E. FORTUNA
M. GALBIATI

Le théorème de complexification semi-propre

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 1 (1983), p. 53-65
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_1_53_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 1 (1983), 53-65

LE THÉORÈME DE COMPLEXIFICATION SEMI-PROPRE

par E. FORTUNA(*) et M. GALBIATI(*)

L'image $f(X)$ d'une application analytique réelle propre $f : X \longrightarrow Y$ d'espaces analytiques réels est un sous-ensemble sous-analytique de Y. On connaît des conditions pour que $f(X)$ soit en fait semi-analytique dans Y, en particulier on sait que ce résultat est vrai dans le cas des applications analytiques réelles propres qui admettent une complexification propre [2, 3]. Dans cet article on s'est proposé de généraliser cette condition au cas des applications analytiques réelles semi-propres ; en effet on remarque que l'image d'une application analytique réelle semi-propre $f : X \longrightarrow Y$ est encore un sous-analytique de Y ; d'ailleurs on peut voir que la seule condition pour que f admette une complexification semi-propre n'est pas suffisante pour obtenir la semi-analyticité de $f(X)$ (1.8) ; cette condition n'est pas assez liée à la structure réelle de l'application f. On impose donc des conditions supplémentaires à f, que l'on précisera dans 1.11, et l'on obient le théorème suivant :

THEOREME (CSP). – *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application semi-propre d'espaces analytiques réels. Si f est $\mathbf{C}$-strictement semi-propre, alors $f(X)$ est un sous-ensemble semi-analytique de Y.*

Ce théorème implique évidemment le théorème de complexification propre déjà rappelé, mais il faut remarquer que la démonstration ne peut pas procéder de façon analogue : la différence essentielle est due au fait que la restriction d'une application semi-propre à un sous-espace fermé n'est pas en général semi-propre.

Les auteurs tiennent à remercier le Professeur Łojasiewicz pour ses précieux conseils et son encouragement constant.

(*) Les auteurs sont associés au groupe G.N.S.A.G.A. du C.N.R.

1. Applications semi-propres.

Les applications semi-propres ont été introduites et étudiées par Kuhlmann dans [6, 7, 8]. Les résultats principaux de la théorie dans le cas analytique complexe se trouvent réunis dans le livre de Andreotti et Stoll [1], et c'est à ce livre que l'on renvoie toujours ici pour cet argument.

Rappelons tout d'abord la définition et les résultats fondamentaux.

DEFINITION 1.1. – *Soit* $f: A \longrightarrow B$ *une application continue d'espaces topologiques localement compacts et de Hausdorff; f est semi-propre si pour tout compact* $L \subset B$ *il existe un compact* $K \subset A$ *tel que* $f(K) = L \cap f(A)$.

PROPOSITION 1.2. – *Avec les notations de 1.1, si* $f: A \longrightarrow B$ *est semi-propre,* $f(A)$ *est fermé en* B. *Si* S *est un sous-ensemble fermé de* B, *alors*

a) $f_{|f^{-1}(S)}: f^{-1}(S) \longrightarrow B$ *est semi-propre*

b) *Si* f_1 *et* f_1' *sont les applications induites par* f

$$f_1: A - f^{-1}(S) \longrightarrow B - S \quad \textit{et} \quad f_1': \overline{A - f^{-1}(S)} \longrightarrow \overline{B - S},$$

f_1 *et* f_1' *sont semi-propres.*

Dans le cas analytique complexe, le résultat principal est la généralisation aux applications semi-propres du théorème de Remmert pour les applications propres :

THEOREME 1.3 (Kuhlmann). – *Si* $g: V \longrightarrow W$ *est une application analytique complexe semi-propre, alors* $g(V)$ *est un sous-ensemble analytique fermé de* W.

Dans le cas analytique réel, on obtient, d'autre part :

THEOREME 1.4. – *Soit* $f: X \longrightarrow Y$ *une application analytique réelle d'espaces analytiques réels, et soit* A *un sous-ensemble sous-analytique fermé de* X. *Supposons* $f_{|A}$ *semi-propre. Alors* $f(A)$ *est sous-analytique dans* Y.

Démonstration. – Le sous-analytique A étant fermé, il existe [4] une application analytique réelle propre $h : W \longrightarrow X$, telle que $h(W) = A$. Remarquons que $f \circ h$ est une application semi-propre et $f(h(W)) = f(A)$. Donc le problème est réduit à démontrer que l'image d'une application analytique semi-propre $f : X \longrightarrow Y$ est sous-analytique en Y. Pour ça, le problème étant local en Y, soit $y \in f(X)$ (qui est fermé en Y) et soit L un voisinage compact semi-analytique de y en Y. Il existe un compact K en X tel que $f(K) = L \cap f(X)$, où on peut supposer d'avoir choisi K semi-analytique en X. Donc il existe $f' : X' \longrightarrow X$, où X' est un espace analytique réel compact, telle que $f'(X') = K$. La composition $f \circ f'$ est propre et alors $f(f'(X')) = L \cap f(X)$ est sous-analytique en Y.

