ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RAYMOND COUTY

Sur les transformations des variétés riemanniennes et kählériennes

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 147-248

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__147_0>

SUR LES TRANSFORMATIONS DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES ET KAHLÉRIENNES

par R. COUTY

INTRODUCTION

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines transformations des variétés riemanniennes et des variétés kähleriennes, ou plus généralement des variétés munies d'une connexion euclidienne ou linéaire. Sauf avis contraire, il s'agit toujours de variétés différentiables de classe C^∞. Nous faisons constamment usage de la dérivée de Lie dont la définition et les propriétés essentielles sont rappelées dans les préliminaires. Ce travail est divisé en deux parties. La première partie est de caractère local; elle est inspirée par l'étude des espaces harmoniques. Rappelons qu'un espace riemannien est dit harmonique relativement à un point O, si, s, désignant la distance géodésique de O à un point variable M, le laplacien $\Delta_2 s$ ne dépend que de s. On sait [15, 16], que sur un tel espace, l'élément de volume en M est invariant par toute transformation conservant la sphère géodésique de centre O et passant par M. Ceci nous conduit à étudier sur une variété riemannienne quelconque, parmi les transformations locales conservant la sphère géodésique celles qui conservent l'élément de volume, ou plus généralement telle ou telle structure géométrique. Sur une variété V munie d'une connexion linéaire, on peut définir de telles transformations en considérant le paramètre affine des géodésiques; soit T_0 l'espace vectoriel tangent en O, à tout endomorphisme $\mathfrak{A}$ de T_0 nous associons la transformation locale $M \rightarrow M' = \mathfrak{T}(M)$ définie de la manière suivante: dans un voisinage convenable de O, à tout point M correspond la géodésique (g) passant par O et M, soit Θ son vecteur tangent en O, Θ est transformé par $\mathfrak{A}$ en Θ', on prend sur la géodésique (g') tangente en O à Θ', le point M' de paramètre canonique s' égal au paramètre canonique s de M. Nous prendrons plus particulièrement pour endomorphismes $\mathfrak{A}$ les éléments du groupe d'holonomie infinitésimale σ'_0 au point au O. Le chapitre I est consacré aux définitions des transformations étudiées et au rappel des propriétés des coordonnées normales et des tenseurs normaux. Dans le chapitre II, V est à connexion riemannienne et on étudie le cas où les transformations $\mathfrak{T}$ sont affines, projectives ou conformes (dans ces deux derniers cas nous sommes amenés à supposer V espace d'Einstein) ou bien conservent l'élément de volume, on en déduit des propriétés de la courbure (espaces localement symétriques, ou espaces dont le tenseur de Ricci est à dérivée covariante nulle). Le chapitre III, étudie, pour les variétés kählériennes l'invariance de la structure complexe, puis le cas où les transformations $\mathfrak{T}$ sont projectives ou conformes, l'hypothèse, espace d'Einstein n'étant plus nécessaire ici. Le chapitre IV concerne les variétés à connexion euclidienne, nous établissons d'abord quelques formules valables pour une connexion linéaire, puis nous considérons l'exemple d'un espace de groupe semi-simple, où se trouvent réalisées certaines hypothèses que nous sommes amenés à faire par la suite. Pour une variété riemannienne munie d'une connexion euclidienne, nous obtenons moyennant des hypothèses sur la torsion, des résultats analogues à ceux du chapitre III.

La deuxième partie est essentiellement l'étude des transformations infinitésimales projectives ou conformes sur une variété riemannienne ou kählérienne. Dans le chapitre I, la variété est supposée compacte, ou plus généralement complète. Dans le cas compact, nous obtenons une relation entre le signe de la courbure de Ricci et l'existence de transformations infinitésimales projectives. Dans le cas complet nous retrouvons un résultat de Hano [6]; et, si la variété riemannienne complète est simplement connexe, nous obtenons pour les transformations projectives et pour les collineations conformes, un théorème de décomposition analogue à celui du cas affine. Le chapitre se termine par une étude des endomorphismes [10, 20] associés à une transformation infinitésimale affine, projective ou conforme. Au chapitre II nous montrons que certains des résultats de BOCHNER, LICHNEROWICZ, YANO [27, 16] pour les tenseurs d'un espace riemannien compact, orientable, sont valables pour les tenseurs G-invariants d'un espace homogène G/H, ce qui nous permet en particulier d'énoncer un théorème de semi-simplicité. Nous étudions ensuite le cas particulier où l'espace des classes de cohomologie des n-formes G-invariantes et de dimension 1, nous obtenons dans ce cas pour les p-formes conformes G-invariantes des résultats analogues à ceux obtenues pour les p-formes dans le cas compact. Le chapitre III est réservé au cas où V est espace d'Einstein, l'espace vectoriel des 1-formes projectives (resp conformes) admet une décomposition en somme directe analogue à celle donnée par LICHNEROWICZ [18] pour les formes conformes dans le cas compact. Si V est de plus harmonique, ou homogène, toute 1-forme projective (resp conforme) est isométrique; il en est de même, sous certaines hypothèses si V est complet. Le chapitre IV est l'étude, dans le cas où V est une variété kählerienne des 1-formes projectives (resp conformes) fermées, elles sont alors affines (resp homothétiques), si on ajoute l'hypothèse compact, ou complet, avec une restriction sur le groupe d'holonomie, on a des formes à dérivée covariante nulle. Pour un espace d'Einstein-Kähler on obtient un résultat qui a été donné par YANO [26] seulement dans le cas compact. Certains des résultats de ce travail ont été indiqués dans quatre notes aux comptes rendus de l'Académie des Sciences [3, 4, 5].

Je suis heureux d'exprimer ma profonde reconnaissance à M. ANDRÉ LICHNEROWICZ, qui n'a cessé de me prodiguer ses conseils et encouragements avec la plus grande bienveillance et dont l'enseignement et l'œuvre, en particulier ses deux récents ouvrages [12, 13] ont été pour moi le guide le plus précieux. Que M. CHARLES EHRESMANN, dont j'ai eu le bonheur de suivre les leçons et qui a bien voulu me proposer un sujet de seconde thèse veuille bien trouver ici l'expression de mes remerciements. Je remercie également Mme JACQUELINE LELONG-FERRAND qui a bien voulu se joindre à MM. EHRESMANN et LICHNEROWICZ pour constituer le jury auquel est soumis cette thèse.

PRÉLIMINAIRES

§ 1. — Dérivée de Lie ([13] pages 12-32).

Soit Vn une variété différentiable de dimension n, de classe C^∞; soit φ_t une famille dépendant du paramètre $t \in R$ de transformations différentiables de Vn, nous dirons que nous avons un groupe à un paramètre de transformations différentiables si l'application :

$$(t,\ x) \in R \times V_n \rightarrow \varphi_t(x) = x(t) \in V_n,$$

est une application différentiable de $R \times Vn$ dans Vn et si de plus, pour t et $t' \in R$

$$\varphi_{t+t'} = \varphi_t \circ \varphi_{t'}.$$

Un groupe à un paramètre de transformations différentiables définit sur Vn un champ de vecteurs ξ de la manière suivante : pour $x \in Vn$

$$\xi_x = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0}$$

Réciproquement, si on considère un champ de vecteurs ξ, il n'existe pas nécessairement de groupe à un paramètre de transformations différentiables définissant ce champ de vecteurs, mais, ce champ de vecteurs définit un groupe local à un paramètre de transformations locales de Vn. En effet, il suffit d'intégrer, à partir du point initial $x(0) = x$ le système diférentiel

$$(1\text{-}1) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \xi_{x(t)};$$

on sait que, pour tout $y \in Vn$, il est possible de trouver un voisinage $U(y)$ et un nombre positif $\varepsilon(y)$ tels que (1-1) admette une solution notée

$$x(t) = \exp(t\xi)\, x \qquad \text{pour} \qquad |t| < \varepsilon(y).$$

L'application différentiable exp $(t\xi)$ admet une application linéaire tangente que nous noterons de la même façon et qui définit un isomorphisme de l'espace vectoriel T_x tangent en x sur l'espace vectoriel $T_{x(t)}$ tangent en $x(t) = \exp(t\xi)x$. Par image réciproque, on a un isomorphisme $\exp(t\xi)^*$ de l'espace des formes en $x(t)$ sur l'espace des formes en x. Si Ω est une p-forme, la dérivée de Lie de Ω par ξ est la p-forme définie par

$$[\mathcal{L}(\xi)\Omega]_x = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t\xi)^*\, \Omega_{x(t)} - \Omega_x}{t}$$

D'une manière analogue, $\exp(-t\xi)$ définit un isomorphisme de $T_{x(t)}$ sur T_x et par suite un isomorphisme de l'espace des tenseurs de type donné en $x(t)$ sur l'espace des tenseurs de même type en x. Si $\mathcal{T}$ est un tenseur, la dérivée de Lie de $\mathcal{T}$ par ξ sera le tenseur défini par

$$[\mathcal{L}(\xi)\mathcal{T}]_x = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(-t\xi)\mathcal{T}_{x(t)} - \mathcal{T}_x}{t}.$$

Il est commode dans les calculs d'introduire une connexion linéaire ([12] p. 72-107) γ définie par une forme ω. Dans un système de coordonnées locales quelconques désignons par E^i_{jk} les coefficients de cette connexion; soit $\bar{\gamma}$ la connexion associée définie par

$$\bar{E}^i_{jk} = E^i_{kj},$$

nous désignerons par ∇ et $\bar{\nabla}$ les opérateurs de dérivation covariante relativement à ces deux connexions. La dérivée de Lie de la connexion (γ) est donnée par

$$(1\text{-}2) \qquad [\mathcal{T}(\xi)E]^i_{jk} = \nabla_k \bar{\nabla}_j \xi_i + \xi^r R^i{}_{jrk}$$

(où $R^i{}_{jrk}$ est le tenseur de courbure de la connexion (γ)). Pour un tenseur $\mathcal{T}^j{}_i$, une fois covariant et une fois contravariant, on a

$$(1\text{-}3) \qquad [\mathcal{L}(\xi)\mathcal{T}]^j{}_i = \xi^k \nabla_k \mathcal{T}^j{}_i + \mathcal{T}^j{}_r \bar{\nabla}_i \xi^r - \mathcal{T}^r{}_i \bar{\nabla}_r \xi^j.$$

On en déduit immédiatement la formule analogue pour un tenseur quelconque. Rappelons enfin la relation de commutation des opérateurs $\mathfrak{L}$ et ∇, par exemple, pour un tenseur $\mathfrak{T}^j{}_i$

$$(1\text{-}4) \qquad \mathfrak{L}(\xi)\nabla_k\mathfrak{T}^j{}_i - \nabla_k\mathfrak{L}(\xi)\mathfrak{T}^j{}_i = [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^j_{pk}\mathfrak{T}^p{}_i - [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^p_{ik}\mathfrak{T}^j{}_p$$

§ 2. — Transformations projectives et conformes (voir par exemple, [26]).

Un vecteur (ξ^i) définissant une transformation infinitésimale affine, projective, conforme, homothétique, isométrique, sera dit plus brièvement vecteur affine, projectif, etc..., et sur une variété riemannienne, grâce à la dualité définie par la métrique, la 1-forme associée dont l'expression locale est $\xi_i dx^i$ sera appelée 1-forme affine, projective, etc... Rappelons qu'une transformation affine pour une connexion linéaire donnée est une transformation conservant cette connexion. Si ξ est un vecteur affine, on a

$$(2\text{-}1) \qquad [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^i_{jk} = 0.$$

Une transformation projective est une transformation conservant les géodésiques. Pour une connexion symétrique, si ξ est un vecteur projectif, il existe un vecteur ψ, tel que

$$(2\text{-}2) \qquad [\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{E}]^i_{jk} = \delta^i_j\psi_k - \delta^i_k\psi_j$$

Dans le cas d'une variété riemannienne, on voit par contraction de i et j que ψ est le vecteur gradient défini par

$$(2\text{-}3) \qquad \psi_i = \nabla_i\nabla^p\xi_p, \qquad \text{ou} \qquad \psi = -\frac{1}{n+1}d\delta\xi,$$

donc un vecteur projectif vérifiant $d\delta\xi = 0$, (où d et δ sont les opérateurs de différentiation et de co-différentiation de G. de Rham [1]), est affine.

Dans le cas d'une connexion symétrique de coefficients Γ^i_{jk} de

$$\mathfrak{L}(\xi)\mathrm{R}^i{}_{jkl} = \nabla_l[\mathfrak{L}(\xi)\Gamma]^i_{jk} - \nabla_k[\mathfrak{L}(\xi)\Gamma]^i_{jl} \quad ([26]\ \text{p. } 17)$$

et de (2-2); on déduit

$$\mathfrak{L}(\xi)R^i_{jkl} = \delta^i_k \nabla_l \psi_j - \delta^i_l \nabla_k \psi_j \tag{2-4}$$

et, par contraction de i et l

$$\mathfrak{L}(\xi)R_{jk} = (1 - n)\nabla_k \psi_j. \tag{2-5}$$

Si nous considérons maintenant le tenseur de courbure projectif qui, pour un espace de Riemann est donné par

$$W^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}(\delta^i_l R_{jk} - \delta^i_k R_{jl}),$$

on a, pour tout vecteur projectif ξ

$$\mathfrak{L}(\xi)W^i_{jkl} = 0.$$

Sur un espace de Riemann de métrique:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

une transformation conforme est une transformation préservant la métrique à un facteur scalaire près; si ξ est un vecteur conforme, on a

$$\mathfrak{L}(\xi)g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 2\Phi g_{ij} \tag{2-7}$$

où Φ est une fonction dont l'expression est déduite de (2-7) par contraction

$$\Phi = \frac{1}{n}(\nabla_p \xi^p) = -\frac{1}{n}\delta\xi.$$

Si Φ est constante, la transformation est une homothétie, et si $\delta\xi = 0$, le vecteur conforme est isométrique.

Φ_i désignant le vecteur gradient

$$\Phi_i = \partial_i \Phi$$

$\left(\text{où } \partial_i\Phi \text{ est une notation abrégée pour } \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right)$
on a ([26] p. 160)

$$(\mathfrak{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_j \Phi_k + \delta^i_k \Phi_j - g_{jk}\Phi^i \tag{2-9}$$

d'où

$$\mathfrak{L}(\xi)R^i_{jkl} = -\nabla_k \Phi_j \delta^i_l + \nabla_l \Phi_j \delta^i_k - g_{jk}\nabla_l \Phi^i + g_{jl}\nabla_k \Phi^i \tag{2-10}$$

et

$$\mathfrak{L}(\xi)R_{ij} = -(n-2)\nabla_j\Phi_i - g_{ij}\nabla_p\Phi^p. \tag{2-11}$$

Considérons le tenseur de courbure conforme donné par

$$C^h{}_{ijk} = R^h{}_{ijk} + \frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik}R^h{}_j - g_{ij}R^h{}_k) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}),$$

pour tout vecteur conforme ξ

$$\mathfrak{L}(\xi)C^h{}_{ijk} = 0.$$

PREMIÈRE PARTIE

Transformations locales définies par l'holonomie infinitésimale.

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS

§ 3. — Coordonnées normales et tenseurs normaux.

Soit V_n un espace riemannien; dans cette première partie nous ferons fréquemment usage des coordonnées normales ([25], p. 84). Nous rappelons que, pour définir un système de coordonnées normales d'origine O, on mène les différentes géodésiques issues de O, θ^i $(i = 1, 2 \ldots n)$ désignant les composantes par rapport à un repère quelconque d'origine O du vecteur unitaire tangent en O à la géodésique OM, les coordonnées normales du point M sont :

$$x^i = \theta^i s$$

où s est la longueur de l'arc de géodésique OM. Dans ce paragraphe les coordonnées locales employées sont les coordonnées normales. Γ^i_{jk} désignant les coefficients de la connexion riemannienne, on a, au point M

$$\Gamma^i_{jk} x^j x^k = 0$$

et à l'origine O

$$(\Gamma^i_{jk})_0 = 0$$

rappelons encore la relation :

$$s^2 = (g_{ij})_0 x^i x^j.$$

Considérons maintenant les dérivées en O des coefficients Γ^i_{jk}

$$(A^i_{jkl})_0 = (\partial_l \Gamma^i_{jk})_0, \qquad \ldots, \qquad (A^i_{jkl\ldots r})_0 = (\partial_{l\ldots r}\Gamma^i_{jk})_0.$$

Si on rapporte l'espace à des coordonnées normales d'origine M variable, on définit des ensembles de fonctions des coordonnées de M. On sait que ces fonctions sont les composantes de tenseurs, au tenseur $A^i_{jkl\ldots r}$ *à* $_{p+2}$ indices on donne le nom de tenseur normal d'ordre p ([25] p. 102). Nous aurons besoin dans la suite des composantes des tenseurs normaux d'ordre 2 et 3 calculées en fonction des composantes du tenseur de courbure. Nous suivrons pour cela la méthode indiquée par Elie-Cartan ([2], p. 243). Au point O nous attachons un repère R_0 et en tout point M d'un voisinage convenable de O le repère déduit de R_0 par transport par parallélisme, le long de la géodésique OM. Nous désignerons par θ^i et ω^i_j les formes qui définissent le déplacement de ce repère, elles s'écrivent en posant $x^i = a^i t$, les a^i restant constants le long d'une géodésique issue de O

$$\text{(3-1)} \qquad \begin{cases} \theta^i = a^i\, dt + \theta'^i(t,\ a,\ da) \\ \omega^i_j = \omega'^i_j(t,\ a,\ da) \end{cases}$$

où les θ'^i, ω'^i_j sont de la forme

$$\begin{cases} \theta'^i = \alpha^i_j(t,\ a)\, da^j \\ \omega'^i_j = \gamma^i_{jk}(t,\ a)\, da^k. \end{cases}$$

Partons des équations de structure

$$\text{(3-2)} \qquad \begin{cases} d\theta^i = \omega^i_r \wedge \theta^r \\ d\omega^i_j = -\,\omega^i_r \wedge \omega^r_j + \dfrac{1}{2} R^i_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l. \end{cases}$$

Remplaçons θ^i et ω^i_j par leurs expressions (3-1), on obtient

$$\text{(3-3)} \qquad \begin{cases} \partial_t \theta'^i = da^i + a^l \omega'^i_l \\ \partial_t \omega'^i_j = R^i_{jkl} a^l \theta'^k. \end{cases}$$

On en déduit un développement limité de θ'^i et ω'^i_j suivant les puissances de t, et, en revenant aux formes θ^i et ω^i_j et aux coordonnées normales, on a :

$$\text{(3-4)} \qquad \begin{cases} \theta^i = dx^i + \dfrac{1}{6}(R^i_{lkr})_0\, x^l x^k\, dx^r + \dfrac{1}{12}(\nabla_s R^i_{lkr})_0\, x^l x^r x^s\, dx^k \\ \omega^i_j = \dfrac{1}{2}(R^i_{jkl})_0\, x^l\, dx^k + \dfrac{1}{3}(\nabla_r R^i_{jkl})_0\, x^l x^r\, dx^k. \end{cases}$$

En repassant au repère naturel relatif aux coordonnées normales d'origine O, il en résulte, en utilisant l'identité de Bianchi, le développement de Γ^i_{jk}

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{3}[R^i_{\ jkl} + R^i_{\ kjl}]_0 x^l + \frac{1}{12}[4\nabla_r R^i_{\ jkl} + \nabla_r R^i_{\ kjl} + \nabla_k R^i_{\ ljr} + \nabla_l R^i_{\ jrk}]_0 x^l x^r,$$

d'où les composantes des tenseurs normaux

$$\text{(3-5)} \qquad A^i_{\ jku} = \frac{1}{3}(R^i_{\ jku} + R^i_{\ kju}),$$

$$\text{(3-6)} \qquad A^i_{\ jkuv} = \frac{1}{12}[(\nabla_j R_{kuiv} + \nabla_j R_{kviu}) - 2(\nabla_v R_{jiku} + \nabla_u R_{jikv}) - 3(\nabla_v R_{juki} + \nabla_u R_{jvki})]$$

et, par contraction

$$\text{(3-7)} \qquad A^i_{\ iku} = -\frac{1}{3}R_{ku},$$

$$\text{(3-8)} \qquad A^i_{\ ikuv} = -\frac{1}{6}(\nabla_v R_{ku} + \nabla_k R_{uv} + \nabla_u R_{vk}).$$

§ 4. — Définition des transformations étudiées.

Sur une variété différentiable Vn munie d'une connexion linéaire considérons un champ de tenseurs $A^i_{\ ji_1 \dots i_p}$; les tenseurs en un point O

$$(A^i_{\ ji_1 \dots i_p} V^{i_1}_1 \dots V^{i_p}_p)_0, \ \dots, (\nabla_{j_1} \dots \nabla_{j_r} A^i_{\ ji_1 \dots i_p} V^{i_1}_1 \dots V^{i_p}_p U^{j_1}_1 \dots U^{j_r}_r)_0,$$

où $V_1, \dots V_r$; $U_1, \dots U_r$; sont des vecteurs de l'espace vectoriel T_0 tangent en O, définissent des endomorphismes de T_0. Nous noterons en abrégé ces différents tenseurs par $\overset{0}{\alpha}{}^i_j, \dots, \overset{r}{\alpha}{}^i_j$, et les endomorphismes correspondants par $\overset{0}{\alpha}, \dots, \overset{r}{\alpha}$; l'indice r indiquant « l'ordre » de l'élément considéré sera supprimé lorsqu'il n'y aura pas lieu de préciser cet ordre. Si nous prenons pour A le tenseur de courbure, les tenseurs en O introduits ci-dessus que nous noterons $\overset{0}{\Omega}{}^i_j, \dots, \overset{r}{\Omega}{}^i_j$ engendrent l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie infinitésimale en O ([12], p. 133, [22]). A tout endomorphisme α correspond un groupe à un paramètre d'automorphismes de T_0, exp $(u\alpha)$, à un tel automorphisme, transformant le vecteur θ en le vecteur Θ', nous associons la transformation locale suivante : dans un voisinage convenable de O, à tout point M correspond la géodésique g passant par O et M, soit Θ le vecteur tangent en O à (g), on prend sur la géodésique (g') tangente en O à Θ' le point M' de paramètre canonique s' égal au paramètre canonique s de M. Si (x^i) sont les coordonnées normales de M dans un système de coordonnées normales d'origine O, ces transformations sont définie par le vecteur ξ dont les composantes en coordonnées normales d'origine O sont données par

$$\xi^i = (\mathfrak{a}^i{}_u)_0 x^u. \tag{4-1}$$

Nous désignerons par $\overset{0}{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{a}}, \ldots \overset{p}{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{a}}$ les transformations locales sur V ainsi associées au tenseur $\mathfrak{a}$. Nous allons plus particulièrement étudier les transformations $\mathfrak{T}_{\mathrm{R}}$ associées au tenseur de courbure R.

CHAPITRE II

TRANSFORMATIONS $\mathcal{T}_R$ SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

§ 5. — Cas où les transformations $\mathcal{T}_R$ sont affines.

Soit V une variété riemannienne, ξ étant le vecteur défini en coordonnées normales d'origine O par (4-1) on a, dans ce système de coordonnées

$$\partial_j\xi^i = (\alpha^i{}_j)_0, \ldots, \partial_{jk}\ldots\xi^i = 0,$$
$$(\nabla_j\xi^i)_0 = (\partial_j\xi^i)_0 = (\alpha^i{}_j)_0, \qquad (\partial_k\nabla_j\xi^i)_0 = 0$$

et

$$\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = g_{il}(\alpha^l{}_j)_0 + g_{jl}(\alpha^l{}_i)_0 + \partial_h g_{ij}(\alpha^h{}_u)_0 x^u. \tag{5-1}$$

Nous désignerons par H le tenseur introduit par Elie Cartan et défini par

$$H_{ijklmn} = \nabla_m\nabla_n R_{ijkl} - \nabla_n\nabla_m R_{ijkl}.$$

Nous appellerons espace (H) tout espace riemannien pour lequel ce tenseur est nul (1).

Nous allons étudier les espaces V pour lesquels les transformations $\mathcal{T}_R$ associées à un point quelconque O sont affines; on en déduit d'ailleurs immédiatement qu'elles sont isométriques; en effet, d'après (1-4), pour un vecteur affine ξ les opérateurs $\mathcal{L}$ et ∇ commutent, on a donc

$$\nabla\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = \mathcal{L}(\xi)\nabla g_{ij} = 0$$

d'autre part d'après (5-1)

$$(\mathcal{L}(\xi)g_{ij})_0 = (\Omega_{ij} + \Omega_{ji})_0 = 0,$$

(1) On sait [17] que si l'espace est de plus espace d'Einstein compact orientable, il est localement symétrique.

donc $$\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = 0.$$

Les transformations $\mathcal{T}$ étant affines

$$\mathcal{L}(\xi)R^i{}_{jkl} = \xi^q\nabla_q R^i{}_{jkl} - \nabla_q\xi^i R^q{}_{jkl} + \nabla_j\xi^q R^i{}_{qkl} + \nabla_k\xi^q R^i{}_{jql} + \nabla_l\xi^q R^i{}_{jkq} = 0$$

ce qui entraîne

$$(\mathcal{L}(\xi)R^i{}_{jkl})_0 = (\partial_r\mathcal{L}(\xi)R^i{}_{jkl})_0 = 0,$$

d'où

$$(R_{qjkl}\Omega^q{}_i + R_{iqkl}\Omega^q{}_j + R_{ijql}\Omega^q{}_k + R^i{}_{jkq}\Omega^q{}_l)_0 = 0,$$
$$(\Omega^q{}_r\nabla_q R^i{}_{jkl} - \Omega^i{}_q\partial_r R^q{}_{jkl} + \Omega^q{}_j\partial_r R^i{}_{qkl} + \Omega^q{}_k\partial_r R^i{}_{jql} + \Omega^q{}_l\partial_r R^i{}_{jkq})_0 = 0,$$

on en déduit alors les égalités tensorielles.

$$R_{qjkl}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{imn} + R_{iqkl}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn} + R_{ijql}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn} + R_{ijkq}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn} = 0, \tag{5-2}$$

$$\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{rmn}\nabla_q R^i{}_{jkl} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{imn}\nabla_r R_{qjkl} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}\nabla_r R_{iqkl} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn}\nabla_r R_{ijql} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}\nabla_r R_{ijkq} = 0. \tag{5-3}$$

Supposons simplement les transformations $\overset{0}{\mathcal{T}}_R$ affines (5-2) pour $p = 0$, est équivalente à $H = 0$.

Si les transformations $\overset{0}{\mathcal{T}}_R$, $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$ sont affines, par dérivation covariante de (5-2) pour $p = 0$ et, en tenant compte de (5-3) pour $p = 1$, on obtient

$$\nabla_{a_1}R_{qjkl}R^q{}_{imn} + \nabla_{a_1}R_{iqkl}R^q{}_{jmn} + \nabla_{a_1}R_{ijql}R^q{}_{kmn} + \nabla_{a_1}R_{ijkq}R^q{}_{lmn} = 0$$

d'où en utilisant (5-3) pour $p = 0$

$$R^q{}_{rmn}\nabla_q R^i{}_{jkl} = 0 \tag{5-4}$$

on en déduit par contraction

$$R^q{}_n\nabla_q R^i{}_{jkl} = 0$$

et si $$|R^q{}_n| \neq 0$$
il en résulte

$$\nabla_q R^i{}_{jkl} = 0.$$

Supposons maintenant les transformations $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$ et $\overset{2}{\mathcal{T}}_R$ affines; par dérivation covariante de (5-2) pour $p = 1$, et en tenant compte de (5-2) pour $p = 2$, il vient

$$\nabla_a R_{qjkl}\nabla_b R^q{}_{imn} + \nabla_a R_{iqkl}\nabla_b R^q{}_{jmn} + \nabla_a R_{ijql}\nabla_b R^q{}_{kmn} + \nabla_a R_{ijkq}\nabla_b R^q{}_{lmn} = 0,$$

et, en utilisant (5-3) pour $p = 1$

$$\nabla_a R^q{}_{bmn} \nabla_q R^i{}_{jkl} = 0 \tag{5-5}$$

ce qui peut s'écrire, d'après la deuxième identité de Bianchi

$$\nabla_a R^q{}_{bmn} \nabla_k R_{lqij} + \nabla_a R^q{}_{bmn} \nabla_l R_{qkij} = 0 \tag{5-6}$$

d'où, par contraction de b et l, m et i, n et j, a et k

$$\nabla^k R^{qlij} \nabla_k R_{lqij} + \nabla^k R^{qlij} \nabla_l R_{qkij} = 0 \tag{5-7}$$

mais de (5-5) on déduit par contraction de b et k, m et i, n et j, a et l

$$\nabla^l R^{qkij} \nabla_q R_{klij} = 0$$

(5-7) se réduit alors à

$$\nabla^k R^{qlij} \nabla_k R_{qlij} = 0 \tag{5-8}$$

si V est proprement riemannien, il en résulte :

$$\nabla_k R_{qlij} = 0.$$

THÉORÈME. — *Soit* V *un espace riemannien; si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$ *sont affines,* V *est un espace* (H). *Si la courbure de* Ricci *est non dégénérée* (resp. *si* V *est proprement riemannien*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$, $\overset{1}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$ (*resp.* $\overset{1}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$, $\overset{2}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$) *sont affines,* V *est localement symétrique.*

Remarque. — Soit $\mathfrak{a}^i{}_j$ un tenseur quelconque vérifiant $|\mathfrak{a}^i{}_j| \neq 0$ par un calcul analogue à celui que nous avons fait, on montre que si un tenseur t est invariant par les endomorphismes $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ et par les transformations $\overset{0}{\mathcal{T}}_{\mathfrak{a}}$ alors $\nabla t = 0$.

