ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALINE BONAMI
PHILIPPE CHARPENTIER

Solutions de l'équation $\bar{\partial}$ et zéros de la classe de Nevanlinna dans certains domaines faiblement pseudo-convexes

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 4 (1982), p. 53-89
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_4_53_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 4 (1982), 53-89.

SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $\bar\partial$ ET ZÉROS DE LA CLASSE DE NEVANLINNA DANS CERTAINS DOMAINES FAIBLEMENT PSEUDO-CONVEXES

par A. BONAMI et Ph. CHARPENTIER

Étant donnés $p_1, p_2, \ldots p_n$ n entiers positifs, nous appellerons $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ le multiindice défini par $\alpha_j = \dfrac{1}{p_j}$, et $\mathscr{D}_\alpha$ le domaine de $\mathbf{C}^n$ défini par :

$$\mathscr{D}_\alpha = \{z \in \mathbf{C}^n ;\ |z_1|^{2p_1} + |z_2|^{2p_2} + \ldots + |z_n|^{2p_n} < 1\}.$$

Les domaines $\mathscr{D}_\alpha$ donnent, lorsque les p_j sont non tous égaux à 1, les exemples les plus simples de domaines faiblement pseudo-convexes, et ont été de ce fait très étudiés ([2], [10], [4], ...). Le but de cet article est de montrer que, comme pour les domaines strictement pseudo-convexes, la condition de Blaschke caractérise les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. Plus précisément, nous démontrons :

THÉORÈME. — *Un sous-ensemble analytique* X *de* $\mathscr{D}_\alpha$ *est l'ensemble des zéros d'une fonction de la classe de Nevanlinna de* $\mathscr{D}_\alpha$ *si et seulement si il satisfait à la condition de Blaschke*

$$\int_{\mathscr{D}_\alpha} \delta(z)\sigma_X(z) < \infty$$

où σ_X *désigne la mesure d'aire sur* X *et* δ *la distance à* $\partial\mathscr{D}_\alpha$.

Le fait que la condition de Blaschke soit une condition nécessaire est bien connu : c'est une conséquence de la formule de Green. Il s'agit donc de montrer que cette condition est suffisante. La méthode que nous utilisons est, dans ses grandes lignes, celle de H. Skoda [12] et G. M. Henkin [6, 7] dans le cas des domaines strictement pseudo-convexes. Si θ^X désigne le courant d'intégration sur X, il suffit, suivant P. Lelong [8], de résoudre l'équation $i\partial\bar{\partial}U = \theta^X$, avec :

$$\sup_{0<r<1} \int_{\partial\mathscr{D}_\alpha} |U(r_1^{\alpha_1}z_1, \ldots, r_n^{\alpha_n}z_n)| d\sigma(z) < \infty .$$

On sait qu'alors, il existera f dans la classe de Nevanlinna telle que $U = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Log}|f|$ et donc telle que X soit l'ensemble de ses zéros.

Le premier argument de notre démonstration consiste à montrer que la condition de Blaschke pour un courant d'intégration ou, plus généralement pour un courant θ positif fermé de bidegré (1, 1) entraîne des conditions d'intégrabilité plus fortes (proposition II.1). Dans le cas de la boule (c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$), on sait que la condition de Blaschke entraîne la condition de Malliavin, condition d'intégrabilité plus forte pour les « coefficients tangentiels » de θ. Dans le cas des domaines $\mathscr{D}_\alpha$, les coefficients tangentiels satisfont, suivant les directions, à des conditions encore plus fortes.

Une fois ces bonnes estimations obtenues pour θ^X, il s'agit de résoudre l'équation $i\partial\bar{\partial}U = \theta^X$ avec des noyaux qui permettent d'obtenir l'estimation souhaitée. On commence, comme dans [12], par résoudre l'équation $dW = \theta^X$ par la méthode de Poincaré-Cartan, le rôle des homothéties dans le choix de la solution étant joué par les difféomorphismes

$$(z_1,z_2, \ldots, z_n) \to (t^{\alpha_1}z_1,t^{\alpha_2}z_2, \ldots, t^{\alpha_n}z_n)$$

qui sont adaptés aux domaines $\mathscr{D}_\alpha$. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $\bar{\partial}U = W_{01}$, si $W_{0,1}$ est la composante (0, 1) de W. On est donc amené à chercher des solutions de l'équation $\bar{\partial}$ pour lesquelles on ait, sous de bonnes conditions sur $W_{0,1}$, des estimations L^1 au bord. C'est en fait ce que nous faisons dans la première partie, la seconde partie étant consacrée à la résolution de l'équation $\partial\bar{\partial}$.

Nous construisons donc, dans la première partie, des noyaux résolvants pour l'équation $\bar{\partial}$ à partir de formes de Cauchy-Fantappié de la même manière que Ph. Charpentier [3] dans le cas de la boule. Plus précisément, soit Φ_α l'application holomorphe $\Phi_\alpha(z) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2}, \ldots, z_n^{p_n})$. Les formes de Cauchy-Fantappié utilisées sont très liées aux images par Φ_α^* des formes de Cauchy-Fantappié de [3] dans la boule. Cette technique de « changement de variables » avait déjà été utilisée par A. Bonami et

N. Lohoué [2] pour obtenir des formules de représentation des fonctions holomorphes dans $\mathscr{D}_\alpha$. Les estimations sur les noyaux sont conséquences, comme dans [2], d'estimations à poids dans la boule. On peut remarquer que dans le cas de $\mathscr{D}_\alpha$, il ne suffit plus, pour obtenir une solution dans $L^1(\partial\mathscr{D}_\alpha)$ à l'équation $\bar\partial u = f$, de demander à f et à $\dfrac{f \wedge \bar\partial\rho}{\sqrt{-\rho}}$ d'être à coefficients mesures. Suivant les directions, aux points de non stricte pseudo-convexité, la condition à imposer aux coefficients « complexes tangents » de f est plus forte.

D'autres noyaux donnant des solutions de $\bar\partial$ pour les domaines $\mathscr{D}_\alpha$ avaient été construits dans [5] et [10]. M. Range avait en particulier obtenu des estimations Lipschitz pour ses solutions. Nous n'avons pas l'ambition de donner, pour nos noyaux, les meilleures estimations possibles. L'analogue des estimations BMO et Lipschitz bien connues dans le cas de la boule nécessiterait en particulier une étude des propriétés des noyaux relativement à la distance naturelle au bord de $\mathscr{D}_\alpha$ introduite dans [2].

On serait tenté de penser que, via l'application Φ_α sur la boule, notre théorème pourrait découler de la caractérisation analogue sur la boule. Un moment de réflexion permet de se rendre compte que c'est en fait une caractérisation sur la boule qui est conséquence d'une caractérisation sur $\mathscr{D}_\alpha$ et non l'inverse (corollaire II.1). De plus, comme l'image par Φ_α de la mesure euclidienne n'est pas la mesure euclidienne, c'est un résultat relatif à une classe de Nevanlinna à poids que nous obtenons.

Tous les résultats que nous obtenons pour la classe de Nevanlinna sont également énoncés et démontrés pour la classe des fonctions d'ordre ν, c'est-à-dire des fonctions f holomorphes telles que :

$$\int_{\mathscr{D}_\alpha} \delta(z)^\nu \operatorname{Log}^+ |f(z)| \, dV(z) < \infty .$$

Notations. – Dans la suite, $dV(z)$ désignera la mesure volume dans $\mathbf{C}^n$, σ la mesure euclidienne sur $\partial\mathscr{D}_\alpha$. Si $t \geqslant 0$ et $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ on notera $t^\alpha z = (t^{\alpha_1} z_1, t^{\alpha_2} z_2, \ldots, t^{\alpha_n} z_n)$.

Pour alléger les notations nous écrirons simplement

$$\rho(z) = \rho_\alpha(z) = \sum_1^n |z_i|^{2/\alpha_i} - 1, \quad \text{et} \quad \mathscr{D} = \mathscr{D}_\alpha .$$

I. CONSTRUCTION DE NOYAUX RÉSOLVANT L'ÉQUATION $\bar\partial u = f$ ET ESTIMATION DES SOLUTIONS

Nous allons dans cette partie construire des noyaux résolvants pour lesquels on ait de bonnes estimations : en particulier des estimations L^1 au bord du domaine $\mathscr{D}$ pour pouvoir déduire de telles estimations la caractérisation des zéros de la classe de Nevanlinna comme H. Skoda dans [12].

1. Construction des noyaux.

Soit

$$\Phi(z) = \Phi_\alpha(z) = (z_1^{p_1}, z_2^{p_2}, \dots, z_n^{p_n}),$$

qui est une surjection holomorphe de $\mathscr{D}$ sur la boule B de $\mathbf{C}^n$. Nous voulons construire une forme de Cauchy-Fantappié qui soit liée aux images par Φ^* des formes sur B introduites dans [3]. Donnons tout d'abord quelques notations : soit

$$\varphi_j(\zeta,z) = \varphi_{j,\alpha}(\zeta,z) = (\zeta_j^{p_j} - z_j^{p_j})/(\zeta_j - z_j) = \sum_{k=0}^{p_j-1} z_j^k \zeta_j^{p_j-k-1}.$$

Notons encore $\tilde z = \Phi(z)$, $\tilde\zeta = \Phi(\zeta)$ ... On pose alors :

$$s(\zeta,z) = (s_j(\zeta,z))_{j=1,\dots,n},$$

avec

$$s_j(\zeta,z) = \{\bar{\tilde\zeta}_j(1-\bar{\tilde z}.\tilde\zeta) - \bar{\tilde z}_j(1-|\tilde\zeta|^2)\}\varphi_j(\zeta,z).$$

Si l'on note $\tilde s(\zeta,z)$ la section du fibré de Cauchy-Leray utilisée dans [3] :

$$\tilde s_j(\zeta,z) = \bar\zeta_j(1-\bar\zeta z) - \bar z_j(1-|\zeta|^2),$$

on voit que $s_j(\zeta,z)$ est lié à $\tilde s_j(\tilde\zeta,\tilde z)$, et, en particulier si l'on désigne par $\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z)$ la fonction :

$$\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z) = \tilde s(\zeta,z).(\zeta - z) = |1-\bar\zeta.z|^2 - (1-|\zeta|^2)(1-|z|^2),$$

alors

$$s(\zeta,z).(\zeta-z) = \tilde{s}(\tilde\zeta,\tilde z).(\tilde\zeta-\tilde z) = \tilde{\mathrm{D}}(\tilde\zeta,\tilde z).$$

Comme $\tilde{\mathrm{D}}$ ne s'annule que lorsque $\zeta = z$, la forme de Cauchy-Leray correspondant à s :

$$\mathrm{C}_0(\zeta,z) = [s(\zeta,z).(\zeta-z)]^{-n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} s_i(\zeta,z)\left(\bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta s_j\right) \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i$$

est $\mathscr{C}^\infty$ dans $\bar{\mathscr{D}} \times \bar{\mathscr{D}}$ privé de l'ensemble des

$$\{(\zeta,z);\ \Phi(\zeta) = \Phi(z)\}.$$

Avant de démontrer que C_0 joue, pour le domaine $\mathscr{D}$, le rôle du noyau de Cauchy dans le cas du disque, donnons la liaison entre $\mathrm{C}_0(\zeta,z)$ et l'image par Φ^* de la forme de Cauchy-Leray $\tilde{\mathrm{C}}_0(\zeta,z)$ correspondant à $\tilde s$ dans la boule.

Lemme I.1. — $\left\{\prod_{j=1}^{n} \varphi_j(\zeta,z)\right\}(\Phi_\zeta^*\tilde{\mathrm{C}}_0)(\zeta,\tilde z) = \{\det \Phi'(\zeta)\}\mathrm{C}_0(\zeta,z).$

$\Phi_\zeta^*\tilde{\mathrm{C}}_0$ désigne l'image par Φ^* de la forme $\tilde{\mathrm{C}}_0$ en $\tilde\zeta$, $\tilde z$ étant fixé.

Nous ne ferons pas ce calcul, tout à fait élémentaire, et qui est déjà implicitement dans [2] (cf. (8.7) et (8.8)).

