(x, D_x) + L_\mu^1(x, D_x)$$

avec

$$L_\mu^0(x, D_x) \in OPS_0^{-1,-1}(\Omega, \Sigma) \ \textit{et} \ L_\mu^1(x, D_x) \in OPS_{2k}^{0,1}(\Omega, \Sigma) .$$

Démonstration. — D'après la proposition (4.1), on a, pour $j = 1, \dots, N$,

$$(\widetilde{P}(z, D_z) + i\mu^{2k} I) \circ \widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z) = \widetilde{\chi}_j^0(z, D_z) + r_{\mu,0}^{(j)}(z, D_z) + r_{\mu,1}^{(j)}(z, D_z)$$

avec,

$$r_{\mu,0}^{(j)}(z, D_z) \in OPS_{2k}^{-1,-1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}_j) \ \text{ et } \ r_{\mu,1}^{(j)}(z, D_z) \in OPS_{2k}^{0,1}(\mathbf{R}^n, \widetilde{\Sigma}_j) .$$

Comme, pour $j = 1, \dots, N$:

$$U_j\, \widetilde{\chi}_j^0(z, D_z)\, U_j^* - \chi_j(z, D_z) \in OPS_{1,0}^{-1}(\Omega) \subset OPS^{-1,-1}(\Omega, \Sigma)$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_j(\widetilde{P}(z, D_z) + i\mu^{2k} I)\, \widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)\, U_j^* \\ \qquad\qquad = \chi_j(x, D_x) + L_{\mu,j}^0(x, D_x) + L_{\mu,j}^1(x, D_x) \\ \text{avec :} \\ L_{\mu,j}^0(x, D_x) \in OPS_0^{-1,-1}(\Omega, \Sigma) \ \text{ et } \ L_{\mu,j}^1(x, D_x) \in OPS_{2k}^{0,1}(\Omega, \Sigma) . \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Et comme le support de $\widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, \zeta)$ est dans $\widetilde{V}_j$ compte tenu de (3.10), on peut écrire de même que :

$$\left\{\begin{aligned} & U_j(\widetilde{P}(z, D_z) + i\mu^{2k}I)\, U_j^* U_j\, \widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)\, U_j^* \\ & \qquad = U_j(\widetilde{P}(z, D_z) + i\mu^{2k}I)\, U_j^*\, \sigma_{\mu,j}(x, D_x) \qquad (5.2') \\ & \qquad = \chi_j(x, D_x) + L^0_{\mu,j}(x, D_x) + L^1_{\mu,j}(x, D_x). \end{aligned}\right.$$

Les $L^q_{\mu,j}(x, D_x)$; $(q = 0,1)$ ne sont pas forcément les mêmes que ceux de (5.2), mais vérifient les mêmes propriétés que ceux de (5.2).

Toujours du fait que le support de $\widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, \zeta)$ est dans $\widetilde{V}_j$ et compte tenu de (3.10), on a :

$$WF'(\sigma_{\mu,j}(x, D_x)) \subset V_j,$$

et $\quad WF'[U_j\widetilde{P}(z, D_z)\, U_j^* - P(x, D_x)] \cap V_j = \phi \; ; \; j = 1, \dots, N.$

On en déduit alors que :

$$(U_j\widetilde{P}(z, D_z)\, U_j^* - P(x, D_x))\ \sigma_{\mu,j}(x, D_x) \in OPS^{-\infty,0}_{2k}(\Omega, \Sigma)$$

et que :

$$(U_j U_j^* - I)\ \sigma_{\mu,j}(x, D_x) \in OPS^{-\infty,0}_{2k}(\Omega, \Sigma)$$

et donc :

$$\mu^{2k}(U_j U_j^* - I)\ \sigma_{\mu,j}(x, D_x) \in OPS^{-\infty,0}_0(\Omega, \Sigma).$$

Par conséquent, on déduit aisément de (5.2′) que, pour $j = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & P(x, D_x) + i\mu^{2k}I)\ \sigma_{\mu,j}(x, D_x) \qquad (5.2'') \\ & \qquad = \chi_j(x, D_x) + L^0_{\mu,j}(x, D_x) + L^1_{\mu,j}(x, D_x) \end{aligned}$$

les $L^q_{\mu,j}(x, D_x)$, $q = 0, 1$ étant comme dans (5.2′).