Notation 1.5. – Si U est un ouvert d'un espace analytique réel ou complexe V, par abus de notation on appellera $V \cap U$ la restriction de l'espace V à U.

On va maintenant démontrer que pour étudier l'image d'une application analytique réelle ou complexe semi-propre on peut "localiser" le problème dans l'espace source. Précisément :

LEMME 1.6. – *Soit* $g : V \longrightarrow W$ *une application semi-propre d'espaces analytiques réels ou complexes. Soit* $y_0 \in W$. *Alors pour tout voisinage ouvert relativement compact* L_0 *de* y_0 *en* W *il existe un ouvert relativement compact* U_0 *de* V *tel que, si* $\Omega_0 = g^{-1}(L_0) \cap U_0$, $g_{|V \cap \Omega_0} : V \cap \Omega_0 \longrightarrow W \cap L_0$ *est semi-propre et* $g(V \cap \Omega_0) = L_0 \cap g(V)$.

Démonstration. – Soit L_0 un voisinage ouvert relativement compact de $y_0 \in W$. Alors il existe un compact K_0 en V tel que $g(K_0) = \overline{L}_0 \cap g(V)$. Soit U_0 un voisinage ouvert relativement compact de K_0 en V, et soit $\Omega_0 = g^{-1}(L_0) \cap U_0$. L'application $g_{|V \cap \Omega_0} : V \cap \Omega_0 \longrightarrow W \cap L_0$ est semi-propre. En effet, si L est un compact de L_0, $K = g^{-1}(L) \cap K_0$ est évidemment compact, $g(K) = L \cap g(V)$. Il est évident aussi que $g(V \cap \Omega_0) = L_0 \cap g(V)$.

Remarque 1.7. – Le lemme 1.6 peut être formulé aussi de la façon suivante : soit $g : V \longrightarrow W$ une application analytique réelle ou complexe semi-propre et surjective ; soit U_0 un ouvert de V.

Supposons qu'il existe un compact $K_0 \subset U_0$ tel que $g(K_0)$ contient un voisinage L_0 d'un point $y_0 \in g(K_0)$. Alors, si $\Omega_0 = g^{-1}(L_0) \cap U_0$,

$$g : V \cap \Omega_0 \longrightarrow W \cap L_0$$

est semi-propre et surjective. On voit aisément aussi que le résultat de 1.6 reste vrai pour tout choix d'un ouvert $U'_0 \subset U_0$ qui soit un voisinage de K_0 et d'un voisinage ouvert L'_0 de y_0, $L'_0 \subset L_0$. Encore, si T est un sous-espace analytique fermé de V, on peut toujours supposer que ou $T \cap \Omega_0 = \emptyset$ ou $T \cap g^{-1}(y_0) \cap K_0 \neq \emptyset$, quitte à changer convenablement les voisinages L_0 et U_0 (et en conséquence Ω_0).

Remarque 1.8. – Soit $g : V \longrightarrow W$ une application analytique complexe non semi-propre qui soit une complexification d'une application analytique réelle semi-propre, ou même propre, avec image sous-analytique et non semi-analytique. Supposons que V et W soient sous-espaces analytiques complexes fermés de $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^m$ respectivement. Considérons, dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ un sous-espace linéaire de dimension m, disons-le H, tel que $H \cap \sigma(H) = \emptyset$ pour l'auto-conjugaison σ de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$. Soit $\widetilde{p} : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \longrightarrow \mathbf{C}^m$ la projection naturelle et soit $W' = \widetilde{p}^{-1}(W) \cap (H \cup \sigma(H))$. Soit V' la réunion disjointe de V et W', et soit $g' : V' \longrightarrow W$ l'application ainsi définie : $g'(x) = g(x)$, si $x \in V$; $g'(x) = \widetilde{p}(x)$ si $x \in W'$. On voit que g' est semi-propre et qu'elle est encore une complexification de la même application réelle. Donc la seule condition qu'une application analytique réelle semi-propre admette une complexification semi-propre n'est pas suffisante à donner la semi-analyticité de l'image.

Si $g : V \longrightarrow W$ est une application analytique réelle ou complexe semi-propre et si T est un sous-espace analytique fermé de V, la restriction de g à T n'est pas en général semi-propre, même si T est une des composantes irréductibles de V.

Exemple 1.9. – Soit

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3 \mid z_1 = z_2 z_3\} \cup \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3 \mid z_2 = z_1 z_3\} = V_1 \cup V_2 .$$

Soit $g : V \longrightarrow \mathbf{C}^2$ la restriction à V de la projection $\widetilde{p} : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^2$, $\widetilde{p}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2)$. On remarque aisément que g est semi-propre, tandis que la restriction de g à chaque V_i n'est pas semi-propre.