Il en résulte que :

Lemme I.2. — *Pour tout* $z \in \mathscr{D}$ *et pour toute fonction* u *de classe* $\mathscr{C}^1$ *dans un voisinage de* z :

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial \mathrm{A}_\varepsilon(z)} u(\zeta)\mathrm{C}_0(\zeta,z) = c_n^{-1} u(z)$

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial \mathrm{A}_\varepsilon(z)} u(\zeta)\mathrm{C}_0(\zeta,z') = 0$ si $z' \neq z$;

$\mathrm{A}_\varepsilon(z)$ *désigne ici la composante connexe contenant* z *de l'ensemble*

$$\{\zeta \in \mathscr{D};\ |\Phi(\zeta)-\Phi(z)|<\varepsilon\}$$

et c_n *désigne la constante universelle*

$$c_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}.$$

Dans le cas particulier de la boule de $\mathbf{C}^n$ (c'est-à-dire le cas où $\Phi = \mathrm{Id}$), le lemme II.2 a été démontré dans [3] (proposition I.1) (proposition I.1). Il s'agit de déduire par changement de variables le cas général du cas particulier. Il nous suffit de montrer

$$\text{(I.1)} \qquad \int_{\partial A_\varepsilon(z)} C_0(\zeta,z) \to c_n^{-1};$$

$$\text{(I.2)} \qquad \int_{\partial A_\varepsilon(z)} |\zeta - z|\,|C_0(\zeta,z)| \to 0;$$

$$\text{(I.3)} \qquad \int_{\partial A_\varepsilon(z)} |C_0(\zeta,z')| \to 0 \qquad \text{si} \qquad z' \neq z.$$

Montrons tout d'abord (I.1) dans le cas où $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont différents de 0, c'est-à-dire $\det \Phi'(z) \neq 0$. Alors Φ est localement une bijection, envoyant $\partial A_\varepsilon(z)$ sur $\partial B_\varepsilon(\tilde{z})$, où $B_\varepsilon(\tilde{z})$ désigne la boule de centre $\tilde{z}$ de rayon ε. De plus, comme

$$\varphi_j(z,\zeta) = p_j \zeta_j^{p_j - 1} + \mathcal{O}(|z_j - \zeta_j|),$$

en vertu du lemme I.1 :

$$\int_{\partial A_\varepsilon(z)} C_0(\zeta,z) = \int_{\partial B_\varepsilon(\tilde{z})} \tilde{C}_0(\zeta,\tilde{z}) + \mathcal{O}\left(\int_{\partial B_\varepsilon(\tilde{z})} |\tilde{z} - \zeta|\,|\tilde{C}_0(\zeta,\tilde{z})| \right).$$

Il résulte des analogues de (I.1) et (I.2) dans le cas de la boule que le premier terme tend vers c_n^{-1} et le second vers 0.

Supposons maintenant que $z = (z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0)$, avec $z_1, \ldots, z_r$ non nuls. Alors

$$\begin{aligned} \prod_j \varphi_j(\zeta,z) &= \Big\{ \prod_{j \leq r} \varphi_j(\zeta,z) \Big\} \Big\{ \prod_{j > r} \zeta_j^{p_j - 1} \Big\} \\ &= \det \Phi'(\zeta) \Big\{ \prod_{j > r} p_j^{-1} + \mathcal{O}(|\Phi(z) - \Phi(\zeta)|) \Big\}, \end{aligned}$$

tandis que $\partial A_\varepsilon(z)$ est réunion de $p_{r+1} \ldots p_n$ portions qui s'envoient par Φ sur $\partial B_\varepsilon(\tilde{z})$ de façon bijective (ceci à des ensembles de mesure nulle près). Là encore :

$$\int_{\partial A_\varepsilon(z)} C_0(\zeta,z) = \int_{\partial B_\varepsilon(\tilde{z})} \tilde{C}_0(\zeta,\tilde{z}) + \mathcal{O}\left(\int_{\partial B_\varepsilon(\tilde{z})} |\zeta - z|\,|\tilde{C}_0(\zeta,\tilde{z})| \right).$$

La limite (I.2) se démontre de la même manière, en majorant l'intégrale considérée par :

$$\int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(\tilde z)} |\zeta - \tilde z|^\eta |\tilde{\mathrm{C}}_0(\zeta,\tilde z)|\,,$$

avec $\eta = \inf \alpha_j$.

Il reste à montrer (I.3). Comme $\mathrm{C}_0(\zeta,z')$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de ζ au voisinage de z si $\Phi(z) \neq \Phi(z')$, il suffit de donner une démonstration lorsque $\Phi(z) = \Phi(z')$. Supposons tout d'abord $\det \Phi'(z) \neq 0$: comme

$$\prod_j \varphi_j(\zeta,z') = \mathcal{O}(|z-\zeta|) = \mathcal{O}(|\Phi(z)-\Phi(\zeta)|)\,,$$

$$\int_{\partial \mathrm{A}_\varepsilon(z)} \mathrm{C}_0(\zeta,z') = \mathcal{O}\left(\int_{\partial \mathrm{B}_\varepsilon(\tilde z)} |\zeta-\tilde z|\,|\tilde{\mathrm{C}}_0(\zeta,\tilde z)|\right),$$

d'où la conclusion. On modifie comme dans le cas de (I.1) la démonstration lorsque $\det \Phi'(z) = 0$.

Il résulte du lemme I.2 que :

PROPOSITION I.1. — *Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathscr{D}$. Pour tout $z \in \mathscr{D}_\alpha$, on a*

$$u(z) = c_n \int_{\partial\mathscr{D}} u(\zeta)\mathrm{C}_0(\zeta,z) - c_n \int_{\mathscr{D}} \bar\partial u(\zeta) \wedge \mathrm{C}_0(\zeta,z)\,.$$

C'est cette formule qui, dans le cas de la boule, a été appelée formule de Cauchy dans [3]. Remarquons qu'alors la projection qui à u fait correspondre la fonction holomorphe

$$\mathbf{H}u(z) = c_n \int_{\partial\mathscr{D}} u(\zeta)\mathrm{C}_0(\zeta,z)$$

est la projection de Szegö, tandis qu'il n'en est rien en général. La projection $\mathbf{H}$ a été étudiée dans [2] (§ 8) : il y est montré qu'elle est bornée dans $\mathrm{L}^2(\partial \mathrm{D})$, et que c'est la projection orthogonale sur le sous-espace formé des fonctions holomorphes d'un espace de Hilbert qui n'est pas un L^2 à poids.

Il résulte de la proposition I.1 que, si f est une $(0, 1)$ forme de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\bar{\mathscr{D}}$ telle que $\bar\partial f = 0$,

$$u_0(z) = -\,c_n \int_{\mathscr{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{C}_0(\zeta,z)$$

est l'unique solution de l'équation $\bar\partial u = f$ telle que $\mathbf{H}u = 0$. La solution u_0 ne satisfaisant pas à de bonnes estimations, nous allons comme dans [3] en introduire d'autres, liées à celles de la boule de la même manière.

Soit, pour tout $k \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} k > 0$:

$$\tilde\psi_k(\zeta,z) = \frac{1}{\mathrm{B}(n,k)} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right) \left\{\sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+p} \left(\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar\zeta z|^2}\right)^p\right\},$$

soit $\psi_k(\zeta,z) = \tilde\psi_k(\tilde\zeta,\tilde z)$, et soit :

$$\mathrm{C}_k(\zeta,z) = \psi_k(\zeta,z)\mathrm{C}_0(\zeta,z).$$

Alors :

Proposition I.2. — *Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathscr{D}$. Pour tout $z \in \mathscr{D}$, on a :*

$$u(z) = \int_{\mathscr{D}} \mathrm{P}_k(\zeta,z)u(\zeta)\, d\mathrm{V}(\zeta) - c_n \int_{\mathscr{D}} \bar\partial u(\zeta) \wedge \mathrm{C}_k(\zeta,z),$$

avec $\mathrm{P}_k(\zeta,z) = c_{n,k} \dfrac{(1-|\tilde\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\tilde\zeta}.\tilde z)^{n+k}} \displaystyle\prod_{j=1}^n p_j \bar\zeta_j^{p_j-1} \varphi_j(z,\zeta)$.

Il suffit, pour démontrer la proposition I.2 d'utiliser le lemme I.2 et le fait que $\psi_k(z,z) = 0$, ainsi que le fait que $\bar\partial_\zeta \mathrm{C}_k(\zeta,z) = \mathrm{P}_k(\zeta,z)\, d\mathrm{V}(\zeta)$. Mais :

$$\bar\partial_\zeta \mathrm{C}_k(\zeta,z) = \bar\partial_\zeta \psi_k(\zeta,z) \wedge \mathrm{C}_0(\zeta,z)$$

et, si $\tilde{\mathrm{P}}_k(\zeta,z) = c_{n,k} \dfrac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar\zeta.z)^{n+k}}$, on sait que, (cf. [3]),

$$\bar\partial_\zeta \tilde{\mathrm{C}}_k(\zeta,z) = \bar\partial_\zeta \tilde\psi_k(\zeta,z) \wedge \tilde{\mathrm{C}}_0(\zeta,z) = \tilde{\mathrm{P}}_k(\zeta,z)\, d\mathrm{V}(\zeta).$$

Il résulte de ceci et du lemme I.1 que

$$\begin{aligned}
&\bar\partial_\zeta \psi_k(\zeta,z) \wedge \mathrm{C}_0(\zeta,z) \\
&\quad = \left\{\prod_{j=1}^n \varphi_j(\zeta,z)\right\}\{\det \Phi'(\zeta)\}^{-1}\Phi_\zeta^*(\bar\partial\tilde\psi_k \wedge \tilde{\mathrm{C}}_0)(\zeta,\tilde z) \\
&\quad = \left\{\prod_{j=1}^n \varphi_j(\zeta,z)\right\}\{\det \Phi'(\zeta)\}^{-1}\tilde{\mathrm{P}}_k(\tilde\zeta,\tilde z)|\det \Phi'(\zeta)|^2\, d\mathrm{V}(\zeta) \\
&\quad = \mathrm{P}_k(\zeta,z)\, d\mathrm{V}(\zeta).
\end{aligned}$$

COROLLAIRE I.1. — *Soit f une forme de degré $(0, 1)$, $\bar\partial$ fermée et de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathscr{D}_\alpha$. Alors*

$$u_k(z) = -c_n \int_{\mathscr{D}} f(\zeta) \wedge C_k(\zeta,z)$$

est solution de l'équation $\bar\partial u = f$.

Si l'on pose :

$$\mathbf{P}_k u(z) = \int_{\mathscr{D}} P_k(\zeta,z)u(\zeta)\, dV(z),$$

u_k est l'unique solution qui est annulée par la projection $\mathbf{P}_k$. En procédant comme dans [2], on peut montrer que $\mathbf{P}_k$ est une projection bornée dans $L^2(\mathscr{D}; (1-|\tilde\zeta|^2)^{\beta-1}\, dV(\zeta))$ quel que soit $\beta \leqslant \operatorname{Re} k$. C'est la projection orthogonale sur le sous-espace formé des fonctions holomorphes d'un espace de Hilbert qui n'est pas un L^2 à poids : considérons le cas particulier où $\alpha = (1, 1/2)$, c'est-à-dire $\mathscr{D} = \{z \in \mathbf{C}^2 ; |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$, et supposons $k = 1$. L'espace de Hilbert est alors somme directe du sous-espace de $L^2(\mathscr{D}, dV)$ formé des fonctions impaires en z_2, et du sous-espace de $L^2(\mathscr{D}, |\zeta_2|^2\, dV(\zeta))$ formé des fonctions paires en z_2 (cf. [2], § 8 pour le résultat analogue pour **H**).

Il nous reste à donner, avant d'estimer les noyaux C_k, leurs formes explicites qui nous serviront dans la suite.