Mais, d'après la proposition (5.1) et (3.12), on a :

$$\begin{aligned} & (P(x, D_x) + i\mu^{2k}I)\ \sigma_{\mu,0}(x, D_x) = \chi_0(x, D_x) + L^0_{\mu,0}(x, D_x) \\ & \qquad L^0_{\mu,0}(x, D_x) \in OPS^{-1,-1}_0(\Omega, \Sigma). \end{aligned}$$

On en déduit alors la proposition (5.2) compte tenu de (5.2″) et (3.11).

C.Q.F.D.

Posons maintenant, soit,

$$P_{\mu,0}(x, D_x) = \sigma_\mu(x, D_x) - A_\mu(x, D_x)\ (L^0_\mu(x, D_x) + L^1_\mu(x, D_x)) \qquad (5.3)$$

soit,

$$P_{\mu,0}(x, D_x) = A_\mu(x, D_x) - \sigma_\mu(x, D_x)\,(M_\mu^0(x, D_x) + M_\mu^1(x, D_x)). \tag{5.3'}$$

D'après les propositions (5.1) et (5.2) et les injections (3.5) et (3.6), on a dans les deux cas :

$$(P(x, D_x) + i\mu^{2k} I)\, P_{\mu,0}(x, D_x) = I + R_{\mu,0}(x, D_x)$$

avec,

$$R_{\mu,0}(x, D_x) \in OPS_{2k}^{-1,-1}(\Omega, \Sigma).$$

On construit alors, par récurrence, une suite d'opérateurs, $(P_{\mu,q}(x, D_x))_{q=0,1,\dots}$ tels que

$$P_{\mu,q}(x, D_x) \in OPS_{2k(q+1)}^{-m-q,-2k-q}(\Omega, \Sigma) \tag{5.4}$$

et pour tout $N > 0$

$$\begin{cases} (P(x, D) + i\mu^{2k} I)\left(\displaystyle\sum_{q=0}^{N-1} P_{\mu,q}(x, D_x)\right) = I + R_{\mu,N-1}(x, D_x) \\ R_{\mu,N-1}(x, D_x) \in OPS_{2kN}^{-N,-N}(\Omega, \Sigma) \\ P_{\mu,N}(x, D_x) = - P_{\mu,0}(x, D_x) \circ R_{\mu,N-1}(x, D_x). \end{cases} \tag{5.5}$$

5.2. Comportement asymptotique de la trace de la résolvante. Démonstration du théorème 1.1.

On a le résultat suivant :

THEOREME (5.1). – *Sous les hypothèses du théorème (1.1), si* $P_\lambda = (P + i\lambda I)^{-1}$ *est la résolvante de* P *et si,* $m - k > n$ *et* $k > d$, *on a le comportement asymptotique suivant de la trace de* P_λ *quand* $\lambda \longrightarrow +\infty$:

i) *Si* $md - kn > 0$

$$\operatorname{Tr} P_\lambda = \lambda^{-1+\frac{n}{m}} a_1 \left[\frac{n\pi}{2m\cos\left(\frac{\pi n}{2m}\right)} - i\,\frac{n\pi}{2m\sin\left(\frac{\pi n}{2m}\right)}\right] + o\left(\lambda^{-1+\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

ii) *Si* $md - kn = 0$,

$$\operatorname{Tr} P_\lambda = \lambda^{-1+\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \lambda^{\frac{n}{m}} a_2 \left[\frac{n\pi}{2m \cos\left(\frac{\pi n}{2m}\right)} - i \frac{n\pi}{2m \sin\left(\frac{\pi n}{2m}\right)} \right] + \mathrm{O}\left(\lambda^{-1+\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

iii) *Si* $md - kn < 0$

$$\operatorname{Tr} P_\lambda = \lambda^{-1+\frac{n-d}{m-k}} \left[\frac{(n-d)\pi}{2(m-k)\cos\left(\frac{\pi(n-d)}{2(m-k)}\right)} (a_3^+ - a_3^-) - i \frac{(n-d)\pi}{2(m-k)\sin\left(\frac{\pi(n-d)}{2(m-k)}\right)} (a_3^+ + a_3^-) \right] + o\left(\lambda^{-1+\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \lambda \longrightarrow +\infty .$$