§ 6. — Cas où les transformations $\mathcal{T}_{\mathrm{R}}$ sont projectives ou conformes.

Dans tout ce paragraphe V est supposé espace d'Einstein.

1° Dans ce cas le tenseur de courbure projectif s'écrit :

$$W^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} - \frac{R}{n(n-1)} (\delta^i{}_l g_{jk} - \delta^i{}_k g_{jl}),$$

pour tout vecteur projectif ξ de

$$\mathcal{L}(\xi)\, W^i{}_{jkl} = 0$$

on déduit

$$\mathcal{L}(\xi)\, R^{i}{}_{jkl} = \frac{R}{n(n-1)} [\delta^i_l \mathcal{L}(\xi)\, g_{jk} - \delta^i_k \mathcal{L}(\xi)\, g_{jl}]$$

$$= \frac{R}{n(n-1)} [\delta^i_l (\nabla_j \xi_k + \nabla_k \xi_j) - \delta^i_k (\nabla_j \xi_l + \nabla_l \xi_j)]$$

d'où, en tenant compte de

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$$

et de

$$(\partial_k \nabla_j \xi^i)_0 = 0,$$

$$(\mathcal{L}(\xi) R^{i}{}_{jkl})_0 = (\partial_r \mathcal{L}(\xi) R^{i}{}_{jkl})_0 = 0;$$

on en tire les mêmes conclusions qu'au paragraphe précédent.

2° Le tenseur de courbure conforme dans le cas d'un espace d'Einstein est identique au tenseur de courbure projectif, nous pouvons donc énoncer.

Théorème. — *Soit* V *un espace d'Einstein. Si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_R$ *sont projectives ou conformes* V *est un espace* (H). *Si la courbure scalaire est non nulle* (*resp. si* V *est proprement riemannien*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_R$, $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$ (*resp.* $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$, $\overset{2}{\mathcal{T}}_R$) *sont projectives ou conformes,* V *est localement symétrique.*

§ 7. — Invariance de l'élément de volume.

Si V est harmonique [15], [16], les transformations conservent évidemment l'élément de volume. Nous allons plus généralement étudier quelles conséquences entraînent pour V l'invariance de l'élément de volume par les transformations $\mathcal{T}_R$. L'invariance de l'élément de volume par une transformation définie par un vecteur ξ se traduit par

$$\mathcal{L}(\xi) g = \xi^r \partial_r g + 2g \partial_r \xi^r = 0.$$

Or, pour les vecteurs ξ considérés

$$\partial_r \xi^r = 0$$

et, la condition de conservation de l'élément de volume se réduit à

$$\xi^r \partial_r g = 0$$

d'où

$$(7\text{-}1)\qquad [\partial_{a_1\ldots a_n}(\xi^r\partial_r g)]_0 = 0$$

mais

$$(\xi^i)_0 = 0$$
$$\partial_a\xi^i = (\partial_a\xi^i)_0 = (\nabla_{a_1\ldots}\nabla_{a_p}R^i{}_{amn}U^mV^nU_1^{a_1}\ldots U_p^{a_p})_0$$
$$(\partial_{a\ldots l}\xi^i)_0 = 0$$

donc, dans (7-1) seuls sont différents de 0 les termes où figure une seule dérivation de ξ^r. (7-1) s'écrit alors :

$$(7\text{-}2)\qquad \left(S'\partial_{a_{i_1}}\xi^r\partial_{ra_{i_2}\ldots a_{i_n}}g\right)_0$$

où S' désigne la somme de tous les termes obtenus en remplaçant successivement a_{i_1} par $a_1,\ldots, a_n$. Partons maintenant de

$$\partial_r g = 2g\Gamma^i_{ir},$$

on peut écrire

$$\partial_{ra_1\ldots a_n}g = 2g\partial_{a_1\ldots a_n}\Gamma^i_{ir} + \Gamma^i_{ir}\partial_{a_1\ldots a_n}g + 2S'\partial_{a_{i_1}}g\partial_{a_{i_2}\ldots a_{i_n}}\Gamma^i_{ir}$$
$$+ 2\sum_{p=2}^{n-1} S\partial_{a_{i_1}\ldots a_{i_p}}g\partial_{a_{i_{p+1}}\ldots a_{i_n}}\Gamma^i_{ir}$$

où S' a la même signification que précédemment et où la somme S est étendue à toutes les combinaisons p à p des n nombres $a_1\ldots a_n$. En introduisant les tenseurs normaux, on a

$$(\partial_{ra_1\ldots a_n}g)_0 = \left[2gA^s{}_{sra_1\ldots a_n} + 2\sum_{p=2}^{n-1} S\partial_{a_{i_1}\ldots a_{i_p}}gA^s{}_{sra_{i_{p+1}}\ldots a_{i_n}}\right]_0$$
$$\left(\partial_{ra_{i_2}\ldots a_{i_n}}g\right)_0 = \left[2gA^s{}_{sra_{i_2}\ldots a_{i_n}} + 2\sum_{p=3}^{n-1} S''\partial_{a_{i_{j_2}}\ldots a_{i_{j_p}}}gA^s{}_{sra_{i_{j_{p+1}}}\ldots a_{i_{j_n}}}\right]_0$$

où la somme S'' est étendue à toutes les combinaisons de $p-1$ des $n-1$ nombres $i_2\ldots i_n$ (7.2) entraîne alors

$$(7.3)\qquad \Big[gS'\partial_{a_{i_1}}\xi^rA^s{}_{sra_{i_2}\ldots a_{i_n}}$$
$$+ S'\partial_{a_{i_1}}\xi^r\sum_{p=3}^{n-1}S''\partial_{a_{i_{j_2}}\ldots a_{i_{j_p}}}gA^s{}_{sra_{i_{j_{p+1}}}\ldots a_{i_{j_n}}}\Big]_0 = 0,$$

or on a

$$(\partial_a g)_0 = 0,$$
$$(\partial_{ab}g)_0 = 2(gA^s{}_{sab})_0,$$
$$(\partial_{ab}\mathcal{L}(\xi)g)_0 = (\partial_b\xi^h\partial_{ah}g + \partial_a\xi^h\partial_{hb}g)_0 = 2g(\partial_b\xi^hA^s{}_{sha} + \partial_a\xi^hA^s{}_{shb})_0 = 0,$$

on déduit alors de (7-3) par récurrence sur n

$$(7\text{-}4) \qquad \left(S\partial_{a_{i_1}}\xi^r A^s{}_{sra_{i_2}\dots a_{i_n}}\right)_0 = 0$$

d'où, si les $\mathcal{C}_R$ relatives à un point quelconque de V conservent l'élément de volume, (7-4) entraîne les égalités tensorielles qui généralisent les équations de Copson et Ruse des espaces harmoniques.

$$(7\text{-}5) \qquad \nabla_m\nabla_n A^s{}_{sa_1\dots a_n} - \nabla_n\nabla_m A^s{}_{sa_1\dots a_n} = 0.$$

Reprenons maintenant les équations (7-4) pour les tenseurs normaux d'ordre 2 et 3

$$(7\text{-}6) \qquad R^p{}_{imn}A^s{}_{spj} + R^p{}_{jmn}A^s{}_{sip} = 0$$

$$(7\text{-}7) \qquad R^p{}_{imn}A^s{}_{spjk} + R^p{}_{jmn}A^s{}_{sipk} + R^p{}_{kmn}A^s{}_{sijp} = 0$$

$$(7\text{-}8) \qquad \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_q}R^p{}_{imn}A^s{}_{spj} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_q}R^p{}_{jmn}A^s{}_{sip} = 0$$

$$(7\text{-}9) \qquad \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_q}R^p{}_{imn}A^s{}_{spjk} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_q}R^p{}_{jmn}A^s{}_{sipk} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_q}R^p{}_{kmn}A^s{}_{sijp} = 0.$$

En utilisant (3-7), (7-6) et (7-7) s'écrivent pour $q = 1$

$$(7\text{-}10) \qquad R^p{}_{imn}R_{pj} + R^p{}_{jmn}R_{ip} = 0$$

$$(7\text{-}11) \qquad \nabla_k R^p{}_{imn}R_{pj} + \nabla_k R^p{}_{jmn}R_{ip} = 0$$

d'où, par dérivation de (7-10), et, compte tenu de (7-11),

$$(7\text{-}12) \qquad R^p{}_{imn}\nabla_k R_{pj} + R^p{}_{jmn}\nabla_k R_{ip} = 0$$

(7-7) s'écrit, d'après (3-8)

$$(7\text{-}13) \qquad R^p{}_{imn}(\nabla_k R_{pj} + \nabla_p R_{jk} + \nabla_j R_{kp}) + R^p{}_{jmn}(\nabla_k R_{ip} + \nabla_i R_{pk} + \nabla_p R_{ki}) + R^p{}_{kmn}(\nabla_p R_{ij} + \nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi}) = 0.$$

En tenant compte des équations analogues à (7-12) déduites de (7-12) par permutation de i et k et par permutation de j et k (7.13) se réduit à

$$(7\text{-}14) \qquad R^p{}_{imn}\nabla_p R_{jk} + R^p{}_{jmn}\nabla_p R_{ki} + R^p{}_{kmn}\nabla_p R_{ij} = 0,$$

contractons i et k dans (7.12),

$$(7\text{-}15) \qquad R^{pi}{}_{mn}\nabla_i R_{pj} + \frac{1}{2} R^p{}_{jmn}\partial_p R = 0,$$

Contractons i et j dans (7.14)

$$2R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik} + R^p{}_{kmn}\partial_p R = 0,$$

d'où en comparant avec (7-15) (écrite en remplaçant j par k)

$$R^{pi}{}_{mn}\nabla_i R_{pk} = R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik},$$

or,

$$R^{pi}{}_{mn}\nabla_i R_{pk} = -R^{ip}{}_{mn}\nabla_i R_{pk} = -R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik},$$

d'où

$$R^{pi}{}_{mn}\nabla_p R_{ik} = 0$$

d'où, en utilisant la première identité de Bianchi

$$R^{p}{}_{mn}{}^{i}\nabla_p R_{ik} + R^{p}{}_{n}{}^{i}{}_{m}\nabla_p R_{ik} = 0.$$

On en déduit

$$R^{p}{}_{n}{}^{i}{}_{m}\nabla_i R_{pk} = R^{p}{}_{n}{}^{i}{}_{m}\nabla_p R_{ik}, \tag{7-16}$$

Contractons maintenant m et k dans (7-12)

$$R^{p}{}_{i}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{pj} + R^{p}{}_{j}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{ip} = 0, \tag{7-17}$$

contractons i et m dans (7-14), ce qui peut s'écrire, d'après (7-16),

$$R^{p}{}_{n}\nabla_p R_{jk} + R^{p}{}_{j}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{kp} + R^{p}{}_{k}{}^{m}{}_{n}\nabla_m R_{pj} = 0, \tag{7-18}$$

et, en comparant avec (7-17)

$$R^{p}{}_{n}\nabla_p R_{jk} = 0. \tag{7-19}$$

Considérons maintenant (7-8) pour $q = 2$,

$$\nabla_k\nabla_r R^{p}{}_{imn}R_{pj} + \nabla_k\nabla_r R^{p}{}_{jmn}R_{ip} = 0 \tag{7-20}$$

utilisons (7-8) pour $q = 1$, sous la forme

$$\nabla_r R^{p}{}_{imn}R_{pj} + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}R_{ip} = 0$$

par dérivation covariante, et en tenant compte de (7-20)

$$\nabla_r R^{p}{}_{imn}\nabla_k R_{pj} + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}\nabla_k R_{ip} = 0, \tag{7-21}$$

(7-9), pour $q = 1$, donne

$$\begin{aligned}\nabla_r R^{p}{}_{imn}(\nabla_k R_{pj} + \nabla_p R_{jk} + \nabla_j R_{kp}) \\ + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}(\nabla_k R_{ip} + \nabla_i R_{pk} + \nabla_p R_{ki}) \\ + \nabla_r R^{p}{}_{kmn}(\nabla_p R_{ij} + \nabla_i R_{jp} + \nabla_j R_{pi}) = 0,\end{aligned} \tag{7-22}$$

et, en tenant compte des équations analogues à (7-21) obtenues par permutation de i et k, puis j et k (7-22) se réduit à

$$\nabla_r R^{p}{}_{imn}\nabla_p R_{jk} + \nabla_r R^{p}{}_{jmn}\nabla_p R_{ki} + \nabla_r R^{p}{}_{kmn}\nabla_p R_{ij} = 0, \tag{7-23}$$

Contractons i et k, j et m, n et r dans (7-21), en utilisant les relations

$$\nabla_k R_i{}^h{}_{rs} = \nabla_r R_{is} - \nabla_s R_{ir}$$

et

$$\nabla_s R^s{}_r = \frac{1}{2} \nabla_r R,$$

il vient

$$(7\text{-}24) \qquad (\nabla^p R^{ji} - \nabla^i R^{jp}) \nabla_i R_{pj} + \frac{1}{4} \nabla^p R \nabla_p R = 0,$$

Contractons maintenant dans (7-21) i et m, j et r, k et n,

$$\nabla^j R^{pk} \nabla_k R_{pj} + (\nabla^i R^{pk} - \nabla^k R^{pi}) \nabla_k R_{ip} = 0$$

où

$$(7\text{-}25) \qquad (2\nabla^i R^{pk} - \nabla^k R^{pi}) \nabla_k R_{ip} = 0$$

contractons i et j, k et m, n et r, dans (7-23)

$$(7\text{-}26) \qquad (\nabla^p R^{ki} - \nabla^i R^{kp}) \nabla_p R_{ik} + \frac{1}{4} \nabla^p R \nabla_p R = 0.$$

Comparons cette équation avec (7-24) qui peut s'écrire

$$[\nabla^i R^{kp} - \nabla^p R^{ki}] \nabla_p R_{ik} + \frac{1}{4} \nabla^p R \nabla_p R = 0$$

on en déduit

$$\nabla^p R \nabla_p R = 0$$

et

$$(\nabla^i R^{kp} - \nabla^p R^{ki}) \nabla_p R_{ik} = 0$$

et, dans (7-25) on peut alors remplacer $\nabla^i R^{pk} \nabla_k R_{ip}$ par $\nabla^p R^{ki} \nabla_p R_{ik}$, (7-25) se réduit alors à

$$\nabla^k R^{ip} \nabla_k R_{ip} = 0.$$

Théorème. — *Soit* V *un espace riemannien. Si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$ *conservent l'élément de volume,* V *vérifie le système infini de relations*

$$\nabla_m \nabla_n A^s{}_{sa_1 \ldots a_p} - \nabla_n \nabla_m A^s{}_{sa_1 \ldots a_p} = 0.$$

Si la courbure de Ricci est non dégénérée (resp. si V *est proprement riemannien) et si les transformations* $\overset{0}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$ *(resp.* $\overset{1}{\mathfrak{T}}_R$, $\overset{2}{\mathfrak{T}}_R$*) conservent l'élément de volume, le tenseur de Ricci de* V *est à dérivée covariante nulle.*

Considérons maintenant les transformations locales notées $\overset{1}{\theta}_R$ définies par les vecteurs donnés en coordonnées normales d'origine O par

$$\eta^p = (\nabla_u R^p{}_{kmn} U^m V^n W^k)_0\, x^u,$$

on a

$$\partial_r \eta^p = (\nabla_r R^p{}_{kmn} U^m V^n W^k)_0.$$

En nous plaçant dans le cas où l'espace est espace d'Einstein

$$\nabla_r R^r{}_{kmn} = 0$$

donc

$$\partial_r \eta^r = 0$$

la conservation de l'élément de volume par les transformations $\overset{1}{\theta}_R$ se traduit comme précédemment par les relations

$$(S\partial_{a_{i_1}} \eta^r A^s{}_{sra_{i_2} \dots a_{i_n}})_0 = 0,$$

Considérons simplement l'équation

$$\partial_i \eta^p A^s{}_{spj} + \partial_j \eta^p A^s{}_{sip} = 0, \tag{7-27}$$

dans le cas d'un espace d'Einstein,

$$A^s{}_{sij} = -\frac{R}{3n} g_{ij},$$

(7-27) donne alors

$$\nabla_j R_{mnki} + \nabla_i R_{mnkj} = 0 \tag{7-28}$$

utilisons maintenant l'identité de Bianchi :

$$\nabla_j R_{mnki} + \nabla_k R_{mnij} + \nabla_i R_{mnjk} = 0 \tag{7-29}$$

par addition de (7-28) et (7-29), il vient

$$2\nabla_j R_{mnki} + \nabla_k R_{mnij} = 0 \tag{7-30}$$

mais, d'après (7-28)

$$\nabla_k R_{mnij} + \nabla_j R_{mnik} = 0, \tag{7-31}$$

et de (7-30) et (7-31) on déduit par soustraction

$$\nabla_j R_{mnki} = 0$$

nous pouvons donc énoncer, en reprenant les résultats précédents :

THÉORÈME. — *Soit* V*n un espace riemannien. Si la courbure de Ricci est non dégénérée (resp. si* V*n est proprement riemannien) et si les transformations* $\overset{1}{\theta}_R$, $\overset{0}{\mathcal{C}}_R$, $\overset{1}{\mathcal{C}}_R$ (*resp.* $\overset{1}{\theta}_R$, $\overset{1}{\mathcal{C}}_R$, $\overset{2}{\mathcal{C}}_R$) *conservent l'élément de volume,* V*n est localement symétrique.*

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS $\mathcal{T}_R$ SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

§ 8. — Variété analytique complexe :

(Voir par exemple [12], p. 219)

Dans ce paragraphe nous donnons les définitions et notations utilisées dans la suite du chapitre. Soit V_{2n} une variété à $2n$ dimensions, rappelons qu'une carte locale complexe ou système de coordonnées locales complexes est un homéomorphisme d'un ouvert U de V_{2n} sur un ouvert de C^n; U est dit le domaine de la carte. Ainsi se trouve associé à chaque point x de U un système de n nombres complexes z^α qui sont dits coordonnées locales complexes de U. La variété est dite analytique complexe s'il existe un ensemble A de cartes locales complexes satisfaisant aux deux axiomes suivants :

A_1 La réunion des domaines des cartes de A est identique à V_{2n}.

A_2 Si $x \in U_1 \cap U_2$ où U_1 et $U_2 \in A$, les coordonnées complexes de x dans l'une des cartes sont des fonctions analytiques complexes à jacobien non nul des coordonnées de x dans l'autre carte, (z^α) étant un système de coordonnées locales complexes, nous posons

$$z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^\alpha + ix^{\alpha^*}) \qquad \alpha^* = \alpha + n;$$

les $2n$ nombres réels x sont dits les coordonnées locales réelles associées aux coordonnées locales complexes. Si à ces $2n$ coordonnées nous substituons les $2n$ nombres complexes,

$$z^\alpha, \qquad z^{\alpha^*} = \overline{z^\alpha}.$$

Les formes $(dz^\alpha, dz^{\alpha^*})$ définissent un repère de $(T_x{}^C)^*$, espace vectoriel complexifié de l'espace $(T_x)^*$ dual de l'espace des vecteurs tangents en x, par dualité on en déduit un repère (e_α, e_{α^*}) de $T_x{}^C$ complexifié de T_x. C'est à de tels repères que nous rapporterons les tenseurs de la variété analytique complexe. La structure analytique complexe de V_{2n} définit un opérateur $\mathfrak{J}$ ($\mathfrak{J}^2 = -$identité) dont le tenseur associé a pour composantes :

$$\Phi_\alpha{}^\beta = i\delta^\beta_\alpha, \qquad \Phi_{\alpha^*}{}^{\beta^*} = -i\delta^{\beta^*}_{\alpha^*}, \qquad \Phi_\alpha{}^{\beta^*} = \Phi_{\alpha^*}{}^\beta = 0.$$

Un tenseur est réel s'il satisfait à la condition suivante : les composantes complexes qui se déduisent l'une de l'autre en étoilant tous les indices sont complexes conjuguées. Une variété analytique complexe est dite hermitienne si elle admet une structure de variété proprement riemannienne telle que le produit scalaire de deux vecteurs et celui de leurs images par $\mathfrak{J}$ soient égaux. La métrique hermitienne peut alors s'écrire

$$ds^2 = 2g_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha\, dz^{\beta^*}.$$

La variété est dite Kählerienne si la forme associée

$$ig_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}$$

est fermée; elle est alors à dérivée covariante nulle. Il en résulte des conséquences pour le tenseur de courbure : les seules composantes non nulles sont, aux conjugaisons près, celles de la forme $R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*}$, et, dans une telle composante on peut permuter deux indices étoilés et deux indices non étoilés.

§ 9. — Variété kahlérienne. Cas où les transformations $\mathfrak{T}_R$ sont analytiques.

Sur une variété analytique complexe, dire qu'une transformation est analytique, c'est dire que cette transformation laisse invariante la structure analytique complexe, ou, ce qui est équivalent l'opérateur $\mathfrak{J}$. Soit d'une manière générale sur une variété riemannienne V un tenseur $\Phi_j{}^i$ à dérivée covariante nulle; supposons ce tenseur invariant par les transformations $\mathcal{C}_R$; ξ désignant le vecteur associé à une telle transformation, en utilisant :

$$\nabla_p \Phi_j^i = 0$$

on a

$$\text{(9-1)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}(\xi)\,\Phi_j^i &= (\Omega^h{}_j)_0\,\Phi_h{}^i - (\Omega^i{}_h)_0\,\Phi_j{}^h + \partial_p\Phi_j{}^i(\Omega^p{}_k)_0\,x^k \\ (\mathcal{L}(\xi)\,\Phi_j^i)_0 &= (\partial_a\mathcal{L}(\xi)\,\Phi_j^i)_0 = 0 \end{aligned}$$

et

$$(\partial_{ab}\mathcal{L}(\xi)\,\Phi_j^i)_0 = (\Omega^h{}_j\partial_{ab}\Phi_h{}^i - \Omega^i{}_h\partial_{ab}\Phi_j{}^h + \partial_{ap}\Phi_j{}^i\Omega^p{}_b + \partial_{bp}\Phi_j{}^i\Omega^p{}_a)_0$$

$$\begin{aligned}(\partial_{abc}\mathcal{L}(\xi)\,\Phi_j^i)_0 = (&\Omega^h{}_j\partial_{abc}\Phi_h{}^i - \Omega^i{}_h\partial_{abc}\Phi_j{}^h \\ &+ \partial_{abp}\Phi_j{}^i\Omega^p{}_c + \partial_{acp}\Phi_j{}^i\Omega_b{}^p + \partial_{bcp}\Phi_j{}^i\Omega^p{}_a)_0\end{aligned}$$

(où les Ω sont les tenseurs définis au paragraphe 4) d'autre part, de :

$$\partial_a\Phi_j^i = \Gamma^h_{aj}\Phi_h{}^i - \Gamma^i_{ah}\Phi_j{}^h,$$

on déduit

$$(\partial_{ab}\Phi_j^i)_0 = (\partial_b\Gamma^h_{aj}\Phi_h{}^i - \partial_b\Gamma^i_{ah}\Phi_j{}^h)_0$$

et

$$(\partial_{abc}\Phi_j^i)_0 = (\partial_{bc}\Gamma^q_{aj}\Phi_q{}^i - \partial_{bc}\Gamma^i_{aq}\Phi_j{}^q)_0.$$

Le tenseur Φ étant invariant par la transformation $\mathcal{C}$:

$$\text{(9-2)} \qquad (\partial_{ab}\mathcal{L}(\xi)\Phi_j^i)_0 = (\partial_{abc}\mathcal{L}(\xi)\Phi_j^i)_0 = 0.$$

Nous allons expliciter ces relations, en remplaçant, d'après

$$\nabla_k\nabla_l\Phi_j^i - \nabla_l\nabla_k\Phi_j^i = 0,$$

$$\partial_a\Gamma^q_{bj}\Omega^i{}_h\Phi_q{}^h \qquad \text{par} \qquad \partial_a\Gamma^h_{bj}\Omega^q{}_h\Phi_q{}^i,$$

et

$$\partial_a\Gamma^i_{bq}\Omega^h{}_j\Phi_h{}^q \qquad \text{par} \qquad \partial_a\Gamma^i_{bh}\Omega^h{}_q\Phi_j{}^q;$$

et de même

$$\partial_{bc}\Gamma^i_{aq}\Phi_h{}^q\Omega^h{}_j \qquad \text{par} \qquad \partial_{bc}\Gamma^i_{ap}\Omega^p{}_q\Phi_j{}^q$$

et

$$\partial_{bc}\Gamma^q_{aj}\Phi_q{}^h\Omega^i{}_h \qquad \text{par} \qquad \partial_{bc}\Gamma^p_{aj}\Omega^q{}_p\Phi_q{}^i.$$

Introduisons d'autre part les tenseurs normaux $A^i{}_{jabcl}$, en remarquant les symétries pour a et j d'une part et pour deux quelconques des indices $b, c, \ldots l$ d'autre part. Les équations (9.2) entraînent :

$$\text{(9-3)} \qquad \begin{aligned}&[A_{pbja}\Omega^p{}_q + A_{qpja}\Omega^p{}_b + A_{qbpa}\Omega^p{}_j + A_{qbjp}\Omega^p{}_a]\Phi_i{}^q \\ &+ [A_{pbqa}\Omega^p{}_i + A_{ipqa}\Omega^p{}_b + A_{ibpa}\Omega^p{}_q + A_{ibqp}\Omega^p{}_a]\Phi_j{}^q = 0\end{aligned}$$

et

$$(9\text{-}4)\quad [A_{pbjac}\Omega^p{}_q + A_{qpjac}\Omega^p{}_b + A_{qbpac}\Omega^p{}_j + A_{qbjpc}\Omega^p{}_a + A_{qpjab}\Omega^p{}_c]\Phi_i^q$$
$$+ [A_{pbqac}\Omega^p{}_i + A_{ipqac}\Omega^p{}_b + A_{ibpac}\Omega^p{}_q + A_{ibqpc}\Omega^p{}_a + A_{ipqab}\Omega^p{}_c]\Phi_j^q = 0.$$

Supposons maintenant que V est une variété kählerienne et calculons les composantes des tenseurs normaux dans un repère adapté à la structure complexe. D'après les calculs du paragraphe 3, et, en utilisant les relations classiques entre les composantes du tenseur de courbure d'un espace kählerien, on voit que les seules composantes non nulles des tenseurs normaux sont données, aux conjugaisons et symétriques près, par

$$A_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = \frac{1}{3} R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*}, \qquad A_{\alpha\beta^*\gamma^*\delta} = \frac{2}{3} R_{\alpha\beta^*\gamma^*\delta},$$
$$A_{\eta\zeta\mu\alpha^*\beta^*} = \frac{1}{6} \nabla_\zeta R_{\eta\alpha^*\mu\beta^*}, \qquad A_{\eta\zeta\mu^*\alpha\beta^*} = \frac{1}{6} \nabla_\zeta R_{\eta\mu^*\alpha\beta^*},$$
$$A_{\eta\zeta\mu^*\alpha^*\beta^*} = \frac{1}{2} \nabla_{\alpha^*} R_{\eta\beta^*\zeta\mu^*}, \qquad A_{\eta\zeta^*\mu^*\alpha\beta} = \frac{5}{6} \nabla_\alpha R_{\eta\zeta^*\mu^*\beta},$$
$$A_{\eta\zeta^*\mu^*\alpha^*\beta} = \frac{1}{2} \nabla_{\zeta^*} R_{\eta\mu^*\alpha^*\beta}.$$

Prenons maintenant pour Φ le tenseur définissant la structure complexe, les équations (9-3) et (9-4) deviennent alors, aux conjugaisons et aux symétries près :

$$(9\text{-}5)\quad R_{\mu\beta^*\zeta\alpha^*}\Omega^\mu{}_\eta + R_{\eta\mu^*\zeta\alpha^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\beta^*} + R_{\eta\beta^*\mu\alpha^*}\Omega^\mu{}_\zeta + R_{\eta\beta^*\zeta\mu^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\alpha^*} = 0,$$
$$(9\text{-}6)\quad \nabla_\gamma R_{\mu\beta^*\zeta\alpha^*}\Omega^\mu{}_\eta + \nabla_\gamma R_{\eta\mu^*\zeta\alpha^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\beta^*} + \nabla_\gamma R_{\eta\beta^*\mu\alpha^*}\Omega^\mu{}_\zeta$$
$$+ \nabla_\gamma R_{\eta\beta^*\zeta\mu^*}\Omega^{\mu^*}{}_{\alpha^*} + \nabla_\mu R_{\eta\alpha^*\zeta\beta^*}\Omega^\mu{}_\gamma = 0$$

avec l'équation analogue en remplaçant simplement γ par γ^*, on voit immédiatement que ces équations entraînent les équations (5-2) et (5-3).

THÉORÈME. — *Soit* V *une variété kählerienne, si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$ *sont analytiques,* V *est une variété* (H). *Si la courbure de Ricci est non dégénérée* (*resp. si* V *est proprement riemannienne*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$, $\overset{1}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$ (*resp.* $\overset{1}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$, $\overset{2}{\mathcal{T}}_{\mathrm{R}}$) *sont analytiques,* V *est localement symétrique.*

§ 10. — Variétés kählériennes : cas où les transformations $\mathcal{T}_R$ sont projectives ou conformes.