LEMME I.3. — $C_0(\zeta,z) = C_0^1(\zeta,z) + \bar\partial\rho_\alpha(\zeta) \wedge C_0^2(\zeta,z)$, *avec*

(i) $$C_0^1(\zeta,z) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_0^{1,i}(\zeta,z) \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j \right\} \bigwedge_{j=1}^{n} d\zeta_j$$

et

$$C_0^{1,i}(\zeta,z) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(\zeta,z) \prod_{j\neq i} (p_j \bar\zeta_j^{\,p_j-1}) \frac{(1-\tilde\zeta.\tilde{\tilde z})^{n-1}}{\tilde D^n(\tilde\zeta,\tilde z)} \{\tilde\zeta_i(1.\tilde\zeta.\tilde z) - \tilde z_i(1 - |\tilde\zeta|^2)\}$$

(ii) $$C_0^2(\zeta,z) = \left(\sum_{i<j} (-1)^{i+j} C_0^{2,i,j}(\zeta,z) \bigwedge_{k\neq i,j} d\bar\zeta_k \right\} \bigwedge_{k=1}^{n} d\zeta_k$$

avec

$$C_0^{2,i,j}(\zeta,z) = \prod_{\ell=1}^{n} \varphi_\ell(\zeta,z) \prod_{\ell\neq i,j} (p_\ell \bar\zeta_\ell^{\,p_\ell-1}) \frac{(1-\tilde\zeta.\tilde{\tilde z})^{n-1}}{\tilde D^n(\tilde\zeta,\tilde z)} (\tilde{\tilde\zeta}_i \tilde{\tilde z}_i - \tilde{\tilde\zeta}_j \tilde{\tilde z}_i).$$

Ces formules découlent immédiatement des formules correspondantes pour $\tilde{C}_0(\zeta,z)$ ([3] (I.15)) et du lemme I.1. On en déduit une écriture analogue de $C_k(\zeta,z)$. Lorsque $z \in \partial\mathscr{D}$, les formules se simplifient puisque $\tilde{D}(\tilde{\zeta},\tilde{z}) = |1-\tilde{\zeta}.\bar{\tilde{z}}|^2$.

2. Estimation des solutions.

Rappelons tout d'abord la terminologie utilisée par H. Skoda dans [12] : étant donnée une (0, 1) forme f, $\bar\partial$ fermée et dont les coefficients sont des mesures bornées dans $\mathscr{D}$, on dit qu'une fonction $u \in L^1(\partial\mathscr{D})$ est une solution de l'équation $\bar\partial_b u = f$ si pour toute forme φ de degré $(n,n-1)$ de classe C^1 dans $\mathscr{D}$ et $\bar\partial$-fermée on a :

$$\int_{\partial\mathscr{D}} u(\zeta)\varphi(\zeta) = \int_{\mathscr{D}} f(\zeta) \wedge \varphi(\zeta).$$

Le but de ce paragraphe est de démontrer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME I.1. — *Soit f une* (0, 1) *forme $\bar\partial$ fermée à coefficients mesures bornées dans $\mathscr{D}$ et telle que les mesures g_{ij}, définies par*

$$f \wedge \bar\partial\rho = \sum_{i<j} g_{ij}\, d\bar\zeta_i \wedge d\bar\zeta_j$$

satisfassent aux inégalités suivantes avec $\ell = i$ et *$\ell = j$:*

$$\int_{\mathscr{D}} \left[\{-\rho(\zeta)\}\{|\zeta_\ell|^{2p_\ell} - \rho(\zeta)\}^{1-\alpha_\ell}\right]^{-1/2} |g_{ij}| < \infty .$$

Alors, si $\operatorname{Re} k > 0$,

$$u_k(z) = -\,c_n \int_{\mathscr{D}} f(\zeta) \wedge C_k(\zeta,z)$$

est défini pour presque tout $z \in \partial\mathscr{D}$, appartient à $L^1(\partial\mathscr{D})$, et est solution de l'équation $\bar\partial_b u = f$.

THÉORÈME I.2. — *Soit $\beta > 0$, et soit f une* (0, 1) *forme $\bar\partial$-fermée à coefficients mesures dans $\mathscr{D}$ telle que, si les mesures g_{ij} sont définies comme* *précédemment,*

$$\int_{\mathscr{D}} \{-\rho(\zeta)\}^{\beta}|f| < \infty$$

et, pour tous $i, j, \ell = i$ *ou* $\ell = j$,

$$\int_{\mathscr{D}} \{-\rho(\zeta)\}^{\beta-1/2}(\{|\zeta_\ell|^{2p_\ell} - \rho(\zeta)\}^{1-\alpha_\ell})^{-1/2}|g_{ij}| < \infty .$$

Alors, si $\operatorname{Re} k > \beta$, *la fonction* u_k, *définie pour presque tout* $z \in \mathscr{D}$ *par :*

$$u_k(z) = -c_n \int_{\mathscr{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{C}_k(\zeta,z)$$

appartient à $\mathrm{L}^1(\mathscr{D};\ \{-\rho(\zeta)\}^{\beta-1}\, d\mathrm{V}(\zeta)\}$, *et est solution de l'équation* $\bar{\partial} u = f$.

Les estimations de u_k sont conséquences d'estimations des noyaux C_k, tandis que le fait que u_k soit solution nécessite également un procédé de régularisation. Démontrons tout d'abord les estimations : elles sont conséquences des deux propositions suivantes :

PROPOSITION I.3. — *Quel que soit* $k \in \mathbf{C}$ *avec* $\operatorname{Re} k > 0$, *il existe une constante* K *indépendante de* $\zeta \in \mathscr{D}$ *telle que :*

(i) *quel que soit* $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_{\partial\mathscr{D}} |\mathrm{C}_k^{1,i}(\zeta,z)|\, d\sigma(z) \leqslant \mathrm{K};$$

(ii) *quels que soient* $i < j$,

$$\int_{\partial\mathscr{D}} |\mathrm{C}_k^{2,i,j}(\zeta,z)|\, d\sigma(z) \leqslant \mathrm{K}\{(-\rho(\zeta)) \sum_{\ell=i,j} (-\rho(\zeta) + |\zeta_\ell|^{2p_\ell\alpha_\ell}\}^{-1/2}.$$

PROPOSITION I.4. — *Quel que soit* $k \in \mathbf{C}$ *avec* $\operatorname{Re} k > \beta$, *il existe une constante* K *indépendante de* $\zeta \in \mathscr{D}$ *telle que :*

(i) *quel que soit* $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_{\mathscr{D}} |\mathrm{C}_k^{1,i}(\zeta,z)|\{-\rho(z)\}^{\beta-1}\, d\mathrm{V}(z) \leqslant \mathrm{K}\{-\rho(\zeta)\}^{\beta};$$

(ii) *quels que soient* $i < j$,

$$\int_{\mathscr{D}} |C_k^{2,i,j}(\zeta,z)|\{-\rho(z)\}^{\beta-1}\, dV(z) \leqslant K\{-\rho(\zeta)\}^{\beta-1/2} \sum_{\ell=i,i}\left(-\rho(\zeta)+|\zeta_\ell|^{2p_\ell}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha_\ell}{2}}.$$

Démonstration de la proposition I.3. — On a la majoration, pour $z \in \partial\mathscr{D}$:

$$|C_k^{1,i}(\zeta,z)| \leqslant C \prod_{j=1}^{n} \{|z_j|^{2p_j-2} + |\zeta_j|^{2p_j-2}\} \frac{(1-|\tilde{\zeta}|^2)^{\mathrm{Re}\, k}}{|1-\tilde{\zeta}.\tilde{z}|^{n+\mathrm{Re}\, k}}.$$

La fonction de droite est fonction seulement de $\tilde{z}$, et l'on sait ([2], § 1) que :

$$\int_{\partial\mathscr{D}} h(\Phi(z))\, d\sigma(z) \simeq \int_{\partial B} h(z) \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{2\alpha_j-2}\, d\tilde{\sigma}(z)$$

quelle que soit la fonction h mesurable positive; $\tilde{\sigma}$ désigne la mesure euclidienne sur ∂B. La majoration (i) de la proposition I.3 découlera donc de la majoration :

$$\int_{\partial B} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\, k}}{|1-\zeta.\bar{z}|^{n+\mathrm{Re}\, k}} \prod_{j=1}^{n} \left\{1+\left(\frac{|\zeta_j|}{|z_j|}\right)^{2-2\alpha_j}\right\} d\tilde{\sigma}(z) \leqslant K$$

ou encore du lemme :

LEMME I.4. — *Quels que soient les nombres réels* $\gamma > 0$, $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ *compris entre* 0 *et* 2 *et* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *tels que* $0 \leqslant \varepsilon_j < 2 - \delta_j$, *il existe une constante* K *indépendante de* $\zeta \in B$ *pour laquelle*

$$\int_{\partial B} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\gamma+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j}}{|1-\zeta.\bar{z}|^{n+\gamma}} \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j+\varepsilon_j}}\right) d\tilde{\sigma}(z) \leqslant K.$$

Lorsque les ε_j et les δ_j sont nuls, ce lemme est bien connu et utilisé pour l'analogue de la proposition I.3 dans le cas de la boule. Montrons-le dans le cas général. Si $|\zeta| < \frac{1}{2}$, il n'y a évidemment rien à démontrer : il suffit de trouver un majorant lorsque $|\zeta_1| > \frac{1}{2\sqrt{n}}|\zeta|$ par exemple. Posons $\zeta' = \frac{\zeta}{|\zeta|}\cdot$ Un calcul élémentaire montre que :

$$|1 - \zeta\bar{z}| \simeq 1 - |\zeta|^2 + |1-\zeta'\bar{z}|,$$

tandis que, si $t = \operatorname{Im}(\zeta'\bar{z})$

$$|1-\zeta'\bar{z}| \simeq |t| + \prod_{j=2}^{n} |\zeta'_j - z_j|^2;$$

de plus $t, z_2, \ldots, z_n$ forment un système de coordonnées de ∂B au voisinage de ζ', et :

$$d\tilde{\sigma}(z) \simeq dt\, dV(z_2) \ldots dV(z_n)$$

(cf. [2] pour la justification de tels calculs).

Remplaçant $|1-\zeta\bar{z}|^{-n-\gamma}$ par son majorant

$$C\{1-|\zeta|^2+|t|\}^{-1-\frac{\gamma}{n}} \prod_{j=2}^{n} \{1-|\zeta|^2+|\zeta'_j-z_j|^2\}^{-1-\frac{\gamma}{n}},$$

on voit qu'il suffit de montrer que

$$\sup_{A>0} \int \frac{A^{\gamma/n}}{(A+|t|)^{1+\frac{\gamma}{n}}}\, dt < \infty$$

et

$$\sup_{\substack{A>0 \\ \zeta_j \in C}} \int_C \frac{A^{\gamma/n+\varepsilon_j/2}}{|A+|z_j-\zeta_j|^2|^{1+\gamma/n}} \frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{z_j} |z_j|^{-\varepsilon_j}\, dV(z_j) < \infty .$$

La première inégalité est immédiate. La seconde découle de l'inégalité élémentaire :

$$\text{(I.4)} \qquad \sup_{\zeta \in C} \int_C [1+|z-\zeta|^2]^{-1-\eta} \left|\frac{\zeta}{z}\right|^{\delta} |z|^{-\varepsilon}\, dV(z) < \infty$$

quel que soit $\eta > 0$, $0 \leqslant \delta < 2$, $0 \leqslant \varepsilon < 2 - \delta$. Ceci termine la démonstration du lemme et de la partie (i) de la proposition I.3.

Venons-en à la partie (ii) :

$$\begin{aligned}|\zeta_i\tilde{z}_j-\zeta_j\tilde{z}_i| &\leqslant \{|\tilde{z}_i| + |\tilde{z}_j|\}|\zeta-\tilde{z}|\\ &\leqslant C\{|\tilde{z}_i| + |\tilde{z}_j|\}\,|1 - \zeta.\bar{\tilde{z}}|^{1/2}\end{aligned}$$

si bien que

$$|C_k^{2,i,j}(\zeta,z) \leqslant C \prod_{\ell\neq i}\{|z_\ell|^{2p_\ell-2} + |\zeta_\ell|^{2p_\ell-2}\}\ \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k}}{|1-\zeta.\bar{\tilde{z}}|^{n+\frac{1}{2}+\mathrm{Re}\,k}}$$

$$\times \prod_{\ell=i,j}(|z_\ell|^{p_\ell-1}+|\zeta_\ell|^{p_\ell-1})\,\{|z_i^{p_i-1} + |z_j|^{p_j-1}\}\,.$$

Après passage à une intégration sur la boule comme dans le cas (i), on est amené à utiliser le lemme I.4 avec $\gamma = \dfrac{1}{2} + \mathrm{Re}\,k$, $\varepsilon_i = 1 - \alpha_i$ et $\varepsilon_j = 0$, ou bien $\varepsilon_i = 0$ et $\varepsilon_j = 1 - \alpha_j$.