Démonstration. – Grâce à (5.5), on a pour tout entier $N \geqslant 0$:

$$P_\lambda = \sum_{q=0}^{N} P_{\mu,q}(x, D_x) - P_\lambda \circ R_{\mu,N}(x, D_x) .$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Tr} P_\lambda = \sum_{q=0}^{N} \operatorname{Tr} P_{\mu,q}(x, D_x) - \operatorname{Tr}(P_\lambda \circ R_{\mu,N}(x, D_x)) . \qquad (5.6)$$

Mais comme :

$$R_{\mu,N}(x, D_x) \in \mathrm{OPS}^{-N-1,-N-1}_{2k(N+1)}(\Omega, \Sigma) \hookrightarrow \mathrm{OPS}_0^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{2},0}(\Omega, \Sigma) .$$

Si $N \geqslant 2m$, $R_{\mu,N}(x, D_x)$ est à trace et on a (cf. [1]) :

$$|\operatorname{Tr}(P_\lambda \circ R_{\mu,N}(x, D_x))| \leqslant \| P_\lambda \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} ||| R_{\mu,N}(x, D_x) ||| \leqslant C \| P_\lambda \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))}$$

(où $|||\ .\ |||$ désigne la norme trace de [1]).

Comme λ est réel > 0, (1.1) montre que :

$$\| P_\lambda \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} \leqslant \lambda^{-1} .$$

D'où, si $N \geqslant 2m$,

$$|\operatorname{Tr} P_\lambda \circ R_{\mu,N}(x, D_x)| \leqslant C \lambda^{-1} . \qquad (5.7)$$

Mais si $q \geqslant 1$,

$$P_{\mu,q}(x\,,D_x) \in OPS_{2k(q+1)}^{-m-q,-2k-q}(\Omega\,,\Sigma) \hookrightarrow OPS_{2k}^{-m-1,-2k-1}(\Omega\,,\Sigma)\,.$$

Le corollaire (3.1) nous dit :

$$\operatorname{Tr}\Big(\sum_{q=1}^{N} P_{\mu,q}(x\,,D_x)\Big) = \begin{cases} o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) & ;\ \text{si } md-kn \geqslant 0 \\ o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) & ;\ \text{si } md-kn < 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

quand $\mu \longrightarrow +\infty$.

Il nous reste donc à étudier la trace de $P_{\mu,0}(x\,,D_x)$.

– *Cas où : $md - kn > 0$*

On définit $P_{\mu,0}(x\,,D_x)$ à l'aide de (5.3′) :

$$P_{\mu,0}(x\,,D_x) = A_\mu(x\,,D_x) - \sigma_\mu(x\,,D_x)\,(M_\mu^0(x\,,D_x) + M_\mu^1(x\,,D_x))\,.$$

Comme,

$$\sigma_\mu(x\,,D_x) \circ M_\mu^0(x\,,D_x) \in OPS_{4k}^{-m-1,-2k-1}(\Omega\,,\Sigma) \hookrightarrow OPS_{2k}^{-m-1,-2k-1}(\Omega\,,\Sigma)$$

le corollaire (3.1) nous dit que :

$$\operatorname{Tr}(\sigma_\mu(x\,,D_x) \circ M_\mu^0(x\,,D_x)) = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\,. \tag{5.9}$$

De la même façon, on a :

$$\sigma_\mu(x\,,D_x) \circ M_\mu^1(x\,,D_x) \in OPS_{4k}^{-m-1,-2k-2}(\Omega\,,\Sigma) \hookrightarrow OPS_{2k+2}^{-m-1,-2k-2}(\Omega\,,\Sigma)\,.$$

Alors le corollaire (3.3) prouve que :

$$\operatorname{Tr}(\sigma_\mu(x\,,D_x) \circ M_\mu^1(x\,,D_x)) = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\,. \tag{5.10}$$

Il résulte de (5.7), (5.8), (5.9) et (5.10) que, si $md - kn > 0$:

$$\operatorname{Tr} P_\lambda = \operatorname{Tr} A_\mu(x\,,D_x) + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty\,.$$

On en déduit alors, compte tenu de la proposition (5.1), le théorème (5.1) dans le cas où $md - kn > 0$.