Exemple 1.10. – Considérons la projection

$$\widetilde{p} : \mathbf{C}^4 \longrightarrow \mathbf{C}^3 \,,\; \widetilde{p}(z_1 , z_2 , z_3 , z_4) = (z_1 , z_2 , z_3) \,,$$

qui est semi-propre. Soit

$$\mathrm{T} = \{(z_1 , z_2 , z_3 , z_4) \in \mathbf{C}^4 \mid z_2 = z_1 z_4 \,,\; z_3 = z_1 e^{z_4}\} .$$

On voit que la restriction de $\widetilde{p}$ à T n'est pas semi-propre et en plus que $\widetilde{p}(\mathrm{T})$ n'est contenu dans aucun sous-espace analytique fermé de $\mathbf{C}^3$ de dimension deux.

Les exemples 1.9 et 1.10 justifient la définition suivante :

DEFINITION 1.11. – *Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ une application analytique réelle semi-propre et soit $y_0 \in f(\mathrm{X})$. On dit que f est* **C***-strictement semi-propre en y_0 s'il existe une complexification $\widetilde{f} : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Y}}$ de f qui soit semi-propre et telle que la condition suivante soit vérifiée :*

(1.11.1) *il existe un voisinage compact $\mathrm{L}(f)$ de y_0 dans $\widetilde{\mathrm{Y}}$ et un sous-ensemble compact $\mathrm{K}(f)$ de $\widetilde{\mathrm{X}}$ tel que*

a) $\widetilde{f}(\mathrm{K}(f)) = \mathrm{L}(f) \cap \widetilde{f}(\widetilde{\mathrm{X}})$ *et* $f(\mathrm{K}(f) \cap \mathrm{X}) = \mathrm{L}(f) \cap f(\mathrm{X})$

b) *pour tout sous-espace analytique complexe fermé irréductible T de $\widetilde{\mathrm{X}}$ tel que $\mathrm{T} \cap \mathrm{K}(f) \cap f^{-1}(y_0) \neq \Phi$, $rk\, \widetilde{f}_{|\mathrm{T}} < rk\, \widetilde{f}$, il existe un voisinage ouvert relativement compact $\mathrm{U}(\mathrm{T})$ de $\mathrm{K}(f) \cap \widetilde{f}^{-1}(y_0)$ dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ tel que $\widetilde{f}(\mathrm{T} \cap \mathrm{U}(\mathrm{T}))_{y_0} \subset \widetilde{\mathrm{Z}}(\mathrm{T})_{y_0}$ où $\widetilde{\mathrm{Z}}(\mathrm{T})_{y_0}$ est le germe en y_0 d'un sous-espace analytique complexe fermé de $\widetilde{\mathrm{Y}}$ au voisinage de y_0,* dim $\widetilde{\mathrm{Z}}(\mathrm{T})_{y_0} = rk\, \widetilde{f}_{|\mathrm{T}}$.

On dira que f est **C***-strictement semi-propre si elle est* **C***-strictement semi-propre en tout point y de $f(\mathrm{X})$.*

Exemple 1.12. – La projection

$$p : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \,,\; p(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (x_1 , x_2 , x_3)$$

est semi-propre, mais elle n'est pas **C**-strictement semi-propre, comme on a vu dans 1.10.

Exemple 1.13. – Un exemple naïf d'application **C**-strictement semi-propre est le suivant : soit $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}^2$ ainsi défini :

$$\mathrm{X} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \{(x , y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = n\} \,;$$

soit $p : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la projection $p(x , y) = x$. La restriction de p à X est évidemment semi-propre. Considérons $\widetilde{p} : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ la projection naturelle et soit $\widetilde{\mathrm{X}} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \{(\widetilde{x} , \widetilde{y}) \in \mathbf{C}^2 \mid \widetilde{y} = n\}$. La restriction de $\widetilde{p}$ à $\widetilde{X}$ est une complexification semi-propre de $p_{|X}$ (elle est même propre sur chaque composante irréductible), et pour tout sous-espace T analytique irréductible de $\widetilde{X}$, $\widetilde{p}_{|T}$ est propre et donc son image est analytique dans $\mathbf{C}$. Alors $p_{|X}$ est $\mathbf{C}$-strictement semi-propre.

Exemple 1.14. – L'application g définie dans 1.9 est une complexification d'une application analytique réelle qui est $\mathbf{C}$-strictement semi-propre.