Démonstration de la proposition I.4. — Pour $z\in\mathcal{D}$, compte tenu de l'expression de ψ_k :

$$|C_k^{1,i}(\zeta,z)| \leqslant C\,\frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k}|1-\zeta.\bar{\tilde{z}}|^{n-1-\mathrm{Re}\,k}}{D^n(\zeta,z)}\prod_{j=1}^{n}\{|\zeta_j|^{2p_j-2} + |z_j|^{2p_j-2}\}$$

$$\times\,|\bar{\zeta}_i(1-\zeta.\bar{\tilde{z}})-\bar{\tilde{z}}_i(1-|\zeta|^2)|\{|\zeta_i|^{p_i-1} + |z_i|^{p_i-1}\}\,.$$

Mais :

$$\begin{aligned}|\zeta_i(1-z\zeta) - z_i(1-|\zeta|^2)| &\leqslant |\zeta_i-z_i|(1-|\zeta|^2) + |\zeta_i|\,|\zeta.(\zeta-z)|^2\\ &\leqslant \tilde{D}(\zeta,z)^{1/2}((1-|\zeta|^2)^{\frac{1-\alpha_i}{2}} + |\zeta_i|^{1-\alpha_i})\,.\end{aligned}$$

Après changement de variables pour se ramener à une intégration dans la boule, il nous suffit donc, pour démontrer (i), de montrer que :

LEMME I.5. — *Quels que soient les nombres réels* $\beta>0$, $\gamma>\beta$, $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ *tels que* $\delta_j\in[0, 2[$ et $\varepsilon<\inf(1,2\text{-}\delta_i)$, *il existe une constante indépendante de* $\zeta\in B$ *pour laquelle :*

$$\int_B \frac{|1-\zeta\bar{z}|^{n-1-\gamma}}{[\tilde{D}(\zeta,z)]^{n-2}}\prod_j\left(\frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j}}\right)|z_i|^{-\varepsilon}(1-|z|^2)^{\beta-1}\,dV(z) \leqslant K(1-|\zeta|^2)^{\beta-\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}\,.$$

Cette majoration est très simple à obtenir lorsque $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}$: comme alors :

$$\frac{3}{4} \leqslant |1-\zeta\bar{z}| \leqslant 1$$

et

$$\tilde{D}(\zeta,z) \geqslant \frac{3}{4}\, |\zeta-z|^2,$$

il s'agit de majorer uniformément :

$$\text{(I.5)} \quad \int_B |z_i|^{-\varepsilon} \prod_j \left(\frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j}}\right) \frac{dV(z)}{|z-\zeta|^{2n-1}}$$
$$\leqslant \prod_{j\neq i} \int_{|z_j-\zeta_j|<2} \left|\frac{\zeta_j}{z_j}\right|^{\delta_j} \frac{dV(z_j)}{|z_j-\zeta_j|^{2-\eta}} \times \int_{|z_i-\zeta_i|<2} \frac{|\zeta_i|^{\delta_i}}{|z_i|^{\delta_i+\varepsilon}} \frac{dV(z_i)}{|z_i-\zeta_i|^{2-\eta'}}$$

avec $\eta' > \varepsilon$, et $(n-1)\eta+\eta' = 1$. La majoration uniforme de chaque intégrale découle immédiatement du changement de variables $z_j = \zeta_j u_j$.

Avant de montrer le lemme dans le cas où $|\zeta| \geqslant \frac{1}{2}$, donnons pour $\tilde{D}(\zeta,z)$ et $|1-\zeta\bar{z}|$ des expressions convenables :

(I.6)
$$\tilde{D}(\zeta,z) \simeq \{1-\sup(|\zeta|^2,\ |z|^2)\}\, |\zeta-z|^2 + (|\zeta|^2-|z|^2)^2 + (\mathrm{Im}\,\zeta\bar{z})^2 + |\zeta-z|^4;$$

$$\text{(I.7)} \qquad |1-\zeta\bar{z}| \simeq 1-|\zeta|^2 + 1 - |z|^2 + |\mathrm{Im}\,\zeta\bar{z}| + |\zeta-z|^2.$$

Pour démontrer (I.6) et (I.7), on peut toujours supposer $|\zeta| \geqslant |z|$, et $\zeta = (r, 0, \dots 0)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(\zeta,z) &= (1-|\zeta|^2)\,|\zeta-z|^2 + r^2|r-z_1|^2 \\
&\simeq (1-|\zeta|^2)\zeta-z|^2 + |\mathrm{Im}\, z_1|^2 + (r^2-|z_1|^2)^2 \\
&\simeq (1-|\zeta|^2)|\zeta-z|^2 + |\mathrm{Im}\, z_1|^2 + (r^2-|z|^2)^2 + \left(\sum_{j\geqslant 2} |z_j|^2\right)^2
\end{aligned}$$

d'où (I.6). De même :

$$\begin{aligned}
|1-\zeta\bar{z}|^2 &= |1-rz_1|^2 = |1-r+r(1-\mathrm{Re}\, z_1)|^2 + |\mathrm{Im}\, z_1|^2 \\
&\simeq (1-r)^2 + |1-\mathrm{Re}\, z_1|^2 + |\mathrm{Im}\, z_1|^2 \\
&\simeq (1-r^2)^2 + (1-|z|^2)^2 + \left(\sum_{j\geqslant 2} |z_j|^2\right)^2 + |\mathrm{Im}\, z_1|^2 .
\end{aligned}$$

Revenons à la démonstration du lemme I.5 dans le cas où $|\zeta| \geqslant \frac{1}{2}\cdot$ En vertu de (I.7) et (I.8), l'intégrale prise en dehors de la boule de centre ζ et de rayon c est majorée uniformément. Si l'on choisit $c \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}}$ et si l'on suppose par exemple $|\zeta_1'| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, avec $\zeta' = \zeta/|\zeta|$, alors :

$$u = 1 - |z|^2 \qquad v = \operatorname{Im}(\zeta\bar{z}) \qquad z'' = (z_2, \ldots, z_n)$$

forment un système de coordonnées avec jacobien majoré et minoré indépendamment de ζ à l'intérieur de la boule $B(\zeta, c)$. De plus $|z_1| \geqslant \frac{1}{4\sqrt{n}}$, et, si $A = 1 - |\zeta|^2$,

$$|1-\zeta\bar{z}| \simeq A + u + |v| + |z''-\zeta''|^2$$
$$\tilde{D}(\zeta-z) \simeq A|\zeta''-z''|^2 + |A-u|^2 + v^2 + |\zeta''-z''|^4.$$

Il suffit donc de majorer :

$$\sup_{\substack{\zeta\in\mathbf{C}^n\\ A>0}} A^{\gamma-\beta+\frac{1}{2}\varepsilon} \int \frac{(A+|u|+|v|+|z''-\zeta''|^2)^{n-1-\gamma}}{[A|z''-\zeta''|^2+|A-u|^2+v^2+|z''-\zeta''|^4]^{n-\frac{1}{2}}} \prod_{j\geqslant 2}\left(\frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j}}\right)$$
$$\times\ |z_i|^{-\varepsilon}|u|^{\beta-1}\,du\,dv\,dV(z'')$$
$$= \sup_{\zeta''} \int \frac{(1+|u|+|v|+|z''-\zeta''|^2)^{n-1-\gamma}}{[|z''-\zeta''|^2+|1-u|^2+v^2+|z''-\zeta''|^4]^{n-\frac{1}{2}}}\ .$$
$$\prod_{j\geqslant 2}\left(\frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j}}\right)|z_i|^{-\varepsilon}|u|^{\beta-1}\,du\,dv\,dV(z'').$$

Si $|z''-\zeta''|^2 + |1-u|^2 + v^2 \leqslant 4$, $1 + |u| + |v| + |z''-\zeta''|^2$ est majoré et minoré indépendamment de ζ'', donc

$$\int_{|z''-\zeta''|^2+|1-u|^2+v^2\leqslant 4} \leqslant C \int_{|z''-\zeta''|^2+|1-u|^2+v^2\leqslant 4} [|z''-\zeta''|^2 + |1-u|^2 + v^2]^{-n+\frac{1}{2}}$$
$$\prod_{j\geqslant 2}\left(\frac{\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j}}\right)|z_i|^{-\varepsilon}\,du\,dv\,dV(z'')$$

intégrale qui se traite comme (I.5).

Si $|z''-\zeta''|^2 + |1-u|^2 + v^2 \geqslant 4$, alors :

$$|z''-\zeta''|^2 + |1-u|^2 + v^2 + |z''-\zeta''|^4 \simeq 1 + |u| + |v| + |z''-\zeta''|^2 .$$

Donc :

$$\int_{|z''-\zeta''|^2+|1-u|^2+v^2\geqslant 4} \leqslant C \int (1+|u|+||v|+|z''-\zeta''|^2)^{-n-\gamma} \prod_{j\geqslant 2} \left(\frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j}}\right) \times |z_i|^{-\varepsilon}|u|^{\beta-1}\, du\, dv\, dV(z'')$$

intégrale majorée, en écrivant

$$(1+|u|+|v|+|z''-\zeta''|^2)^{n+\gamma} \geqslant c(1+|u|)^{\beta-\eta}(1+|v|)^{1+\eta} \prod_{j\geqslant 2} (1+|z_j-\zeta_j|^2)^{1+\eta}$$

avec $(n+1)\eta = \gamma - \beta > 0$, par :

$$C \int (1+|z_i-\zeta_i|^2)^{-1-\eta} \frac{|\zeta_i|^{\delta_j}}{|z_i|^{\delta_i+\varepsilon_i}}\, dV(z_i) \times \prod_{\substack{j\geqslant 2\\ j\neq i}} \int (1+|z_j-\zeta_j|^2)^{-1-\eta} \frac{|\zeta_j|^{\delta_j}}{|z_j|^{\delta_j}}\, dV(z_j).$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité (I.4). Ceci termine la démonstration du lemme I.5 et de la partie (i) de la proposition I.4. La partie (ii) découle également du lemme I.5 grâce à l'inégalité

$$\text{(I.8)} \quad (1-|\zeta|^2)^{1/2}|\zeta_i z_j-\zeta_j z_i| \leqslant [\tilde{D}(\zeta,z)]^{1/2}\ \{|z_i|^{1-\alpha_i} + |z_j|^{1-\alpha_j}\}.$$

Avant de finir la démonstration des théorèmes en montrant, grâce à une régularisation, que u_k est effectivement solution, donnons une dernière estimation relative aux noyaux :

PROPOSITION I.5. — *Si f est à coefficients bornés dans $\mathscr{D}$, u_k* appartient à l'espace de Lipschitz $\Lambda^\beta(\bar{\mathscr{D}})$, *avec* $\beta = \inf_j \alpha_j/2$; *en particulier u_k est continu dans $\bar{\mathscr{D}}$.*

Ici il n'y a pas de restriction sur k, qui peut être nul. Le fait qu'il existe pour les domaines $\mathscr{D}$ des solutions lipschitziennes avait déjà été montré par M. Range [10]. On ne peut avoir mieux que $\beta = \inf_j \alpha_j/2$ comme il le montre par un exemple.

Si $\Gamma(\zeta,z)$ désigne l'un quelconque des noyaux $C_k^{1,i}(\zeta,z)$ ou $C_k^{2,i,j}(\zeta,z)$, il s'agit de montrer que

$$\text{(I.9)} \qquad \int_{\mathscr{D}} |\Gamma(\zeta,z) - \Gamma(\zeta,z')|\, dV(\zeta) \leqslant C|z-z'|^{\beta}.$$

La démonstration de (I.9) est extrêmement technique, et nous allons seulement l'esquisser. Remarquons tout d'abord que $\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z)$ définit, grâce à (I.6), une pseudo-distance dans $\bar{\mathrm{B}}$ telle que :

$$C_1|z-\zeta|^4 \leqslant \tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z) \leqslant C_2|z-\zeta|^2.$$

Pour montrer (I.9), il suffit de montrer :

$$\text{(I.10)} \qquad \int_{\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z)\leqslant\delta} |\Gamma(\zeta,z)|\, dV(\zeta) \leqslant C\delta^{\beta/2}$$

et

$$\text{(I.11)} \qquad \int_{\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z)\geqslant C|z-z'|^2} |\Gamma(\zeta,z) - \Gamma(\zeta,z')|\, dV(\zeta) \leqslant C|z-z'|^{\beta},$$

où C est choisi de sorte que $\tilde{\mathrm{D}}(\tilde{\zeta},\tilde{z}) \simeq \tilde{\mathrm{D}}(\tilde{\zeta},\tilde{z}')$ sous la condition $\tilde{\mathrm{D}}(\tilde{\zeta},\tilde{z}) \geqslant C\tilde{\mathrm{D}}(\tilde{z},\tilde{z}')$.