– *Cas où : $md - kn \leqslant 0$*

On définit $P_{\mu,0}(x, D_x)$ à l'aide de (5.3) :

$$P_{\mu,0}(x, D_x) = \sigma_\mu(x, D_x) - A_\mu(x, D_x)(L_\mu^0(x, D_x) + L_\mu^1(x, D_x).$$

Comme,

$$A_\mu(x, D_x) \circ L_\mu^0(x, D_x) \in OPS_{2k}^{-m-1,-2k-1}(\Omega, \Sigma)$$

le corollaire (3.1) nous dit de même que :

$$\mathrm{Tr}\,(A_\mu(x, D_x) \circ L_\mu^0(x, D_x)) = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty. \tag{5.11}$$

Et comme

$$A_\mu(x, D_x) \circ L_\mu^1(x, D_x) \in OPS_{4k}^{-m,-2k+1}(\Omega, \Sigma) \hookrightarrow OPS_{2k}^{-m,-2k+1}(\Omega, \Sigma)$$

le corollaire (3.2) prouve que :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Tr}\,(A_\mu(x, D_x) \circ L_\mu^1(x, D_x)) = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) & ; \text{ si } md - kn = 0 \\ \text{et} & \\ \mathrm{Tr}\,(A_\mu(x, D_x) \circ L_\mu^1(x, D_x)) = o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) & ; \text{ si } md - kn < 0 \end{array}\right. \tag{5.12}$$

ceci quand : $\mu \longrightarrow +\infty$.

Il résulte alors de (5.7), (5.8), (5.11) et (5.12) que :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Tr}\,P_\lambda = \mathrm{Tr}\,\sigma_\mu(x, D_x) + O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) & ; \text{ si } md - kn = 0 \\ \text{et} & \\ \mathrm{Tr}\,P_\lambda = \mathrm{Tr}\,\sigma_\mu(x, D_x) + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-d}{m-k}}\right) & ; \text{ si } md - kn < 0 \end{array}\right. \tag{5.13}$$

quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Mais grâce à (3.12) on a :

$$\sigma_{\mu,0}(x, D_x) = A_\mu(x, D_x) \circ \chi_0(x, D_x) \in OPS_{2k}^{-m,0}(\Omega, \Sigma).$$

On vérifie alors aisément que :

$$\mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu,0}(x, D_x) = O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty. \tag{5.14}$$

D'après la loi de composition des Fourier intégraux, on a pour $j = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\sigma_{\mu,j}(x, D_x) &= \mathrm{Tr}\,(U_j\, \widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)\, U_j^*) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)\, U_j^*\, U_j). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Mais (3.10) et le fait que le support de $\widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)$ est dans $\widetilde{V}_j$ prouvent que :

$$\widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)(I - U_j^* U_j) \in S_{2k}^{-\infty,0}(R^n, \widetilde{\Sigma}_j),$$

pour $j = 1, \ldots, N$.

Par conséquent :

$$\operatorname{Tr}(\widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z)(I - U_j^* U_j)) = O(\mu^{-2k}) \quad ; \quad \mu \longrightarrow +\infty. \tag{5.16}$$

Alors de (5.13), (5.14), (5.15) et (5.16) on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{Tr} P_\lambda = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Tr} \widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z) + O\left(\mu^{-2k+2k\frac{n}{m}}\right); & \text{si } md - kn = 0 \\ \text{et que} & \\ \operatorname{Tr} P_\lambda = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Tr} \widetilde{\sigma}_{\mu,j}(z, D_z) + o\left(\mu^{-2k+2k\frac{n-k}{m-k}}\right); & \text{si } md - kn < 0. \end{array}\right. \tag{5.17}$$

Comme les $\mathcal{K}_j$ $j = 1, \ldots, N$ sont des transformations canoniques, elles conservent la densité canonique ; il résulte alors que dans les expressions de la proposition (4.2) et du choix de χ dans (4.5) que :

$$\int_{|\mu_p(y,\eta)|<1} \widetilde{\chi}_j(y, \eta)\, dy\, d\eta = \int_{|\mu_p(\mathcal{K}_j(\zeta))|<1} \chi_j^0(\zeta)\, d\zeta,$$

et que $\forall j = 1, \ldots, N$ et $\forall p \in \mathbf{Z} \backslash 0$

$$\int_{\nu(\hat{p}_m)(y,\eta)>1} \widetilde{\chi}_j(y, \eta)\, dy\, d\eta = \int_{\nu(\hat{p}_m)(\mathcal{K}_j(\zeta))>1} \chi_j^0(\zeta)\, d\zeta$$

($d\zeta$ étant la densité canonique sur Σ).