1° Soit V_{2n} une variété kählerienne, les transformations $\mathcal{T}_R$ sont supposées projectives, alors

$$\mathcal{L}(\xi)W^i{}_{jkl} = 0$$

d'où

$$\mathcal{L}(\xi)R^i{}_{jkl} = \frac{1}{2n-1}(\delta^i{}_l\mathcal{L}(\xi)R_{jk} - \delta^i{}_k\mathcal{L}(\xi)R_{jl})$$
$$= \frac{1}{2n-1}[\delta^i_l(\xi^a\nabla_a R_{jk} + \nabla_j\xi^a R_{ak} + \nabla_k\xi^a R_{ja}) - \delta^i_k(\xi^a\nabla_a R_{jl} + \nabla_j\xi^a R_{al} + \nabla_l\xi^a R_{ja})]$$

on en déduit

$$(\mathcal{L}(\xi)R^i{}_{jkl})_0 = \frac{1}{2n-1}[\delta^i_l(\Omega^a{}_j R_{ak} + \Omega^a{}_k R_{ja}) - \delta^i_k(\Omega^a{}_j R_{al} + \Omega^a{}_l R_{ja})]_0$$

$$(\partial_r\mathcal{L}(\xi)\,R^i{}_{jkl})_0 = \frac{1}{2n-1}[\delta^i_l(\Omega^q{}_r\nabla_a R_{jk} + \Omega^a{}_j\nabla_r R_{ak} + \Omega^a{}_k\nabla_r R_{ja}) - \delta^i_k(\Omega^a{}_r\nabla_a R_{jl} + \Omega^a{}_j\nabla_r R_{al} + \Omega^a{}_l\nabla_r R_{ja})]_0,$$

d'où les égalités tensorielles :

$$(10\text{-}1)\quad R_{qjkl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{imn} + R_{iqkl}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn} + R_{ijql}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn} + R_{ijkq}\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}$$
$$= \frac{1}{2n-1}[g_{il}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}R_{qk} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn}R_{jq}) - g_{ik}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}R_{ql} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}R_{jq})],$$

$$(10\text{-}2)\quad \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{ijkl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{imn}\nabla_r R_{qjkl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}\nabla_r R_{iqkl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn}\nabla_r R_{ijql}$$
$$+ \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}\nabla_r R_{ijkq} = \frac{1}{2n-1}[g_{il}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{jk} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}\nabla_r R_{qk} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{kmn}\nabla_r R_{jq})$$
$$- g_{ik}(\nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{jl} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{jmn}\nabla_r R_{ql} + \nabla_{a_1}\ldots\nabla_{a_p}R^q{}_{lmn}\nabla_r R_{jq})].$$

Considérons l'équation (10-1) pour $p = 0$ et écrivons-la pour des indices i, j, k, l de la forme α, β^*, γ, δ^*.

$$(10\text{-}3)\quad R_{q\beta^*\gamma\delta^*}R^q{}_{\alpha mn} + R_{\alpha q\gamma\delta^*}R^q{}_{\beta^* mn} + R_{\alpha\beta^* q\delta^*}R^q{}_{\gamma mn} + R_{\alpha\beta^*\gamma q}R^q{}_{\delta^* mn} = \frac{1}{2n-1}[g_{\alpha\delta^*}(R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q})].$$

Remarquons d'abord que

$$R_{q\beta^*\gamma\delta^*}R^q{}_{\alpha mn} + R_{\alpha\beta^*\gamma q}R^q{}_{\delta^* mn} = R_{\lambda\beta^*\gamma\delta^*}R^\lambda{}_{\alpha mn} + R_{\alpha\beta^*\gamma\lambda^*}R^{\lambda^*}{}_{\delta^* mn} = R_{\lambda\delta^*\gamma\beta^*}R^\lambda{}_{\alpha mn} + R_{\alpha\lambda^*\gamma\beta^*}R^{\lambda^*}{}_{\delta^* mn};$$

en contractant α et δ^*, on a :

$$R_{\lambda\alpha^*\gamma\beta^*}R^{\lambda\alpha^*}{}_{mn} + R_{\alpha\lambda^*\gamma\beta^*}R^{\lambda^*\alpha}{}_{mn} = R_{\lambda\alpha^*\gamma\beta^*}R^{\lambda\alpha^*}{}_{mn} - R_{\alpha\lambda^*\gamma\beta^*}R^{\alpha\lambda^*}{}_{mn} = 0$$

à partir de (10-3) on obtient donc, par contraction de α et δ^*

$$R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q} = \frac{n}{2n-1}(R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q}),$$

d'où, pour $n > 1$

$$R^q{}_{\beta^* mn}R_{q\gamma} + R^q{}_{\gamma mn}R_{\beta^* q} = 0$$

l'équation (10-3) se réduit alors à

$$H_{\alpha\beta^*\gamma\delta^* mn} = 0.$$

Par dérivation covariante de (10-1) pour $p = 0$, et, en tenant compte de (10-1) pour $p = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla_{a_1}R_{qjkl}R^q{}_{imn} + \nabla_{a_1}R_{iqkl}R^q{}_{jmn} + \nabla_{a_1}R_{ijql}R^q{}_{kmn} + \nabla_{a_1}R_{ijkq}R^q{}_{lmn} \\ = \frac{1}{2n-1}[g_{il}(R_{qjmn}\nabla_{a_1}R_{qk} + R_{qkmn}\nabla_{a_1}R_{jk}) \\ - g_{ik}(R^q{}_{jmn}\nabla_{a_1}R_{ql} + R^q{}_{lmn}\nabla_{a_1}R_{iq})],\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (10-2) pour $p = 0$

$$R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{ijkl} = \frac{1}{2n-1}R^q{}_{rmn}[g_{il}\nabla_q R_{jk} - g_{ik}\nabla_q R_{jl}],$$

en contractant r et m et, en supposant la courbure de Ricci non dégénérée, on en déduit :

$$\text{(10-4)} \qquad \nabla_q R_{ijkl} = \frac{1}{2n-1}(g_{il}\nabla_q R_{jk} - g_{ik}\nabla_q R_{jl})$$

Écrivons cette équation pour les indices i, j, k, l de la forme α, β^*, γ, δ^*, on aura alors :

$$\text{(10-5)} \qquad \nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = \frac{1}{2n-1}g_{\alpha\delta^*}\nabla_q R_{\beta^*\gamma}$$

contractons α et δ^*, on en déduit, pour $n > 1$

$$\nabla_q R_{\beta^*\gamma} = 0$$

et (10-5) donne alors

$$\nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = 0.$$

Par dérivation covariante de (10-1) pour $p = 1$, et, en tenant compte de (10-2) pour $p = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla_{a_1}R_{qjkl}\nabla_{a_2}R^q{}_{imn} &+ \nabla_{a_1}R_{iqkl}\nabla_{a_2}R^q{}_{jmn}\\ &+ \nabla_{a_1}R_{ijql}\nabla_{a_2}R^q{}_{kmn} + \nabla_{a_1}R_{ijkq}\nabla_{a_2}R^q{}_{lmn}\\ &= \frac{1}{2n-1}[g_{il}(\nabla_{a_2}R^q{}_{jmn}\nabla_{a_1}R_{qk} + \nabla_{a_2}R^q{}_{kmn}\nabla_{a_1}R_{jq})\\ &\quad - g_{ik}(\nabla_{a_2}R^q{}_{jmn}\nabla_{a_1}R_{ql} + \nabla_{a_2}R^q{}_{lmn}\nabla_{a_1}R_{jq})],\end{aligned}$$

et, en utilisant (10-2) pour $p = 1$

$$(10\text{-}6)\quad \nabla_a R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{ijkl} = \frac{1}{2n-1}\nabla_a R^q{}_{rmn}(g_{il}\nabla_q R_{jk} - g_{ik}\nabla_q R_{jl}).$$

Prenons encore les indices i, j, k, l de la forme α, β^*, γ, δ^*

$$(10\text{-}7)\quad \nabla_a R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = \frac{1}{2n-1}\nabla_a R^q{}_{rmn}g_{\alpha\delta^*}\nabla_q R_{\beta^*\gamma}$$

contractons α et δ^*, on en déduit pour $n > 1$

$$\nabla_a R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{\beta^*\gamma} = 0$$

(10-7) se réduit alors à

$$\nabla_a R^q{}_{rmn}\nabla_q R_{\alpha\beta^*\gamma\delta^*} = 0$$

ce qui, dans le cas kählerien est l'équation (5-5).

2° Nous allons maintenant étudier le cas où les transformations $\mathcal{C}_R$ sont conformes, ξ étant le vecteur définissant la transformation locale $\mathcal{C}_R$, rappelons que l'on a, en coordonnées normales d'origine 0

$$(\delta\xi)_0 = (\partial_a\delta\xi)_0 = 0$$

d'ou

$$(\partial_{ab}(\delta\xi g_{ij}))_0 = (g_{ij}\partial_{ab}\delta\xi)_0$$

et

$$(\partial_{abc}(\delta\xi g_{ij}))_0 = (g_{ij}\partial_{abc}\delta\xi)_0$$

d'autre part de (5.1) on déduit

$$(\mathcal{L}(\xi)g_{ij})_0 = (\partial_a(\mathcal{L}(\xi)g_{ij}))_0 = 0$$

et

$$(\partial_{ab}(\mathcal{L}(\xi)g_{ij}))_0 = (\partial_{ab}g_{il}\Omega^l{}_j + \partial_{ab}g_{jl}\Omega^l{}_i + \partial_{ah}g_{ij}\Omega^h{}_b + \partial_{hb}g_{ij}\Omega^h{}_a)_0,$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant l'expression de la deuxième extension ([25] p. 96) du tenseur métrique

$$(\partial_{ab} g_{pq})_0 = \frac{1}{3}[R_{pabq} + R_{pbqa}]_0,$$

$$(\partial_{ab}(\mathcal{L}(\xi) g_{ij}))_0 = \frac{1}{3} \underset{(a,b)}{S} [R_{qbia}\Omega^q{}_j + R_{jqia}\Omega^q{}_b + R_{jbqa}\Omega^q{}_i + R_{jbiq}\Omega^q{}_a]_0,$$

où nous désignons par le symbole $\underset{(p,q,r)}{S}$ une somme étendue à toutes les permutations des indices $p, q, \ldots r$. On a de même, en utilisant

$$(\partial_{abc} g_{ij})_0 = \frac{1}{6} \underset{(a,b,c)}{S} (\nabla_c R_{iajb})_0,$$

$$(\partial_{abc}(\mathcal{L}(\xi) g_{ij}))_0 = \frac{1}{6} \underset{(a,b,c)}{S} [\nabla_c R_{qbia}\Omega^q{}_j + \nabla_c R_{jbia}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{jbqa}\Omega^q{}_c + \nabla_c R_{jbiq}\Omega^q{}_a + \nabla_q R_{jbia}\Omega^q{}_c].$$

Supposons les transformations $\mathcal{T}$ conformes, alors

$$C_{ij} = \mathcal{L}(\xi) g_{ij} + \frac{1}{n} \delta\xi g_{ij} = 0,$$

les relations $\qquad (\partial_{ab} C_{ij})_0 = (\partial_{abc} C_{ij})_0 = 0,$
entraînent

$$\frac{1}{3} \underset{(a,b)}{S} [R_{qbia}\Omega^q{}_j + R_{jqia}\Omega^q{}_b + R_{jbqa}\Omega^q{}_i + R_{jbiq}\Omega^q{}_a] + \frac{1}{n} g_{ij} A_{ab} = 0,$$

$$\frac{1}{6} \underset{(a,b,c)}{S} [\nabla_c R_{qbia}\Omega^q{}_j + \nabla_c R_{jqia}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{jbqa}\Omega^q{}_i + \nabla_c R_{jbiq}\Omega^q{}_a + \nabla_q R_{jbia}\Omega^q{}_c] + \frac{1}{n} g_{ij} A_{abc} = 0$$

où les A sont les tenseurs obtenus par extension du scalaire $\delta\xi$ V étant une variété kählerienne, écrivons les égalités tensorielles précédentes dans un système de coordonnées locales complexes, en prenant pour i et j des indices de la forme η, ζ, on a :

$$(10\text{-}9) \quad \frac{1}{3} \underset{(a,b)}{S} [R_{qb\eta a}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_\zeta + R_{\zeta q\eta a}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_b + R_{\zeta bqa}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_\eta + R_{\zeta b\eta q}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_a] = 0,$$

$$(10\text{-}10) \quad \frac{1}{3} \underset{(a,b,c)}{S} [\nabla_c R_{qb\eta a}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_\zeta + \nabla_c R_{\zeta q\eta a}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{\zeta bqa}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_\eta + \nabla_c R_{\zeta b\eta q}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_a + \nabla_q R_{\zeta b\eta a}\nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_p}\Omega^q{}_c] = 0$$

avec les équations analogues que l'on en déduit en remplaçant η, ζ par η^*, ζ^*. Considérons l'équation (10-9), pour $p = 0$, et prenons a et b de la forme α^*, β^*, il en résulte, puisqu'on peut permuter α^* et β^* :

$$H_{\zeta\beta^*\eta\alpha^*mn} = 0 \tag{10-11}$$

d'où

$$H = 0.$$

Par dérivation covariante de (10-9) pour $p = 0$, et en tenant compte de (10-10) pour $p = 1$, on obtient :

$$\underset{(a,\, b,\, c)}{S}\ \nabla_c R_{qb\eta a}\Omega^q{}_\zeta + \nabla_c R_{\zeta q\eta a}\Omega^q{}_b + \nabla_c R_{\zeta bqa}\Omega^q{}_\eta + \nabla_c R_{\zeta b\eta q}\Omega^q{}_a = 0$$

compte tenu de cette dernière relation (10-10) pour $p = 0$ s'écrit alors

$$\underset{(a,\, b,\, c)}{S}\ \nabla_q R_{\zeta b\eta a}\Omega^q{}_c = 0.$$

Prenons pour a, b, c des indices de la forme α^*, β^*, γ, la relation ci-dessus se réduit à

$$\nabla_q R_{\zeta^*\alpha\eta^*\beta}\Omega^q{}_\gamma = 0,$$

en prenant de même pour i et j des indices de la forme η^*, ζ^*, et a, b, c de la forme α, β, γ^*, on obtient

$$\nabla_q R_{\zeta^*\alpha\eta^*\beta}\Omega^q{}_{\gamma^*} = 0.$$

Les 2 relations précédentes entraînent

$$\nabla_q R_{iajb} R^q{}_{cmn} = 0$$

c'est-à-dire (5-4).

Par dérivation covariante de (10-9) pour $p = 1$ et compte tenu de (10-10) pour $p = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\underset{(a,\, b,\, c)}{S}\ [\nabla_c R_{qb\eta a}\nabla_r R^q{}_{\zeta mn} &+ \nabla_c R_{\zeta q\eta a}\nabla_r R^q{}_{bmn} \\ &+ \nabla_c R_{\zeta bqa}\nabla_r R^q{}_{\eta mn} + \nabla_c R_{\zeta b\eta q}\nabla_r R^q{}_{amn}] = 0,\end{aligned} \tag{10-12}$$

compte tenu de (10-12), (10-10) pour $p = 1$, donne alors

$$\underset{(a,\, b,\, c)}{S}\ \nabla_q R_{\eta a\zeta b}\nabla_r R^q{}_{cmn} = 0. \tag{10-13}$$

En prenant, successivement pour a, b, c des indices de la forme α^*; β^*, γ, puis α, β, γ^*, on en déduit

$$\nabla_q R_{iajb}\nabla_r R^q{}_{cmn} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (5-5). En rapprochant ces résultats de ceux obtenus pour les transformations projectives, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Soit* V_{2n} $(n > 1)$ *une variété kählerienne. Si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_R$ *sont projectives ou conformes,* V_{2n} *est une variété* (H). *Si la courbure de Ricci est non dégénérée* (*resp. si* V_{2n} *est proprement riemannienne*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{T}}_R$, $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$ (*resp.* $\overset{1}{\mathcal{T}}_R$, $\overset{2}{\mathcal{T}}_R$) *sont projectives ou conformes* V_{2n} *est localement symétrique.*

Remarque. — Au lieu de considérer les transformations $\mathcal{T}_R$ définies à partir du tenseur R, nous pouvons plus généralement considérer des transformations $\mathcal{T}_a$ définies à partir d'un tenseur $a_{iji_1 \dots i_p}$ antisymétrique pour les indices i et j et tel que le déterminant d'indices i et j, $\alpha^i{}_j = a^i{}_{ji_1 \dots i_p}$ soit différent de 0; alors, s'il existe sur V_{2n} un tel tenseur (par exemple une forme quadratique extérieure de rang maximum) tel que, par exemple les transformations locales $\overset{0}{\mathcal{T}}_a$, $\overset{1}{\mathcal{T}}_a$ soient conformes, V_{2n} est localement symétrique.

§ 11. — Variétés hermitiennes.

1° Soit maintenant V_{2n} une variété hermitienne, les coefficients de la connexion riemannienne (γ) sont donnés par

$$\Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = 0,$$
$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon^*}(\partial_\gamma g_{\alpha^*\beta} + \partial_\beta g_{\varepsilon^*\gamma}),$$
$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon^*}(\partial_{\gamma^*} g_{\beta\varepsilon^*} - \partial_{\varepsilon^*} g_{\beta\gamma^*}),$$

avec les formules complexes conjuguées.

L'invariance du tenseur canonique Φ, par les transformations $\mathcal{T}_R$, se traduit par

$$\mathcal{L}(\xi)\Phi^j{}_i = 0$$

d'où

$$(\mathcal{L}(\xi)\Phi^j{}_i)_0 = (\partial_a \mathcal{L}(\xi)\Phi^j{}_i)_0 = 0$$

ce qui conduit aux équations

$$\Omega^r{}_i\Phi^j{}_r - \Omega^j{}_r\Phi^r{}_i = 0$$
$$\Omega^r{}_i\nabla_a\Phi^j{}_r - \Omega^j{}_r\nabla_a\Phi^r{}_i + \nabla_p\Phi^j{}_i\Omega^p{}_a = 0.$$

En considérant l'invariance de Φ par $\overset{0}{\mathcal{C}}_{\mathbf{R}}$ et $\overset{1}{\mathcal{C}}_{\mathbf{R}}$, il en résulte

$$\mathrm{R}^p{}_{amn}\nabla_p\Phi^j{}_i = 0,$$

d'où, si la courbure de Ricci est non dégénérée

$$\nabla_p\Phi^j{}_i = 0$$

V est kählerienne, on peut alors appliquer les résultats du paragraphe 9 concernant les transformations $\overset{0}{\mathcal{C}}_{\mathbf{R}}$ et $\overset{1}{\mathcal{C}}_{\mathbf{R}}$.

THÉORÈME. — *Soit* V_{2n} *une variété hermitienne, si la structure complexe est invariante par les transformations* $\overset{0}{\mathcal{C}}_{\mathbf{R}}$ *et* $\overset{1}{\mathcal{C}}_{\mathbf{R}}$ *et si la courbure de Ricci est non dégénérée,* V *est kählerienne, localement symétrique.*

2° Considérons sur V_{2n} la deuxième connexion canonique (ε) ([12], p. 243), dont les coefficients, notés E^i_{jk}, sont donnés en coordonnées locales complexes par

$$\mathrm{E}^\beta_{\gamma^*\alpha} = \mathrm{E}^\beta_{\alpha\gamma^*} = 0, \qquad \mathrm{E}^\beta_{\gamma\alpha} = g^{\beta\rho^*}\partial_\gamma g_{\alpha\rho^*}$$

avec les formules complexes conjuguées. Nous désignerons par S le tenseur de torsion et par D le symbole de dérivation covariante de la connexion (ε) ; on a

$$\mathrm{D}_a g_{ij} = \mathrm{D}_a\Phi_{ij} = 0.$$

En coordonnées locales complexes, les seules composantes non nulles du tenseur S sont du type $\mathrm{S}^\alpha{}_{\beta\gamma}$ et $\mathrm{S}^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma^*}$, avec

$$\mathrm{S}^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}^\alpha_{\beta\gamma} - \mathrm{E}^\alpha_{\gamma\beta}) = \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon^*}(\partial_\gamma g_{\beta\varepsilon^*} - \partial_\beta g_{\gamma\varepsilon^*})$$

pour la forme S_{ijk}, les seules composantes non nulles sont du type $\mathrm{S}_{\alpha^*\beta\gamma}$ et $\mathrm{S}_{\alpha\beta^*\gamma^*}$; et, pour la forme $\mathrm{S}_{ij}{}^k$, les seules composantes non nulles sont du type $\mathrm{S}_{\alpha^*\beta}{}^{\gamma^*}$, $\mathrm{S}_{\alpha\beta^*}{}^\gamma$; pour une variété kählerienne $\mathrm{S} = 0$. De $\mathrm{D}_a\Phi^j{}_i = 0$, on déduit :

$$\nabla_a\Phi^j{}_i = \mathrm{S}^p{}_{ia}\Phi^j{}_p - \mathrm{S}^j{}_{pa}\Phi^p{}_i + (\mathrm{S}_{ia}{}^p + \mathrm{S}_{ai}{}^p)\Phi^j{}_p - (\mathrm{S}_{pa}{}^j + \mathrm{S}_{ap}{}^j)\Phi^p{}_i;$$

on en déduit, qu'en coordonnées locales complexes, les seules composantes non nulles du tenseur $\nabla_a \Phi^j{}_i$, sont données par

$$\nabla_\alpha \Phi^\beta{}_{\gamma^*} = -2i S_{\alpha\gamma^*}{}^\beta, \qquad \nabla_{\alpha^*} \Phi^{\beta^*}{}_\gamma = 2i S_{\alpha^*\gamma}{}^{\beta^*};$$

il en résulte, par un calcul direct, que les seules composantes non nulles du tenseur $\nabla_b \nabla_a \Phi^j_i$, sont données par :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\lambda^*}\nabla_\alpha \Phi^\beta{}_\gamma &= -2i\nabla_{\lambda^*} S_{\alpha\gamma}{}^\beta, & \nabla_\lambda \nabla_{\alpha^*} \Phi^\beta{}_\gamma &= 2i\nabla_\lambda S_{\alpha^*\gamma}{}^\beta, \\
\nabla_\lambda \nabla_\alpha \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i\nabla_\gamma S_{\alpha\gamma^*}{}^\beta, & \nabla_{\lambda^*}\nabla_\alpha \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i\nabla_{\lambda^*} S_{\alpha\gamma^*}{}^\beta, \\
\nabla_\lambda \nabla_{\alpha^*} \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i\nabla_\lambda S_{\alpha^*\gamma^*}{}^\beta, & \nabla_{\lambda^*}\nabla_{\alpha^*} \Phi^\beta{}_{\gamma^*} &= -2i\nabla_{\lambda^*} S_{\alpha^*\gamma^*}{}^\beta
\end{aligned}$$

avec les formules complexes conjuguées. Si nous supposons $\nabla S = 0$, on en déduit donc

$$\nabla_b \nabla_a \Phi^j{}_i = 0.$$

Si V est supposée de plus compacte, on sait [16] qu'il en résulte

$$\nabla_a \Phi^j{}_i = 0$$

alors, V est kählerienne.

Théorème. — *Toute variété hermitienne compacte vérifiant la condition* $\nabla S = 0$ *est kählerienne.*

CHAPITRE IV

TRANSFORMATIONS $\mathcal{T}_R$ SUR UN ESPACE A CONNEXION EUCLIDIENNE

Dans ce chapitre nous considérons des espaces à connexion euclidienne, c'est-à-dire des espaces riemanniens munis d'une connexion linéaire telle que la dérivée covariante du tenseur métrique dans cette connexion soit nulle. Auparavant nous indiquons quelques formules fondamentales valables pour une connexion linéaire quelconque et qui nous seront utiles dans la suite.

§ 12. — Formules fondamentales pour une connexion linéaire.

1° Soit V une variété différentiable munie d'une connexion linéaire quelconque (γ) définie par les formes ω^i_j qui, relativement à un co-repère (θ^i) s'expriment par

$$\omega^i_j = \gamma^i_{jr}\theta^r.$$

Les formes de torsion et de courbure sont données par

$$\Sigma^i = d\theta^i + \omega^i_r \wedge \theta^r,$$
$$\Omega^i{}_j = d\omega^i_j + \omega^i_r \wedge \omega^r_j,$$

on pose

$$\Sigma^i = - S^i{}_{kr}\theta^k \wedge \theta^r$$

et

$$\Omega^i{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l,$$

ces formes vérifient les identités de Bianchi

$$d\Sigma^i = \Omega^i{}_r \wedge \theta^r - \omega^i_r \wedge \Sigma^r,$$
$$d\Omega^i{}_j = \Omega^i{}_r \wedge \omega^r_j - \omega^i_r \wedge \Omega^r{}_j,$$

en coordonnées locales $\theta^i = dx^i$, et on pose $\omega^i_j = \Gamma^i_{jr}\, dx^r$, puisque $d(dx^r) = 0$, la formule définissant la torsion se réduit à

$$\Sigma^i = \omega^i_r \wedge dx^r$$

d'où

$$\Sigma^i = \Gamma^i_{kr}\, dx^k \wedge dx^r = -\frac{1}{2}(\Gamma^i_{kr} - \Gamma^i_{rk})\, dx^k \wedge dx^r,$$

le tenseur de torsion a pour composantes

$$S^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}).$$

Pour un tenseur quelconque on a l'identité de Ricci

$$\nabla_l \nabla_k t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} - \nabla_k \nabla_l t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} = -\sum_s R^r{}_{i_s lk} t_{i_1 \dots r \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} + \sum_s R^{j_s}{}_{rlk} t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots r \dots j_q} + 2S^r{}_{lk} \nabla_r t_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q}.$$

2° Si $S^i{}_{jk}$ est le tenseur de torsion de la connexion (γ),

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_j - S^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k,$$

on introduit la connexion $(\bar{\gamma})$ dite connexion associée définie par la matrice des formes ϖ^i_j, telles que

$$\varpi^i_j = \omega^i_j - 2S^i{}_{jk}\theta^k$$

d'où

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \varpi^i_j + S^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k.$$

La torsion de $(\bar{\gamma})$ est opposée à celle de (γ), la relation entre les deux connexions est réciproque. Si les connexions sont rapportées à un repère naturel de coordonnées locales, leurs coefficients sont liés par

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - 2S^i{}_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

Nous désignerons par $\bar{R}$ le tenseur de courbure de la connexion $\bar{\gamma}$ et par ∇ et $\bar{\nabla}$ les dérivations covariantes dans ces deux connexions.