L'inégalité (I.10) découle d'un raffinement du lemme (I.5) :

$$\int_{\substack{\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z)\leqslant\delta \\ \zeta\in\mathrm{B}}} |1-\zeta\bar{z}|^{n-1-\gamma}\, [\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z)]^{-n+\frac{1}{2}} \prod_j \left(\frac{|z_j|^{\delta_j}}{|\zeta_j|^{\delta_j}}\right) \frac{dV(\zeta)}{|\zeta_i|^{\varepsilon}}$$
$$\leqslant C(1-|z|^2)^{-\gamma+1-\varepsilon/2} \inf\left(\left(\frac{\sqrt{\delta}}{1-|z|^2}\right)^{1-\varepsilon},1\right).$$

Il reste à majorer la différence $\Gamma(\zeta,z) - \Gamma(\zeta,z')$ en vue de (I.11). Le lecteur pourra se persuader que le terme le plus mauvais est obtenu lorsque la différence porte sur $\tilde{\mathrm{D}}(\tilde{\zeta},\tilde{z})$. On utilise alors la majoration :

$$\int_{\substack{\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z)\geqslant\delta \\ \zeta\in\mathrm{B}}} |1-\zeta\bar{z}|^{n-1-\gamma}\, [\tilde{\mathrm{D}}(\zeta,z]^{-n-1/2} \prod_j \left(\frac{|z_j|^{\delta_j}}{|\zeta_j|^{\delta_j}}\right) \frac{dV(\zeta)}{|\zeta_i|^{\varepsilon}}$$
$$\leqslant C(1-|z|^2)^{-\gamma-1-\varepsilon/2} \sup\left(\left(\frac{1-|z|^2}{\sqrt{\delta}}\right)^{1+\varepsilon},1\right).$$

Fin de la démonstration des théorèmes I.1 *et* I.2. — Pour finir la démonstration du théorème I.1 (resp. du théorème I.2), il nous suffit de démontrer que u_k est effectivement solution de l'équation $\bar\partial_b u = f$ (resp. $\bar\partial u = f$).

Supposons tout d'abord $f \in \mathscr{C}^\infty(\bar{\mathscr{D}})$. On sait qu'il existe alors une solution $u \in \mathscr{C}^\infty(\bar{\mathscr{D}})$ à l'équation $\bar\partial u = f$. En vertu de la proposition I.2, $u_k(z) = u(z) - \int_{\mathscr{D}} P_k(\zeta,z)u(\zeta)\, dV(\zeta)$, donc $\bar\partial u_k = f$; comme u_k est continu dans $\mathscr{D}$ en vertu de la proposition I.5, la formule de Stokes donne $\bar\partial_b u_k = f$ au sens de H. Skoda [12].

Revenons au cas où f satisfait seulement aux hypothèses du théorème I.1 (resp. du théorème I.2). Il suffit de régulariser f pour l'approcher par une suite $f^{(\ell)}$ de formes $\mathscr{C}^\infty$ qui satisfassent uniformément aux hypothèses; on montrera alors comme dans [12], page 272, que les $u_k^{(\ell)}$, qui appartiennent uniformément à $L^1(\partial\mathscr{D})$ (resp. $L^1(\mathscr{D}; \{-\rho(\zeta)\}^{\beta-1}\, dV(\zeta))$), convergent vers u_k, si bien qu'à la limite $\bar\partial_b u_k = f$ (resp. $\bar\partial u_k = f$).

Il nous reste à décrire le procédé de régularisation utilisé, qui est, à peu de choses près, celui de [12]. Nous choisirons $f^{(\ell)} = f^{(\varepsilon_\ell)}$, avec $\varepsilon_\ell \to 0$, et $f^{(\varepsilon)}$ défini comme suit :

soit χ une fonction positive dans $\mathbf{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, d'intégrale 1 et à support dans la boule $\left\{|z| < \frac{1}{2}\right\}$. Posons $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2n}\chi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$. Nous prendrons :

$$f^{(\varepsilon)}(z) = (f * \chi_\varepsilon)((1-C\varepsilon)z),$$

où C sera fixé ultérieurement. Il est clair que $f^{(\varepsilon)}$ est $\bar\partial$-fermée.

Le fait que $f^{(\varepsilon)}$ satisfasse uniformément aux conditions imposées à f est une conséquence du lemme suivant, variante du lemme 8.1 de [12] :

LEMME I.6. — *Soient* $\beta > -1$ *et* $\eta \in [0,\beta+1[$ *deux réels donnés,* μ *une mesure positive dans* $\mathscr{D}$. *Il existe une constante* K *indépendante de* ε *et* μ *telle que, si*

$$\mu_\varepsilon(z) = (\mu * \chi_\varepsilon)((1-C\varepsilon)z),$$

alors :

$$\int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\beta \mu_\varepsilon(z)}{[|z_i|^{2p_i} - \rho(z)]^\eta}\, dV(z) \leqslant K \int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\beta\, d\mu(z)}{[|z_i|^{2p_i} - \rho(z)]^\eta}.$$

Nous nous contenterons de montrer le lemme I.6, la fin de la démonstration étant comme dans [12]. Posons $\rho^{\varepsilon}(z) = \rho((1-C\varepsilon)^{-1}z)$, où C est tel que, quel que soit z, $\rho^{\varepsilon}(z) \geqslant \rho(z) + \varepsilon \sup_{\mathscr{D}}|\nabla\rho|$ (si du moins $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\rho(z) > -\frac{1}{2}\Big)$. Il s'agit de majorer

$$\int_{\{\rho^{\varepsilon}<0\}} \frac{(-\rho^{\varepsilon}(z))^{\beta}}{[|z_i|^{2p_i}-\rho^{\varepsilon}(z)]^{\eta}} \mu * \chi_{\varepsilon}(z)\, dV(z).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\text{(I.12)}\quad I_{\varepsilon}(\zeta) = \varepsilon^{-2n} \int_{\{\rho^{\varepsilon}(z)<0;|\zeta-z|<\varepsilon/2\}} \{-\rho^{\varepsilon}(z)\}^{\beta}[|z_i|^{2p_i}-\rho^{\varepsilon}(z)]^{-\eta}\, dV(z) \leqslant K \frac{(-\rho(\zeta))^{\beta}}{[|\zeta_i|^{2p_i}-\rho(\zeta)]^{\eta}}.$$

Montrons tout d'abord (I.12) lorsque $|\zeta_i|^{2p_i} < 2\rho(\zeta)$. Alors

$$I_{\varepsilon}(\zeta) \leqslant \varepsilon^{-2n} \int_{\left\{\rho^{\varepsilon}(z)<0;|\zeta-z|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}} (-\rho^{\varepsilon}(z))^{\beta-\eta}\, dV(z)$$
$$\leqslant K\{-\rho(\zeta)\}^{\beta-\eta} \leqslant K'\{-\rho(\zeta)\}^{\beta}[|\zeta_i|^{2p_i}-\rho(\zeta)]^{-\eta} :$$

la deuxième inégalité est conséquence, après un changement de variables tel que $-\rho^{\varepsilon}(z) = t$ soit la première coordonnée, de l'inégalité élémentaire (avec $\gamma > -1$)

$$\varepsilon^{-1} \int_{\left\{t>\varepsilon;|t-u|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}} t^{\gamma}\, dt \leqslant K v^{\gamma}$$

si u et v sont des nombres réels tels que $\varepsilon \leqslant v - u \leqslant A\varepsilon$. On prendra $u = -B\rho^{\varepsilon}(\zeta)$ et $v = -B\rho(\zeta)$, avec $B^{-1} = \sup_{\mathscr{D}}|\nabla\rho|$. Démontrons maintenant (I.12) lorsque $|\zeta_i|^{2p_i} \geqslant -2\rho(\zeta)$. On peut supposer l'ensemble $\{\rho^{\varepsilon}(z) < 0; |\zeta-z| < \varepsilon/2\}$ non vide, et donc $\rho(\zeta) < -K\varepsilon$. Par hypothèse $|\zeta_i| > K'\varepsilon$, et par suite $|z_i|$ et $|\zeta_i|$ sont de même ordre dans l'ensemble d'intégration.

$$I_{\varepsilon}(\zeta) \leqslant K\varepsilon^{-2n}|\zeta_i|^{-2p_i\eta} \int_{\{\rho^{\varepsilon}(\zeta)<0;|\zeta-z|<\varepsilon/2\}} [-\rho^{\varepsilon}(z)]^{\beta}\, dV(z)$$
$$\leqslant K'|\zeta_i|^{-2p_i\eta}(-\rho(\zeta))^{\beta} \leqslant K'' \frac{(-\rho(\zeta))^{\beta}}{[|\zeta_i|^{2p_i}-\rho(\zeta)]^{\eta}}.$$

Ceci termine la démonstration du lemme, et des théorèmes I.1 et I.2.

Remarques. — *a*) On peut également énoncer, pour les solutions u_k, des inégalités L^p pour $p > 1$ qui sont conséquences immédiates des estimations de noyaux. Si l'on voulait avoir des conditions suffisantes critiques pour que u_k soit dans $L^p(\partial\mathscr{D})$, il faudrait en fait développer une théorie des mesures de Carleson dans $\mathscr{D}$ liées à la pseudo-distance sur $\partial\mathscr{D}$.

b) Rappelons que les solutions données par M. Range ne satisfont pas aux inégalités L^1. Une autre approche que la nôtre consisterait à les modifier comme le fait H. Skoda dans le cas de la boule.

II. CARACTÉRISATION DES ZÉROS DES FONCTIONS DE CLASSE NEVANLINNA DES DOMAINES $\mathscr{D}$

1. Énoncés des résultats.

Dans cette seconde partie, nous allons utiliser les résultats de la première pour caractériser les ensembles de zéros des fonctions holomorphes de la classe de Nevanlinna des domaines $\mathscr{D}$. La méthode que nous utilisons est identique à celle employée par H. Skoda [12] et G. M. Henkin [6, 7] pour les domaines strictement pseudoconvexes. Elle est basée sur l'utilisation des courants positifs et la résolution de l'équation $i\partial\bar\partial u = \theta$, méthode qui a été utilisée pour la première fois par P. Lelong (voir [8] et [9]).

Rappelons tout d'abord quelques définitions.

On appelle classe de Nevanlinna de $\mathscr{D}$, la classe $N(\mathscr{D})$ formée par les fonctions f holomorphes dans $\mathscr{D}$ telles que

$$\sup_{r<1} \int_{\partial\mathscr{D}} \operatorname{Log}^+ |f(r^\alpha z)| \, d\sigma(z) < +\infty .$$

Si ν est un réel > -1, on appelle classe des fonctions d'ordre ν de $\mathscr{D}_\alpha$, la classe $N_\nu(\mathscr{D})$ formée par les fonctions f holomorphes dans $\mathscr{D}$ telles que

$$\int_{\mathscr{D}} \delta(z)^\nu \operatorname{Log}^+ |f(z)| \, dV(z) < +\infty ,$$

où $\delta(z)$ désigne la distance de z à $\partial\mathscr{D}$.

Rappelons enfin que si X est un sous-ensemble analytique de dimension pure $n-1$ de $\mathscr{D}$, alors X est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe f (multiplicité comprise), et le courant positif θ^X d'intégration sur X est défini par (cf. [8])

$$\theta^X = \frac{i}{\pi}\,\partial\bar{\partial}\ \mathrm{Log}\,|f|.$$

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME II.1. — *Un sous-ensemble analytique* X *de* $\mathscr{D}$ *est l'ensemble des zéros d'une fonction de* $N(\mathscr{D})$ *si et seulement si il vérifie la condition de Blaschke,*

$$\text{(II.1)} \qquad \int_{\mathscr{D}} \delta(z)\sigma_X(z) < +\infty$$

oú σ_X *désigne la mesure d'aire sur* X *c'est-à-dire la trace du courant* θ^X. *Plus précisément, sous la condition* (II.1), *il existe* $f \in N(\mathscr{D})$ *telle que* $\theta^X = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,|f|$.

THÉORÈME II.2. — *Un sous-ensemble analytique* X *de* $\mathscr{D}$ *est l'ensemble des zéros d'une fonction de la classe* $N_\nu(\mathscr{D})$ *si et seulement si il vérifie la condition suivante :*

$$\text{(II.2)} \qquad \int_{\mathscr{D}} \delta(z)^{\nu+2}\sigma_X(z) < +\infty\,.$$

Plus précisément, sous la condition (II.2), *il existe* $f \in N_\nu(\mathscr{D})$ *telle que* $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,|f| = \theta^X$.