Mais on sait d'après [7] que l'opérateur différentiel à coefficients polynomiaux du § 1, $P_\zeta(t, D_t)$, a le même spectre que $\widetilde{P}_{(y,\eta)}(t, D_t)$, (si $\mathcal{K}_j(\zeta) = (y, \eta)$), on a donc :

$$\mu_p(\mathcal{K}_j(\zeta)) = \mu_p(\zeta); \quad \forall p \in \mathbf{Z} \backslash 0.$$

Par conséquent,

$$\int_{|\mu_p(y,\eta)|<1} \widetilde{\chi}_j(y, \eta)\, dy\, d\eta = \int_{|\mu_p(\zeta)|<1} \chi_j^0(\zeta)\, d\zeta, \tag{5.18}$$

$\forall j = 1, \ldots, N$ et $\forall p \in \mathbf{Z} \backslash 0$.

De même il résulte aisément de [7] que :

$$\nu(\widetilde{p}_m)(\mathcal{K}_j(\zeta)) = \nu(p_m)(\zeta)$$

et donc,

$$\int_{\nu(\hat{p}_m)(y,\eta)>1} \widetilde{\chi}_j(y\,,\,\eta)\,dy\,d\eta = \int_{\nu(p_m)(\zeta)>1} \chi_j^0(\zeta)\,d\zeta\,, \quad (5.19)$$

$\forall j = 1\,,\ldots,\mathrm{N}$.

Par conséquent le théorème (5.1), dans le cas $md - kn \leqslant 0$, résulte de (5.1), (5.17), (5.18), (5.19) et de la proposition (4.2).

5.3. Démonstration du théorème (1.1).

Si $m - k > n$ et $k > d$ le théorème (1.1) découle du théorème (5.1), de (1.11) et des théorèmes tauberiens bien connus suivants :

THEOREME (5.2) *"Théorème bilatéral tauberien de Hardy-Lyttlewood". – Soit* $\{\lambda_j\}_j$ *une suite de nombres réels telle que,* $\lim\limits_j |\lambda_j| = +\infty$.

Si on a le développement asymptotique suivant :

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j + it} = (c_1 - i c_2)\,t^{-1+a} + o(t^{-1+a}) \quad ; \quad t \longrightarrow +\infty$$

(avec $0 < a < 1$, c_1 *et* c_2 *réels), on a les comportements asymptotiques suivants :*

$$\mathrm{N}_+(t) = \sum_{0<\lambda_j<t} 1 = \frac{1}{\pi a}\left[c_2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) + c_1 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right] t^a + o(t^a) \quad ; \quad t \longrightarrow +\infty$$

$$\mathrm{N}_-(t) = \sum_{-t<\lambda_j<0} 1 = \frac{1}{\pi a}\left[c_2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) - c_1 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right] t^a + o(t^a) \quad ; \quad t \longrightarrow +\infty\,.$$

THEOREME (5.3) *"Théorème bilatéral tauberien de Karamata". – Soit* $\{\lambda_j\}_j$ *une suite de nombres réels telle que* $\lim\limits_j |\lambda_j| = +\infty$.

Si on a le comportement asymptotique suivant :

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j + it} = (c_1 - i c_2)\,t^{-1+a}\,\mathrm{Log}\,t^a + o(t^{-1+a}\,\mathrm{Log}\,t^a) \; ; \; t \longrightarrow +\infty$$

(avec $0 < a < 1$, c_1 et c_2 réels), alors on a les comportements asymptotiques suivants :

$$N_+(t) = \sum_{0<\lambda_j<t} 1 = \frac{1}{\pi a}\left[c_2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) + c_1 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right] t^a \operatorname{Log} t^a + o(t^a \operatorname{Log} t^a) \quad ; \quad t \longrightarrow +\infty$$

$$N_-(t) = \sum_{-t<\lambda_j<0} 1 = \frac{1}{\pi a}\left[c_2 \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) - c_1 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right] t^a \operatorname{Log} t^a + o(t^a \operatorname{Log} t^a) \quad ; \quad t \longrightarrow +\infty .$$

Une démonstration du théorème (5.2) est établie dans [1] à partir du théorème tauberien classique de Hardy-Littlewood, la démonstration est identique pour établir le théorème (5.3) à partir du théorème tauberien classique de J. Karamata [11].

Revenons à la démonstration du théorème (1.1) si on n'a plus la condition : $m - k > n$ et $k > d$.