Remarque 1.15. – Avec les notations de 1.11, si f est $\mathbf{C}$-strictement semi-propre en y_0, grâce à 1.6, pour tout choix d'un voisinage ouvert L_0 de y_0 en $\widetilde{Y}$, $L_0 \subset L(f)$, et pour tout voisinage ouvert relativement compact U de $K(f)$ en $\widetilde{X}$, avec L_0 et U invariants par l'autoconjugaison de $\widetilde{Y}$ et de $\widetilde{X}$ respectivement, la restriction de f à $X \cap U \cap f^{-1}(L_0 \cap Y)$ est $\mathbf{C}$-strictement semi-propre en y_0, $f(X \cap U \cap f^{-1}(L_0 \cap Y)) = f(X) \cap L_0$ et $\widetilde{f}(\widetilde{X} \cap U \cap \widetilde{f}^{-1}(L_0 \cap \widetilde{Y})) = \widetilde{f}(\widetilde{X}) \cap L_0$.

LEMME 1.16. – *Soit* $f: X \longrightarrow Y$ $\mathbf{C}$*-strictement semi-propre en* $y_0 \in f(X)$; *soit* Z *un sous-espace analytique réel fermé de* Y, *tel que* $y_0 \in Z$. *Alors* $f_{|f^{-1}(Z)} = f_1 : f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$ *est* $\mathbf{C}$*-strictement semi-propre en* y_0.

Démonstration. – Soit $\widetilde{Z}$ une complexification de Z dans $\widetilde{Y}$ et soit $\widetilde{f}_{|\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{Z})} = \widetilde{f}_1 : \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{Z}) \longrightarrow \widetilde{Z}$. $\widetilde{f}_1$ est une complexification semi-propre de f_1 et pour avoir la thèse il suffit de choisir, avec les notations de 1.11, $L(f_1) = L(f) \cap \widetilde{Z}$ et $K(f_1) = K(f) \cap \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{Z})$.

2. Démonstration du théorème (CSP).

Revenons maintenant à la situation du théorème énoncé dans l'introduction.

Remarque 2.1. – L'application $\widetilde{f}$ étant semi-propre, on peut supposer qu'elle est surjective. En outre, on peut supposer que les espaces $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ sont réduits.

Remarque 2.2. – Le problème est local en Y ; considérons un voisinage ouvert relativement compact L_0 d'un point $y_0 \in f(X)$

en $\widetilde{Y}$, L_0 invariant par l'autoconjugaison τ de $\widetilde{Y}$, à bord semi-analytique en $\widetilde{Y}$, $L_0 \subset L(f)$, avec les notations de 1.11. On peut supposer aussi que L_0 soit assez petit pour que $\widetilde{Y} \cap L_0$ puisse être considéré comme sous-espace analytique fermé d'un ouvert de $\mathbf{C}^p$, pour p convenable. En outre, par locale finitude, les composantes irréductibles $\widetilde{Y}_i$ de $\widetilde{Y}$ telles que $\widetilde{Y}_i \cap L_0 \neq \phi$ sont seulement en nombre fini. Donc, on peut se réduire, en travaillant avec chaque $\widetilde{Y}_i \cup \tau(\widetilde{Y}_i)$ et avec $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{Y}_i \cup \tau(\widetilde{Y}_i))$, à $\widetilde{Y}$ de dimension pure. Toutes ces opérations gardent le fait que l'application réelle soit $\mathbf{C}$-strictement semi-propre.

Remarque 2.3. – La remarque 1.15 nous fournit le moyen de localiser le problème aussi dans $\widetilde{X}$ au voisinage de $\widetilde{f}^{-1}(y_0) \cap K(f)$, de façon que f continue à être $\mathbf{C}$-strictement semi-propre en y_0. Les voisinages ouverts U de $K(f)$ dans $\widetilde{X}$ peuvent toujours être choisis à bord semi-analytique.

Remarque 2.4. – Rappelons que, si T est un sous-espace analytique complexe fermé irréductible de $\widetilde{X}$ tel que

$$T \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) = \phi ,$$

alors il existe un voisinage ouvert Ω de $f^{-1}(y_0) \cap K(f)$ en X tel que $T \cap \Omega = \phi$ et la restriction de f à $X \cap \Omega$ est encore semi-propre sur un voisinage Ω' de y_0 en Y (1.6 dans le cas réel et remarque 1.8). Rappelons que l'image de f n'est pas changée au voisinage de y_0.

On est réduit donc à démontrer, ce que l'on fera par récurrence sur la dimension de $\widetilde{Y}$, que si f est $\mathbf{C}$-strictement semi-propre en y_0, $f(X)$ est semi-analytique en y_0. Il est bien clair que le théorème est vrai si $\dim \widetilde{Y} = 0$ et $\dim \widetilde{X}$ est arbitraire. Supposons donc le théorème vrai pour $\dim \widetilde{Y} \leq n-1$.