En utilisant l'application $\Phi : (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \to \Phi(\zeta) = (\zeta_1^{p_1},\ldots,\zeta_n^{p_n})$ de $\mathscr{D}$ dans la boule unité **B** de $\mathbf{C}^n$ on déduit aisément des théorèmes ci-dessus des résultats analogues pour des classes à poids dans **B** :

COROLLAIRE II.1. — *Soit* X *un sous-ensemble analytique de* **B**, *et soit* θ^X *le courant d'intégration sur* X. *Pour qu'il existe une fonction holomorphe* f *dans* **B**, *telle que* $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,|f| = \theta^X$ *et*

$$\sup_{r<1} \int_{\partial \mathbf{B}} \mathrm{Log}^+\,|f(rz)|\,\frac{d\tilde{\sigma}(z)}{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2-2/p_i}} < +\infty\,,$$

il faut et il suffit que θ^X *vérifie la condition suivante :*

$$\sum_i \int_B \frac{1-|z|^2}{\prod_{j\neq i} |z_j|^{2-2p_j}} \theta^X_{ii}(z) < +\infty .$$

COROLLAIRE II.2. — *Les notations étant comme ci-dessus, soit* ν *un réel* > -1. *Pour qu'il existe une fonction holomorphe* f *dans* B, *telle que* $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,|f| = \theta^X$ *et*

$$\int_B \frac{(1-|z|^2)^\nu}{\prod_{i=1}^{n} |z_i|^{2-2/p_i}} \mathrm{Log}^+\,|f(z)|\,dV(z) < +\infty ,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\sum_i \int_B \frac{(1-|z|^2)^{\nu+2}}{\prod_{j\neq i} |z_j|^{2-2p_j}} \theta^X_{ii}(z) < +\infty .$$

Montrons brièvement le corollaire II.1 dans $\mathbf{C}^2$ lorsque $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$. Soient X un sous-ensemble analytique de B et f holomorphe dans B telle que $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\log|f| = \theta^X$. Soit g la fonction holomorphe définie dans $\mathscr{D} = \{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2 ;\ |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$ par

$$g(\zeta_1,\zeta_2) = f(\zeta_1,\zeta_2^2).$$

Soit Y l'ensemble des zéros de g et $\theta^Y = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\,\mathrm{Log}\,|g|$. Par changement de variable, on vérifie aussitôt que la condition

$$\sup_{r<1} \int_{\partial B} \mathrm{Log}^+\,|f(rz)|\frac{d\sigma(z)}{|z_2|} < +\infty ,$$

est équivalente à $g\in N(\mathscr{D})$. D'autre part, on a

« $\theta^Y_{11}(\zeta_1,\zeta_2^2) = \theta^X_{11}(\zeta_1,\zeta_2)$ » et « $\theta^Y_{22}(\zeta_1,\zeta_2) = 4|\zeta_2|^2\theta^X_{22}(\zeta_1,\zeta_2^2)$ »,

et par conséquent, pour la même raison, θ^X vérifie la condition du corollaire II.1 si et seulement si θ^{Y} vérifie la condition de Blaschke dans $\mathcal{D}$.

La nécessité dans le corollaire II.1 résulte donc aussitôt de celle du théorème II.1. La suffisance se voit aisément de la manière suivante : l'hypothèse sur X entraînant que θ^{Y} vérifie la condition de Blaschke, d'après le théorème II.1, il existe $k \in N(\mathcal{D})$ telle que $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\operatorname{Log}|k| = \theta^{Y}$. Posons $\ell(\zeta_1,\zeta_2) = k(\zeta_1,\zeta_2)k(\zeta_1,-\zeta_2)$. Comme ℓ ne dépend que de ζ_2^2, il existe p holomorphe dans B telle que $\ell(\zeta_1,\zeta_2) = p(\zeta_1,\zeta_2^2)$. Remarquons maintenant que $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\operatorname{Log}|\ell| = 2\theta^{Y}$ et par suite $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\operatorname{Log}|p| = 2\theta^{X}$. Il existe donc h holomorphe dans B telle que $h^2 = p$. En particulier $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\operatorname{Log}|h| = \theta^{X}$, et, comme nous l'avons vu plus haut, le fait que h et par suite ℓ soit dans $N(\mathcal{D})$ entraîne que p et par suite h est dans la bonne classe.

Les conditions nécessaires des théorèmes II.1 et II.2 peuvent se montrer en utilisant la formule de Green ou plus simplement la formule de Stokes (avec des régularisations et des passages à la limite convenable que nous omettons ici) de la manière suivante :

Soit u une fonction de classe C^2 dans $\bar{\mathcal{D}}$. La formule de Stokes appliquée respectivement aux formes différentielles

$$-\rho(z)\,\bar{\partial}u(z) \wedge \omega(z),\ \text{et},\ (-\rho(z))^{\nu+2}\,\bar{\partial}u(z) \wedge \omega(z),\quad \nu > -1,$$

avec

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^{n} \bigwedge_{k\neq i} (dz_k \wedge d\bar{z}_k),$$

donne :

$$\int_{\mathcal{D}} -\rho(z)\,\partial\bar{\partial}u(z) \wedge \omega(z) = \int_{\mathcal{D}} \partial\rho(z) \wedge \bar{\partial}u(z) \wedge \omega(z),$$

et

$$\int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\nu+2}\,\partial\bar{\partial}u(z) \wedge \omega(z)$$
$$= (\nu+2)\int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\nu+1}\,\partial\rho(z) \wedge \bar{\partial}u(z) \wedge \omega(z).$$

En appliquant à nouveau la formule de Stokes aux formes

$$u(z)\,\partial\rho(z) \wedge \omega(z) \qquad \text{et} \qquad u(z)(-\rho(z))^{\nu+1}\,\partial\rho(z) \wedge \omega(z),$$

on transforme les seconds membres de ces deux égalités pour obtenir les formules suivantes :

$$\text{(II.3)} \quad \int_{\mathscr{D}} -\rho(z)\,\partial\bar\partial u(z) \wedge \omega(z) = \int_{\partial\mathscr{D}} u(z)\,\partial\rho(z) \wedge \omega(z) - \int_{\mathscr{D}} u(z)\,\bar\partial\partial\rho(z) \wedge \omega(z),$$

$$\text{(II.4)} \quad \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\nu+2}\,\partial\bar\partial u(z) \wedge \omega(z) = (\nu+1)(\nu+2)\int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\nu} u(z)\,\bar\partial\rho(z) \wedge \partial\rho(z) \wedge \omega(z) + (\nu+2)\int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\nu+1} u(z)\,\bar\partial\partial\rho(z) \wedge \omega(z).$$

Si $f \in \mathrm{N}(\mathscr{D})$, en utilisant (II.3) pour une régularisée de $\operatorname{Log}|f|$, on constate que le second membre de (II.3) est majoré par une constante fixe, et un passage à la limite donne aussitôt la condition nécessaire du théorème II.1. La condition nécessaire du théorème II.2 s'obtient de la même manière en utilisant l'égalité (II.4).

La suite de cet article est consacrée à la démonstration des conditions suffisantes des théorèmes II.1 et II.2, c'est-à-dire à la résolution de l'équation $i\partial\bar\partial u = \theta$, où θ est un courant positif fermé satisfaisant à la condition de Blaschke. Nous montrons au § 2 qu'en fait θ satisfait à des conditions d'intégralité plus fortes avant de résoudre l'équation au § 3.

2. Estimations des coefficients d'un courant positif fermé dans $\mathscr{D}$.

Rappelons qu'un courant positif de bidegré (1,1) s'écrit canoniquement :

$$\theta = i \sum_{i,j} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar z_j$$

où les θ_j sont des mesures telles que, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}^n$,

$$\sum_{i,j} \theta_{ij}\lambda_i\bar{\lambda}_j \geqslant 0.$$

Il en résulte que les mesures θ_{ii} sont positives, et que la trace du courant, $2\sum_i \theta_{ii}$, majore les coefficients de θ.

Proposition II.1. — *Soit* $\theta = i\sum_{i,j} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ *un courant positif fermé de bidegré* $(1,1)$ *dans* $\mathcal{D}$. *Soit* μ *un nombre réel* $\geqslant 1$. *Supposons que l'on ait*

$$A(\theta,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\mu}\theta_{ii}(z) < +\infty .$$

Pour tous $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, *posons* $\omega_{ij}(z) = \bigwedge_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} (dz_k \wedge d\bar{z}_k)$. *On a alors les majorations suivantes :*

(i) $$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left| \int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\mu-1}\theta(z) \wedge \partial\rho(z) \wedge \bar{\partial}\rho(z) \wedge \omega_{ij}(z) \right| \leqslant CA(\theta,\mu)$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}} \frac{(-\rho(z))^{\mu}\theta_{ii}(z)}{(|z_i|^{2p_i} - \rho(z))^{1-\alpha_i}} \leqslant CA(\theta,\mu)$$

(iii) $$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left[\int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\mu-1} \left[\frac{1}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_i}} + \frac{1}{(|z_j|^{2p_j}-\rho(z))^{1-\alpha_j}} \right] \right.$$
$$\left. \theta(z) \wedge \partial\rho(z) \wedge \bar{\partial}\rho(z) \wedge \omega_{ij}(z) \right] \leqslant CA(\theta,\mu).$$

(iv) *Si on pose* $\theta \wedge \bar{\partial}\rho = \sum_{i,j<k} g_{ijk}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge dz_k$, *pour tous* $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, $j < k$, *on a*

$$\sum_{i,j<k=1} \int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\mu-1/2} \left[\frac{1}{(|z_j|^{2p_j}-\rho(z))} + \frac{1}{(|z_k|^{2p_k}-\rho(z))} \right] |g_{ijk}(z)| \leqslant CA(\theta,\mu).$$

Dans toutes ces majorations, C désigne une constante qui ne dépend que de $\mathcal{D}$. On reconnaît dans (i) la condition de Malliavin.

En utilisant le lemme de régularisation (lemme I.6) on voit aussitôt qu'il suffit de démontrer la proposition lorsque les coefficients de θ sont fonctions de classe C^∞ dans $\bar{\mathscr{D}}$.

Pour voir (i), on applique simplement la formule de Stokes à la forme $(-\rho(z))^\mu\theta(z) \wedge \bar\partial\rho(z) \wedge \omega_{ij}(z)$:

$$\mu \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu-1}\theta(z) \wedge \partial\rho(z) \wedge \bar\partial\rho(z) \wedge \omega_{ij}(z) = \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^\mu\theta(z) \wedge \partial\bar\partial\rho(z) \wedge \omega_{ij}(z).$$

La majoration en découle aussitôt.

Pour montrer (ii), remarquons tout d'abord, en développant $\partial\rho \wedge \bar\partial\rho$ que

$$p_j^2 \int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\mu |z_j|^{4p_j-2}\theta_{ii}(z)}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_i}}\, dV(z) = \int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\mu\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_i}}$$

$$- p_i^2 \int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\mu |z_i|^{4p_i-2}\theta_{jj}(z)}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_i}}\, dV(z)$$

$$- p_ip_j \int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\mu |z_i|^{2p_i-2}\bar z_i |z_j|^{2p_j-2} z_j\theta_{ji}(z)}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z)|^{1-\alpha_i}}\, dV(z)$$

$$- p_ip_j \int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\mu |z_i|^{2p_i-2} z_i |z_j|^{2p_j-2}\bar z_j\theta_{ij}(z)}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_i}}\, dV(z).$$

Puisque $-\rho(z) \leqslant (|z_i|^{2p_i} - \rho(z))^{1-\alpha_i}$, il résulte de (i) que le premier terme du second membre est majoré par $CA(\theta,\mu)$, les trois autres termes étant majorés directement. Par suite :

$$\int_{\mathscr{D}} \frac{(-\rho(z))^\mu\left(\sum\limits_{j\neq i} |z_j|^{4p_j-2}\right)\theta_{ii}(z)}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_i}}\, dV(z) \leqslant CA(\theta,\mu).$$

Si $|z_i|^{2p_i} < 1/2$ et $\rho(z) > -1/4$, $\sum\limits_{j\neq i} |z_j|^{4p_j-2}$ est minoré, si bien que pour montrer (ii) il suffit de majorer l'intégrale de $(\rho(z))^\mu(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{-1+\alpha_i}\theta_{ii}$ lorsque $|z_i|^{2p_i} > 1/2$ ou $\rho(z) < -\frac{1}{4}\cdot$ Mais alors $|z_i|^{2p_i} - \rho(z) \geqslant 1/4$, et la majoration cherchée résulte directement de l'hypothèse.