Comme $k > 0$ et $m - k > 0$, il existe un entier $q > 1$ tel que $(2q+1)(m-k) > n$ et $(2q+1)k > d$.

L'opérateur $P^{(2q+1)}$ vérifie les mêmes propriétés que P avec $(2q+1)m$ (resp. $(2q+1)k$) à la place de m (resp. de k). La suite des valeurs propres de $P^{(2q+1)}$ est $(\lambda_j^{(2q+1)})_{j\in \mathbf{Z}}$ (où $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ est la suite des valeurs propres de P). Par conséquent, la connaissance du comportement asymptotique du nombre des valeurs propres positives et négatives de $P^{(2q+1)}$ pour q assez grand, permet d'obtenir le comportement asymptotique de celles de P. Il reste à vérifier que les constantes a_1, a_2, a_3^+ et a_3^- sont les mêmes que celles associées à $P^{(2q+1)}$, ceci résulte du fait que le symbole principal de $P^{(2q+1)}$ est $(p_m(x, \xi))^{(2q+1)}$ et que, d'après [7], l'opérateur différentiel à coefficients polynomiaux associé $P^{(2q+1)}$ en $\zeta \in \Sigma$ est $(P_\zeta(t, D_t))^{(2q+1)}$ (si $P_\zeta(t, D_t)$ est celui associé à P).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems,* Van Nostrand, Math. Studies (1965).

[2] P. BOLLEY, J. CAMUS, PHAM THE LAI, Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés, *Lectures Notes in Math.*, 660, Berlin, Springer (1978), 33-46.

[3] L. BOUTET DE MONVEL, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 585-639.

[4] L. BOUTET DE MONVEL, F. TREVES, On a class of pseudo-differential operators with double characteristics, *Inv. Math.*, 24 (1974), 1-34.

[5] L. BOUTET DE MONVEL, A. GRIGIS, B. HELFFER, Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples, *Astérisque,* 34-35 (1976), 93-121.

[6] V.V. GRUSHIN, On the proof of the discretness of the spectrum of a class of pseudo-differential in $\mathbf{R}^n$, *Funct. Anal. Appl.*, 5 (1971), 58-59.

[7] B. HELFFER, Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudo-différentiels et applications à l'hypoellipticité, *Ann. de l'Inst. Fourier,* Grenoble, 26,2 (1976), 55-70.

[8] B. HELFFER, Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples, *Bull. Soc. Math. France,* 51-52 (1977), 13-61.

[9] L. HÖRMANDER, Fourier integral operators I, *Acta. Math.*, 127 (1971), 79-183.

[10] L. HÖRMANDER, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32 (1979), 359-443.

[11] J. KARAMATA, Neuer beweis and verallgemeinerung der Tauberschen sätze, welch die Laplacesche and Stieltjessche transformation betreffen, *J. Reine u. Angew. Math.*, 164 (1931), 27-39.

[12] R.B. MELROSE, Hypoelliptic operators with characteristic variety of codimension two and the wave equation, *Seminaire Goulaouic-Schwartz*, 1979-1980, Centre Math. Ecole polytechnique, Palaiseau, (1980).

[13] A. MENIKOFF, J. SJÖSTRAND, On the eigenvalues of a class of hypo-elliptic operators, *Math. Ann.*, 235 (1978), 55-85.

[14] A. MENIKOFF, J. SJÖSTRAND, On the eigenvalues of a class of hypo-elliptic operators II, *Lecture Notes in Math.*, 755, Berlin, Springer (1979), 201-247.

[15] A. MENIKOFF, J. SJÖSTRAND, The eigenvalues of hypoelliptic operators III, the non semi-bounded case, *J. Analyse Math.*, 35 (1979), 123-150.

[16] D. ROBERT, Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. in Partial Diff. Eq.*, 3 (1978), 755-826.

[17] J. SJÖSTRAND, Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics, *Ark. für Math.*, 12 (1974), 85-130.

[18] J. SJÖSTRAND, Eigenvalues for hypoelliptic operators and related methods, *Proc. Inter. Congress of Math. Helsinki*, 1978, 445.

[19] J. SJÖSTRAND, On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators IV, *Ann. de l'Inst. Fourier*, Grenoble, 30,2 (1980), 109-169.

Manuscrit reçu le 15 juin 1981.

A. MOHAMED,
Université de Nantes (ERA 946)
Institut de Mathématiques & d'Informatique
2, Chemin de la Houssinière
44072 – Nantes Cedex.