Première étape

Grâce à l'hypothèse de récurrence, si l'on considère l'application induite par f

$$f_1 : f^{-1}(\operatorname{Sing} Y) \longrightarrow \operatorname{Sing} Y$$

l'image de f_1 est semi-analytique en Y au voisinage de y_0. En effet, f_1 est $\mathbf{C}$-strictement semi-propre en y_0 et $\dim \operatorname{Sing} \widetilde{Y} < \dim \widetilde{Y}$. Nous appellerons toujours dans la suite $A = f(f^{-1}(\operatorname{Sing} Y))$.

Deuxième étape

2.5. Soit $\widetilde{S}$ un sous-espace analytique complexe fermé réduit de $\widetilde{X}$ invariant par l'autoconjugaison σ de $\widetilde{X}$. Soit S la partie fixe de $\widetilde{S}$ par rapport à σ. Supposons que pour chaque composante irréductible $\widetilde{S}_i$ de $\widetilde{S}$

$$\widetilde{S}_i \cap K(f) \cap f^{-1}(y_0) \neq \phi$$

et que $rk\, \widetilde{f}_{|\widetilde{S}} < rk\, \widetilde{f}$. Alors, quitte à changer les voisinages selon 2.2 et 2.3, il existe un sous-ensemble semi-analytique fermé au voisinage de y_0 en Y, disons-le B(S), tel que

$$f(S)_{y_0} \subset B(S)_{y_0} \subset f(X)_{y_0} .$$

Démonstration. — Grâce au fait que f est **C**-strictement semi-propre en y_0, pour $\widetilde{S}$ il existe un voisinage $U(\widetilde{S})$ de $\widetilde{f}^{-1}(y_0) \cap K(f)$ dans $\widetilde{X}$ et un sous-espace analytique complexe fermé $\widetilde{Z}(\widetilde{S})$ de $\widetilde{Y}$ au voisinage de y_0, $\dim \widetilde{Z}(\widetilde{S}) < \dim \widetilde{Y}$, tel que, si on appelle encore L_0 ce voisinage, L_0 soit contenu dans $L(f)$,

$$\widetilde{Z}(\widetilde{S}) \cap L_0 \supset \widetilde{f}(\widetilde{S} \cap U(\widetilde{S})) \cap L_0$$

et L_0 vérifie aussi les autres propriétés de la remarque 2.2. En outre, $\widetilde{Z}(\widetilde{S})$ peut être supposé invariant par l'autoconjugaison de $\widetilde{Y}$. Avec la remarque 1.15 on peut se réduire à considérer la restriction de f à $X \cap U(\widetilde{S}) \cap f^{-1}(L_0 \cap Y)$, que l'on appellera encore f. Soit $\widetilde{Z}'(\widetilde{S}) = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{Z}(\widetilde{S}))$. L'application induite par $\widetilde{f}$

$$\widetilde{f}_0 : \widetilde{Z}'(\widetilde{S}) \longrightarrow \widetilde{Z}(\widetilde{S})$$

est semi-propre et elle est une complexification de l'application semi-propre $f_0 : Z'(S) \longrightarrow Z(S)$, où par $Z'(S)$ et $Z(S)$ on note la partie fixe de $\widetilde{Z}'(\widetilde{S})$ et de $\widetilde{Z}(\widetilde{S})$ respectivement par rapport à l'autoconjugaison de $\widetilde{X}$ et de $\widetilde{Y}$. Le lemme 1.16 nous assure que f_0 est **C**-strictement semi-propre en y_0. On peut donc appliquer à f_0 l'hypothèse de récurrence et l'on obtient que le sous-ensemble fermé dans Y au voisinage de y_0, $f_0(Z'(S)) = B(S)$, est semi-analytique en y_0; on peut d'ailleurs supposer qu'il est semi-analytique et fermé en L_0, quitte à se restreindre à un voisinage L_0 éventuellement plus petit.

Rappelons un fait d'ordre général : si $g : V \longrightarrow W$ est une application analytique complexe d'espaces de dimension finie, où W est un sous-espace analytique fermé dans un ouvert de $\mathbf{C}^p$, le sous-ensemble $J(V) = \overline{(V - V_0) - \operatorname{Sing} V}$ (où $V_0 = \{x \in V \mid V_x$

est lisse et $rk\,(dg)_x = rk\,(dg)\}$) est un sous-espace analytique complexe fermé de V. Remarquons que $rk\, g_{|J(V)} < rk\, g$. Remarquons en outre que si g est une complexification d'une application analytique réelle, J(V) est invariant par l'autoconjugaison de V.

Considérons donc $J(\widetilde{X})$. On peut appliquer 2.5 aux composantes irréductibles $\widetilde{C}_j$ de $J(\widetilde{X})$ telles que $\widetilde{C}_j \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \phi$.