Démontrons maintenant (iii). Appliquons la formule de Stokes à la forme différentielle

$$\frac{(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}\,\rho(z))^{1-\alpha_\ell}},$$

où $\ell = i$ ou j, dans le domaine $\mathscr{D}^\varepsilon = \{\rho(z) < -\varepsilon\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathscr{D}^\varepsilon}\frac{(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1\div\alpha_\ell}}\\
&\quad= -\mu\int_{\mathscr{D}^\varepsilon}\frac{(-\rho(z))^{\mu-1}\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1\div\alpha_\ell}}\\
&\qquad-(1-\alpha_\ell)\left[\int_{\mathscr{D}^\varepsilon}\frac{(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge|z_\ell|^{2p_\ell-2}\bar z_\ell\,dz_\ell\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{2-\alpha_\ell}}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\int_{\mathscr{D}^\varepsilon}\frac{(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{2-\alpha_\ell}}\right]\\
&\quad+\int_{\mathscr{D}^\varepsilon}\frac{(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge\partial\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1\div\alpha_\ell}}.
\end{aligned}$$

Une estimation élémentaire montre que lorsque ε tend vers zéro le premier membre de cette égalité tend vers zéro. Des majorations immédiates donnent donc :

$$\text{(II.3)}\left\{\begin{aligned}
&(\mu+\alpha_\ell-1)\left|\int_{\mathscr{D}}\frac{(-\rho(z))^{\mu-1}\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell}}\right|\\
&\leqslant(1-\alpha_\ell)\int_{\mathscr{D}}(-\rho(z))^{\mu}\left|\frac{\theta(z)\wedge dz_\ell\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell}}\right|dV(z)\\
&+\left|\int_{\mathscr{D}}\frac{(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge\partial\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell/2}}\right|.
\end{aligned}\right.$$

Remarquons maintenant que la positivité du courant θ entraîne que pour toute constante $C > 0$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\theta(z)\wedge dz_\ell\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell/2}}\right| &\leqslant C\left|\frac{\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{2-\alpha_\ell}}\right|\\
&\quad+\frac{1}{C}\,|\theta(z)\wedge dz_\ell\wedge d\bar z_\ell\wedge\omega_{ij}(z)|.
\end{aligned}$$

En prenant $C = \dfrac{\mu + \alpha_\ell - 1}{2(1-\alpha_\ell)}$, la majoration (II.3) donne :

$$
\text{(II.4)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\mu+\alpha_\ell-1}{2}\left|\displaystyle\int_{\mathscr D}\dfrac{(-\rho(z))^{\mu-1}\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho_\alpha(z))^{1-\alpha_\ell}}\right| \\[2ex]
\leqslant \dfrac{2(1-\alpha_\ell)^2}{\mu+\alpha_\ell-1}\left|\displaystyle\int_{\mathscr D}(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge dz_\ell\wedge d\bar z_\ell\wedge\omega_{ij}(z)\right| \\[2ex]
+\left|\displaystyle\int_{\mathscr D}\dfrac{(-\rho(z))^{\mu}\theta(z)\wedge\partial\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell}}\right|.
\end{cases}
$$

Remarquons maintenant que

$$|\theta(z)\wedge\partial\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)| \leqslant C(\theta_{ii}(z)|z_j|^{2p_j-2}+\theta_{jj}(z)|z_i|^{2p_i-2})\,dV(z)$$

et, puisque $\ell = i$ ou j, (II.4) donne :

$$
\left|\int_{\mathscr D}\frac{(-\rho(z))^{\mu-1}\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell}}\right|
$$
$$
\leqslant \left\{A(\theta,\mu)+\int_{\mathscr D}(-\rho(z))^{\mu}\left[\frac{\theta_{ii}(z)}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_i}}+\frac{\theta_{jj}(z)}{(|z_j|^{2p_i}-\rho(z))^{1-\alpha_j}}\right]dV(z)\right\},
$$

et (iii) résulte donc de (ii).

Enfin le (iv) de la proposition résulte immédiatement de (iii), car si on remarque que

$$g_{ijk}(z)\bigwedge_{h=1}^{n}(dz_h\wedge d\bar z_h)' = \theta(z)\wedge\omega_{ijk}\wedge(dz_j\wedge dz_k)\wedge(d\bar z_i\wedge\bar\partial\rho(z)),$$

où

$\omega_{ijk} = \bigwedge_{h\neq i,j,k}(dz_h\wedge d\bar z_h)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne avec $\ell = j$ ou k :

$$
\frac{(-\rho(z))^{1/2}|g_{ijk}(z)|}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{\frac{1-\alpha_\ell}{2}}} \leqslant -\rho(z)|\theta(z)\wedge dz_j\wedge dz_k\wedge d\bar z_j\wedge d\bar z_k\wedge\omega_{ijk}(z)|
$$
$$
+\left|\frac{\theta(z)\wedge dz_i\wedge\partial\rho(z)\wedge d\bar z_i\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ijk}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell}}\right|
$$
$$
= -\rho(z)\theta_{ii}(z)+\left|\frac{\theta(z)\wedge\partial\rho(z)\wedge\bar\partial\rho(z)\wedge\omega_{ij}(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell}-\rho(z))^{1-\alpha_\ell}}\right|,
$$

d'où le résultat en multipliant tout par $(-\rho(z))^{\mu-1}$.

3. Résolution de l'équation $i\partial\bar{\partial}u = \theta$ avec estimations.

Dans ce paragraphe nous démontrons les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME II.3. — *Soit* $\theta = i\sum_{i,j} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ *un courant positif fermé de bidegré* $(1, 1)$ *dans* $\mathscr{D}$. *Supposons que*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))\theta_{ii}(z) < +\infty .$$

Alors il existe une fonction plurisousharmonique U *dans* $\mathscr{D}$, *solution de l'équation* $i\partial\bar{\partial}\mathrm{U} = \theta$ *telle que*

$$\sup_{0<r<1} \int_{\partial\mathscr{D}} |\mathrm{U}(r^{\alpha}z)|\, d\sigma(z) < \infty .$$

THÉORÈME II.4. — *Soit* $\theta = i\sum_{i,j} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ *un courant positif fermé de bidegré* $(1,1)$ *dans* $\mathscr{D}$. *Soit* ν *un nombre réel* > -1. *Supposons que*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\nu+2}\theta_{ii}(z) < +\infty .$$

Alors il existe une fonction plurisousharmonique U *dans* $\mathscr{D}_\alpha$, *solution de l'équation* $i\partial\bar{\partial}\mathrm{U} = \theta$ *telle que*

$$\int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\nu}|\mathrm{U}(z)|\, d\mathrm{V}(z) < +\infty .$$

Nous allons démontrer simultanément ces deux théorèmes. Nous supposons donc que θ est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ tel que, μ étant un réel $\geqslant 1$,

$$\mathrm{A}(\theta,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu}\theta_{ii}(z) < +\infty .$$

Montrons tout d'abord qu'on peut supposer θ nul dans un voisinage de

0. Plus précisément, montrons qu'on peut écrire :

$$\theta = \theta' + i\partial\bar\partial \mathrm{U}_1,$$

avec θ' nul au voisinage de 0 et U_1 nul en dehors d'un voisinage de 0 : pour ce faire, on sait que l'équation $dw = \theta$ possède une solution à coefficients mesures bornées (voir [11] par exemple) dans une boule $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}(0,\varepsilon_0)$ relativement compacte dans $\mathscr{D}_\alpha$. Si $w = w_{0,1} - \bar{w}_{0,1}$, l'équation $\bar\partial u = w_{0,1}$ possède à son tour une solution mesure bornée dans B_0, et $2\,\mathrm{Re}\,u$, solution de l'équation $i\partial\bar\partial \mathrm{U} = \theta$ dans B_0, est une fonction plurisousharmonique telle que $\partial \mathrm{U}$ et $\bar\partial \mathrm{U}$ soient à coefficients mesures bornées dans B_0. Si φ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans B_0 et valant 1 dans $\mathrm{B}(0,\varepsilon_0/2)$, on vérifie aisément que $\mathrm{U}_1 = 2\varphi\,\mathrm{Re}\,u$ convient et que de plus $\partial\bar\partial \mathrm{U}_1$ est à coefficients mesures bornées dans B_0.

Le courant θ' est fermé et réel ($\bar\theta' = \theta'$) mais n'est plus forcément positif. Toutefois, utilisant la proposition II.1 pour θ et le fait que $\partial\bar\partial \mathrm{U}_1$ est à support dans B_0, si g'_{ijk} est défini par :

$$\theta' \wedge \bar\partial\rho = \sum_{i,j<k} g'_{ijk}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k,$$

on voit que :

$$\text{(II.5)} \qquad \sum_{i,j} \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu} |\theta'_{ij}(z)| \leqslant \mathrm{CA}(\theta,\mu)$$

$$\text{(II.6)} \quad \sum_{i,j<k} \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(|z_j|^{2p_j} - \rho(z))^{\frac{1-\alpha_j}{2}}} + \frac{1}{(|z_k|^{2p_k} - \rho(z))^{\frac{1-\alpha_k}{2}}} \right] |g'_{ijk}(z)| \leqslant \mathrm{CA}(\theta,\mu) < \infty .$$

Il nous reste donc à résoudre l'équation $i\partial\bar\partial \mathrm{U}' = \theta'$. Nous allons tout d'abord résoudre cette équation lorsque θ' est à coefficients de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\bar{\mathscr{D}}$ et nul dans la boule $\mathrm{B}(0,\varepsilon_1)$. Dans une dernière étape, nous approcherons, suivant le procédé de régularisation décrit dans la première partie, le courant θ' par $\theta'^{(\varepsilon)}$ en même temps que $\partial\bar\partial \mathrm{U}_1$ par $(\partial\bar\partial \mathrm{U}_1)^{(\varepsilon)}$ (c'est-à-dire $\mathrm{U}_1(z)$ par $(1-\mathrm{C}\varepsilon)^{-2}\mathrm{U}_1^{(\varepsilon)}(z)$). En vertu du lemme de régularisation I.6, $\theta'^{(\varepsilon)}$ satisfait uniformément aux conditions (II.5) et (II.6).

Montrons donc d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION II.2. — *Soit* $\theta = i \sum_{i,j} \theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ *un courant réel* (i.e. $\bar{\theta} = \theta$) *d-fermé à coefficients de classe* C^1 *dans* $\bar{\mathscr{D}}$. *Supposons que* θ *soit identiquement nul dans une boule* B_1 *centrée à l'origine et de rayon* $\varepsilon_1 > 0$. *Soit* μ *un réel* $\geqslant 1$. *Alors il existe une solution* U *à l'équation* $i\partial\bar{\partial} U = \theta$, *continue dans* $\bar{\mathscr{D}}$ *et telle que, si* $\theta \wedge \bar{\partial}\rho = \sum_{i,j<k} g_{ijk}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k$:

$$\text{(i)} \quad \int_{\partial\mathscr{D}} |U(z)|\, d\sigma(z) \leqslant C \left\{ \int_{\mathscr{D}} -\rho(z) \left[\sum_{i,j} |\theta_{ij}(z)| \right] dV(z) \right.$$
$$\left. + \sum_{i,j<k} \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{1/2} \left[\frac{1}{(|z_j|^{2p_j} - \rho(z))^{\frac{1-\alpha_j}{2}}} + \frac{1}{(|z_k|^{2p_k} - \rho(z))^{\frac{1-\alpha_k}{2}}} \right] |g_{ijk}(z)|\, dV(z) \right\},$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* $\mathscr{D}$ *et de* ε_1;

$$\text{(ii)} \quad \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu-2} |U(z)|\, dV(z) \leqslant C \left\{ \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu} \left[\sum_{i,j} |\theta_{ij}(z)| \right] dV(z) \right.$$
$$\left. + \sum_{i,j,k} \int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(|z_j|^{2p_j} - \rho(z)^{\frac{1-\alpha_j}{2}}} + \frac{1}{(|z_k|^{2p_k} - \rho(z))^{\frac{1-\alpha_k}{2}}} \right] |g_{ijk}(z)|\, dV(z) \right\},$$

oú C *est une constante qui ne dépend que de* $\mathscr{D}$, ε_1 *et* $\mu > 1$.