3° On a immédiatement :

$$\bar{\nabla}_l X^i = \nabla_l X^i - 2S^i{}_{rl} X^r, \tag{12-1}$$

$$\bar{\nabla}_l X_i = \nabla_l X_i + 2S^r{}_{il} X_r, \tag{12-2}$$

plus généralement

(12-3) $$\overline{\nabla}_l A^i{}_j = \nabla_l A^i{}_j + 2(-S^i{}_{rl}A^r{}_j + S^r{}_{jl}A^i{}_r).$$

Par un calcul direct, on obtient

(12-4) $$\overline{\nabla}_k\nabla_l X_i - \nabla_l\overline{\nabla}_k X_i = [R^r{}_{ilk} + 2\nabla_l S^r{}_{ki}]X_r,$$

(12-5) $$\overline{\nabla}_k\nabla_l X^i - \nabla_l\overline{\nabla}_k X^i = -[R^i{}_{rlk} + \nabla_l S^i{}_{kr}]X^r.$$

En écrivant l'égalité déduite de (12-4) en permutant l et k et les connexions, on en déduit, pour tout X la relation

$$[R^r{}_{ilk} + 2\nabla_l S^r{}_{ki} + \overline{R}^r{}_{ikl} + 2\overline{\nabla}_k S^r{}_{il}]X_r = 0$$

d'où

(12-7) $$R^r{}_{ilk} = \overline{R}^r{}_{ilk} + 2[\nabla_l S^r{}_{ik} + \overline{\nabla}_k S^r{}_{li}].$$

4° La première identité de Bianchi s'écrit en coordonnées locales

$$R^i{}_{rkl} + R^i{}_{klr} + R^i{}_{lrk} + 2(\partial_l S^i{}_{rk} + \partial_r S^i{}_{kl} + \partial_k S^i{}_{lr} + \Gamma^i_{sr}S^s{}_{kl} + \Gamma^i_{sk}S^s{}_{lr} + \Gamma^i_{sl}S^s{}_{rk}) = 0$$

d'où

(12-8) $$R^i{}_{rkl} + R^i{}_{klr} + R^i{}_{lrk} + 2(\nabla_r S^i{}_{kl} + \nabla_k S^i{}_{lr} + \nabla_l S^i{}_{rk}) - 4(S^i{}_{sk}S^s{}_{lr} + S^i{}_{sl}S^s{}_{rk} + S^i{}_{sr}S^s{}_{kl}) = 0,$$

la deuxième identité de Bianchi s'écrit :

$$\partial_r R^i{}_{jkl} + \partial_k R^i{}_{jlr} + \partial_l R^i{}_{jrk} - \Gamma^s_{jr}R^i{}_{skl} - \Gamma^s_{jk}R^i{}_{slr} - \Gamma^s_{jl}R^i{}_{srk} + \Gamma^i_{sr}R^s{}_{jkl} + \Gamma^i_{sk}R^s{}_{jlr} + \Gamma^i_{sl}R^s{}_{jrk} = 0$$

d'où

(12-9) $$\nabla_r R^i{}_{jkl} + \nabla_k R^i{}_{jlr} + \nabla_l R^i{}_{jrk} = 2(S^s{}_{rk}R^i{}_{jsl} + S^s{}_{kl}R^i{}_{jsr} + S^s{}_{lr}R^i{}_{jsk}).$$

De (12-7) on déduit

(12-10) $$\overline{R}^i{}_{rlk} = R^i{}_{rlk} + 2(\nabla_l S^i{}_{kr} + \nabla_k S^i{}_{rl}) - 4(S^i{}_{sr}S^s{}_{lk} + S^i{}_{sl}S^s{}_{kr} + S^i{}_{sk}S^s{}_{rl})$$

et, en comparant avec (12-8)

(12-11) $$\overline{R}^i{}_{rlk} + R^i{}_{krl} + R^i{}_{lkr} = 2\nabla_r S^i{}_{kl}$$

(12-10) peut s'écrire, en introduisant $\overline{\nabla}_r S^i{}_{kl}$

(12-12) $$\overline{R}^i{}_{rlk} = R^i{}_{rlk} + 2(\nabla_l S^i{}_{kr} + \nabla_k S^i{}_{rl} - \nabla_r S^i{}_{lk} + \overline{\nabla}_r S^i{}_{lk}).$$

De la comparaison de (12-7) et (12-12) on déduit

$$(12\text{-}13) \qquad \nabla_k S^i{}_{lr} + \nabla_r S^i{}_{kl} = \overline{\nabla}_k S^i{}_{rl} + \overline{\nabla}_r S^i{}_{kl}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\nabla_k S^i{}_{rl} + \nabla_r S^i{}_{kl} = \overline{\nabla}_k S^i{}_{rl} + \overline{\nabla}_r S^i{}_{kl}.$$

5° Si $\nabla S = 0$, les formules précédentes se simplifient, on a en effet :

$$(12\text{-}14) \qquad \nabla_k \overline{\nabla}_l A^i{}_j - \overline{\nabla}_l \nabla_k A^i{}_j = R^i{}_{rkl} A^r{}_j - R^r{}_{jkl} A^i{}_r$$

$$(12\text{-}15) \qquad R^r{}_{ilk} = \overline{R}^r{}_{ilk} + 2\overline{\nabla}_k S^r{}_{li},$$

$$(12\text{-}16) \qquad R^i{}_{rkl} + R^i{}_{klr} + R^i{}_{lrk} - 4(S^i{}_{sk} S^s{}_{lr} + S^i{}_{sl} S^s{}_{rk} + S^i{}_{sr} S^s{}_{kl}) = 0,$$

$$(12\text{-}17) \qquad \overline{R}^i{}_{rlk} + R^i{}_{krl} + R^i{}_{lkr} = 0,$$

$$(12\text{-}18) \qquad \overline{\nabla}_k S^i{}_{lr} + \overline{\nabla}_r S^i{}_{lk} = 0$$

de cette dernière relation on déduit que le tenseur $\overline{\nabla}_k S^i{}_{lr}$ est antisymétrique par rapport aux 3 indices k, l, r. Toujours dans l'hypothèse $\nabla S = 0$, on a

$$\nabla_p \overline{\nabla}_k S^r{}_{li} = 0$$

d'où

$$(12\text{-}19) \qquad \nabla_p R^r{}_{ilk} = \nabla_p \overline{R}^r{}_{ilk}$$

et
$$R^i{}_{skr} S^s{}_{lj} - R^s{}_{lkr} S^i{}_{sj} - R^s{}_{jkr} S^i{}_{ls} = 0.$$

Enfin, si nous supposons que S est à dérivée covariante nulle dans les deux connexions, on a

$$(12\text{-}20) \qquad \overline{R}^r{}_{ilk} = R^r{}_{ilk}$$

et
$$S^i{}_{sk} S^s{}_{lr} + S^i{}_{sl} S^s{}_{rk} + S^i{}_{sr} S^s{}_{kl} = 0,$$

et on a la première identité de Bianchi habituelle.

Supposons qu'il existe sur V une métrique définie par un tenseur symétrique g_{ij} et, supposons de plus, hypothèse que nous serons amenés à faire par la suite S_{ijk} antisymétrique par rapport aux trois indices i, j, k (nous dirons plus brièvement : S complètement antisymétrique). On a alors, toujours avec l'hypothèse $\nabla S = 0$

$$(12\text{-}21) \qquad S^s{}_{ij} R_{krsl} + S^s{}_{jl} R_{krsi} + S^s{}_{li} R_{krsj} = 0$$

et dans ce cas la deuxième identité de Bianchi se réduit à l'identité ordinaire.

§ 13. — Connexion euclidienne. Définition. Exemple.

1° Nous allons maintenant considérer une variété munie d'une métrique

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

et d'une connexion euclidienne (ε) dont les coefficients seront notés E^i_{jk} le tenseur de courbure E (composantes $E^i{}_{jkl}$) le tenseur de torsion S et la dérivation covariante relativement à cette connexion D. Nous noterons ($\bar{\varepsilon}$) la connexion associée définie par

$$\overline{E}^i_{jk} = E^i_{kj}$$

par $\overline{E}$ son tenseur de courbure et par $\overline{D}$ son opérateur de dérivation covariante. Sur V la métrique définit la connexion riemannienne (γ) dont les coefficients seront notés Γ^i_{jk}, le tenseur de courbure R et la dérivation covariante ∇.

2° Avant de passer au cas général, nous allons considérer l'exemple d'un espace de groupe de transformations semi-simple, simplement transitif où se trouvent réalisées des hypothèses que nous serons amenés à faire par la suite.

Soit Vn une variété sur laquelle opère de manière simplement transitive un groupe semi-simple. Les vecteurs $\xi^i_\alpha (i = 1, \dots n,\ \alpha = 1, \dots r$; r ordre du groupe) définissant les transformations infinitésimales du groupe vérifient la relation fondamentale :

$$(13\text{-}1) \qquad [\xi_\alpha, \xi_\beta]^i = C^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi^i_\gamma$$

où les $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ sont les constantes de structure, ce sont les composantes d'un tenseur dans l'algèbre de Lie du groupe, vérifiant l'identité de Jacobi

$$(13\text{-}2) \qquad C^\delta{}_{\beta\gamma}C^\varepsilon{}_{\alpha\delta} + C^\delta{}_{\gamma\alpha}C^\varepsilon{}_{\beta\delta} + C^\delta{}_{\alpha\beta}C^\varepsilon{}_{\gamma\delta} = 0$$

on sait que, pour les groupes semi-simples compacts, la forme quadratique définie par le tenseur dans l'algèbre de Lie

$$g_{\alpha\beta} = C^\varepsilon{}_{\alpha\delta}C^\delta{}_{\varepsilon\beta}$$

est définie positive. Il existe un tenseur 2 fois contravariant $g^{\alpha\beta}$ tel que

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

et,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\delta}C^{\delta}{}_{\beta\gamma}$$

est un tenseur antisymétrique.

Puisque le groupe est supposé localement transitif, la matrice $(\xi^i_{.\alpha})$ est de rang n. Si nous définissons g^{ij} par

$$g^{ij} = \xi^i_{.\alpha}\xi^j_{.\beta}g^{\alpha\beta}$$

la matrice (g^{ij}) est définie positive, et il existe une matrice définie positive g_{ij}, vérifiant

$$g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i.$$

Nous définissons sur V_n une métrique riemannienne par la forme quadratique $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ et nous utiliserons g_{ij} et g^{ij} pour abaisser et élever les indices latins et $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$ pour abaisser et élever les indices grecs. Considérons

$$\xi^{\alpha}_{i} = g^{\alpha\beta}g_{ij}\xi^j_{.\beta}$$

on a

$$\xi^i_{.\alpha}\xi^{\alpha}_{j} = \xi^i_{.\alpha}g^{\alpha\beta}g_{jk}\xi^k_{.\beta} = g^{ik}g_{jk} = \delta^i_j.$$

Le groupe étant supposé simplement transitif $r = n$, et on a aussi

$$\xi^i_{.\alpha}\,\xi^{\beta}_{i} = \delta^{\beta}_{\alpha}.$$

Sur V_n se trouve définie, d'une part la connexion riemannienne (γ), d'autre part une connexion (ε) dont les coefficients sont donnés par

$$E^i_{jk} = \xi^i_{.\alpha}\partial_j\xi^{\alpha}_{k} = -\xi^{\alpha}_{k}\partial_j\xi^i_{.\alpha},$$

et la connexion associée $(\bar{\varepsilon})$, on vérifie immédiatement que ces deux connexions sont euclidiennes. Le tenseur de torsion de la connexion (ε) est donné par

$$S^i{}_{lk} = \frac{1}{2}(E^i_{lk} - E^i_{kl}) = \frac{1}{2}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\xi^i_{.\gamma}\xi^{\alpha}_{k}\xi^{\beta}_{l}.$$

Ses composantes covariantes S_{ilk} sont antisymétriques par rapport aux trois indices. La connexion symétrique associée à la connexion (ε), coïncide avec la connexion riemannienne

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}^i_{jk} - \overline{\mathrm{E}}^i_{jk})$$

De la relation (13-1), on déduit, en multipliant par ξ^α_k et en sommant en α

$$\partial_k \xi^i_\beta + \xi^j_\beta \mathrm{E}^{\,i}_{jk} = \mathrm{C}^\gamma{}_{\alpha\beta} \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k$$

soit

$$\mathrm{D}_k \xi^i_\beta = \mathrm{C}^\gamma{}_{\alpha\beta} \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k.$$

En partant de

$$\xi^\alpha_k = g^{\alpha\lambda} g_{ik} \xi^i_\lambda$$

on a

$$\mathrm{D}_l \xi^\alpha_k = g^{\alpha\lambda} g_{ik} \mathrm{D}_j \xi^i_\lambda$$

d'où on déduit

$$\mathrm{D}_j \xi^\alpha_k = \mathrm{C}^\alpha{}_{\mu\delta} \xi^\mu_k \xi^\delta_j.$$

Par un calcul direct, on obtient

$$\overline{\mathrm{D}}_k \xi^i_\beta = 0$$

et, puisque la connexion ($\bar{\varepsilon}$) est euclidienne

$$\overline{\mathrm{D}}_k \xi^\beta_l = 0.$$

Nous avons déjà vu que le tenseur de torsion est complètement antisymétrique, d'autre part, on a

$$\nabla_j \mathrm{S}^i{}_{lk} = \frac{1}{2} \mathrm{C}^\gamma{}_{\alpha\beta} [\nabla_j \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k \xi^\beta_l + \xi^i_\gamma \nabla_j \xi^\alpha_k \xi^\beta_l + \xi^i_\gamma \xi^\alpha_k \nabla_j \xi^\beta_l]$$

d'où on déduit, en utilisant l'identité de Jacobi

$$\nabla_j \mathrm{S}^i{}_{lk} = 0.$$

De l'expression même de S et de

$$\overline{\mathrm{D}}_k \xi^i_\beta = \overline{\mathrm{D}}_k \xi^\beta_l = 0$$

il résulte

$$\overline{\mathrm{D}}_j \mathrm{S}^i{}_{lk} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{D}_j \mathrm{S}^i{}_{lk} = 0.$$

Le tenseur de torsion est à dérivée covariante nulle dans les 3 connexions. On sait que si $\mathrm{DS} = 0$

$$\mathrm{D}_k \overline{\mathrm{D}}_l \xi^i_\alpha - \overline{\mathrm{D}}_l \mathrm{D}_k \xi^i_\alpha = \mathrm{E}^i{}_{rkl} \xi^r_\alpha$$

or

$$\overline{D}_l \xi^i_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad D_k \xi^i_\alpha = C\gamma_{\lambda\alpha}\xi^i_\gamma \xi^\lambda_k$$

entraînent

$$\overline{D}_l D_k \xi^i_\alpha = 0$$

d'où

$$E^i{}_{rkl}\xi^r_\alpha = 0$$

et puisque $|\xi^r_\alpha| \neq 0$, il en résulte

$$E^i{}_{rlk} = 0.$$

Pour la connexion riemannienne, celle-ci coïncidant avec la connexion symétrique associée à la connexion (ε) on a

$$E^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + S^i{}_{jk}.$$

Le tenseur de courbure de la connexion (ε) étant nul, on a

$$R^i{}_{jkl} + \nabla_l S^i{}_{jk} - \nabla_k S^i{}_{jl} + S^s{}_{jk} S^i{}_{sl} - S^s{}_{jl} S^i{}_{sk} = 0$$

d'où on déduit, d'après la relation

$$\nabla_l S^i{}_{jk} = S^p{}_{jk} S^i{}_{lp} + S^p{}_{kl} S^i{}_{jp} + S^p{}_{lj} S^i{}_{kp} = 0,$$
$$R^i{}_{jkl} = S^s{}_{kl} S^i{}_{sj},$$

ce qui entraîne

$$\nabla R = DR = \overline{D}R = 0.$$

3° Reprenons maintenant, sur un espace riemannien quelconque une connexion euclidienne (ε), les notations étant celles du début du paragraphe, de

$$D_h g_{jk} = 0 \tag{13-3}$$

on déduit

$$E^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i{}_{jk}$$

avec

$$T^i{}_{jk} = S^i{}_{jk} + S_{jk}{}^i + S_{kj}{}^i$$

d'où

$$E^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} + \nabla_l T^i{}_{jk} - \nabla_k T^i{}_{jl} + T^s{}_{jk} T^i{}_{sl} - T^s{}_{jl} T^i{}_{sk}. \tag{13-4}$$

D'autre part

$$\overline{D}_l g_{jk} = D_l g_{jk} - 2(S_{klj} + S_{jlk}) \tag{13-5}$$

d'où il résulte que la connexion ($\overline{\varepsilon}$) est aussi euclidienne, si et seulement si le tenseur de torsion est complètement antisymétrique, hypothèse que nous ferons dans tout cet alinéa. La connexion symétrique associée à la connexion (ε) coïncide avec la connexion riemannienne, on a alors pour tout vecteur ξ

$$\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = \overline{D}_i\xi_j + \overline{D}_j\xi_i = D_i\xi_j + D_j\xi_i = \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i.$$

Les tenseurs de courbure de (ε) et $(\overline{\varepsilon})$ vérifient les relations

$$E_{ijkl} = - E_{jikl} = - E_{ijlk}. \tag{13-6}$$

Si on suppose de plus $\nabla S = 0$ ou $DS = 0$ il en résulte

$$E_{ijkl} = E_{klij} \tag{13-7}$$

dans la première hypothèse ce résultat se déduit immédiatement de (13-4), et, dans la deuxième il suffit d'utiliser (12-17). Si nous supposons $DS = \overline{D}S = 0$, ce qui entraîne $\nabla S = 0$ et

$$S^s{}_{jk}S^i{}_{sl} - S^s{}_{jl}S^i{}_{sk} = S^r{}_{kl}S^i{}_{jr}$$

(13-4) s'écrit alors

$$E^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} + S^r{}_{kl}S^i{}_{jr}. \tag{13-8}$$

4° De (13-3) on déduit, comme dans le cas d'une connexion riemannienne

$$E^i_{ih} = \frac{1}{2}\frac{\partial_h g}{g}$$

et, si S est complètement antisymétrique

$$E^i_{ih} = \overline{E}^i_{ih}.$$

Du tenseur de courbure de (ε) on déduit, par contraction, le tenseur

$$E_{jk} = g^{mn}E_{mjkn}$$

que nous appellerons tenseur de Ricci de la connexion (ε). On peut aussi en déduire le tenseur

$$F_{jk} = g^{mn}E_{jmkn}$$

si S est complètement antisymétrique

$$F_{jk} = - E_{jk}.$$

5° Soit ξ un vecteur quelconque, si S est complètement antisymétrique et DS = 0, on a, d'après (12-14) par un calcul direct

$$D_k\mathcal{L}(\xi)\, g_{aj} + \overline{D}_j\mathcal{L}(\xi)\, g_{ak} - D_a\mathcal{L}(\xi)\, g_{jk}$$
$$= 2D_k\overline{D}_j\xi_a + (E^r{}_{akj} + E^r{}_{jak} + E^r{}_{kaj})\,\xi_r.$$

Si on suppose de plus $\overline{D}S = 0$, on sait que les deux courbures sont égales, E vérifie la première identité de Bianchi ordinaire, on en déduit alors :

$$(13\text{-}9) \quad \frac{1}{2} g^{ia}(D_k\mathcal{L}(\xi)\, g_{aj} + \overline{D}_j\mathcal{L}(\xi)\, g_{ak} - D_a\mathcal{L}(\xi)\, g_{jk})$$
$$= D_k\overline{D}_j\xi^i + \xi^r E^i{}_{jrk} = \mathcal{L}(\xi)\, E^i_{jk}.$$

§ 14. — Transformations affines.

1° Nous considérons maintenant les transformations τ_E définies comme au n° 4, mais à partir du tenseur de courbure de la connexion (ε), de ses dérivées covariantes et des géodésiques de la connexion riemannienne.

Supposons les transformations τ_E affines pour la connexion (ε).

$$(\mathcal{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = (\partial_a\mathcal{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = (\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = (\partial_a\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = 0$$

entraînent les égalités tensorielles :

$$(14\text{-}1) \quad S^i{}_{sk}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn} + S^i{}_{js}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn} - S^s{}_{jk}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^i{}_{smn} = 0.$$

$$(14\text{-}2) \quad \nabla_s S^i{}_{jk}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{amn} + \nabla_a S^i{}_{sk}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn} + \nabla_a S^i{}_{js}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn} - \nabla_a S^s{}_{jk}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^k{}_{smn} = 0.$$

$$(14\text{-}3) \quad E^i{}_{skl}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn} + E^i{}_{jsl}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn} + E^i{}_{jks}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{lmn} - E^s{}_{jkl}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^i{}_{smn}.$$

$$(14\text{-}4) \quad \nabla_s E^i{}_{jkl}\nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{rmn} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{jmn}\nabla_r E^i{}_{skl} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{kmn}\nabla_r E^i{}_{jsl} + \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^s{}_{lmn}\nabla_r E^i{}_{jks} - \nabla_{a_1}\dots\nabla_{a_p}E^i{}_{smn}\nabla_r E^s{}_{jkl} = 0.$$

En considérant les transformations $\overset{0}{\tau}_E$ et $\overset{1}{\tau}_E$, on obtient

$$\nabla_s S^i{}_{jk}E^s{}_{amn} = 0$$
$$\nabla_s E^i{}_{jkl}E^s{}_{amn} = 0$$

d'où, si le tenseur $F^j{}_k = E^{jl}{}_{kl}$ vérifie $|F^j{}_k| \neq 0$, c'est-à-dire, dans le cas où S est complètement antisymétrique, si la courbure de Ricci de la connexion (ε) est non dégénérée, alors

$$\nabla S = \nabla E = 0$$

ce qui d'après (13-4) entraîne

$$\nabla R = 0.$$

Considérons maintenant les transformations $\overset{1}{\tau}_E$ et $\overset{2}{\tau}_E$, on déduit de (14-3) et (14-4), comme au paragraphe 5

$$\nabla_a E^q{}_{bmn} \nabla_q E^i{}_{jkl} = 0.$$

Si nous supposons de plus $\nabla S = 0$, le tenseur E vérifie, comme le tenseur R la deuxième identité de Bianchi, les dérivées covariantes étant prises relativement à la connexion riemannienne, les calculs du paragraphe 5 sont valables ici.

Théorème. — *Soit sur un espace riemannien* V *une connexion euclidienne* (ε). *Si pour la connexion* (ε) *la courbure de Ricci est non dégénérée et si les transformations* $\overset{0}{\tau}_E$, $\overset{1}{\tau}_E$ *sont affines, alors* $\nabla S = \nabla E = \nabla R = 0$. *Si* V *est proprement riemanienne et* $\nabla S = 0$ *et si les transformations* $\overset{1}{\tau}_E$, $\overset{2}{\tau}_E$ *sont affines alors* $\nabla E = \nabla R = 0$.

2° Nous allons maintenant considérer les transformations définies par le tenseur E $\left(\text{nous les noterons } \overset{0}{T}\right)$, par les tenseurs DE, $\overline{D}E$ $\left(\text{nous les noterons } \overset{1}{T}\right)$, par les tenseurs DDE, $\overline{D}\overline{D}E$, $\overline{D}DE$, $D\overline{D}E$ $\left(\text{nous les noterons } \overset{2}{T}\right)$, etc... Les calculs sont effectués en coordonnées normales relativement à la connexion euclidienne. Supposons les transformations T affines; en remarquant que

$$\left(\overline{E}^s_{qj}\right)_0 = -\left(S^s{}_{qj}\right)_0$$

et, en utilisant la relation (12-3) pour le tenseur S, l'on voit que

$$(\mathcal{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = (\partial_a \mathcal{L}(\xi)S^i{}_{jk})_0 = 0,$$

entraînent, en considérant $\overset{0}{T}$ et $\overset{1}{T}$, l'égalité tensorielle

$$\left(D_q S^i{}_{jk} + \overline{D}_q S^i{}_{jk}\right) E^q{}_{rmn} = 0,$$

d'où on déduit, si la courbure de Ricci de la connexion (ε) est non dégénérée

$$D_q S^i{}_{jk} + \overline{D}_q S^i{}_{jk} = 0;$$

si S est complètement antisymétrique ceci entraîne $\nabla S = 0$.

De même

$$(\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = (\partial_a \mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = 0,$$

entraînent

$$\left(D_q E^i{}_{jkl} + \overline{D}_q E^i{}_{jkl}\right)E^q{}_{amn} = 0,$$

et, avec les mêmes hypothèses sur la courbure de Ricci

$$D_q E^i{}_{jkl} + \overline{D}_q E^i{}_{jkl} = 0.$$

En considérant maintenant les transformations $\overset{1}{T}$ et $\overset{2}{T}$ on obtient

$$\text{(14-5)} \quad \left(D_a E^q{}_{bmn} + \overline{D}_a E^q{}_{bmn}\right)\left(D_q E_{ijkl} + \overline{D}_q E_{ijkl}\right) = 0.$$

Si on suppose $DS = \overline{D}S = 0$, on sait que $E = \overline{E}$, et la deuxième identité de Bianchi permet alors d'écrire

$$D_r E_{ijkl} + \overline{D}_r E_{ijkl} + D_k E_{ijlr} + \overline{D}_k E_{ijlr} + D_l E_{ijrk} + \overline{D}_l E_{ijrk} = 0$$

on déduit alors de (14.5)

$$\left(D^a E^{qbmn} + \overline{D}^a E^{qbmn}\right)\left(D_a E_{qbmn} + \overline{D}_a E_{qbmn}\right) = 0,$$

d'où, si la métrique est définie positive

$$D_a E_{qbmn} + \overline{D}_a E_{qbmn} = 0$$

et si S est complètement antisymétrique $\nabla E = 0$.

Théorème. — *Soit sur une variété riemannienne* V, *une connexion euclidienne* (ε). *Si, pour la connexion* (ε) *la courbure de Ricci est non dégénérée et si les transformations* $\overset{0}{T}_E$, $\overset{1}{T}_E$ *sont affines, alors* $DS + \overline{D}S = DE + \overline{D}E = 0$. *Si* V *est proprement riemannienne, et* $DS = \overline{D}S = 0$ *et si les transformations* $\overset{1}{T}_E$, $\overset{2}{T}_E$ *sont affines,* $DE + \overline{D}E = 0$.

§ 15. — Transformations conformes.

Pour un espace riemannien V muni d'une connexion euclidienne satisfaisant aux conditions $DS = \overline{D}S = 0$, S, complètement antisymétrique, nous allons étudier le cas où les transformations associées au tenseur E sont conformes. Pour un vecteur ξ quelconque on a par un calcul direct

$$\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl} = D_k(\mathcal{L}(\xi)E)^i_{jl} - D_l(\mathcal{L}(\xi)E)^i_{jk} - 2S^p{}_{kl}(\mathcal{L}(\xi)E)^i_{jp}$$

mais, avec les hypothèses faites sur S on peut utiliser la relation (13-6). Si la tranformation définie par le vecteur ξ est conforme

$$\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = -\frac{2}{n}\delta\xi g_{ij} \tag{15-1}$$

d'où

$$D_k\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = -\frac{2}{n}(\partial_k\delta\xi)g_{ij} = \overline{D}_k\mathcal{L}(\xi)g_{ij} \tag{15-2}$$

alors

$$\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl} = \frac{1}{n}\{D_l(\partial_j\delta\xi)\delta^i_k - D_k(\partial_j\delta\xi)\delta^i_l + g^{ia}[g_{jl}D_k(\partial_a\delta\xi) - g_{jk}D_l(\partial_a\delta\xi)]\}$$
$$+\frac{2}{n}S^p{}_{kl}[(\partial_p\delta\xi)\delta^i_j + (\partial_j\delta\xi)\delta^i_p - g^{ia}(\partial_a\delta\xi)g_{jp}].$$

On a d'autre part, par suite de l'antisymétrie du tenseur E, $\partial_i\xi^i = 0$, donc, à l'origine des coordonnées normales

$$(\partial_a\delta\xi)_0 = -(\Gamma^i_{hi}\partial_a\xi^h)_0 = 0.$$

On a alors

$$(\nabla_b\partial_a\delta\xi)_0 = (\partial_{ab}\delta\xi)_0 = -(\partial_a\Gamma^i_{hi}\Omega^h{}_b + \partial_b\Gamma^i_{hi}\Omega^h{}_a)_0.$$

Il en résulte que si V est espace d'Einstein pour la connexion riemannienne, on a

$$(\partial_{ab}\delta\xi)_0 = 0.$$

Dans ce cas (15-1) entraîne

$$(\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = 0$$

comme dans le cas de la connexion riemannienne, on voit que (15-1) entraîne aussi

$$(\partial_c\mathcal{L}(\xi)E^i{}_{jkl})_0 = 0.$$

Nous avons donc les équations du paragraphe précédent.

THÉORÈME. — *Soit* V *un espace riemannien muni d'une connexion euclidienne* (ε), *satisfaisant aux hypothèses suivantes :* $DS = \overline{D}S = 0$, S *complètement antiymétrique*, V *espace d'Einstein pour la connexion riemannienne. Si pour la connexion* (ε), *la courbure de Ricci est non dégénérée et si les transformations* $\overset{0}{\tau}_E$, $\overset{1}{\tau}_E$ $\left(ou\ \overset{0}{T}_E, \overset{1}{T}_E\right)$ *sont conformes alors* $\nabla E = \nabla R = 0$. *Si* V *est proprement riemannien et si les transformations* $\overset{1}{\tau}_E$, $\overset{2}{\tau}_E$ $\left(ou\ \overset{1}{T}_E, \overset{2}{T}_E\right)$ *sont conformes*; $\nabla E = \nabla R = 0$.

§ 16. — Invariance de l'élément de volume.

1° On sait que dans l'hypothèse $DS = \overline{D}S = 0$, S complètement antisymétrique, le tenseur de courbure de la connexion vérifie les mêmes relations que celui de la connexion riemannienne, on peut donc reprendre les calculs du paragraphe 7; donc, si les transformations $\overset{0}{\tau}_E$ conservent l'élément de volume, on a :

$$D_m\overline{D}_nA^s{}_{sa_1\ldots a_p} - \overline{D}_nD_mA^s{}_{sa_1\ldots a_p} = 0.$$

Si les transformations $\overset{0}{\tau}_E$, $\overset{1}{\tau}_E$ conservent l'élément de volume et si la courbure de Ricci de la connexion (ε) est non dégénérée, le tenseur de Ricci de (γ) est à dérivée covariante nulle dans cette même connexion.

2° Les transformations $\mathfrak{T}$ considérées ici sont définies à partir du tenseur E, et de ses dérivées covariantes dans la connexion (ε) et des géodésiques de la connexion riemannienne. Remarquons d'une part que de

$$E^i_{jk} = 2S^i{}_{kj} + E^i_{kj}$$

on déduit, en utilisant la complète antisymétrie de S, $E^i_{ik} = E^i_{ki}$; d'autre part, la relation $\partial_r g = 2g\Gamma^i_{ir}$ est valable en coordonnées locales arbitraires, si nous l'écrivons en coordonnées normales relativement à la connexion euclidienne, l'antisymétrie de S entraîne :

$$E^i_{ji} = \Gamma^i_{ji}, \qquad \text{d'où} \qquad \partial_r g = 2gE^i_{ir}$$

Il en résulte que, comme pour la connexion riemannienne, l'invariance de l'élément de volume par les transformations $\mathcal{T}_E$ entraîne les équations :

$$E^p{}_{imn}A^s{}_{spj} + E^p{}_{jmn}A^s{}_{sip} = 0 \tag{16-1}$$
$$E^p{}_{imn}A^s{}_{spjk} + E^p{}_{jmn}A^s{}_{sipk} + E^p{}_{kmn}A^s{}_{sijp} = 0 \tag{16-2}$$
$$D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p{}_{imn}A^s{}_{spj} + D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p{}_{jmn}A^s{}_{sip} = 0 \tag{16-3}$$
$$\begin{aligned} D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p{}_{imn}A^s{}_{spjk} &+ D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p{}_{jmn}A^s{}_{sipk} \\ &+ D_{a_1}\dots D_{a_q}E^p{}_{kmn}A^s{}_{sijp} = 0 \end{aligned} \tag{16-4}$$

où les A sont les tenseurs normaux relativement à la connexion euclidienne. Afin d'expliciter ces relations, nous sommes amenés à calculer les composantes des tenseurs normaux de la connexion euclidienne. Nous employons la méthode indiquée au paragraphe 3.

Partant des équations de structure

$$\begin{cases} d\theta^i = -\omega^i_r\wedge\theta^r - S^i{}_{kr}\theta^k\wedge\theta^r \\ d\omega^i_j = -\omega^i_r\wedge\omega^r_j + \dfrac{1}{2}E^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l \end{cases} \tag{16-5}$$

et, posant

$$\mathcal{A}^i{}_{uk} = -2(S^i{}_{uk})_0, \qquad \mathcal{B}^i{}_{juk} = (E^i{}_{juk})_0$$
$$\mathcal{C}^i{}_{uvk} = (E^i{}_{uvk} + 4S^i{}_{hu}S^h{}_{kv})_0, \qquad \mathcal{D}^i{}_{juvk} = 2(D_vE^i{}_{juk} + E^i{}_{juh}S^h{}_{kv})_0$$
$$\mathcal{E}^i{}_{uvwk} = 2[D_vE^i{}_{wuk} + E^i{}_{wuh}S^h{}_{kv} + S^i{}_{hw}E^h{}_{uvk} + 4S^i{}_{lw}S^l{}_{ha}S^h{}_{kv}]_0.$$

On obtient, en coordonnées normales d'origine O, le développement de E^i_{jk}

$$\begin{aligned} E^i_{jk} = {} & \frac{1}{2}\mathcal{A}^i{}_{kj} \\ & + \left[\frac{1}{2}\mathcal{B}^i{}_{juk} + \frac{1}{4}\mathcal{A}^p{}_{kj}\mathcal{A}^i{}_{up} + \frac{1}{6}(\mathcal{C}^i{}_{ukj} + \mathcal{C}^i{}_{kuj})\right]x^u \\ & + \left[\frac{1}{4}\mathcal{A}^q{}_{uj}\mathcal{B}^i{}_{qvk} + \frac{1}{4}\mathcal{A}^i{}_{up}\mathcal{B}^p{}_{jvk} + \frac{1}{6}\mathcal{D}^i{}_{juvk} + \frac{1}{12}\mathcal{A}^p{}_{kj}\mathcal{C}^i{}_{uvp}\right. \\ & \left. + \frac{1}{12}\mathcal{A}^i{}_{up}(\mathcal{C}^p{}_{vkj} + \mathcal{C}^p{}_{kvj}) + \frac{1}{24}(\mathcal{E}^i{}_{kuvj} + \mathcal{E}^i{}_{ukvj} + \mathcal{E}^i{}_{uvkj})\right]x^ux^v \end{aligned} \tag{16-6}$$

d'où on peut déduire les composantes des tenseurs normaux $(\partial_aE^i_{jk})_0$, $(\partial_{ab}E^i_{jk})_0$. Nous aurons besoin dans la suite des termes $(\partial_aE^i_{hi})_0$ et $(\partial_{ab}E^i_{hi})_0$.

On a

$$(\partial_a E^i_{hi})_0 = \frac{1}{2}\mathcal{B}^i{}_{hai} + \frac{1}{4}\mathcal{A}^p{}_{ih}\mathcal{A}^i{}_{ap} + \frac{1}{6}(\mathcal{C}^i{}_{aih} + \mathcal{C}^i{}_{iah})$$

d'où

$$(16\text{-}7) \qquad (\partial_a E^i_{hi})_0 = \frac{1}{3}(E_{ah} + S^p{}_{hi}S^i{}_{pa})$$

d'autre part

$$(\partial_{ab}E^i_{hk})_0 = \frac{1}{4}[\mathcal{A}^q{}_{ah}\mathcal{B}^i{}_{qbk} + \mathcal{A}^q{}_{bh}\mathcal{B}^i{}_{qak}] + \frac{1}{4}[\mathcal{A}^i{}_{ap}\mathcal{B}^p{}_{hbk} + \mathcal{A}^i{}_{bp}\mathcal{B}^p{}_{hak}]$$
$$+ \frac{1}{6}(\mathcal{D}^i{}_{habk} + \mathcal{D}^i{}_{hbak}) + \frac{1}{12}\mathcal{A}^p{}_{kh}(\mathcal{C}^i{}_{abp} + \mathcal{C}^i{}_{bap})$$
$$+ \frac{1}{12}[\mathcal{A}^i{}_{ap}(\mathcal{C}^p{}_{bkh} + \mathcal{C}^p{}_{kbh}) + \mathcal{A}^i{}_{bp}(\mathcal{C}^p{}_{akh} + \mathcal{C}^p{}_{kah})]$$
$$+ \frac{1}{24}[\mathcal{E}^i{}_{kabh} + \mathcal{E}^i{}_{kbah} + \mathcal{E}^i{}_{akbh} + \mathcal{E}^i{}_{bkah} + \mathcal{E}^i{}_{abkh} + \mathcal{E}^i{}_{bakh}];$$

en contractant i et k ces différents termes donnent :

$$\frac{1}{2}(S^q{}_{ha}E_{qb} + S^q{}_{hb}E_{qa}), \quad \frac{1}{2}(S^i{}_{pa}E^p{}_{hbi} + S^i{}_{pb}E^p{}_{hai}),$$
$$\frac{1}{3}[D_bE_{ha} + S^p{}_{ib}E^i{}_{hap} + D_aE_{hb} + S^p{}_{ia}E^i{}_{hbp}],$$
$$\frac{1}{6}S^p{}_{hi}[E^i{}_{apb} + E^i{}_{bap} + 4(S^i{}_{qa}S^q{}_{pb} + S^i{}_{qb}S^q{}_{pa})],$$
$$\frac{1}{6}\{S^i{}_{pa}[E^p{}_{bih} + E^p{}_{ibh} + 4(S^p{}_{qb}S^q{}_{hi} + S^p{}_{qi}S^q{}_{hb})]$$
$$+ S^i{}_{pb}[E^p{}_{aih} + E^p{}_{iah} + 4(S^p{}_{qa}S^q{}_{hi} + S^p{}_{qi}S^q{}_{ha})]\}$$
$$+ \frac{1}{12}\{- D_aE_{bh} - E_{bp}S^p{}_{ha} + S^i{}_{pb}E^p{}_{iah} + 4S^i{}_{qb}S^q{}_{pi}S^p{}_{ha}$$
$$- D_bE_{ah} - E_{ap}S^p{}_{hb} + S^i{}_{pa}E^p{}_{ibh} + 4S^i{}_{qa}S^q{}_{pi}S^p{}_{hb} + D_iE^i{}_{bah}$$
$$+ S^p{}_{hi}E^i{}_{bap} + S^i{}_{pb}E^p{}_{aih} + 4S^i{}_{qb}S^q{}_{pa}S^p{}_{hi} + D_iE^i{}_{abh} + S^p{}_{hi}E^i{}_{abp}$$
$$+ S^i{}_{pa}E^p{}_{bih} + 4S^i{}_{qa}S^q{}_{pb}S^p{}_{hi}\}$$

$(\partial_{ab}E^i_{hi})_0$ peut donc s'écrire comme la somme de trois séries de termes

$$\alpha) \quad \frac{1}{2}(S^q{}_{ha}E_{qb} + S^q{}_{hb}E_{qa}) + \frac{1}{3}(D_bE_{ha} + D_aE_{hb})$$
$$+ \frac{1}{12}(- D_aE_{bh} - E_{bp}S^p{}_{ha} - D_bE_{ah} - E_{ap}S^p{}_{hb} + D_iE^i{}_{bah} + D_iE^i{}_{abh}),$$

β) $$\underset{(a,b)}{S}\left\{\frac{1}{2}S^i_{pa}E^p_{hbi}+\frac{1}{3}S^p_{ia}E^i_{hbp}+\frac{1}{6}S^i_{pa}[E^p_{bih}+E^p_{ibh}]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}S^i_{pa}(E^p_{ibh}+E^p_{bih})\right\}$$

où $\underset{(a,b)}{S}$ indique la somme de termes analogues obtenus en permutant a et b.

En nous plaçant dans l'hypothèse $DS=\overline{D}S=0$, on a la première identité de Bianchi ordinaire, le terme considéré s'écrit alors :

$$\underset{(a,b)}{S}\frac{19}{12}S^i_{pa}E^p_{hbi}.$$

γ) $$\underset{(a,b)}{S}\frac{5}{3}S^i_{pa}S^p_{qb}S^q_{hi}+S^i_{pa}S^p_{qi}S^q_{hb},$$

mais, en utilisant (12-20), on voit que ce terme peut s'écrire

$$\underset{(a,b)}{S}\frac{11}{3}S^i_{pa}S^p_{qb}S^q_{hi}.$$

Finalement, nous obtenons en tenant compte de l'antisymétrie de S

$$(\partial_{ab}E^i_{hi})_0=\underset{(a,b)}{S}\left[\frac{1}{2}S^q_{ha}E_{qb}+\frac{1}{3}D_bE_{ha}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}(-D_aE_{bh}-E_{bp}S^p_{ha}+D_iE^i_{abh})+\frac{19}{12}S^i_{pa}E^p_{hbi}\right].$$

En utilisant la première identité de Bianchi, on obtient facilement :

$$S^i_{pa}E^p_{hbi}=-\frac{1}{2}S^i_{pa}E^p_{ihb},$$

de (12-21) on déduit, par contraction :

$$S^s_{rk}E_{js}+S^s_{ki}E^i_{jsr}+S^s_{ir}E^i_{jsk}=0, \tag{16-8}$$

d'autre part, de l'expression de $D_rE^i_{jkl}-\overline{D}_rE^i_{jkl}$, on déduit, en contractant r et i

$$D_iE^i_{jkl}-\overline{D}_iE^i_{jkl}=2(S^p_{ji}E^i_{pkl}+S^p_{ki}E^i_{jpl}+S^p_{li}E^i_{jkp}) \tag{16-9}$$

et, par soustraction de (16-8) et (16-9)

$$S^p_{ji}E^i_{pkr}=E_{jp}S^p_{rk}+\frac{1}{2}\left(D_iE^i_{jkr}-\overline{D}_iE^i_{jkr}\right)$$

d'où

(16-10) $(\eth_{ab}E^{i}_{hi})_0$

$$= \underset{(a,\, b)}{S}\left[\frac{1}{6}D_aE_{hb}+\frac{1}{12}D_hE_{ab}-\frac{3}{8}S^p{}_{ha}E_{bp}+\frac{19}{48}(D_iE^i{}_{ahb}-\overline{D}_iE^i{}_{ahb})\right],$$

mais, d'après les hypothèses faites sur S, on a pour D et $\overline{D}$ les identités de Bianchi, d'où on déduit

$$D_iE^i{}_{ahb} = D_bE_{ah} - D_hE_{ab},$$

de même

$$\overline{D}_iE^i{}_{ahb} = \overline{D}_bE_{ah} - \overline{D}_hE_{ab}$$
$$= D_bE_{ah} - D_hE_{ab} + 2(S^p{}_{ab}E_{ph} + S^p{}_{hb}E_{ap} - S^p{}_{ah}E_{pb} - S^p{}_{bh}E_{ap}),$$

finalement

(16-11) $$A^s{}_{shab} = \underset{(a,\, b)}{S}\left[\frac{1}{6}D_aE_{hb}+\frac{1}{12}D_hE_{ab}-\frac{11}{4}S^p{}_{ha}E_{bp}\right],$$

Dans l'hypothèse $DS = 0$, (16-1) est équivalente à :

$$\left(D_m\overline{D}_n - \overline{D}_nD_m\right)A^s{}_{sij} = 0$$

or, d'après l'expression de $A^s{}_{sij}$, cette relation se réduit à

(16-12) $$E^p{}_{imn}E_{pj} + E^p{}_{jmn}E_{pi} = 0,$$

en utilisant (16-3) pour $q = 1$, on a :

(16-13) $$E^p{}_{imn}D_kE_{pj} + E^p{}_{jmn}D_kE_{pi} = 0.$$

(16-2) Compte tenu de (16-12) et (16-13) s'écrit

(16-14) $$E^p{}_{imn}D_pE_{jk} + E^p{}_{jmn}D_pE_{ki} + E^p{}_{kmn}D_pE_{ij} = 0.$$

On a donc les mêmes relations que dans le cas riemannien, on en déduit alors

(16-15) $$E^p{}_{n}D_pE_{jk} = 0.$$

Considérons maintenant l'équation (16-3) pour $q = 1$ et pour $q = 2$ et le tenseur $S^q{}_{is}S^s{}_{qj}$, on a

$$D_m\overline{D}_nS^q{}_{is}S^s{}_{qj} - \overline{D}_nD_mS^q{}_{is}S^s{}_{qj} = -(E^p{}_{imn}S^q{}_{ps}S^s{}_{qj} + E^p{}_{jmn}S^q{}_{is}S^s{}_{qp}) = 0,$$

d'où on déduit

$$D_{a_1}\ldots D_{a_l}E^p{}_{imn}S^q{}_{ps}S^s{}_{qj} + D_{a_1}\ldots D_{a_l}E^p{}_{jmn}S^q{}_{is}S^s{}_{qp} = 0$$

Les équations (16-3) se réduisent donc à

$$(16\text{-}16)\qquad D_rE^p{}_{imn}E_{pj} + D_rE^p{}_{jmn}E_{pi} = 0,$$
$$(16\text{-}17)\qquad D_{kr}E^p{}_{imn}E_{pj} + D_{kr}E^p{}_{jmn}E_{pi} = 0,$$

(16-4) pour $q = 1$, s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}[D_rE^p{}_{imn}(D_jE_{pk} + D_kE_{pj} + D_pE_{jk}) \\ + D_rE_{pjmn}(D_pE_{ik} + D_kE_{ip} + D_iE_{pk}) \\ + D_rE^p{}_{kmn}(D_jE_{ip} + D_pE_{ij} + D_iE_{jp})] \\ -\frac{11}{4}[D_rE^p{}_{imn}(S^q{}_{pj}E_{kq} + S^q{}_{pk}E_{jq}) + D_rE^p{}_{jmn}(S^q{}_{ip}E_{kq} + S^q{}_{ik}E_{pq}) \\ + D_rE^p{}_{kmn}(S^q{}_{ij}E_{pq} + S^q{}_{ip}E_{jq})] = 0.\end{aligned}$$

En utilisant la deuxième identité de Bianchi, on peut écrire

$$S^q{}_{pj}E^p{}_{imn} + S^q{}_{ip}E^p{}_{jmn} = S^p{}_{ij}E^q{}_{pmn}$$

et, par dérivation covariante

$$S^q{}_{pj}D_rE^p{}_{imn} + S^q{}_{ip}D_rE^p{}_{jmn} = S^p{}_{ij}D_rE^q{}_{pmn}.$$

Le deuxième crochet s'écrit donc

$$\begin{aligned}E_{kq}S^p{}_{ij}D_rE^q{}_{pmn} + E_{jq}S^p{}_{ik}D_rE^q{}_{pmn} + E_{qp}(S^p{}_{ik}D_rE^q{}_{jmn} + S^p{}_{ij}D^rE^q{}_{kmn}) \\ = S^p{}_{ij}(E_{qk}D_rE^q{}_{pmn} + E_{pq}D_rE^q{}_{kmn}) + S^p{}_{ik}(E_{jq}D_rE^q{}_{pmn} \\ + E_{pq}D_rE^q{}_{jmn}) = 0\end{aligned}$$

d'après (16-16), (16-4) se réduit donc à :

$$\begin{aligned}D_rE^p{}_{imn}(D_jE_{pk} + D_kE_{pj} + D_pE_{jk}) \\ + D_rE^p{}_{jmn}(D_pE_{ik} + D_kE_{ip} + D_iE_{pk}) \\ + D_rE^p{}_{kmn}(D_jE_{ip} + D_pE_{ij} + D_iE_{jp}) = 0.\end{aligned}$$

Nous avons donc les mêmes équations que dans le cas riemannien, on en déduit alors

$$D^kE^{ip}D_kE_{ip} = 0.$$

THÉORÈME. — *Soit sur un espace riemannien* V *une connexion euclidienne* (ε) *vérifiant les hypothèses suivantes :* $DS = \overline{D}S = 0$, S *complètement antisymétrique. Si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{C}}_E$ *conservent l'élément de volume, on a le système infini de relations :*

$$D_m\overline{D}_nA^s{}_{sa_1\ldots a_p} - \overline{D}_nD_mA^s{}_{sa_1\ldots a_p} = 0.$$

Si la courbure de Ricci de la connexion (ε) *est non dégénérée* (*resp. si* V *est proprement riemannien*) *et si les transformations* $\overset{0}{\mathcal{C}}_E$, $\overset{1}{\mathcal{C}}_E$ (*resp.* $\overset{1}{\mathcal{C}}_E$, $\overset{2}{\mathcal{C}}_E$) *conservent le volume, le tenseur de Ricci de la connexion* (ε) *est à dérivée covariante nulle.*

DEUXIÈME PARTIE

Transformations infinitésimales projectives et conformes.

CHAPITRE PREMIER

TRANSFORMATIONS PROJECTIVES ET TRANSFORMATIONS CONFORMES SUR UN ESPACE DE RIEMANN COMPACT OU COMPLET

§ 17. — *p*-formes conformes sur un espace riemannien compact.

Soit ξ un vecteur conforme sur un espace riemannien V_n, on déduit de (2-9), par contraction, en utilisant pour le tenseur de courbure la normalisation de YANO-BOCHNER [27].

$$\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi = Q\xi \tag{17-1}$$

où d et δ sont les opérateurs de différentiation et de co-différentiation, et Δ le laplacien de G. DE RHAM

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

et Q l'opérateur de Ricci, c'est-à-dire l'opérateur qui à la 1-forme ξ_i, fait correspondre la 1-forme :

$$2R_{ij}\xi^j.$$

Réciproquement, si V_n est compact orientable, (17-1) est une condition suffisante pour que le vecteur ξ soit conforme ([13], p. 128). Dans ce cas, il n'existe pas de vecteur conforme vérifiant la relation

$$R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$$

à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement

$$R_{ij}\xi^i\xi^j = 0$$

en particulier, si la courbure de Ricci est partout définie négative, il n'existe pas de vecteur conforme non nul ([27, p. 54). Dans le cas d'un espace d'Einstein compact orientable V_n $(n > 2)$

$$2R_{ij} = \lambda_1 g_{ij}, \qquad (\lambda_1 > 0),$$

on a le résultat suivant : ([13], p. 138) : les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les 1-formes co-fermées (resp. fermées) sont supérieures ou égales à λ_1 $\left(\text{resp. } \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}\right)$. Les 1-formes caractéristiques co-fermées correspondant à λ_1, engendrent l'algèbre de Lie L_1 des 1-formes isométriques, et les 1-formes correspondant à la valeur propre λ_2, engendrent l'espace L_2 des 1-formes conformes pures (différentielles des fonctions solution de l'équation $\Delta\varphi = \lambda_2\varphi$), et, on a

$$[L_1, L_2] \subset L_2 \qquad \text{et} \qquad [L_2, L_2] \subset L_1,$$

Si ξ est un vecteur conforme et si on associe à la géodésique $x^i(s)$ (où s est l'arc), la fonction

$$f = \xi_i \frac{dx^i}{ds},$$

on a

$$\frac{df}{ds} = \Phi \quad \left(\Phi = \frac{1}{n}\nabla_i\xi^i\right),$$

donc $\dfrac{df}{ds}$ dépend uniquement du point considéré et non de la direction de la géodésique passant par ce point.

Plus généralement, si nous considérons maintenant un tenseur antisymétrique $\xi_{i_1 \dots i_p}$ et si nous supposons que $\dfrac{d}{ds}\left(\xi_{ii_1 \dots i_p}\dfrac{dx^i}{ds}\right)$ en un point donné dépend seulement du point et non de la direction de la géodésique $x^i(s)$ passant par ce point, nous en déduisons :

$$(17\text{-}2) \qquad \nabla_j\xi_{ii_2 \dots i_p} + \nabla_i\xi_{ji_2 \dots i_p} = 2\theta_{i_2 \dots i_p} g_{ij}$$

avec

$$\theta_{i_2 \dots i_p} = \frac{1}{n} \nabla_r \xi^r{}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Un tel tenseur est dit conforme et la p-forme associée sera dite p-forme conforme.

En posant :

$$F(\xi_{i_1 \dots i_p}) = R_{ij} \xi^{i i_2 \dots i_p} \xi^j{}_{i_2 \dots i_p} + \frac{p-1}{2} R_{ijkl} \xi^{ij i_3 \dots i_p} \xi^{kl}{}_{i_3 \dots i_p},$$

on sait ([27], p. 73) que si l'espace de Riemann V est compact, orientable, il n'existe pas de p-forme conforme vérifiant

$$F(\xi_{i_1 \dots i_p}) \leqslant 0$$

à moins qu'elle soit à dérivée covariante nulle, et alors nécessairement

$$F(\xi_{i_1 \dots i_p}) = 0$$

en particulier, si la forme $F(\xi_{i_1 \dots i_p})$ est définie négative, alors, il n'existe pas de p-forme conforme non nulle. Plaçons-nous maintenant dans le cas où il existe de telles p-formes. Nous noterons Q_p, l'opérateur qui au tenseur de composantes $\xi_{i_1 \dots i_p}$ fait correspondre le tenseur $Q_p(\xi)$ dont les composantes sont données par :

$$(Q_p \xi)_{i_1 \dots i_p} = \sum_{s=1}^{p} R^l{}_{i_s} \xi_{i_1 \dots i_{s-1} l i_{s+1} \dots i_p} + \sum_{s<t}^{1 \dots p} R^{lm}{}_{i_s i_t} \xi_{i_1 \dots i_{s-1} l i_{s+1} \dots i_{t-1} m i_{t+1} \dots i_p}.$$

Partons de la relation

$$\begin{aligned}(17\text{-}3) \quad & \nabla^l \nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p} - g^{jk} \nabla_k (\nabla_j \xi_{i_1 i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_1} \xi_{j i_2 \dots i_p} - \cdots - \nabla_{i_p} \xi_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j}) \\ & - (\nabla_{i_1} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_2} \nabla_r \xi^r{}_{i_1 i_3 \dots i_p} - \cdots - \nabla_{i_p} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_{p-1} i_1}) = (Q_p \xi)_{i_1 \dots i_p}.\end{aligned}$$

De (17-2) on déduit

$$\begin{aligned} p \nabla_j \xi_{i_1 i_2 \dots i_p} + \nabla_{i_1} \xi_{j i_2 \dots i_p} + \nabla_{i_2} \xi_{i_1 j i_3 \dots i_p} + \cdots + \nabla_{i_p} \xi_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j} \\ = \frac{2}{n} [g_{i_1 j} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_p} - g_{i_2 j} \nabla_r \xi^r{}_{i_1 \dots i_p} - \cdots - g_{i_p j} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_{p-1} j}].\end{aligned}$$

(17-3) devient alors

$$\begin{aligned}(17\text{-}4) \quad -p \nabla_l \nabla^l \xi_{i_1 \dots i_p} + \left(\frac{2}{n} - 1\right) [\nabla_{i_1} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_2} \nabla_r \xi^r{}_{i_1 i_3 \dots i_p} - \cdots \\ - \nabla_{i_p} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_{p-1} i_1}] = (Q_p \xi)_{i_1 \dots i_p}\end{aligned}$$

et, en utilisant la relation

$$\nabla_l \nabla^l \xi_{i_1 \dots i_p} = (-\Delta\xi + Q_p \xi)_{i_1 \dots i_p}$$

on voit que (17-4) peut s'écrire :

$$(17\text{-}5) \qquad p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi = (p+1) Q_p \xi.$$

Nous allons voir maintenant que cette relation caractérise les p-formes conformes sur un espace riemannien compact. Nous noterons

$$A\xi = p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi - (p+1)\, Q_p \xi.$$

Considérons le tenseur

$$\alpha_{i_1 \dots i_p l} = p\left(\nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p} + \nabla_{i_1} \xi_{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} g_{i_1 l} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_p}\right)$$

et la 1-forme

$$\beta_l = \xi^{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p l}$$

(,) désignant le produit scalaire local, on a, par un calcul direct

$$\nabla_l \beta^l + (A\xi, \xi)$$
$$= p\left[\nabla^l \xi^{i_1 \dots i_p} \nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p} + \nabla^l \xi^{i_1 \dots i_p} \nabla_{i_1} \xi_{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} \nabla_l \xi^{l i_2 \dots i_p} \nabla_r \xi^r{}_{i_2 \dots i_p}\right]$$

ou

$$(17\text{-}6) \quad \nabla_l \beta^l + (A\xi, \xi) = \frac{p}{2}\left(\nabla^l \xi^{i_1 \dots i_p} + \nabla^{i_1} \xi^{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} g^{i_1 l} \xi^{r i_2 \dots i_p}\right)$$
$$\left(\nabla_l \xi_{i_1 \dots i_p} + \nabla_{i_1} \xi_{l i_2 \dots i_p} - \frac{2}{n} g_{i_1 l} \xi_{r i_2 \dots i_p}\right).$$

Il résulte de cette dernière relation, par intégration sur la variété Vn compacte orientable que toute p-forme solution de (17-5) est conforme.

Théorème. — *Sur un espace proprement riemannien Vn, compact orientable, une p-forme est conforme, si, et seulement si elle est solution de l'équation*

$$p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi = (p+1) Q_p(\xi).$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où Q_p est défini positif (c'est-à-dire, pour tout tenseur ξ, $(Q_p(\xi), \xi) > 0$), et reprenons la relation (17-6) que nous pouvons écrire :

$$\delta\beta = \left(\left[p\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right) d\delta\xi - (p+1) Q_p(\xi)\right], \xi\right) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha).$$

Si λ est une valeur propre de Δ qui correspond à une p-forme co-fermée sur Vn, (17-6) se réduit à

$$\delta\beta = ([p\lambda\xi - (p+1)Q_p(\xi)], \xi) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha). \tag{17-7}$$

Par intégration sur Vn, on en déduit que si λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $(p+1)\,Q_p$ sur les p-formes co-fermées, on a nécessairement

$$p\lambda \geqslant \lambda_1.$$

Nous allons maintenant considérer les p-formes fermées, on remarque d'abord que (17-6) peut s'écrire, sous la forme équivalente

$$\delta\beta = \left(\left[\left(p + 1 - \frac{2}{n}\right)\Delta\xi - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\delta d\xi - (p+1)Q_p(\xi)\right], \xi\right) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha).$$

Soit μ une valeur propre de Δ correspondant à une p-forme fermée, alors

$$\delta\beta = \left(\left[\left(p + 1 - \frac{2}{n}\right)\mu\xi - (p+1)Q_p(\xi)\right], \xi\right) - \frac{p}{2}(\alpha, \alpha) \tag{17-8}$$

on en déduit

$$\mu \geqslant \frac{\lambda_1}{p + 1 - \dfrac{2}{n}}.$$

Théorème. — *Sur une variété riemannienne compacte orientable, où l'opérateur* Q_p *est défini positif en tout point, si* λ_1 *est la plus petite valeur propre de l'opérateur* $(p+1)\,Q_p$ *sur* *les p-formes, les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les p-formes co-fermées (resp. fermées) sont supérieures ou égales à*

$$\frac{\lambda_1}{p}\left(resp.\ \frac{\lambda_1}{p+1-\frac{2}{n}}\right).$$

Supposons maintenant l'espace Vn à courbure constante

$$R_{ijkl}=\frac{R}{n(n-1)}(g_{jk}g_{il}-g_{jl}g_{ik}),\qquad R_{jk}=\frac{R}{n}g_{jk}$$

alors

$$(Q_p\xi)_{i_1\dots i_p}=\frac{pR(n-p)}{n(n-1)}\xi_{i_1\dots i_p}.$$

Nous supposons toujours $F(\xi_{i_1\dots i_p})>0$, on sait qu'alors il n'existe pas de p-forme harmonique non nulle ([27], p. 64), toute p-forme se décompose d'une manière unique suivant

$$\xi=\zeta+\omega,$$

où ζ est cohomologue à 0 et ω homologue à 0. D'autre part, dans le cas d'un espace à courbure constante, si ξ est une p-forme conforme, on a

$$p\Delta\xi+\left(1-\frac{2}{n}\right)d\delta\xi=K_1\xi \tag{17-9}$$

avec
$$K_1=\frac{Rp(p+1)(n-p)}{n(n-1)};$$

on a d'autre part,

$$\Delta(\zeta+\omega)=\delta d\zeta+d\delta\omega,$$

(17.9) devient

$$p\delta\, d\zeta+\left(p+1-\frac{2}{n}\right)d\delta\omega=K_1(\zeta+\omega)$$

et, on en déduit

$$p\Delta\zeta=K_1\zeta\quad(\delta\zeta=0) \tag{17-10}$$

$$\Delta\omega=K_2\omega\ \ (d\omega=0)\quad \text{avec}\quad K_2=\frac{K_1}{p+1-\frac{2}{n}}. \tag{17-11}$$

De (17-10), il résulte que ζ est une p-forme de Killing, de (17-11), on déduit

$$\Delta\delta\omega = K_2\delta\omega,$$

réciproquement, si ω' est une $(p$-1)-forme solution de (17-11), on peut lui associer la p-forme $\omega = \frac{1}{K_2}\omega'$ solution de (17-11), la correspondance biunivoque entre les formes ω et ω' est donnée par $\omega' = \delta\omega$ et $\omega = \frac{1}{K_2}\omega'$, les formes ω solutions de (17-11) définissent des p-formes conformes que nous appellerons suivant LICHNEROWICZ ([13], p. 137) conformes pures. On voit alors que l'espace vectoriel L des p-formes conformes est la somme directe $L = L_1 + L_2$ où L_1 est l'espace vectoriel des p-formes de Killing et L_2 l'espace vectoriel des p-formes conformes pures.

THÉORÈME. — *Sur un espace proprement riemannien, compact orientable, à courbure constante, les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les p-formes co-fermées (resp. fermées) sont supérieures ou égales à*

$$K_1 = \frac{Rp(p+1)(n-p)}{n(n-1)} \qquad \left(\text{resp. } K_2 = \frac{K_1}{p+1-\frac{2}{n}}\right)$$

Les formes co-fermées correspondant à K_1 sont des formes de Killing, les formes fermées correspondant à K_2 sont des formes conformes pures. L'espace vectoriel L des formes conformes est somme directe des espaces vectoriels L_1 et L_2 des formes de Killing et des formes conformes pures. Les projecteurs de L sur L_1 et L_2 sont respectivement δd et $d\delta$.

§ 18. — Transformations affines sur un espace complet.

Soit ξ un vecteur affine sur un espace riemannien V_n, associons à ce vecteur et à la géodésique $x^i(s)$ (où s est l'arc), la fonction

$$f = \xi_i \frac{dx^i}{ds}$$

de l'équation différentielle des géodésiques

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

on déduit

$$\frac{df}{ds} = \nabla_k\xi_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \qquad \frac{d^2f}{ds^2} = \nabla_k\nabla_j\xi_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

et, d'après (1.2)

$$\frac{d^2f}{ds^2} = - R_{ijkl}\xi^l\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

d'où

$$f = \left(\frac{df}{ds}\right)_0 s + f_0 = (\nabla_j\xi_i\Theta^i\Theta^j)_0\, s + (\xi_i\Theta^i)_0$$

Θ étant le vecteur tangent en 0 à la géodésique considérée. Supposons V_n complet, alors s peut prendre toute valeur de 0 à $+\infty$; si le vecteur ξ est de longueur bornée, il en est de même de la fonction f, ce qui entraîne nécessairement

$$(\nabla_j\xi_i\Theta^i\Theta^j)_0 = 0,$$

et, puisque cette relation est vérifiée en tout point 0 et pour toute géodésique issue de 0, en on déduit

$$\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = 0.$$

Ce résultat a été démontré par Hano [6] par une autre méthode.

Théorème. — *Sur un espace riemannien complet, tout vecteur affine de longueur bornée est isométrique.*

§ 19. — Transformations projectives sur un espace compact.

Si ξ est un vecteur projectif sur un espace riemannien, on a, d'après (2-2) et (2-3)

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i + R_{ijkp}\xi^p = \frac{1}{n+1}(g_{ij}\nabla_k\nabla_p\xi^p + g_{ik}\nabla_j\nabla_p\xi^p)$$

d'où, en contractant j et k

$$\nabla_l\nabla^l\xi_i + R_{ip}\xi^p = \frac{2}{n+1}\nabla_j\nabla_p\xi^p$$

on a, d'autre part,

$$(\Delta\xi)_i = R_{ip}\xi^p - \nabla_l \nabla^l \xi_i$$

d'où

$$(19\text{-}1) \qquad \Delta\xi - \frac{2}{n+1} d\delta\xi = Q\xi.$$

Supposons l'espace V compact orientable, $\langle\ ,\ \rangle$ désignant le produit scalaire global, de (19-1) on déduit

$$(19\text{-}2) \qquad \langle \Delta\xi, \xi \rangle - \frac{2}{n+1} \langle d\delta\xi, \xi \rangle = \langle Q\xi, \xi \rangle$$

or, sur un espace compact orientable

$$\langle \Delta\xi, \xi \rangle = \langle d\xi, d\xi \rangle + \langle \delta\xi, \delta\xi \rangle$$

et

$$\langle d\delta\xi, \xi \rangle = \langle \delta\xi, \delta\xi \rangle$$

alors (19-2) s'écrit :

$$(19\text{-}3) \qquad \langle d\xi, d\xi \rangle + \frac{n-1}{n+1} \langle \delta\xi, \delta\xi \rangle = \langle Q\xi, \xi \rangle$$

d'où si $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$ (19-3) entraîne

$$R_{ij}\xi^i\xi^j = 0 \qquad \text{et} \qquad d\xi = \delta\xi = 0.$$

De $\delta\xi = 0$, il résulte que ξ est affine, donc isométrique puisque V est compact, alors $d\xi = 0$ entraîne en plus $\nabla_i \xi_j = 0$. Nous obtenons donc le résultat suivant, analogue au résultat de Yano pour les vecteurs conformes,

Théorème. — *Sur un espace de Riemann compact, orientable, il n'existe pas de vecteur projectif vérifiant* $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$, *à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement* $R_{ij}\xi^i\xi^j = 0$. *Si la courbure de Ricci de l'espace est partout définie négative, il n'existe pas de vecteur projectif non nul.*

§ 20. — Décomposition des vecteurs projectifs et conformes.

Soit Vn une variété riemannienne complète, simplement connexe, on sait [23] que Vn peut être identifiée au produit topologique et riemannien de $(r+1)$ variétés riemanniennes $W^a (a = 0, 1, \ldots r)$, complètes simplement connexes, W^0 étant euclidienne et $W^a (a \neq 0)$ irréductible, de dimension $\geqslant 2$. Nous désignerons par T l'espace fibré des vecteurs tangents à Vn et par T^a l'espace fibré des vecteurs tangents à W^a. Tout vecteur $X \in T$ est défini par $X = \{X_a\}$, où $X_a \in T^a$. La connexion riemannienne de Vn est définie par ses coefficients

$$\Gamma^i_{jk} = \{\Gamma^{i_a}_{j_a k_a}\}$$

où les $\Gamma^{i_a}_{j_a k_a}$ sont les coefficients de la connexion riemannienne de W^a.

Si ∇ est la dérivation covariante sur Vn et ∇_a la dérivation covariante sur W^a, on a

$$\text{(20-1)} \qquad \nabla_X Y = \sum_{a=0}^{r} \left(\nabla_{aX_a} Y_a + \sum_{a \neq b} [X_a, Y_b]_b\right).$$

De plus, R désignant le tenseur de courbure de Vn et Ra le tenseur de courbure de Va, on a

$$\text{(20-2)} \qquad R(X, Y)Z = \sum_a R_a(X_a, Y_a)Z_a$$

(où $\nabla_X Y$ désigne le vecteur de composantes $\nabla_k Y^l X^k$ et $R(X, Y)Z$ le vecteur de composantes $R^i_{jkl} X^k Y^l Z^j$).

Soit ξ un vecteur projectif, il lui correspond, d'après (2-2) un vecteur ψ tel que, pour tout couple X, Y de vecteurs $\in T$, on ait

$$\nabla_X \nabla_Y(\xi) - \nabla_{\nabla_X Y}(\xi) + R(\xi, X)Y = (\psi, X)Y + (\psi, Y)X.$$

De (20-1) et (20-2) on déduit

$$\text{(20-3)} \quad [\nabla_X \nabla_Y(\xi) - \nabla_{\nabla_X Y}(\xi) + R(\xi, X)Y]_a = \nabla_X \nabla_Y(\xi_a) - \nabla_{\nabla_X Y}(\xi_a) + R(\xi_a, X)Y.$$

D'autre part, de (20-1) on déduit

$$\nabla_{X_a} Y_a = \nabla_{aX_a} Y \in T^a$$

De plus, pour un champ de vecteurs Z tel que $Z_x \in T^a_x$ en chaque point x (où Z_x désigne le vecteur du champ associé au point x et T^a_x l'espace tangent au point x à la variété W^a_x), nous avons

$$\nabla_{X_a} Z = \nabla_{aX_a} Z$$

par suite :

$$(\nabla_{X_a}\nabla_{Y_a}(\xi) - \nabla_{\nabla_{X_a}Y_a}(\xi) + R(\xi, X_a)Y_a)_a = (\psi, X_a)Y_a + (\psi, Y_a)X_a,$$

soit

$$(20\text{-}4)\qquad \nabla_{aX_a}\nabla_{aY_a}(\xi_a) - \nabla_{a\nabla_{aX_a}Y_a}(\xi_a) + R(\xi_a, X_a)Y_a = (\psi, X_a)Y_a + (\psi, Y_a)X_a.$$

Puisque, dans la décomposition de DE RHAM envisagée les sous-espaces T^a_x sont deux à deux orthogonaux on a

$$(\psi, X_a) = (\psi_a, X_a) \qquad \text{et} \qquad (\psi, Y_a) = (\psi_a, Y_a)$$

et (20-4) montre alors que le vecteur ξ_a est sur W^a_x un vecteur projectif.

Supposons maintenant que ξ est un vecteur conforme, on a alors, pour tout couple de vecteurs X, Y $\in$ T,

$$(20\text{-}5)\qquad (\nabla_X\xi, Y) + (X, \nabla_Y\xi) = 2\Phi(X, Y),$$

écrivons (20-5) pour deux vecteurs X_a, $Y_a \in T^a$

$$(\nabla_{X_a}\xi, Y_a) + (X_a, \nabla_{Y_a}\xi) = 2\Phi(X_a, Y_a)$$

et, en utilisant l'orthogonalité deux à deux des T^a_x, en un point x et les relations

$$(\nabla_{X_a}\xi)_a = \nabla_{X_a}\xi_a = \nabla_{aX_a}\xi_a,$$

on peut écrire

$$(\nabla_{aX_a}\xi_a, Y_a) + (X_a, \nabla_{aY_a}\xi_a) = 2\Phi(X_a, Y_a)$$

c'est-à-dire que ξ_a est sur W^a_x un vecteur conforme.

Réciproquement, si on a sur chaque W^a, une transformation $\mathcal{T}_a$,

$$x'_a = \mathcal{T}_a(x_a),$$

il en résulte une transformation $\mathcal{T}$ sur V^n définie par :

$$x' = \mathcal{T}(x) = \{\mathcal{T}_a(x_a)\}, \qquad \text{si} \qquad x = \{x_a\}$$

A la transformation $\mathcal{T}$, correspond un vecteur $\xi = \{\xi_a\}$, ξ_a étant le vecteur correspondant à $\mathcal{T}_a$, et on a

$$(\mathfrak{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \{(\mathfrak{L}(\xi_a)\Gamma)^{i_a}_{j_a k_a}\}.$$

Si les transformations $\mathcal{T}_a$ sont projectives, pour chaque a, il existe un vecteur ψ_a tel que :

$$(\mathcal{L}(\xi)\Gamma)^{i_a}_{j_a k_a} = \delta^{i_a}_{j_a}\psi_{k_a} + \delta^{i_a}_{k_a}\psi_{j_a}.$$

Si on désigne par ψ le vecteur dont les composantes sur les W^a sont les vecteurs ψ_a, il en résulte que la transformation définie précédemment est une transformation projective.

En ce qui concerne les transformations conformes, nous avons montré que si ξ est un vecteur conforme, ses composantes ξ_a sur les différentes feuilles W^a sont des vecteurs conformes, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Si ξ est un vecteur conforme, on sait qu'il existe un vecteur ψ tel que

$$(\mathcal{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_j\psi_k + \delta^i_k\psi_j - \psi^i g_{jk}. \tag{20-5}$$

Toute transformation infinitésimale (ξ) vérifiant (20-5) sera appelée collinéation conforme; de la même manière que dans le cas projectif, on voit que si les vecteurs ξ_a définissent des collinéations conformes, il en est de même du vecteur ξ. Ce sera un vecteur conforme si V^n est compact ([26], p. 278).

Théorème. — *Soit* $V^n = W^0 \times W^1 \times \cdots \times W^r$ *une variété riemannienne, simplement connexe, complète; soit* $\xi = \{\xi_a\}$ *un vecteur projectif* (*resp. conforme*), *la restriction de* ξ_a *sur chaque* W^a_x *est un vecteur projectif* (*resp. conforme*).

§ 21. — Endomorphismes associés à une transformation infinitésimale ([10], [20]).

Soit V une variété munie d'une connexion linéaire (γ) qui, rapportée à un système de coordonnées locales est définie par des coefficients Γ^i_{jk}, rappelons que la connexion linéaire $(\overline{\gamma})$ dite connexion associée est définie par les coefficients $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ donnés par

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

A toute transformation infinitésimale X définie sur V nous associons les tenseurs $\nabla_j X^i$ et $\overline{\nabla}_j X^i$ qui définissent en tout point des endomorphismes notés $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{A}}$ de l'espace vectoriel tangent en ce point.

Reprenons d'abord les résultats de LICHNEROWICZ ([13], p. 98). Soit χ une algèbre transitive de transformations affines sur une variété différentiable Vn munie d'une connexion linéaire. Soit t un tenseur quelconque, nous prendrons un tenseur t^i_j, les résultats s'étendent immédiatement à un tenseur d'ordre quelconque.

Considérons les trois propriétés suivantes :

a) Le tenseur t est à dérivée covariante nulle

$$\nabla_k t^i_j = 0.$$

b) Le tenseur t est invariant par χ

$$\mathfrak{L}(X)\, t^i_j = X^r \nabla_r t^i_j + t^i_r \overline{\nabla}_j X^r - t^r_j \overline{\nabla}_r X^i = 0.$$

c) Le tenseur t est invariant en un point particulier 0 par les endomorphismes $\overline{\mathfrak{A}}$

$$(A^i_j)_0 = \left(t^i_r \overline{\nabla}_j X^r - t^r_j \overline{\nabla}_r X^i\right)_0 = 0.$$

Nous allons montrer que deux quelconques de ces propriétés entraînent la troisième.

1° *a* et *b* entraînent évidemment *c*).

2° *b*) et *c*) entraînent

$$(X^r \nabla_r t^i_j)_0 = 0$$

et, par suite de la transitivité

$$(\nabla_r t^i_j)_0 = 0$$

mais d'autre part t est invariant par χ donc $\mathfrak{L}(X)t = 0$, de plus, les transformations de χ étant affines,

$$\nabla \mathfrak{L}(X)t - \mathfrak{L}(X)\nabla t = 0$$

ce qui montre que le tenseur ∇t est invariant par (χ), et, puisqu'il est nul en un point, il est nul en tout point.

3° Considérons maintenant *a*) et *c*), de $\nabla t = 0$ et de

$$\nabla_k \overline{\nabla}_j X^r = - R^r{}_{jkl} X^l$$

puisque (X) est affine, on déduit immédiatement

$$\nabla_k A^i_j = 0.$$

Le tenseur A^i_j nul en un point, est à dérivée covariante nulle, donc il est nul en tout point, alors

$$\mathfrak{L}(X) t^i_j = 0$$

t est invariant par (χ).

Soit maintenant sur une variété différentiable à connexion symétrique Γ^i_{jk}, (χ) une algèbre transitive de transformations projectives, à tout $X \in \chi$ est associé un vecteur φ, et on a

$$(\mathcal{L}(X)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j$$

t étant un tenseur t^i_j considérons les quatre propriétés suivantes :

a) t est à dérivée covariante nulle,

b) t est invariant par χ,

c) t est invariant en tout point par les endomorphismes définis par les tenseurs

$$B^i_j = X^i\varphi_j, \qquad X \in \chi.$$

d) t est invariant en un point particulier 0 par les endomorphismes $\mathcal{A}$.

1° *a* et *b* entraînent évidemment *d*, d'autre part, on a

$$\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r\mathcal{L}(X)t^i_j = (\mathcal{L}(X)\Gamma)^i_{pr}t^p_j - (\mathcal{L}(X)\Gamma)^p_{jr}t^i_p = \delta^i_r\varphi_p t^p_j - \delta^p_r\varphi_j t^i_p$$

d'où

$$X^i\varphi_p t^p_j - X^p\varphi_j t^i_p = X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r\mathcal{L}(X)t^i_j),$$

il en résulte que *a* et *b* entraînent *c*.

2° Supposons vérifiées *a*, *c* et *d* et calculons $\nabla_k A^i_j$

$$\nabla_k A^i_j = t^i_r\nabla_k\nabla_j X^r - t^r_j\nabla_k\nabla_r X^i,$$

mais, en utilisant la définition de X

$$\nabla_k\nabla_j X^r = -R^r_{jkl}X^l + \delta^r_j\varphi_k + \delta^r_k\varphi_j,$$

on a, en tenant compte de *a*,

$$\nabla_k A^i_j = \delta^r_k t^i_r\varphi_j - \delta^i_k t^r_j\varphi_r,$$

d'où d'après *c*

$$X^k\nabla_k A^i_j = 0$$

et, par suite de la transitivité

$$\nabla_k A^i_j = 0$$

finalement, on voit que *a*, *c* et *d* entraînent *b*.

3° Considérons maintenant les propriétés *b*, *c* et *d*. De *b* et *d* il résulte

$$(\nabla_r t^i_j)_0 = 0$$

d'autre part

$$X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r\mathcal{L}(X)t^i_j) = X^r\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j = X^i\varphi_p t^p_j - X^p\varphi_j t^i_p,$$

donc en tenant compte de c et de la transitivité, on en déduit

$$\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j = 0$$

d'où $\nabla_r t^i_j = 0$, b, c et d entraînent a.

Théorème. — *Soit sur une variété différentiable munie d'une connexion linéaire symétrique, (χ) une algèbre transitive de transformations infinitésimales projectives; si un tenseur t vérifie trois des conditions suivantes, il vérifie la quatrième:*

a) *t est à dérivée covariante nulle,*

b) *t est invariant par χ,*

c) *t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{B}$,*

d) *t est invariant en un point par les endomorphismes $\mathcal{A}$.*

Plus généralement considérons une variété différentiable munie d'une connexion linéaire quelconque et une algèbre transitive (χ) de transformations infinitésimales conservant les géodésiques. On sait ([24], p. 322) qu'à tout vecteur X définissant une telle transformation sont associés deux vecteurs φ et ψ tels que

$$(\mathcal{L}(X)\Gamma)^i_{jk} = \delta^i_k\varphi_j + \delta^i_j\psi_k.$$

Nous considérons maintenant pour un tenseur t quelconque les quatre propriétés suivantes:

a) t est à dérivée covariante nulle,

b) t est invariant par (χ),

c) t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{B}$ définis par les tenseurs $B^i_j = X^i\varphi_j$, $X \in \chi$,

d) t est invariant en un point particulier 0 par les endomorphismes $\overline{\mathcal{A}}$.

En utilisant (1-2), un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où la connexion est sans torsion, montre alors que si t vérifie trois des conditions, il vérifie la quatrième.

Remarque. — Nous allons dans la suite considérer une variété riemannienne, par suite de la dualité définie par la métrique, on sait, d'après (2-3), que la 1-forme associée au vecteur φ est, à un facteur constant près égale à la 1-forme $d\delta X$, en désignant encore par X la 1-forme associée à la transformation infinitésimale X. Alors si (χ) est une algèbre transitive de transformations projectives pour la connexion riemannienne d'un espace de Riemann V, on peut énoncer le théorème précédent, en prenant pour ensemble $\mathcal{B}$ les endomorphismes définis par les éléments du produit tensoriel $\chi \otimes d\delta\chi$. Soit maintenant, sur une variété riemannienne (χ) une algèbre transitive de transformations conformes

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 2\Phi g_{ij}$$

avec

$$\Phi = \frac{1}{n} \nabla_r X^r, \qquad \Phi_i = \frac{1}{n} \nabla_i \nabla_r X^r.$$

Considérons pour un tenseur t les quatre propriétés suivantes :

a) t est à dérivée covariante nulle,

b) t est invariant par χ.

c) t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{C}$ en désignant par $\mathcal{C}$ tout endomorphisme défini par

$$C^i_j = X^i \varphi_j - \varphi^i X_j$$

(ou encore, on peut prendre les endomorphismes associés aux 2-formes

$$\chi \wedge d\delta\chi,$$

d) t est invariant en un point 0 par les endomorphismes $\mathcal{C}$.

1° *a* et *b* entraînent évidemment *d*. D'autre part, on a

$$(\mathcal{L}(X)\Gamma^i_{pr} = \delta^i_p \varphi_r + \delta^i_r \varphi_p - g_{pr}\varphi^i,$$

d'où

$$\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r \mathcal{L}(X) t^i_j = \delta^i_r \varphi_p t^p_j - t_{rj}\varphi^i - t^i_r \varphi_j + g_{jr}\varphi^p t^i_p,$$

il en résulte

$$X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r \mathcal{L}(X) t^i_j) = t^i_r(\varphi^r X_j - X^r \varphi_j) - t^r_j(\varphi^i X_r - X^i \varphi_r)$$

et on voit alors que *a* et *b* entraînent *c*.

2° En notant toujours A^i_j le tenseur $t^i_r \nabla_j X^r - t^r_j \nabla_r X^i$ on a d'après *a* et la définition de X

$$\nabla_k A^i_j = t^i_k \varphi_j - t^i_r g_{jk}\varphi^r - t^r_j \delta^i_k \varphi_r + t_{kj}\varphi^i$$

d'où $\quad X^k \nabla_k A^i_j = - t^i_r(\varphi^r X_j - X^r \varphi_j) + t^r_j(\varphi^i X_r - X^i \varphi_r)$

alors *c* entraîne, en tenant compte de la transitivité

$$\nabla_k A^i_j = 0.$$

Si on suppose de plus que *d* est vérifiée, il en résulte $A^i_j = 0$ en tout point; c'est-à-dire que *a*, *c* et *d* entraînent *b*.

3° Prenons maintenant b, c et d, b et d entraînent

$$(\nabla_r t^i_j)_0 = 0.$$

On a d'autre part,

$$X^r(\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j - \nabla_r \mathcal{L}(X) t^i_j) = t^i_r(\varphi^r X_j - X^r \varphi_j) - t^r_j(\varphi^i X_r - X^i \varphi_r)$$

b et c entraînent

$$X^r \mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j$$

d'où, par suite de la transitivité

$$\mathcal{L}(X)\nabla_r t^i_j = 0$$

et puisque $(\nabla_r t^i_j)_0 = 0$, il en résulte $\nabla_r t^i_j = 0$.

En définitive, on voit que b, c et d entraînent a.

Théorème. — *Soit sur une variété riemannienne, (χ) une algèbre transitive de transformations infinitésimales conformes; si un tenseur t vérifie trois des conditions suivantes, il vérifie la quatrième :*

a) *t est à dérivée covariante nulle,*

b) *t est invariant par χ,*

c) *t est invariant en tout point par les endomorphismes $\mathcal{C}$.*

d) *t est invariant en un point par les endomorphismes $\mathcal{A}$.*

CHAPITRE II

VECTEURS ET TENSEURS INVARIANTS SUR UN ESPACE HOMOGÈNE

Nous considérons maintenant un espace proprement riemannien homogène G/H, le but de ce chapitre est de montrer que certains des résultats obtenus par Bochner, Lichnerowicz, Yano [16, [19], [27], pour les tenseurs d'un espace proprement riemannien compact sont valables pour les tenseurs invariants définis sur l'espace G/H.

§ 22. — Dérivée covariante d'un tenseur invariant.

On sait [16] que sur un espace riemannien compact orientable, tout tenseur dont la dérivée covariante d'ordre p quelconque est nulle est à dérivée covariante nulle. Soit maintenant $\mathfrak{a}$ un tenseur G-invariant sur G/H. Le tenseur métrique g étant G-invariant,

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \frac{1}{p\,!} \mathfrak{a}^{i_1 \dots i_p} \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p}$$

est constant; on en déduit

$$\nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p} \mathfrak{a}^{i_1 \dots i_p} = 0$$

$$\nabla_l \nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p} \mathfrak{a}^{i_1 \dots i_p} + \nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p} \nabla_l \mathfrak{a}^{i_1 \dots i_p} = 0$$

si

$$\nabla_l \nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p} = 0$$

alors

$$\nabla_k \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p} \nabla_l \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p} = 0$$

d'où, par contraction

$$\nabla_l \mathfrak{a}_{i_1 \dots i_p} = 0.$$

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène proprement riemannien* G/H, *si un tenseur* G-*invariant a une dérivée covariante d'ordre quelconque nulle, il est à dérivée covariante nulle.*

Nous pouvons appliquer ce résultat à un espace homogène hermitien, le tenseur $\Phi^i{}_j$ de la structure complexe est évidemment G-invariant, d'autre part au paragraphe 11, un calcul local nous a montré que $\nabla S = 0$ (où S est le tenseur de torsion de la deuxième connexion canonique) entraîne

$$\nabla_b \nabla_a \Phi^i{}_j = 0.$$

THÉORÈME. — *Tout espace homogène hermitien dont le tenseur de torsion est à dérivée covariante nulle dans la connexion riemannienne est un espace kählerien.*

§ 23. — Vecteurs harmoniques et vecteurs de Killing.

Soit ξ un vecteur quelconque, partons de

$$(\Delta\xi)_i = R_{ip}\xi^p - \nabla_l \nabla^l \xi_i. \tag{23-1}$$

Si ξ est un vecteur G-invariant $g_{ij}\xi^i\xi^j$ est constant, donc

$$g_{ij}(\nabla_k \xi^i)\, \xi^j = 0$$

d'où on déduit, par dérivation et contraction

$$(\nabla_l \nabla^l \xi_i)\, \xi^i = -\nabla_l \xi_i \nabla^l \xi^i \tag{23-2}$$

(23-1) donne alors :

$$(\Delta\xi)_i \xi^i = R_{pi}\xi^p\xi^i + \nabla_l \xi_i \nabla^l \xi^i \tag{23-3}$$

un vecteur de Killing vérifie la relation

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0$$

d'où

$$\nabla_l \nabla^l \xi_i + R_{pi}\xi^p = 0, \tag{23-4}$$

s'il est G-invariant, on en deduit, d'après (23-2)

$$\nabla_l \xi_i \nabla^l \xi^i - R_{pi}\xi^p\xi^i = 0. \tag{23-5}$$

En utilisant (23-3) et (23-5) nous obtenons :

Théorème. — *Sur un espace homogène proprement riemannien* G/H, *il n'existe pas de vecteur* G-*invariant harmonique* (*resp. de Killing*) *vérifiant* $R_{ij}\xi^i\xi^j \geqslant 0$ (*resp.* $R_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$), *à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement* $R_{ij}\xi^i\xi^j = 0$. *Si la courbure de Ricci est définie positive* (*resp. définie négative*) *il n'existe pas de vecteur harmonique* (*resp. de Killing*) G-*invariant non nul.*

Soit $\underline{G}$ l'algèbre de Lie de G, et X le champ de vecteurs de Killing de G/H correspondant à $\lambda \in \underline{G}$. Supposons X invariant par les transformations infinitésimales définies par G, alors pour tout $\mu \in \underline{G}$ on a

$$\mathcal{L}_Y(X) = [X, Y] = 0$$

(où Y correspond à μ) donc $[\lambda, \mu] = 0$, c'est-à-dire que λ appartient au centre de $\underline{G}$. D'après le théorème précédent, on voit que si la courbure de Ricci est définie négative, le centre de $\underline{G}$ se réduit à 0. Si, par exemple on suppose de plus G réductif, il en résulte qu'il est semi-simple.

Théorème. — *Soit* $V_n = G/H$ *un espace homogène riemannien, si la courbure de Ricci est définie négative, le centre de* $\underline{G}$ *est réduit à* 0.

§ 24. — Tenseurs harmoniques et tenseurs de Killing.

Pour un tenseur antisymétrique d'ordre p quelconque, on a

$$(24\text{-}1)\qquad (\Delta\xi)_{i_1\dots i_p} = \sum_{s=1}^{p} R^l{}_{i_s}\xi_{i_1\dots i_{s-1}li_{s+1}\dots i_p} + \sum_{s<t}^{1\dots p} R^{lm}{}_{i_si_t}\xi_{i_1\dots i_{s-1}li_{s+1}\dots i_{t-1}mi_{t+1}\dots i_p} - \nabla_l\nabla^l\xi_{i_1\dots i_p}$$

Le tenseur ξ étant G-invariant $\xi_{i_1\dots i_p}\xi^{i_1\dots i_p}$ est constant, on en déduit, en dérivant deux fois et en contractant

$$\nabla_l\nabla^l\xi_{i_1\dots i_p}\xi^{i_1\dots i_p} + \nabla_l\xi_{i_1\dots i_p}\nabla^l\xi^{i_1\dots i_p} = 0,$$

on déduit de (24-1), en utilisant toujours les notations de Bochner-Yano

$$F(\xi_{i_1\dots i_p}) = R_{ij}\xi^{ii_2\dots i_p}\xi^{j}{}_{i_2\dots i_p} + \frac{p-1}{2} R_{ijkl}\xi^{ijl_3\dots i_p}\xi^{kl}{}_{i_3\dots i_p}$$

$$(24\text{-}2)\qquad (\Delta\xi)_{i_1\dots i_p}\xi^{i_p\dots i_p} = \nabla_l\xi_{i_1\dots i_p}\nabla^l\xi^{i_1\dots i_p} + pF(\xi_{i_1\dots i_p}).$$

Un tenseur de Killing d'ordre p est défini par la condition d'être antisymétrique et par une condition analogue à celle des vecteurs de Killing, à savoir que $\xi_{ii_2\dots i_p}\dfrac{dx^i}{ds}$ est parallèle le long de la géodésique $x^i(s)$; un tel tenseur vérifie la relation :

$$\nabla_j\xi_{ii_2\dots i_p} + \nabla_i\xi_{ji_2\dots i_p} = 0$$

d'où on déduit ([27], p. 63-66)

$$\nabla_l\nabla^l\xi_{i_1\dots i_p}\xi^{i_1\dots i_p} + F(\xi_{i_1\dots i_p}) = 0$$

on a donc, pour tout tenseur de Killing G-invariant :

$$(24\text{-}3)\qquad F(\xi_{i_1\dots i_p}) - \nabla_l\xi_{i_1\dots i_p}\nabla^l\xi^{i_1\dots i_p} = 0.$$

De (24-2) et (24-3) on déduit.

Théorème. — *Sur un espace homogène riemannien* G/H *il n'existe pas de tenseur harmonique (resp. de Killing)* G-*invariant vérifiant la relation* $F(\xi_{i_1\dots i_p}) \geqslant 0$ (*resp.* $F(\xi_{i_1\dots i_p}) \leqslant 0$) *à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle et alors nécessairement* $F(\xi_{i_1\dots i_p}) = 0$. *Si la forme* $F(\xi_{i_1\dots i_p})$ *est définie positive (resp. négative), il n'existe pas de tenseur harmonique (resp. de Killing) G-invariant non nul.*

§ 25. — Vecteurs conformes et projectifs.

Puisque pour toute transformation infinitésimale affine (X) les opérateurs $\mathfrak{L}$ et ∇ commutent, si ξ est un vecteur G-invariant, il en sera de même du tenseur $\nabla_j\xi_i$, et, pour toute transformation infinitésimale du groupe G, $\mathfrak{L}$ commutant avec la contraction, $\nabla_i\xi^i$ est une fonction G-invariante, donc une constante, il en résulte que pour tout vecteur G-invariant

$$\nabla_k\nabla_l\xi^l = 0,$$

en particulier, tout vecteur G-invariant conforme est homothétique, et tout vecteur G-invariant projectif est affine. D'autre part, pour un vecteur G-invariant $g_{ij}\xi^i\xi^j$ est constant, donc borné et de plus, l'espace homogène riemannien G/H est complet, en appliquant le théorème du paragraphe 18, on en déduit :

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène riemannien* G/H *tout vecteur* G-*invariant conforme ou projectif est un vecteur de Killing.*

§ 26. — Vecteurs et tenseurs analytiques sur un espace homogène kählerien.

Supposons maintenant que G/H est un espace homogène Kählerien. Soit ξ un vecteur covariant analytique, c'est-à-dire vérifiant

$$\nabla_{\beta^*}\xi_\alpha = \nabla_\beta\xi_{\alpha^*}$$

de l'identité de Ricci

$$\nabla_{\delta^*}\nabla_\gamma\nabla_\beta - \nabla_\gamma\nabla_{\delta^*}\xi_\beta = -\xi_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta^*},$$

on déduit

$$\nabla_{\delta^*}\nabla_\gamma\xi_\beta - \xi_\alpha R^\alpha{}_{\gamma\delta^*\beta} = 0,$$

d'où

$$\nabla^\gamma\nabla_\gamma\xi_\beta - R^\alpha{}_\beta\xi_\alpha = 0.$$

avec la formule complexe conjuguée, ce qui d'après (23.1) est équivalent à

$$\Delta\xi = 0.$$

Si ξ est G-invariant nous pouvons alors appliquer le théorème du paragraphe 23. Si ξ est un vecteur contravariant analytique

$$\nabla_{\gamma^*}\xi^\alpha = \nabla_\gamma\xi^{\alpha^*} = 0,$$

un calcul analogue à celui fait précédemment, donne

$$\nabla^\gamma\nabla_\gamma\xi^\alpha + R^\alpha{}_\beta\xi^\beta = 0,$$

(avec la formule complexe conjuguée), ce qui entraîne la relation (23-4), on a donc la même conclusion que pour les vecteurs isométriques.

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène kählerien vérifiant* $R_{\alpha\beta^*}\xi^\alpha\xi^{\beta^*} \geqslant 0$ (*resp.* $R_{\alpha\beta^*}\xi^\alpha\xi^{\beta^*} \leqslant 0$), *tout vecteur réel,* G-*invariant, covariant* (*resp. contravariant*), *analytique est à dérivée covariante nulle, et si* $R_{\alpha\beta^*}\xi^\alpha\xi^{\beta^*}$ *est définie positive* (*resp. négative*) *il n'existe pas de tel vecteur non nul.*

Si les composantes $\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$ d'un tenseur réel de type mixte sont des fonctions analytiques des coordonnées (z^α), nous avons encore

$$(26\text{-}1) \qquad \nabla_{\gamma^*}\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \nabla_\gamma \xi^{\alpha_1^* \ldots \alpha_p^*}{}_{\beta_1^* \ldots \beta_q^*} = 0,$$

par contraction de l'identité de Ricci, on obtient

$$(26\text{-}2) \qquad \nabla_\gamma \nabla^\gamma \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = - R^{\alpha_1}{}_\lambda \xi^{\lambda\alpha_2 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} - R^{\alpha_p}{}_\lambda \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\lambda}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} + R^\mu{}_{\beta_1}\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\mu\beta_2 \ldots \beta_q} + \cdots + R^\mu{}_{\beta_q}\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_{q-1}\mu}.$$

Le tenseur ξ étant supposé invariant par le groupe G, on a

$$\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_p} = C^{te},$$

d'où

$$\nabla_\gamma \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} + \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\nabla_\gamma \xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} = 0,$$

le deuxième terme qui peut s'écrire

$$\xi_{\alpha_1^* \ldots \alpha_p^*}{}^{\beta_1^* \ldots \beta_q^*}\nabla_\gamma \xi^{\alpha_1^* \ldots \alpha_p^*}{}_{\beta_1^* \ldots \beta_q^*}$$

est nul d'après (26-1), donc

$$\nabla_\gamma \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} = 0$$

d'où, après dérivation contractée :

$$\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q}\nabla_\gamma \nabla^\gamma \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} + \nabla_\gamma \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\nabla^\gamma \xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} = 0,$$

de la relation (26-2), on déduit alors, en posant

$$G(\xi) = - R^{\alpha_1}{}_\lambda \xi^{\lambda\alpha_2 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} - \ldots - R^{\alpha_p}{}_\lambda \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\lambda}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_p} + R^\mu{}_{\beta_1}\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\mu\beta_1 \ldots \beta_q}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} + \ldots + R^\mu{}_{\beta_q}\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_{q-1}\mu}\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q}$$

des résultats analogues à ceux de YANO-BOCHNER ([27], p. 131-142).

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène kählerien, si les composantes analytiques complexes* $\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$ *d'un tenseur* G-*invariant réel de type mixte vérifient l'inégalité* $G(\xi) \geqslant 0$, *alors* $G(\xi) = 0$ *et* $\nabla_\alpha \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = 0$.

Suivant Yano-Bochner [27], si nous désignons, en chaque point de la variété, par M et m, respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice $R_{\alpha\beta^*}$, on a :

Théorème. — *Sur un espace homogène kählerien,* M *et* m *étant en chaque point respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice* $R_{\alpha\beta^*}$, *si* $qm - pM \geqslant 0$, *tout tenseur complexe analytique* G-*invariant de type mixte* $\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ *vérifie* $\nabla_\gamma \xi^{\alpha_1\ldots\alpha_q}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} = 0$, *si* $qm - pM > 0$, *il n'existe pas de tenseur complexe analytique* G-*invariant de ce type, non nul.*

Corollaire. — *Sur un espace homogène d'Einstein-Kähler, tout tenseur analytique complexe* G-*invariant de type mixte* $\xi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ *est à dérivée covariante nulle. Si la courbure scalaire est positive (resp. négative), il n'existe pas de tel tenseur non nul pour* $q > p$ *(resp.* $q < p$*).*

§ 27. — Espaces homogène $\mathcal{H}_{(n)}$, définition.

Sur un espace homogène G/H de dimension n, nous désignerons par $\mathcal{H}$(G/H), l'algèbre de cohomologie relativement à l'opérateur d, des formes G-invariantes sur G/H. $\mathcal{H}^p$(G/H) désignera l'espace des classes de degré p. Nous considérerons dans la suite des espaces homogènes vérifiant la condition : dimension $\mathcal{H}^n$(G/H) $\neq 0$, cette dimension est alors nécessairement 1; et, la condition est équivalente aux deux suivantes : *a*) il existe une n-forme G-invariante non homologue à 0, *b*) pour toute $(n-1)$-forme, G-invariante, on a $d\alpha = 0$. On sait que ce cas se présente par exemple si G est un groupe de Lie unimodulaire et H un sous-groupe fermé connexe réductif dans G (ou si G/H est orientable, G unimodulaire agissant effectivement sur G/H). Nous désignerons dans la suite par $\mathcal{H}_{(n)}$ tout espace homogène proprement riemannien de dimension n vérifiant la condition : dimension $\mathcal{H}^n$(G/H) $= 1$. Sur un tel espace si ξ est une 1-forme G-invariante, son adjointe $*\xi$ est une $(n-1)$-forme G-invariante, donc

$$d{*}\xi = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \delta\xi = 0,$$

de plus, de la relation

$$*d(a \wedge *b) = (da, b) - (a, \delta b),$$

on déduit que si a et b sont des formes G-invariantes de degré, respectivement p et $p+1$, on a

$$(da, b) = (a, \delta b).$$

Il en résulte alors qu'une forme G-invariante est harmonique si et seulement si elle est fermée et cofermée et que toute forme G-invariante admet une décomposition unique en somme de 3-formes G-invariantes, respectivement harmonique, homologue à 0 et cohomologue à 0 [7].

§ 28. — Vecteurs de Killing G-invariants sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$.

Nous avons vu qu'un vecteur contravariant analytique (calcul local du paragraphe 26) vérifie la relation

$$\Delta\xi = Q\xi.$$

Nous allons voir que sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$ kählerien, cette relation caractérise les vecteurs contravariants analytiques G-invariants.

Par un calcul direct, on a, Φ_{ij} étant la 2-forme canonique :

$$\begin{aligned}(28\text{-}1)\quad & 2\xi^i(\nabla_p\nabla^p\xi_i + R_{ip}\xi^p) \\ & + (\Phi^i{}_a\nabla_j\xi^a - \Phi^a{}_j\nabla_a\xi^i)(\Phi_{ib}\nabla^j\xi^b - \Phi^{bj}\nabla_b\xi^i) = \nabla_p(\xi^i\nabla^p\xi_i) \\ & + 2(R_{ip}\xi^i\xi^p - \Phi^i{}_a\Phi^{bj}\nabla_j\xi^a\nabla_b\xi_i),\end{aligned}$$

d'autre part, de

$$\nabla_l\nabla_k\Phi_{ij} - \nabla_k\nabla_l\Phi_{ij} = 0,$$

on déduit

$$\Phi^l{}_j R_{pl} = \frac{1}{2}\Phi^{pr}R_{jlpr}$$

d'où

$$R_{ip}\xi^i\xi^p = \frac{1}{2}\Phi^{pr}\Phi^j{}_k R_{ljpr}\xi^l\xi^k$$

de plus, en utilisant l'identité de Ricci et l'antisymétrie de Φ^{pr}, on a

$$R_{ip}\xi^i\xi^p = -\Phi^{pr}\Phi^j{}_k\nabla_r\nabla_p\xi_j\xi^k$$

finalement (28-1) s'écrit :

$$(28\text{-}2)\quad \begin{aligned} & 2\xi^i(\nabla_p\nabla^p\xi_i + R_{ip}\xi^p) \\ & \quad + (\Phi^i{}_a\nabla_j\xi^a - \Phi^a{}_j\nabla_a\xi^i)(\Phi_{ib}\nabla^j\xi^b - \Phi^{bj}\nabla_b\xi_i) \\ & \quad = \nabla_p(\xi^i\nabla^p\xi_i) - 2\nabla_r(\Phi^{pr}\Phi^j{}_k(\nabla_p\xi_j)\xi^k). \end{aligned}$$

Le membre de droite est la divergence d'un vecteur G-invariant, donc nul sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$. Il en résulte que

$$\nabla_p\nabla^p\xi_i + R_{ip}\xi^p = 0$$

(ou encore d'après l'expression de $(\Delta\xi)_i$ rappelée au paragraphe 19)

$$\Delta\xi - Q\xi = 0$$

entraîne

$$\Phi^i{}_a\nabla_j\xi^a - \Phi^a{}_j\nabla_a\xi^i = 0$$

c'est-à-dire que le vecteur ξ^i est analytique.

Considérons maintenant un vecteur covariant analytique, on sait qu'un tel vecteur est harmonique. Réciproquement soit sur un espace kählerien $\mathcal{H}_{(n)}$, un vecteur harmonique

$$\Delta\xi = 0$$

est alors équivalent à

$$d\xi = \delta\xi = 0$$

d'autre part sur un espace kählerien les opérateurs $\mathfrak{J}$ et Δ commutent, d'où

$$\Delta\mathfrak{J}\xi = 0$$

soit

$$\delta\mathfrak{J}\xi = d\mathfrak{J}\xi = 0$$

$d\mathfrak{J}\xi = 0$ entraîne

$$\Phi^p{}_i\nabla_j\xi_p = \Phi^p{}_j\nabla_i\xi_p,$$

c'est-à-dire, en coordonnées locales complexes

$$\nabla_{\beta^*}\xi_\alpha = -\nabla_\alpha\xi_{\beta^*}$$

d'où, d'après $d\xi = 0$,

$$\nabla_{\beta^*}\xi_\alpha = 0.$$

Le vecteur ξ est un vecteur covariant analytique.

Théorème. — *Sur un espace kählerien $\mathcal{H}_{(n)}$, il y a identité entre les vecteurs* G-*invariants analytiques contravariants* (*resp. covariants*) *et les vecteurs de Killing* (*resp. harmoniques*) G-*invariants.*

§ 29. — Tenseurs conformes G-invariants.

Nous reprenons maintenant les notations et les calculs locaux du paragraphe 17.

Il s'agit ici de tenseurs G-invariants conformes sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$. De la définition d'un tenseur conforme, on déduit

$$(29.1) \qquad \nabla^j\xi^{ii_2\dots i_p}\nabla_i\xi_{ji_2\dots i_p} = -\nabla^j\xi^{ii_2\dots i_p}\nabla_j\xi_{ii_2\dots i_p} + 2n\theta^{i_2\dots i_p}\theta_{i_2\dots i_p},$$

d'autre part

$$\nabla_i(\nabla_j\xi^{ii_2\dots i_p}\xi^j{}_{i_2\dots i_p}) - \nabla_j(\nabla_i\xi^{ii_2\dots i_p}\xi^j{}_{i_2\dots i_p})$$
$$= F(\xi_{i_1\dots i_p}) + \nabla_j\xi^{ii_2\dots i_p}\nabla_i\xi^j{}_{i_2\dots i_p} - \nabla_i\xi^{ii_2\dots i_p}\nabla_j\xi^j{}_{i_2\dots i_p},$$

le premier membre est la divergence d'un vecteur G-invariant, il est donc nul. La relation (29.1) devient alors :

$$\nabla^j\xi^{ii_2\dots i_p}\nabla_j\xi_{ii_2\dots i_p} + n(n-2)\theta^{i_2\dots i_p}\theta_{i_2\dots i_p} - F(\xi_{i_1i_2\dots i_p}) = 0.$$

Théorème. — *Sur un espace $\mathcal{H}_{(n)}$ il n'existe pas de tenseur* G-*invariant conforme, vérifiant* $F(\xi_{i_1i_2\dots i_p}) \leqslant 0$ *à moins qu'il soit à dérivée covariante nulle, alors nécessairement* $F(\xi_{i_1\dots i_p}) = 0$. *En particulier, si la forme* $F(\xi_{i_1\dots i_p})$ *est définie négative, alors il n'existe pas de tenseur* G-*invariant conforme non nul.*

De même, dans le cas d'un espace $\mathcal{H}_{(n)}$, β étant un tenseur G-invariant, on déduit de (17-6),

Théorème. — *Sur un espace proprement riemannien $\mathcal{H}_{(n)}$, un tenseur* G-*invariant est conforme si et seulement si il est solution de l'équation*

$$p\Delta\xi + \left[1 - \frac{2}{n}\right]d\delta\xi = (p+1)Q_p\xi.$$

De la même manière on déduit de (17-8),

Théorème. — *Sur un espace homogène $\mathcal{H}_{(n)}$ proprement riemannien où l'opérateur Q_p est défini positif si λ_1 est la plus petite valeur propre de l'opérateur $(p+1)$ Q_p sur les p-formes, les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les p-formes* G-*invariantes co-fermées (resp. fermées) sont supérieures ou égales à* $\dfrac{\lambda_1}{p}\left(\textit{resp.}\ \dfrac{\lambda_1}{p+1-\dfrac{2}{n}}\right)$.

De (17-9) on déduit,

Théorème. — *Sur un espace $\mathcal{H}(n)$ proprement riemannien à courbure constante, les valeurs propres de l'opérateur Δ sur les p-formes* G-*invariantes co-fermées, (resp. fermées) sont supérieures ou égales à*

$$K_1 = \frac{Rp(p+1)(n-p)}{n(n-1)} \quad \left(resp.\ K_2 = \frac{K_1}{p+1-\frac{2}{n}} \right)$$

Les formes co-fermées correspondant à K_1 *sont des formes de Killing. Les formes fermées correspondant à* K_2 *sont des formes conformes pures. L'espace vectoriel* L *des formes conformes est somme directe des espaces vectoriels* L_1 *et* L_2 *des formes de Killing et des formes conformes pures. Les projecteurs de* L *sur* L_1 *et* L_2 *sont respectivement* δd *et* $d\delta$.

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS PROJECTIVES ET CONFORMES SUR UN ESPACE D'EINSTEIN

§ 30. — Espace vectoriel des 1-formes conformes et des 1-formes projectives.

1° Soit sur un espace riemannien V une 1-forme conforme

$$\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = 2\Phi g_{ij} \qquad \left(\Phi = -\frac{\delta\xi}{n}\right). \tag{30-1}$$

Soit η une autre 1-forme conforme correspondant à la fonction ψ, $\alpha = [\xi, \eta]$ est une 1-forme conforme correspondant à la fonction : $\xi^p\Phi_p - \eta^p\psi_p$.

De (30-1) on déduit

$$\Delta\xi + \left(1 - \frac{2}{n}\right)d\delta\xi = Q\xi. \tag{30-2}$$

Supposons V espace d'Einstein avec $R \neq 0$, alors

$$Q\xi = \frac{2R}{n}\xi$$

et (30-2) s'écrit

$$\xi = \frac{n}{2R}\delta d\xi + \frac{n-1}{R}d\delta\xi. \tag{30-3}$$

Désignons par ζ_i le vecteur $\xi_i + \dfrac{n(n-1)}{R}\Phi_i$ et formons

$$\nabla_i\zeta_j + \nabla_j\zeta_i = \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i + \frac{2n(n-1)}{R}\nabla_i\Phi_j \tag{30-4}$$

on a d'autre part

$$\mathfrak{L}(\xi)R_{ij} = -(n-2)\nabla_j\Phi_i - g_{ij}\nabla^p\Phi_p$$

d'où, pour un espace d'Einstein

$$\text{(30-5)} \qquad \frac{R}{n}(\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i) = -(n-2)\nabla_j\Phi_i - g_{ij}\nabla^p\Phi_p$$

d'où $$\nabla^p\Phi_p = -\frac{R}{n-1}\Phi$$

et (30-4) se réduit à

$$\nabla_i\zeta_j + \nabla_j\zeta_i = 0.$$

Le vecteur ζ est un vecteur de Killing, alors la 1-forme $\frac{n-1}{R}d\delta\xi$ est une 1-forme conforme homologue à 0. Si L désigne l'algèbre de Lie des 1-formes conformes, l'espace vectoriel L est la somme des espaces vectoriels L_1 et L_2, où L_1 est l'algèbre de Lie des 1-formes isométriques et L_2 l'espace vectoriel des 1-formes conformes homologues à 0. La somme est directe puisque toute 1-forme $\in L_1 \cap L_2$ est à dérivée covariante nulle, or sur un espace d'Einstein à $R \neq 0$, d'après l'identité de Ricci toute 1-forme à dérivée covariante nulle est nécessairement nulle. Les projecteurs de L sur L_1 et L_2 sont respectivement δd et $d\delta$.

Nous allons maintenant étudier les crochets des éléments de L_1 et L_2.

On a d'abord $[L_1, L_1] \subset L_1$; soit maintenant $\nu \in L_1$, $\mu \in L_2$ et $\alpha = [\nu, \mu]$. Par un calcul direct, utilisant le fait que $\nabla_p\nu_i = -\nabla_i\nu_p$ et que μ est un vecteur gradient, on a $\alpha_i = \partial_i(\nu^p\mu_p)$ d'où $\alpha \in L_2$, $[L_1, L_2] \subset L_2$.

Soit maintenant μ et $\bar{\mu}$ deux 1-formes $\in L_2$ correspondant aux fonctions φ et $\bar{\varphi}$, et $\beta = [\mu, \bar{\mu}]$, pour une 1-forme conforme correspondant à la fonction φ, on a

$$\text{(30-5)} \qquad \nabla_k\nabla_j\xi_i + R_{ijkp}\xi^p = g_{ij}\varphi_k + g_{ik}\varphi_j - g_{jk}\varphi_i,$$

d'autre part, pour une 1-forme conforme fermée sur un espace d'Einstein, on déduit de (30-2)

$$\text{(30-6)} \qquad \varphi_i = -\frac{R}{n(n-1)}\xi_i$$

en tenant compte du fait que les 1-formes μ et $\bar{\mu}$ sont fermées, on a facilement, en utilisant (30-5) et (30-6)

$$\nabla_j \beta_i + \nabla_i \beta_j = 0$$

c'est-à-dire que $[L_2, L_2] \subset L_1$.

2° Soit maintenant ξ un vecteur projectif, il lui correspond un vecteur ψ, tel que

$$(30\text{-}7) \qquad \nabla_p \nabla_j \xi^i = -R^i{}_{pjl} \xi^l + \delta^i_p \psi_j + \delta^i_j \psi_p,$$

si η est un autre vecteur projectif, $\alpha = [\xi, \eta]$ est un vecteur projectif correspondant au vecteur χ défini par

$$\chi_j = \varphi_p \nabla_j \xi^p - \psi_p \nabla_j \eta^p + \zeta^p \nabla_p \varphi_j - \eta^p \nabla_p \psi_j.$$

Reprenons la relation (19-1) pour une 1-forme projective

$$\Delta \xi - \frac{2}{n+1} d\delta\xi = Q\xi$$

et supposons que V est espace d'Einstein à $R \neq 0$, on a :

$$\xi = \frac{n(n-1)}{2R(n+1)} d\delta\xi + \frac{n}{2R} \delta d\xi,$$

soit ν la 1-forme définie par·

$$\nu = \xi - \frac{n(n-1)}{2R(n+1)} d\delta\xi,$$

utilisant le fait que sur un espace d'Einstein, pour tout vecteur projectif ξ, on a

$$\mathcal{L}(\xi) g_{ij} = \frac{n(1-n)}{R} \nabla_j \psi_i,$$

on obtient facilement

$$\nabla_j \nu_i + \nabla_i \nu_j = 0$$

le vecteur ν est un vecteur de Killing, c'est-à-dire que la 1-forme $\frac{n}{2R} \delta d\xi$ est une 1-forme isométrique, tandis que la 1-forme $\frac{n(n-1)}{2R(n+1)} d\delta\xi$, est une 1-forme projective homologue à 0. L désignant l'algèbre de Lie des 1-formes projectives, L_1, l'algèbre de Lie des 1-formes isométriques et L_2, l'espace vectoriel des 1-formes projectives homologues à 0, on a, comme dans le cas conforme la somme directe $L = L_1 + L_2$, les projecteurs de L sur L_1 et L_2 sont respectivement δd et $d\delta$. Nous allons maintenant étudier les crochets des éléments de L_1 et L_2, si $\nu \in L_1$ et $\mu \in L_2$, en utilisant le fait que ν est forme de Killing et μ homologue à 0, on a déjà vu que $\alpha = [\nu, \mu]$ est homologue à 0; on en déduit alors $[L_1, L_2] \subset L_2$. Soit maintenant μ et $\bar{\mu} \in L_2$ et $\beta = [\mu, \bar{\mu}]$, par un calcul direct, utilisant le fait que les formes μ et $\bar{\mu}$ sont fermées, on a

$$\nabla_j\beta_i + \nabla_i\beta_j = \mu^p(\nabla_j\nabla_i\bar{\mu}_p + \nabla_i\nabla_j\bar{\mu}_p) - \bar{\mu}_p(\nabla_j\nabla_i\mu_p + \nabla_i\nabla_j\mu_p),$$

d'où, puisque les 1-formes μ et $\bar{\mu}$ sont projectives

$$\nabla_j\beta_i + \nabla_i\beta_j = -\mu^p\bar{\mu}^r(R_{pijr} + R_{pjir}) + \bar{\mu}^p\mu^r(R_{pijr} + R_{pjir})$$
$$+ \frac{2}{n+1}[\mu_i\nabla_j\nabla_r\bar{\mu}^r + \mu_j\nabla_i\nabla_r\bar{\mu}^r - \bar{\mu}_i\nabla_j\nabla_r\mu^r - \bar{\mu}_j\nabla_i\nabla_r\mu^r],$$

en utilisant maintenant les relations classiques entre les composantes du tenseur de courbure et en remarquant que pour toute 1-forme, projective, fermée, on a

$$\nabla_i\nabla_r\mu^r = \frac{2R}{n(1-n)}\mu_i,$$

on en déduit

$$\nabla_j\beta_i + \nabla_i\beta_j = 0$$

donc $[L_2, L_2] \subset L_1$. Nous obtenons donc un résultat analogue au résultat donné par Lichnerowicz [19] pour les transformations conformes dans le cas compact.

Théorème. — *Sur un espace d'Einstein, si* L *désigne l'algèbre de Lie des 1-formes conformes (resp. projectives), l'espace vectoriel* L *est la somme directe* $L = L_1 + L_2$, *où* L_1 *est l'algèbre de Lie des 1-formes de Killing,* L_2 *l'espace vectoriel des 1-formes conformes (resp. projectives) homologues à* 0. *Les crochets de* L_1 *et* L_2 *vérifient les relations :* $[L_1, L_1] \subset L_1$, $[L_1, L_2] \subset L_2$, $[L_2, L_2] \subset L_1$.

§ 31. — Cas d'un espace d'Einstein complet.

1° Soit ξ une 1-forme conforme, on a alors (paragraphe 2)

$$(31\text{-}1)\quad \nabla_k\nabla_j\xi_i + R_{ijkl}\xi^l + \frac{1}{n}[g_{ij}(d\delta\xi)_k + g_{ik}(d\delta\xi)_j - g_{jk}(d\delta\xi)_i] = 0,$$

pour une 1-forme conforme fermée sur un espace d'Einstein à $R \neq 0$, cette relation devient :

$$(31\text{-}2) \quad \nabla_k \nabla_j \xi_i + R_{ijkl} \xi^l + \frac{R}{n(n-1)} (g_{ij}\xi_k + g_{ik}\xi_j - g_{jk}\xi_i) = 0$$

associons à la 1-forme ξ_i et à la géodésique $x^i(s)$, la fonction $f = \xi_i \frac{dx^i}{ds}$, on déduit de (31-2)

$$\frac{d^2f}{ds^2} + \frac{R}{n(n-1)} f = 0$$

d'où, si $R < 0$, en posant $K^2 = \frac{R}{n(1-n)}$,

$$(31\text{-}3) \quad f = A \operatorname{ch} (Ks + B), \qquad \text{A et B constantes.}$$

Supposons le vecteur ξ de longueur bornée, alors la fonction f est bornée, d'autre part, l'espace étant complet, s peut prendre toute valeur de 0 à $+\infty$, alors d'après (31-3), f ne peut être bornée que si $A = 0$, d'où $f = 0$; de cette relation vérifiée en tout point et pour toute géodésique issue de ce point, on déduit $\xi_i = 0$.

2° Si ξ une est 1-forme projective fermée, repartons de

$$(31\text{-}4) \quad \nabla_k \nabla_j \xi_i + R_{ijkl} \xi^l + \frac{1}{n+1} [g_{ij}(d\delta\xi)_k + g_{ik}(d\delta\xi)_j] = 0.$$

Si ξ est une 1-forme projective fermée sur un espace d'Einstein à $R \neq 0$,

$$d\delta\xi = \frac{2R(n+1)}{n(n-1)} \xi,$$

(31-4) devient alors

$$(31\text{-}5) \quad \nabla_k \nabla_j \xi_i + R_{ijkl} \xi^l + \frac{2R}{n(n-1)} (g_{ij}\xi_k + g_{ik}\xi_j) = 0$$

et pour la fonction $f = \xi_i \frac{dx^i}{ds}$, on en déduit

$$\frac{d^2f}{ds^2} + \frac{4R}{n(n-1)} f = 0$$

et, dans les mêmes conditions que précédemment, on en conclut $\xi_i = 0$.

THÉORÈME. — *Sur un espace d'Einstein complet, à courbure scalaire négative, il n'existe pas de* 1*-forme projective ou conforme, fermée non nulle, correspondant à un vecteur de longueur bornée.*

Et, en utilisant le théorème du paragraphe 30 nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Sur un espace d'Einstein complet, à courbure scalaire négative, toute* 1*-forme* ξ, *conforme ou projective, telle que le vecteur associé à la* 1*-forme* $d\delta\xi$ *soit de longueur bornée, est une forme de Killing.*

§ 32. — Cas d'un espace harmonique.

1° Pour tout vecteur projectif ξ, on a

$$\mathcal{L}(\xi)W^i{}_{jkl} = 0$$

où W_{ijkl} est le tenseur de courbure projectif, qui, dans le cas d'un espace d'Einstein s'écrit :

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$$

d'après (2-5) pour tout vecteur projectif ξ sur un espace d'Einstein on a :

$$\mathcal{L}(\xi)g_{ij} = \frac{n(1-n)}{R}\nabla_j\varphi_i \tag{32-1}$$

et

$$\mathcal{L}(\xi)g^{ij} = -\frac{n(1-n)}{R}\nabla^j\varphi^i. \tag{32-2}$$

En utilisant ces deux relations et en remarquant que dans le cas d'un espace d'Einstein le tenseur W_{ijkl} vérifie les relations :

$$W_{ijkl} = -W_{jikl} = -W_{ijlk} = W_{klij}$$

on obtient, pour la dérivée de Lie du scalaire $W = W_{ijkl}W^{ijkl}$

$$\mathcal{L}(\xi)W = \frac{2n(n-1)}{R}W_{ilmn}W^{jlmn}\nabla_j\varphi^i, \tag{32-3}$$

pour un espace d'Einstein, on a d'autre part, par un calcul direct :

$$W_{ilmn}W^{jlmn} = R_{ilmn}R^{jlmn} - \frac{2R^2}{n^2(n-1)}\delta_i^j.$$

Supposons maintenant l'espace harmonique correspondant à la fonction $f(\Omega)$, on sait que ([15], [16]),

$$T^{ilmn}T_{jlmn} = \frac{1}{2}(n+2)k\delta_j^i, \quad \left(k = -\frac{5}{2}f''(0) - \frac{(f'(0))^2}{n-1}\right)$$

où T est le tenseur défini par

$$T_{ijkl} = \frac{1}{3}(R_{ijkl} + R_{iljk}) - \frac{f'(0)}{2(n-1)}(2g_{ij}g_{kl} - g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Par un calcul direct, on en déduit alors

$$R_{ilmn}R^{jlmn} = h\delta_i^j. \quad \left(h = -\frac{3}{2}\left[\frac{5}{2}(n+2)f''(0) + (f'(0))^2\right]\right)$$

et,

$$W_{ilmn}W^{jlmn} = \frac{3}{2}k(n+2)\delta_j^i, \tag{32-4}$$

$$W = \frac{3n}{2}(n+2)k.$$

Pour un espace harmonique, le scalaire W est constant, d'où $\mathfrak{L}(\xi)W = 0$, alors, de (32-3) et (32-4) on déduit, si l'espace n'est pas à courbure constante

$$\nabla_p\varphi^p = 0. \tag{32-5}$$

Calculons maintenant $(\mathfrak{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk}$ à partir de

$$(\mathfrak{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ia}[\nabla_k\mathfrak{L}(\xi)g_{aj} + \nabla_j\mathfrak{L}(\xi)g_{ak} - \nabla_a\mathfrak{L}(\xi)g_{jk}]$$
$$= \frac{n(1-n)}{2R}g^{ia}[\nabla_k\nabla_j\varphi_a + \nabla_j\nabla_k\varphi_a - \nabla_a\nabla_k\varphi_j],$$

on en déduit, en utilisant l'identité de Ricci

$$\frac{n(1-n)}{2R}[\nabla_k\nabla_j\varphi^i + \varphi_pR^p{}_{kj}{}^i] = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j$$

et, par contraction

$$\nabla_k\nabla_p\varphi^p = \frac{2R(n+1)}{n(1-n)}\varphi_k$$

(32-5) entraîne alors, $\varphi_k = 0$, ξ est un vecteur affine.

2° Considérons maintenant le tenseur de courbure conforme C_{ijkl}, dans le cas d'un espace d'Einstein, il est identique au tenseur de courbure projectif, en utilisant, pour une 1-forme conforme, ξ les relations

$$\mathcal{L}(\xi)C^i_{jkl} = 0, \qquad \mathcal{L}(\xi)g_{ij} = \Phi g_{ij}, \qquad \mathcal{L}(\xi)g^{ij} = -\Phi g^{ij},$$

on obtient facilement

$$\mathcal{L}(\xi)\,(C_{ijkl}C^{ijkl}) = -2\Phi C_{ijkl}C^{ijkl}$$

d'où, si l'espace est harmonique, non à courbure constante, il en résulte $\Phi = 0$, ξ est une 1-forme isométrique.

Théorème. — *Sur un espace harmonique qui n'est pas à courbure constante, tout vecteur projectif* (*resp. conforme*) *est affine* (*resp. isométrique*).

§ 33. — Cas d'un espace d'Einstein compact.

Soit ξ une 1-forme projective fermée, de (31-4) on déduit qu'une telle forme vérifie :

$$2\nabla_k\nabla_i\xi_j = \frac{1}{n+1}[2g_{ij}\nabla_k\nabla_p\xi^p + g_{ik}\nabla_j\nabla_p\xi^p + g_{jk}\nabla_i\nabla_p\xi^p], \tag{33-1}$$

réciproquement, on voit facilement que si V_n est un espace proprement riemannien compact toute 1-forme vérifiant (33-1) est une 1-forme projective fermée. Nous avons remarqué d'autre part, que sur un espace d'Einstein une telle 1-forme est solution de

$$d\delta\xi = \frac{2R(n+1)}{n(n-1)}\xi. \tag{33-2}$$

Pour une 1-forme ξ quelconque, considérons le tenseur

$$\alpha_{kij} = 2\nabla_k\nabla_i\xi_j - \frac{1}{n+1}(2g_{ij}\nabla_k\nabla_p\xi^p + g_{ik}\nabla_j\nabla_p\xi^p + g_{jk}\nabla_i\nabla_p\xi^p),$$

sur un espace proprement riemannien compact, $\alpha_{kij} = 0$ signifie que ξ est une 1-forme projective fermée. Sur un espace d'Einstein, pour les solutions de (33-2) ce tenseur s'écrit

$$\alpha_{kij} = 2\nabla_k\nabla_i\xi_j - \frac{2R}{n(1-n)}(2g_{ij}\xi_k + g_{ik}\xi_j + g_{jk}\xi_i) \tag{33-3}$$

on en déduit

$$(33\text{-}4) \qquad \alpha_{kij}\alpha^{kij} = 4\nabla_k\nabla_i\xi_j\nabla^k\nabla^i\xi^j - \frac{8R^2(3n+5)}{n^2(1-n)^2}\xi^k\xi_k$$

transformons maintenant $\nabla_k\nabla_i\xi_j\nabla^k\nabla^i\xi^j$, on a successivement

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_k(\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i) - \nabla_j\xi_i\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i,$$
$$\nabla_j\xi_i\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_j(\xi_i\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i) - \xi_i\nabla_j\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i,$$

et, en notant simplement $\nabla_i A^i$ les termes qui sont des divergences

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_i A^i + \xi_i\nabla_j\nabla_k\nabla^k\nabla^j\xi^i,$$

en utilisant deux fois l'identité de Ricci, on a, sur un espace d'Einstein, pour les solutions de (33-2)

$$\nabla_k\nabla_j\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_k\nabla^k\nabla_j\nabla^j\xi^i + \frac{R^2(n+3)}{n^2(1-n)}\xi^i + R^i{}_{pkj}\nabla^k\nabla^j\xi^p,$$

d'où on déduit :

$$\nabla_k\nabla_j\xi_i\nabla^k\nabla^j\xi^i = \nabla_i A^i + \frac{4R^2(n+3)}{n^2(1-n)^2}\xi^k\xi_k - R_{pjki}R^{qjki}\xi^p\xi_q,$$

(33-4) devient alors

$$(33\text{-}5) \qquad \alpha_{kij}\alpha^{kij} + 4W_{ilmn}W^{jlmn}\xi^i\xi_j = \nabla_i A^i,$$

où W_{ilmn} est le tenseur de courbure projectif, c'est-à-dire que dans le cas d'un espace d'Einstein compact les 1-formes projectives fermées sont les 1-formes qui vérifient (33-2) et

$$W_{ilmn}W^{jlmn}\xi^i\xi_j = 0,$$

on en déduit encore que dans ce cas, si la forme quadratique

$$a_{ij} = W_{ilmn}W_j{}^{lmn}$$

est définie, il n'existe pas de 1-forme projective fermée non nulle, donc toute 1-forme projective est isométrique.

THÉORÈME. — *Sur un espace d'Einstein compact, pour lequel la forme quadratique* $a_{ij} = W_{ilmn}W_j{}^{lmn}$ *est définie, toute 1-forme projective est isométrique.*

§ 34. — Transformations projectives et conformes sur un espace homogène d'Einstein.

NAGANO [21], a démontré que sur un espace homogène proprement riemannien, non « conformally flat », toute 1-forme conforme est isométrique, ceci entraîne en particulier que sur un espace homogène d'Einstein proprement riemannien qui n'est pas à courbure constante, toute transformation infinitésimale conforme est une isométrie. Par la même méthode, on peut démontrer un résultat analogue pour les 1-formes projectives. Soit V un tel espace d'Einstein, considérons l'espace $\overline{V}$ constitué par la même variété différentiable mais munie de la métrique

$$\overline{g}_{ij} = \sqrt{W}\, g_{ij}$$

on a immédiatement, pour tout vecteur projectif ξ

$$\mathcal{L}(\xi)\overline{g}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{W}}[2W\mathcal{L}(\xi)g_{ij} + g_{ij}\mathcal{L}(\xi)W]$$

d'après (32-3) on en déduit

$$\mathcal{L}(\xi)\overline{g}_{ij} = 0,$$

c'est-à-dire que tout vecteur projectif de V est un vecteur de Killing de $\overline{V}$. Si V est homogène, le scalaire W est constant, donc les isométries de V et $\overline{V}$ sont identiques, par conséquent dans ce cas, tout vecteur projectif de V est un vecteur de Killing.

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène d'Einstein proprement riemannien, à courbure non constante, tout vecteur conforme ou projectif est isométrique.*

CHAPITRE IV

TRANSFORMATIONS PROJECTIVES ET CONFORMES SUR UN ESPACE KAHLERIEN

Dans ce chapitre V_{2n} est un espace kählerien de dimension réelle $2n$, soit $F_{ij} = -F_{ji}$ la 2-forme canonique de la structure; en coordonnées locales complexes, on a :

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta^*} = 0, \qquad F_{\alpha\beta^*} = ig_{\alpha\beta^*}, \qquad F_{\alpha^*\beta} = -ig_{\alpha^*\beta}$$
$$F_{\alpha}{}^{\beta} = i\delta^{\beta}_{\alpha}, \qquad F_{\alpha^*}{}^{\beta^*} = -i\delta^{\beta^*}_{\alpha^*}, \qquad F^{\beta}{}_{\alpha} = -i\delta^{\beta}_{\alpha}, \qquad F^{\beta^*}{}_{\alpha^*} = i\delta^{\beta^*}_{\alpha^*}.$$

Ce tenseur définit l'opérateur complexe sur les vecteurs, que nous noterons $\mathfrak{J}$.

$$(\mathfrak{J}X)^i = F_p{}^i X^p, \qquad (\mathfrak{J}X)_i = F^p{}_i X_p$$

en coordonnées locales complexes :

$$(\mathfrak{J}X)^{\alpha} = iX^{\alpha}, \qquad (\mathfrak{J}X)_{\alpha} = -iX_{\alpha},$$
$$(\mathfrak{J}X)^{\alpha^*} = -iX^{\alpha^*}, \qquad (\mathfrak{J}X)_{\alpha^*} = iX_{\alpha^*}.$$

§ 35. — Une propriété locale.

1° Soit ξ un vecteur projectif, repartons de

$$(35\text{-}1) \qquad \nabla_k\nabla_j\xi^p + R^p{}_{jkl}\xi^l = \delta^p_j\varphi_k + \delta^p_k\varphi_j$$

multiplions (35-1) par $F_p{}^i$, ce tenseur étant à dérivée covariante nulle,

$$\nabla_k\nabla_j(\mathfrak{J}\xi)^i = F_p{}^i\nabla_k\nabla_j\xi^p$$

d'où

$$(35\text{-}2) \qquad \nabla_k\nabla_j(\mathfrak{J}\xi)^i + F_p{}^iR^p{}_{jkl}\xi^l = F_j{}^i\varphi_k + F_k{}^i\varphi_j$$

En coordonnées locales complexes, en utilisant les relations classiques entre les composantes du tenseur de courbure pour un espace kählerien, la relation (35-2) donne

$$
\begin{aligned}
&(35\text{-}3) \quad \nabla_\gamma \nabla_\beta (\mathfrak{J}\xi)^\alpha - R^\alpha{}_{\beta\gamma\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^\alpha_\beta (\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - \delta^\alpha_\gamma (\mathfrak{J}\varphi)_\beta \\
&(35\text{-}4) \quad \nabla_{\gamma^*} \nabla_\beta (\mathfrak{J}\xi)^\alpha + R^\alpha{}_{\beta\gamma^*\mu} (\mathfrak{J}\xi)^\mu = \delta^\alpha_\beta (\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma^*} \\
&(35\text{-}5) \quad \nabla_\gamma \nabla_{\beta^*} (\mathfrak{J}\xi)^\alpha = \delta^\alpha_\gamma (\mathfrak{J}\varphi)_{\beta^*} \\
&(35\text{-}6) \quad \nabla_{\gamma^*} \nabla_{\beta^*} (\mathfrak{J}\xi)^\alpha = 0
\end{aligned}
$$

avec les formules complexes conjuguées. De

$$\nabla_\gamma \nabla_{\beta^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\alpha^*} + R^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = \delta^{\alpha^*}_{\beta^*} (\mathfrak{J}\varphi)_\gamma$$

on déduit, par contraction

$$(35\text{-}7) \qquad \nabla^{\beta^*} \nabla_{\beta^*} (\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = (\mathfrak{J}\varphi)_\alpha,$$

d'autre part, de

$$\nabla_{\gamma^*} \nabla_\beta (\mathfrak{J}\xi)_\alpha = g_{\alpha\gamma^*} (\mathfrak{J}\varphi)_\beta$$

on déduit

$$(35\text{-}8) \qquad \nabla^\beta \nabla_\beta (\mathfrak{J}\xi)_\alpha = (\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

d'où, par addition de (35-7) et (35-8)

$$(35\text{-}9) \qquad \nabla^l \nabla_l (\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = 2 (\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

considérons maintenant

$$\nabla_\gamma \nabla_\beta (\mathfrak{J}\xi)^\alpha - R^\alpha{}_{\beta\gamma\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^\alpha_\beta (\mathfrak{J}\varphi)_\gamma + \delta^\alpha_\gamma (\mathfrak{J}\varphi)_\beta$$

et

$$\nabla_\gamma \nabla_{\beta^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\alpha^*} + R^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = \delta^{\alpha^*}_{\beta^*} (\mathfrak{J}\varphi)_\gamma,$$

contractons α et β d'une part, α^* et β^* d'autre part et ajoutons

$$(35\text{-}10) \qquad \nabla_\gamma \nabla_l (\mathfrak{J}\xi)^l + 2 R_{\gamma\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma$$

ou

$$(35\text{-}11) \qquad (\mathfrak{J}\varphi)_\alpha = -2 R_{\alpha\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} + (d\delta\mathfrak{J}\xi)_\alpha;$$

portons maintenant cette expression de $(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$ dans (35-9) qui peut s'écrire

$$-(\Delta\mathfrak{J}\xi)_\alpha + 2 R_{\alpha\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = 2 (\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

on a alors

$$(35\text{-}12) \qquad -(\Delta\mathfrak{J}\xi)_\alpha + 6 R_{\alpha\mu^*} (\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = 2 (d\delta\mathfrak{J}\xi)_\alpha.$$

avec la formule complexe conjuguée; finalement, si ξ est une 1-forme projective sur l'espace kählerien, on a

$$(35\text{-}13) \qquad -\Delta\mathfrak{J}\xi + 3Q\mathfrak{J}\xi = 2d\delta\mathfrak{J}\xi.$$

Nous allons maintenant considérer des 1-formes projectives fermées, Λ désignant l'opérateur $i(F)$ (produit intérieur par F) on sait que sur cet espace kählerien pour une 1-forme

$$\delta\mathfrak{J}\xi = -\Lambda d\xi$$

donc $d\xi = 0$ entraîne $\delta\mathfrak{J}\xi = 0$, toute 1-forme projective fermée vérifie donc la relation

$$(35\text{-}14) \qquad -\Delta\mathfrak{J}\xi + 3Q\mathfrak{J}\xi = 0.$$

d'autre part, on a vu que toute 1-forme projective vérifie la relation

$$\Delta\xi - \frac{2}{n+1} d\delta\xi = Q\xi,$$

il en résulte que si ξ est une 1-forme projective fermée, elle vérifie

$$(35\text{-}15) \qquad \frac{2n-1}{2n+1}\Delta\xi = Q\xi,$$

mais, sur un espace kählerien l'opérateur $\mathfrak{J}$ commute avec les opérateurs Δ et Q, de (35-15), on déduit alors

$$(35\text{-}16) \qquad \frac{2n-1}{2n+1}\Delta\mathfrak{J}\xi = Q\mathfrak{J}\xi$$

de (35-14) et (35-16) il résulte

$$\frac{4(n-1)}{2n+1}\Delta\mathfrak{J}\xi = 0$$

d'où, si $n > 1$, $\Delta\mathfrak{J}\xi = 0$ c'est-à-dire que la 1-forme $\mathfrak{J}\xi$ est harmonique, il en est de même de la 1-forme ξ, et, puisqu'elle est de plus fermée, elle vérifie alors $d\delta\xi = 0$, c'est-à-dire que c'est une forme affine.

2° Soit maintenant ξ une 1-forme conforme, repartons de

$$(35\text{-}17) \qquad (\mathfrak{L}(\xi)\Gamma)^i_{jk} = \nabla_k\nabla_j\xi^i + R^i_{jkl}\xi^l = \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j - g_{jk}\varphi^i$$

où φ_i est le vecteur gradient $\varphi_i = \partial_i\varphi = -\frac{1}{2n}\partial_i\delta\xi$ de (35-17) on déduit

$$(35\text{-}18) \qquad \nabla_k\nabla_j(\mathfrak{J}\xi)^i + F_p{}^iR^p{}_{jkl}\xi^l = F_j{}^i\varphi_k + F_k{}^i\varphi_j - g_{jk}(\mathfrak{J}\varphi)^i.$$

Par un calcul analogue à celui fait dans le cas projectif, on déduit de (35-18), en coordonnées locales complexes

$$(35\text{-}19) \qquad \nabla_\gamma\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)^\alpha - R^\alpha{}_{\beta\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^\alpha_\beta(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - \delta^\alpha_\gamma(\mathfrak{J}\varphi)_\beta$$
$$(35\text{-}20) \qquad \nabla_{\gamma^*}\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)^\alpha + R^\alpha{}_{\beta\gamma^*\mu}(\mathfrak{J}\xi)^\mu = \delta^\alpha_\beta(\mathfrak{J}\varphi)_{\gamma^*} - g_{\beta\gamma^*}(\mathfrak{J}\varphi)^\alpha$$
$$(35\text{-}21) \qquad \nabla_\gamma\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^\alpha = \delta^\alpha_\gamma(\mathfrak{J}\varphi)_{\beta^*} - g_{\beta^*\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)^\alpha$$
$$(35\text{-}22) \qquad \nabla_{\gamma^*}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^\alpha = 0$$

avec les formules complexes conjuguées; de

$$\nabla_\gamma\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha\beta^*\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = g_{\alpha\beta^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - g_{\beta^*\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

on tire par contraction

$$(35\text{-}23) \qquad \nabla^{\beta^*}\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = (1-n)(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

d'autre part, de

$$\nabla_{\gamma^*}\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)_\alpha = g_{\alpha\gamma^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\beta - g_{\beta\gamma^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha$$

on déduit

$$(35\text{-}24) \qquad \nabla^\beta\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)_\alpha = (1-n)(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha,$$

d'où, par addition de (35-23) et (35-24)

$$(35\text{-}25) \qquad \nabla^l\nabla_l(\mathfrak{J}\xi)_\alpha + R_{\alpha p}(\mathfrak{J}\xi)^p = 2(1-n)(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha,$$

considérons maintenant

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta(\mathfrak{J}\xi)^\alpha - R^\alpha{}_{\beta\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^\alpha_\beta(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - \delta^\alpha_\gamma(\mathfrak{J}\varphi)_\beta$$

et

$$\nabla_\gamma\nabla_{\beta^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\alpha^*} + R^{\alpha^*}{}_{\beta^*\gamma\mu^*}(\mathfrak{J}\xi)^{\mu^*} = -\delta^{\alpha^*}_{\beta^*}(\mathfrak{J}\varphi)_\gamma - g_{\beta^*\gamma}(\mathfrak{J}\varphi)^{\alpha^*}$$

contractons α et β d'une part, α^* et β^* d'autre part et ajoutons, il vient :

$$(35\text{-}26) \qquad 2(\mathfrak{J}\varphi)_\alpha = -2R_{\alpha p}(\mathfrak{J}\xi)^p + (d\delta\,\mathfrak{J}\xi)_\alpha$$

portons cette expression dans (35-25) on en déduit

$$-(\Delta\,\mathfrak{J}\xi)_\alpha + 2(2-n)\,R_{\alpha p}(\mathfrak{J}\xi)^p = (1-n)(d\delta\,\mathfrak{J}\xi)_\alpha$$

avec la formule complexe conjuguée.

Finalement, si ξ est une 1-forme conforme sur l'espace kählerien V_{2n}, on a

$$(35\text{-}27) \qquad -\Delta\,\mathfrak{J}\xi + (2-n)\,Q\,\mathfrak{J}\xi = (1-n)\,d\delta\,\mathfrak{J}\xi.$$

Nous considérons maintenant des 1-formes conformes fermées, $\delta \mathfrak{J}\xi = 0$, elles vérifient

$$-\Delta \mathfrak{J}\xi + (2 - n)\, Q\mathfrak{J}\xi = 0 \tag{35-28}$$

d'autre part $\mathfrak{J}$ commutant avec Q et Δ, on a pour de telles 1-formes

$$2\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\Delta \mathfrak{J}\xi = Q\mathfrak{J}\xi \tag{35-29}$$

de (35-28) et (35-29), on déduit

$$\frac{2(n-1)^2}{n(n-2)}\Delta \mathfrak{J}\xi = 0$$

d'où, pour $n > 1$, $\Delta \mathfrak{J}\xi = 0$, c'est-à-dire que la 1-forme $\mathfrak{J}\xi$ est harmonique, il en est de même de la 1-forme ξ, et, puisqu'elle est de plus fermée, elle vérifie

$$d\delta\xi = 0.$$

c'est une 1-forme homothétique.

Théorème. — *Sur un espace kählerien* V_{2n} $(n > 1)$ *toute 1-forme projective (resp. conforme) fermée est affine (resp. homothétique).*

Supposons maintenant que l'espace kählerien est aussi espace d'Einstein pour sa métrique riemannienne; $Q\xi = 0$ vérifiée pour toute 1-forme projective (resp. conforme fermée) entraîne alors si $R \neq 0$

$$\xi = 0$$

donc, dans la décomposition

$$L = L_1 + L_2,$$

on a

$$L_2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad L = L_1$$

on obtient alors le résultat suivant donné par Yano ([26], p. 273) dans le cas compact seulement.

Théorème. — *Sur un espace d'Einstein-Kähler* V_{2n} $(n > 1)$ *à courbure scalaire non nulle, toute 1-forme projective ou conforme est forme de Killing.*

§ 36. — Cas d'un espace compact ou complet.

Si V_{2n} est compact, on sait que toute 1-forme affine ou homothétique est isométrique; si une telle forme est de plus supposée fermée, elle est à dérivée covariante nulle. La même conclusion est valable sur un espace complet dont le groupe d'holonomie ne laisse invariant aucun vecteur, mais alors la 1-forme à dérivée covariante nulle est nécessairement nulle.

Théorème. — *Sur un espace kählerien compact* V_{2n} $(n > 1)$, *toute* 1-*forme projective ou conforme fermée est à dérivée covariante nulle. Si* V_{2n} *est un espace kählerien complet dont le groupe d'holonomie ne laisse invariant aucun vecteur, il n'existe pas de* 1-*forme projective ou conforme fermée non nulle.*

Sur un espace kählerien V_{2n}, associons suivant Lichnerowicz ([13], p. 145), à toute 1-forme réelle ξ, le tenseur réel $a(\xi)_{ij}$ défini par :

$$a(\xi)_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \xi_\mu, \qquad a(\xi)_{\lambda\mu^*} = a(\xi)_{\lambda^*\mu} = 0, \qquad a(\xi)_{\lambda^*\mu^*} = \nabla_{\lambda^*}\xi_{\mu^*}.$$

$a(\xi) = 0$ fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la 1-forme ξ soit analytique.

Pour toute 1-forme ξ sur une variété kählerienne compacte, on a ([13], p. 145)

$$(36\text{-}1) \qquad \langle \Delta\xi - Q\xi,\ \xi\rangle = 4\langle a(\xi),\ a(\xi)\rangle.$$

Supposons que ξ est une 1-forme projective

$$\Delta\xi - Q\xi = \frac{2}{2n+1} d\delta\xi.$$

(36-1) devient

$$\frac{1}{2n+1}\langle d\delta\xi,\ \xi\rangle = \frac{1}{2n+1}\langle \delta\xi,\ \delta\xi\rangle = 2\langle a(\xi),\ a(\xi)\rangle$$

d'où

$$a(\xi) = 0$$

entraîne

$$\delta\xi = 0.$$

Théorème. — *Sur un espace kählerien compact, toute* 1-*forme projective analytique est isométrique.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Bidal et G. de Rham, Les formes différentielles harmoniques, *Comm. Math. Helv.*, 16 (1946), pp. 1-49.

[2] E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, Gauthier-Villars, 1946.

[3] R. Couty, Sur les transformations définies par le groupe d'holonomie infinitésimale, I et II, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 244 (1957), pp. 553-555 et 1871-1873.

[4] R. Couty, Vecteurs et tenseurs invariants sur un espace homogène, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 246 (1958), pp. 2569-2571.

[5] R. Couty, Transformations infinitésimales projectives, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 247 (1958), pp. 804-806.

[6] J. Hano, On affine transformations of a riemannian manifold, *Nagoya Math. Journal*, vol. 9 (1955), pp. 98-109.

[7] J. Hano, On Kaehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups, *Amer Journal of Math.*, 79, n° 4 (1957, pp. 885-900.

[8] S. Kobayashi, A theorem on the affine transformation group of a riemannian manifold, *Nagoya Math. Journal*, vol. 9 (1955), pp. 39-41.

[9] S. Kobayashi, Groupes de transformations qui laissent invariante une connexion infinitésimale, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1954, pp. 644-645.

[10] B. Kostant, Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motion of a riemannian manifold, *Transact Amer Math. Soc.*, 80 (1955), pp. 528-542.

[11] Mme J. Lelong-Ferrand, Sur les groupes à un paramètre de transformations des variétés différentiables, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 37, fasc. 3 (1958), pp. 269-278.

[12] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, *ed. Cremonese*, Rome, 1955.

[13] A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformation, Paris, Dunod 1958.

[14] A. Lichnerowicz, Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques, *Bull. Soc. Math. de France*, 1944, pp. 1-23.

[15] A. Lichnerowicz, Équations de Laplace et espaces harmoniques, *colloque équations aux dérivées partielles*, Louvain, 1953, pp. 9-23.

[16] A. Lichnerowicz, Sur certaines classes d'espaces riemanniens compacts, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 230 (1950), pp. 2416-2417.

[17] A. Lichnerowicz, Courbure, nombres de Betti et espaces symétriques, *Proceedings, Internat. Congress of Math.*, 1950, pp. 216-223.

[18] A. Lichnerowicz. Transformations infinitésimales conformes de certaines variétés riemanniennes, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 241 (1955), pp. 726-727.

[19] A. Lichnerowicz, Some problems on transformations of riemannian and kählerian manifolds, *notes miméographiées*, Princeton, 1955.

[20] A. Lichnerowicz, Homogeneous spaces and differential geometry, *notes miméographiées*, Princeton, 1957.

[21] T. Nagano, On conformal transformations of riemannian spaces, *Journal of the Math. Soc. of Japan*, vol. 10, n° 1, 1958.

[22] A. Nijenhuis, On the holonomy group of linear connections I general properties of affine connections, *Proc. Kon. Ncd. Akad.*, 56 (1953), pp. 233-249, II Properties of general linear connections, *id.*, 57 (1954), pp. 17-25.

[23] G. De Rham, Sur l'irréductibilité d'un espace de Riemann, *Comm. Math. Helv.*, 21 (1952), pp. 328-343.

[24] J. A. Schouten, Ricci calculus, Springer, Berlin, 2e éd. (1954).

[25] T. Y. Thomas, The differential invariants of generalized spaces, *Cambridge University Press*, 1934.

[26] K. Yano, The theory of Lie derivaties and its applications, Amsterdam, 1955.

[27] K. Yano et S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, *Ann. of Math. Studies*, n° 32, Princeton, 1953.

TABLE DES MATIÈRES

Deuxième partie

TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES PROJECTIVES ET CONFORMES