Troisième étape

Soit $\widetilde{H}$ la réunion des composantes irréductibles $\widetilde{H}_i$ de Sing $\widetilde{X}$ telles que $\widetilde{H}_i \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \phi$, soit H sa partie fixe par rapport à l'autoconjugaison de $\widetilde{X}$.

La deuxième étape nous permet de démontrer notre assertion dans le cas où Sing $\widetilde{X}$ vérifie une des deux hypothèses suivantes :

a) $\widetilde{H} \neq \phi$ et $rk\,\widetilde{f}_{|\widetilde{H}} < rk\,\widetilde{f}$

b) $\widetilde{H} = \phi$.

Démonstration. – a) On peut appliquer 2.5 à $\widetilde{H}$; soit B(H) le sous-ensemble semi-analytique en y_0 tel que $f(H)_{y_0} \subset B(H)_{y_0} \subset f(X)_{y_0}$.

De la même façon, on peut construire un sous-ensemble semi-analytique en y_0, B(C), tel que $f(C)_{y_0} \subset B(C)_{y_0} \subset f(X)_{y_0}$ où C est la partie fixe de la réunion $\widetilde{C}$ des composantes irréductibles $\widetilde{C}_j$ de $J(\widetilde{X})$ telles que $\widetilde{C}_j \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \phi$. Soit

$$B = B(C) \cup B(H) \cup A.$$

Soient $\widetilde{H}' = \overline{\text{Sing}\ \widetilde{X} - \widetilde{H}}$ et $\widetilde{C}' = \overline{J(\widetilde{X}) - \widetilde{C}}$. Alors il existe (2.4) un voisinage ouvert Ω de $f^{-1}(y_0) \cap K(f)$ dans X et un voisinage ouvert Ω' de y_0 dans Y tels que B soit semi-analytique dans $Y \cap \Omega'$, $\Omega \cap (\widetilde{H}' \cup \widetilde{C}') = \phi$, et $f_{|X \cap \Omega}$ soit semi-propre sur $Y \cap \Omega'$. Rappelons que $f(X)_{y_0} = f(X \cap \Omega)_{y_0}$. Alors l'image de l'application induite par f

$$f_0 : (X \cap \Omega) - f^{-1}(B) \longrightarrow (Y \cap \Omega') - B$$

est un sous-ensemble ouvert et fermé de $(Y \cap \Omega') - B$, et donc elle est semi-analytique dans $Y \cap \Omega'$. Alors

$$f(X)_{y_0} = f(X \cap \Omega)_{y_0} = (\operatorname{Im} f_0 \cup B)_{y_0}$$

est semi-analytique et le théorème est complètement démontré dans ce cas.

b) Le résultat suit comme dans a), quitte à choisir Ω de telle façon que $\Omega \cap \operatorname{Sing} \widetilde{X} = \emptyset$.

Quatrième étape

Il nous reste à montrer le théorème dans le cas où

$$\operatorname{Sing} \widetilde{X} \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \emptyset$$

et qu'il existe au moins une composante irréductible $\widetilde{H}_i \subset \widetilde{H}$ de $\operatorname{Sing} \widetilde{X}$ (avec les notations de la troisième étape) telle que $rk\, \widetilde{f}_{|\widetilde{H}_i} = rk\, \widetilde{f}$.

On démontrera ici le théorème dans le cas où $f_{|\operatorname{Sing} X}$ est une application fermée (en particulier si f est propre). Si f n'a pas cette propriété, on aura quand même le résultat, comme on le verra dans la cinquième étape.

On va maintenant montrer que

2.6. Soit $\widetilde{S}$ un sous-espace analytique complexe fermé de $\widetilde{X}$, invariant par l'autoconjugaison de $\widetilde{X}$, réduit, $rk\, \widetilde{f}_{|\widetilde{S}} = rk\, \widetilde{f}$, tel que pour chaque composante irréductible $\widetilde{S}_i$, $\widetilde{S}_i \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \emptyset$. Soit S la partie fixe de $\widetilde{S}$ par rapport à l'autoconjugaison de $\widetilde{X}$ et supposons que $f_{|S}$ soit fermée. Alors la conclusion de (2.5) est encore vérifiée.

Démonstration. – Considérons $J(\widetilde{S})$ et soit $J(S)$ sa partie fixe par rapport à l'autoconjugaison de $\widetilde{X}$. Soit $\widetilde{C}(J(\widetilde{S}))$ la réunion des composantes irréductibles $\widetilde{C}_r(J(\widetilde{S}))$ de $J(\widetilde{S})$ telles que

$$\widetilde{C}_r(J(\widetilde{S})) \cap K(f) \cap f^{-1}(y_0) \neq \emptyset .$$

Pour $\widetilde{C}(J(\widetilde{S}))$, on construit le sous-ensemble (semi-analytique en y_0) $B(C(J(S)))$, comme 2.5 nous le permet. Supposons que

$$\operatorname{Sing} \widetilde{S} \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) = \emptyset .$$

Alors il existe (2.4) un voisinage Ω de $K(f) \cap f^{-1}(y_0)$ en X tel que $\overline{\Omega \cap (\operatorname{Sing} \widetilde{S} \cup J(\widetilde{S})} - \widetilde{C}(J(\widetilde{S})))= \emptyset$. Donc, si l'on considère l'application induite par f

$$h : (S \cap \Omega) - f^{-1}(B(C(J(S))) \cup A) \longrightarrow (Y \cap \Omega') - (B(C(J(S))) \cup A)$$

(où Ω' est un voisinage convenable de y_0 en Y), $\operatorname{Im} h$ est ouverte et fermée en $(Y \cap \Omega') - (B(C(J(S))) \cup A)$, et donc semi-analytique au voisinage de y_0. On en déduit que

$$f(S \cap \Omega) \subset \operatorname{Im} h \cup (A \cup B(C(J(S)))) \subset f(X \cap \Omega)$$

localement en y_0.

Soit maintenant $\operatorname{Sing}\widetilde{S} \cap K(f) \cap f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$. Considérons la suite décroissante de sous-espaces analytiques complexes fermés de $\widetilde{S}$, invariants par σ

$$\widetilde{S}_0 = \widetilde{S} \supset \widetilde{S}_1 \supset \widetilde{S}_2 \supset \ldots \supset \widetilde{S}_i \supset \ldots$$

où $\widetilde{S}_i = \operatorname{Sing}\widetilde{S}_{i-1}$. Pour chaque i, $\widetilde{S}_i$ est considéré réduit. Remarquons que cette suite est finie.

Il se peut qu'il existe i_0 tel que

$$\widetilde{S}_{i_0} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad rk\,\widetilde{f}_{|\widetilde{S}_{i_0}} < rk\,\widetilde{f} \text{ et } rk\,\widetilde{f}_{|\widetilde{S}_i} = rk\,\widetilde{f}$$

pour tout i, $i < i_0$.

Si non, il existe i_0 tel que $\operatorname{Sing}\widetilde{S}_{i_0} = \emptyset$ et pour tout $i \leqslant i_0$, $rk\,\widetilde{f}_{|\widetilde{S}_i} = rk\,\widetilde{f}$.

Dans les deux cas on a deux possibilités :

a) $\widetilde{S}_{i_0} \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \emptyset$

b) $\widetilde{S}_{i_0} \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) = \emptyset$.

Dans le cas a), d'après ce que l'on a déjà démontré, il existe un sous-ensemble semi-analytique fermé dans Y au voisinage de y_0, $B(S_{i_0})$, tel que, avec les notations de 2.5, $f(S_{i_0}) \subset B(S_{i_0}) \subset f(X)$ (où on note par S_{i_0} la partie fixe de $\widetilde{S}_{i_0}$ par rapport à l'autoconjugaison induite par celle de $\widetilde{X}$; la même notation sera utilisée dans la suite pour les $\widetilde{S}_i$, pour tout i). Considérons maintenant $\widetilde{S}_{i_0-1}$: forcément $\widetilde{S}_{i_0-1} \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \emptyset$. Pour la réunion $\widetilde{C}(J(\widetilde{S}_{i_0-1}))$ des composantes irréductibles $\widetilde{C}_s(J(\widetilde{S}_{i_0-1}))$ de $J(\widetilde{S}_{i_0-1})$ telles que $\widetilde{C}_s(J(\widetilde{S}_{i_0-1})) \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \emptyset$ on peut appliquer la deuxième étape. Soit $B(C(J(S_{i_0-1})))$ le semi-analytique (en y_0) relatif à $\widetilde{C}(J(\widetilde{S}_{i_0-1}))$. Soit $B_{i_0-1} = A \cup B(S_{i_0}) \cup B(C(J(S_{i_0-1})))$. Alors dans un voisinage Ω de $K(f) \cap f^{-1}(y_0)$ dans X et pour un choix convenable d'un voisinage ouvert Ω' de y_0 en Y, l'application induite par f, notons-la h_{i_0-1},

$$h_{i_0-1} : (S_{i_0-1} \cap \Omega) - f^{-1}(B_{i_0-1} \cap \Omega') \longrightarrow (Y \cap \Omega') - B_{i_0-1}$$

a une image ouverte et fermée et donc elle est semi-analytique dans Y au voisinage de y_0 et

$$f(S_{i_0-1} \cap \Omega) \subset B(S_{i_0-1}) = \operatorname{Im} h_{i_0-1} \cup B_{i_0-1} \subset f(X).$$

$B(S_{i_0-1})$ est évidemment semi-analytique dans Y au voisinage de y_0. En répétant le même raisonnement à chaque pas on déduit qu'il existe un sous-ensemble semi-analytique B(S) fermé au voisinage de y_0 tel que $f(S \cap \Omega)_{y_0} \subset B(S)_{y_0} \subset f(X \cap \Omega)_{y_0}$ pour un ouvert Ω convenable. On a donc démontré 2.6 dans le cas a).

Dans le cas b), il existe, toujours grâce à 2.4, un voisinage Ω de $K(f) \cap f^{-1}(y_0)$ en X tel que $\widetilde{S}_{i_0} \cap \Omega = \emptyset$. Alors on a, même dans cette situation, deux possibilités :

a') $\widetilde{S}_{i_0-1} \cap K(f) \cap f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$

b') $\widetilde{S}_{i_0-1} \cap K(f) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$.

Dans le cas a'), on procède comme dans le cas a), en considérant $\widetilde{S}_{i_0-1}$ au lieu de $\widetilde{S}_{i_0}$. Dans le cas b'), on passe à $\widetilde{S}_{i_0-2}$ et on continue jusque au premier i tel que $\widetilde{S}_i$ rentre dans le cas a). En tout cas l'assertion est démontrée.

Pour conclure la démonstration du théorème dans la situation établie au début de cette étape, on procède comme dans la troisième, en utilisant 2.6 pour les composantes irréductibles $\widetilde{H}_i$ de Sing $\widetilde{X}$ qui touchent $f^{-1}(y_0) \cap K(f)$ et telles que $rk\, \widetilde{f}_{|\widetilde{H}_i} = rk\, \widetilde{f}$.

Cinquième étape

C'est le cas où Sing $\widetilde{X} \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) \neq \emptyset$, il existe une composante irréductible $\widetilde{H}_i$ de $\widetilde{H}$ en Sing $\widetilde{X}$ telle que $rk\, \widetilde{f}_{|\widetilde{H}_i} = rk\, \widetilde{f}$, et on n'a aucune hypothèse supplémentaire sur f. (C'est seulement dans ce cas que l'on n'a pas démontré le résultat directement, mais on utilise le théorème de désingularisation). Pour conclure la démonstration dans cette situation, il suffit de considérer une résolution des singularités de $\widetilde{X}$, $\widetilde{\pi} : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{X}$; rappelons que l'on peut exiger que $\widetilde{X}'$ ait une autoconjugaison induite par celle de $\widetilde{X}$ de telle façon que $\widetilde{\pi}$ induit une application propre d'espaces analytiques réels $\pi : X' \longrightarrow X$, où X' est la réunion des composantes connexes de la partie réelle de $\widetilde{X}'$ qui sont contenues dans $\widetilde{\pi}^{-1}(X)$. Il est facile de vérifier que $f \circ \pi = f'$ est **C**-strictement semi-propre (avec la complexification semi-propre $\widetilde{f} \circ \widetilde{\pi} = \widetilde{f}'$).

Ainsi $f(X) = f(\pi(X'))$ est semi-analytique en y_0, grâce à ce que l'on a déjà démontré dans les étapes précédentes (voir le cas Sing $\widetilde{X} \cap f^{-1}(y_0) \cap K(f) = \emptyset$).

Le théorème est alors complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI, W. STOLL, Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions, *Lecture notes in Mathematics,* vol. 234, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1971.

[2] M. GALBIATI, Sur l'image d'un morphisme analytique réel propre, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* Cl. Sci., Serie IV, vol. III (1976), 311-319.

[3] H. HIRONAKA, Stratification and flatness. Dans: *Real and Complex Singularities,* Nordic Summer School Oslo 1976, 199-265, Alphen aan den Rijn, Sijthoff & Noordhoff 1977.

[4] H. HIRONAKA, Subanalytic sets. Dans: *Number theory,* in honour of Akizuki, Tokyo, Kinokuniya, 1973.

[5] H. HIRONAKA, Introduction to real analytic sets and real analytic maps, *Quaderno dei gruppi di ricerca del C.N.R.,* Pisa, Istituto Mat. "L. Tonelli", 1973.

[6] N. KUHLMANN, Ueber holomorphie Abbildungen komplexer Räume, *Arch. Math.,* 15 (1964), 81-90.

[7] N. KUHLMANN, Algebraic function fields on complex analytic spaces. Dans: *Proc. Conf. on Compl. Anal. Minneapolis,* 1964, 155-172. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1965.

[8] N. KUHLMANN, Bemerkungen über holomorphe Abbildungen komplexer Räume. Dans: *Festchr. Gedächtnisfeier K. Weierstr.,* 475-522, Cologne, Westdeutscher Verlag, 1966.

Manuscrit reçu le 8 février 1982
révisé le 6 avril 1982.

E. FORTUNA & M. GALBIATI,
Università di Pisa
Istituto di Matematica
"Leonida Tonelli"
Via Buonarroti 2
56100 Pisa (Italie).