Pour démontrer cette proposition, on procède de manière classique en résolvant tout d'abord l'équation $idw = \theta$ par la méthode de Poincaré-Cartan. Comme θ est réel, w s'écrit $w = w_{0,1} - \overline{w_{0,1}}$, la forme $w_{0,1}$ de bidegré (0,1) étant $\bar{\partial}$-fermée. Nous résolvons ensuite l'équation $\bar{\partial} u = w_{0,1}$ en utilisant les noyaux C_k construits dans la première partie de ce travail, et il est immédiat de voir que $U = 2\,\mathrm{Re}\, u$ est solution de $i\partial\bar{\partial} U = \theta$.

Explicitons tout d'abord le lemme de Poincaré-Cartan (voir par exemple [1], p. 119-120) :

LEMME II.1. — *Soit* F_t, $0 < t \leqslant 1$, *une famille de difféomorphismes de* $\mathbf{C}^n$ *tels que* $F_t(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$ *et* $F_1 = \mathrm{id}$. *Soit* Z_t, $0 < t \leqslant 1$, *une famille de* *champ de vecteurs tels que* $\dfrac{d}{dt}\,F_t(z) = Z_t(F_t(z))$. *Alors, pour* $0 < t_0 < 1$,

$$\theta - F_{t_0}^*\theta = d\left\{\int_{t_0}^{1} F_t^*(i_{Z_t}\theta)\,dt\right\},$$

où $i_{Z_t}\theta$ *est défini par* $i_{Z_t}(dz_i \wedge d\bar z_j) = Z_t^i\,d\bar z_j - \bar Z_t^j\,dz_i$.

En particulier, si

$$F_{t_0}(\mathcal{D}) \subset B(0,\varepsilon_1), \tag{II.7}$$

sous les hypothèses de la proposition II.2, on a $F_{t_0}^*\theta = 0$, et par suite la forme

$$w = -\,i\int_{t_0}^{1} F_t^*(i_{Z_t}\theta)\,dt \tag{II.8}$$

est solution de l'équation $i\,dw = \theta$.

Pour tenir compte de l'homogénéité des domaines $\mathcal{D}$, nous choisissons F_t et Z_t comme suit :

$$\begin{aligned} &F_t(z) = (t^{\alpha_1}z_1, \dots, t^{\alpha_n}z_n),\\ &Z_t(z) = \left(\alpha_1\,\frac{z_1}{t}, \dots, \alpha_n\,\frac{z_n}{t}\right). \end{aligned} \tag{II.9}$$

La condition (II.7) est clairement remplie pour un $t_0 > 0$.

Comme nous l'avons dit plus haut, la partie $w_{0,1}$ de w étant $\bar\partial$-fermée on résoud l'équation $\bar\partial u = w_{0,1}$ avec un des noyaux C_k construit dans la première partie, en choisissant $\operatorname{Re} k > \mu - 1$. On voit aisément que les hypothèses faites sur θ entraînent que $w_{0,1}$ est continue dans $\bar{\mathcal{D}}$ et la proposition I.5 montre que u est aussi continue dans $\bar{\mathcal{D}}$. Pour achever la démonstration de la proposition II.2, il suffit, d'après les théorèmes I.1 et I.2, de montrer les deux estimations suivantes :

(II.10)

$$\sum_i \int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\mu-1}|w_{0,1}^i(z)|\,dV(z) \leqslant C\int_{\mathcal{D}} (-\rho(z))^{\mu}\left[\sum_{i,j}|\theta_{ij}(z)|\right]dV(z)$$

(II.11)

$$\sum_{i<j}\int_{\mathscr{D}}(-\rho(z))^{\mu-3/2}|g_{ij}(z)|\left[\frac{1}{(|z_i|^{2p_i}-\rho(z))^{\frac{1-\alpha_i}{2}}}+\frac{1}{(|z_j|^{2p_j}-\rho(z))^{\frac{1-\alpha_j}{2}}}\right]dV(z)$$

$$\leqslant C\sum_{i,j<k}\int_{\mathscr{D}}(-\rho(z))^{\mu-1/2}\left[\frac{1}{(|z_j|^{2p_j}-\rho(z))^{\frac{1-\alpha_j}{2}}}+\frac{1}{(|z_k|^{2p_k}-\rho(z))^{\frac{1-\alpha_k}{2}}}\right]|g_{ijk}(z)|\,dV(z),$$

où C est une constante qui ne dépend que de $\mathscr{D}$, ε_1 et $\mu \geqslant 1$, et où l'on a noté $w_{0,1} = \sum_i w^i_{0,1}\,d\bar z_i$, $w_{0,1}\wedge\bar\partial\rho = \sum_{i<j} g_{ij}\,d\bar z_i\wedge d\bar z_j$.

Les formules (II.8) et (II.9) donnent :

$$w^i_{0,1} = -i\sum_{k=1}^{n}\int_{t_0}^{1}\theta_{ki}(t^\alpha z)\alpha_k z_k t^{\alpha_k+\alpha_i-1}\,dt.$$

Par suite

$$\sum_i\int_{\mathscr{D}}(-\rho(z))^{\mu-1}|w^i_{0,1}(z)|dV(z)$$
$$\leqslant C\sum_{k,i}\int_{\mathscr{D}}(-\rho(z))^{\mu-1}\left\{\int_{t_0}^{1}|\theta_{k,i}(t^\alpha z)|dt\right\}dV(z),$$

et l'estimation (II.10) résulte du lemme suivant.

LEMME II.2. — *Soit s un nombre réel > -1. Soit h une fonction continue dans $\mathscr{D}$, et $k(z) = \int_{t_0}^{1} h(t^\alpha z)\,dt$. Alors il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\int_{\mathscr{D}}(-\rho(z))^s|k(z)|\,dV(z)\leqslant C\int_{\mathscr{D}}(-\rho(z))^{s+1}|h(z)|\,dV(z).$$

En effet, après changement de variables,

$$\int_{\mathscr{D}}(1-\Sigma|z_i|^{2p_i})^s|k(z)|\,dV(z)\leqslant\int_{t_0}^{1}dt\int_{\Sigma|z_i|^{2p_i}\leqslant t^2}|h(z)|\left(1-\frac{\Sigma|z_i|^{2p_i}}{t^2}\right)^s t^{\frac{dV(z)}{2\Sigma\alpha_i}}.$$

On utilise alors, avec $A = \Sigma|z_i|^{2p_i}$, l'inégalité :

$$\int_{\max(t_0,\sqrt{A})}(1-A/t^2)^s\,t^{\frac{dt}{2\Sigma\alpha_i}}\leqslant C\int_A^1(t-A)^s\,dt\leqslant C'(1-A)^{s+1}.$$

Montrons maintenant l'estimation (II.11). On a

$$g_{ij}(z) = -i \sum_k \alpha_k z_k \int_{t_0}^1 t^{\alpha_k - 1} \{\theta_{ki}(t^\alpha z)|z_j|^{2p_j-2} z_j t^{\alpha_i} - \theta_{kj}(t^\alpha z)|z_i|^{2p_i-2} z_i t^{\alpha_j}\}\, dt,$$

et, en posant $\ell = i$ ou j, il vient

$$\int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\mu-3/2} |g_{ij}(z)| \frac{dV(z)}{(|z_\ell|^{2p_\ell} - \rho(z))^{\frac{1-\alpha_\ell}{2}}}$$

$$\leqslant C \sum_k \int_{t_0}^1 dt \left\{ \int_{\mathscr{D}} |\theta_{ki}(t^\alpha z)|z_j|^{2p_j-2} z_j t^{\alpha_i} - \theta_{kj}(t^\alpha z)|z_i|^{2p_i-2} z_i t^{\alpha_j}| \frac{\left(1 - \sum_h |z_h|^{2p_h}\right)^{\mu-3/2}}{\left(1 - \sum_{h\neq\ell} |z_h|^{2p_h}\right)^{\frac{1-\alpha_\ell}{2}}} dV(z) \right\}$$

$$\leqslant C \sum_k \int_{t_0}^1 dt \left\{ \int_{\{\Sigma|\zeta_h|^{2p_h} < t^2\}} |g_{kij}(\zeta)| \frac{\left(1 - \frac{\Sigma|\zeta_h|^{2p_h}}{t^2}\right)^{\mu-3/2}}{\left(1 \frac{\sum_{h\neq\ell} |\zeta_h|^{2p_h}}{t^2}\right)^{\frac{1-\alpha_\ell}{2}}} t^{\alpha_i+\alpha_j-2}\, \frac{dV(\zeta)}{t^{\Sigma 2\alpha_h}} \right.$$

$$\leqslant C \sum_k \int_{\mathscr{D}} |g_{kij}(z)| \left\{ \int_{\max(t_0^2, \Sigma|\zeta_h|^{2p_h})}^1 \frac{\left(t - \sum_h |\zeta_h|^{2p_h}\right)^{\mu-3/2}}{\left(t - \sum_{h\neq\ell} |\zeta_h|^{2p_h}\right)^{\frac{1-\alpha_\ell}{2}}} dt \right\} dV(\zeta).$$

L'estimation cherchée résulte donc de la majoration suivante, avec $A = \Sigma|\zeta_h|^{2p_h}$, $B = \sum_{h\neq\ell} |\zeta_h|^{2p_h}$, $r = \mu - 3/2$ et $s = \dfrac{1-\alpha_\ell}{2}$:

$$\int_A^1 \frac{(t-A)^r}{(t-B)^s}\, dt \leqslant C \frac{(1-A)^{r+1}}{(1-B)^s}$$

quels que soient $0 \leqslant B \leqslant A < 1$ et $r > -1$, $s < 1 + r$. La constante C ne dépend que de r et s.

Ceci termine la démonstration de la proposition II.2. Revenons à la démonstration des théorèmes. Soit $U'^{(\varepsilon)}$ la solution à l'équation

$\partial\bar{\partial}U' = \theta'^{(\varepsilon)}$ donnée par la proposition II.2 et soit $U^{(\varepsilon)} = U'^{(\varepsilon)} + (1-C\varepsilon)^{-2}U_1^{(\varepsilon)}$. Il résulte de ce qui précède que, si $\mu = 1$,

$$\int_{\partial\mathscr{D}} |U^{(\varepsilon)}(z)|\, d\sigma(z) \leqslant CA(\theta,1)$$

tandis que si $\mu = \nu + 2 > 1$,

$$\int_{\mathscr{D}} (-\rho(z))^{\nu}|U^{(\varepsilon)}(z)|\, d\sigma(z) \leqslant CA(\theta,\mu),$$

la constante C étant évidemment indépendante de ε.

D'après un argument classique de familles normales de fonctions harmoniques, on en déduit comme dans [12] (page 286) qu'il existe une sous-suite $U^{(\varepsilon_n)}$ convergeant faiblement. Sa limite U est solution de l'équation $i\partial\bar{\partial}U = \theta$ et satisfait aux estimations souhaitées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundation of Mechanics*, The Benjamin Cummings Publ. Cny (1978).

[2] A. Bonami et N. Lohoue, Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes, A paraître dans *Compositio Mathematica.*

[3] Ph. Charpentier, Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n, *Ann. Inst. Fourier*, 30 (1980), 121-154.

[4] P. Greiner, Inverting $\square_b$ on some weakly pseudo convex domains, *Proc. Symp. Pure Math.*, 35 (1979), 73-76.

[5] R. Harvey and J. Polking, Fundamental solutions in complex analysis, *Duke Math. J.*, 46 (1979).

[6] G. M. H. Henkin, Lewy's equation and analysis on pseudoconvex manifolds. I, *Russian Math. Surveys*, 32 (1977).

[7] G. M. H. Henkin, Lewy's equation and analysis on a pseudoconvex manifolds, II. *Math. USSR Sb.*, 31 (1977), 63-94.

[8] P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (*n variables*), Montréal, les Presses de l'Univ. de Montréal, 1968.

[9] P. Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Paris, Dunod, 1968.

[10] M. Range, On Hölder estimates for $\bar{\partial}u = f$ on weakly pseudoconvex domains, *Several complex variables*, Cortona 1976-1977, Scuola Norm. Sup., Pisa (1978), 247-268.

[11] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris, Hermann.
[12] H. Skoda, Valeurs au bord pour les solutions de l'équation $\bar{\partial}$ et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna, *Bull. Soc. Math. France*, 104 (1976), 225-299.

Manuscrit reçu le 14 décembre 1981.

A. Bonami,
Mathématiques,
Campus La Source 45100 Orléans
et
Université de Paris-Sud
Équipe de recherche
associée au CNRS (296)
Analyse harmonique
Mathématique (bât. 425)
91405 Orsay Cedex.

Ph. Charpentier,
Université de Paris-Sud
Équipe de recherche
associée au CNRS (296)
Analyse harmonique
Mathématique (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex.