Annales de l'institut Fourier

Andrée Bastiani

Cônes convexes et pyramides convexes

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 249-292
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__249_0>

CONES CONVEXES ET PYRAMIDES CONVEXES

par Andrée BASTIANI

INTRODUCTION

Ce travail reprend et généralise les résultats exposés dans le Séminaire de Topologie et Géométrie Différentielle (textes ronéotypés 1958-1959) et résumés dans deux Notes (C.R. Ac. Sc. 247, 1958, p. 1943, 248, 1959, p. 175). Le but est de définir dans un espace vectoriel de dimension infinie des ensembles qui aient certaines des propriétés des pyramides et des polyèdres convexes dans un espace vectoriel de dimension finie et d'en donner des applications à l'Analyse.

Le début du premier chapitre est consacré à une étude des facettes, variétés d'appui et cônes d'appui d'un ensemble convexe contenu dans un espace vectoriel topologique et de son polaire (la topologie qui sera utilisée le plus souvent est la topologie localement convexe la plus fine compatible avec la structure d'espace vectoriel, ou topologie fine). La fin de ce chapitre contient la définition et les propriétés des ensembles incompatibles et irréductibles de formes linéaires continues sur un espace vectoriel topologique, ce qui conduit aux notions de pseudo-base et base topologique d'un espace vectoriel topologique.

Le deuxième chapitre est la théorie des pyramides convexes dans un espace vectoriel muni de la topologie fine. Je montre que, dans un espace vectoriel de dimension finie on peut caractériser les pyramides convexes comme les cônes convexes dont le cône d'appui en tout point est fermé. Par définition, dans un espace vectoriel de dimension infinie, une pyramide convexe sera un cône convexe ayant cette propriété; des exemples prouvent qu'une pyramide convexe peut ne pas avoir d'arêtes ni d'hyperplans d'appui extrême et que son polaire peut ne pas être une pyramide convexe. Dans une pyramide convexe tout sous-espace d'appui extrême est contenu dans un sous-espace d'appui extrême de dimension infinie. Une pyramide propre qui est une pyramide convexe telle que le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême soit fermé, est l'intersection de ses appuis extrêmes et son polaire est l'adhérence faible d'une pyramide convexe.

Le troisième chapitre traite du cas où E est un espace vectoriel topologique. Une pyramide convexe topologique est l'adhérence pour la topologie donnée sur E d'une pyramide convexe de E. Les pyramides topologiques les plus intéressantes sont les pyramides topologiques simpliciales qui sont l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des vecteurs d'une base topologique de E; leur trace sur toute variété de codimension finie est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses arêtes. Cette propriété permet de retrouver et de généraliser certains résultats d'Analyse, en particulier sur les fonctions absolument monotones.

Les nombres entre crochets renvoient à l'index bibliographique.

I. — APPUIS DES CONES CONVEXES

1. Topologie fine.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infinie sur le corps des réels. Parmi toutes les topologies localement convexes compatibles avec la structure d'espace vectoriel de E, il en existe une plus fine que les autres. Nous l'appellerons *topologie fine.* Cette topologie est séparée.

Pour cette topologie, un système fondamental de voisinages de l'origine est constitué des parties convexes, symétriques absorbantes de E. Un ouvert convexe est un ensemble dont la trace sur tout sous-espace de dimension finie est un ouvert convexe dans ce sous-espace. Les ouverts convexes forment une base pour la topologie fine.

Un ensemble fermé convexe coupe tout sous-espace de dimension finie selon un ensemble fermé convexe de ce sous-espace. Inversement, dans le cas où E est de dimension dénombrable, tout ensemble dont la trace sur toute droite est un segment fermé est un ensemble fermé convexe pour la topologie fine.

E, muni de la topologie fine, est la limite inductive localement convexe de la famille des sous-espaces de dimension finie de E. Si E est la somme des sous-espaces E_i de dimension finie, E muni de la topologie fine est somme directe topologique des sous-espaces E_i.

Proposition. — *Tout sous-espace vectoriel de* E *est fermé dans* E *muni de la topologie fine. Le dual topologique de* E *muni de la topologie fine est identique à son dual algébrique* E^*.

Remarquons que toutes les topologies sur E^* compatibles avec la dualité entre E et E^* sont identiques à $\sigma(E^*, E)$. Nous appellerons topologie *algébriquement faible* la moins fine des topologies compatibles avec la structure vectorielle de E et pour lesquelles toute forme linéaire est continue.

Proposition. — *Tout ensemble de* E *borné pour une topologie localement convexe telle que toute forme linéaire soit continue est contenu dans un sous-espace de dimension finie de* E.

Il en résulte qu'une suite de points qui converge pour la topologie fine est contenue dans un sous-espace de dimension finie de E.

Définition. — Un ensemble C contenu dans E est *pseudo-borné* si sa trace sur tout sous-espace de dimension finie est bornée dans ce sous-espace.

Un ensemble convexe sera pseudo-borné si et seulement si il ne contient pas de demi-droite.

Si un ensemble convexe est borné pour une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, alors un tel ensemble est pseudo-borné.

Remarque. — Si E est un espace affine, on pourra de même définir la topologie fine comme la topologie dont les ouverts convexes sont les ensembles convexes dont la trace sur toute droite est un intervalle ouvert.

2. Facettes; appuis.

Soit C un ensemble convexe contenu dans l'espace vectoriel E, de dimension finie ou infinie sur le corps des réels.

Définition. — La facette $\mathcal{F}_x$ de C en un point x de C est la réunion des segments contenus dans E et dont x est point intérieur. La *facette d'une variété* V dans C est la réunion des facettes des points de $V \cap C$ dans C.

Si E est de dimension finie, C est la facette de l'un de ses points si C engendre E tout entier car tout ensemble convexe de dimension finie possède un point intérieur. Ceci n'est plus vrai dans le cas où E est de dimension infinie.

Soit E_x la variété affine de E engendrée par la facette $\mathcal{F}_x$. Si on munit E_x de la topologie fine, $\mathcal{F}_x$ est un voisinage de x dans E_x; $\mathcal{F}_x$ est l'intersection de E_x et de C. Tout point y qui appartient à la facette de x aura sa facette contenue dans la facette de x. La variété E_x est réduite au point x si et seulement si x est point extrémal de C. Remarquons que, dans le cas de dimension infinie, une réunion de facettes croissantes n'est plus une facette.

Définition. — Une *variété d'appui* de C est une variété qui, avec un point x de C, contient la facette de x dans C. Une *variété d'appui extrême* L de C est une variété d'appui de C qui est engendrée par la trace de C sur L.

Dans le cas de dimension infinie, une variété d'appui extrême peut ne pas être engendrée par la facette d'un de ses points.

La trace L′ d'une variété d'appui L de C sur un sous-espace E′ de E est une variété d'appui de la trace C′ de C; si L est une variété d'appui extrême de C, alors L′ est une variété d'appui extrême de C′. Inversement, si L′ est une variété d'appui de C′, c'est la trace sur E′ d'une variété d'appui L de C qui est engendrée par L′ et les facettes des points de $C' \cap L'$ dans C; si L′ est une variété d'appui extrême de C′, alors L est une variété d'appui extrême de C.

Soit C″ la projection de C sur une variété E″ de E, parallèlement à une variété d'appui M′ de C; la projection de toute variété d'appui de C parallèlement à M′ est une variété d'appui de C″ (qui peut être E″ entier); inversement toute variété d'appui M″ de C″ est la trace sur E″ de la variété d'appui M de C somme directe de M′ et de M″. Si M′ (resp. M″) est une variété d'appui extrême de C (resp C″), alors M est aussi variété d'appui extrême de C′. Nous avons démontré :

PROPOSITION. — Si C′ *est une trace de* C, C″ *une projection de* C *parallèlement à une variété d'appui* M′ *de* C, *toute variété d'appui de* C′ *et de* C″ *est trace d'une variété d'appui de* C. *Si* M′ *est une variété d'appui extrême de* C, *toute variété d'appui extrême de* C′ *et de* C″ *est trace d'une variété d'appui extrême de* C.

PROPOSITION. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un hyperplan d'appui* H *d'un cône convexe* C *soit un hyperplan d'appui extrême de* C *est que, pour tout sous-espace* E_i *de dimension finie de* E, *il existe un sous-espace* E_j *contenant* E_i *et de dimension finie tel que la trace* H_j *de* H *sur* E_j *soit un hyperplan d'appui extrême de la trace* C_j *de* C *sur* E_j.

DÉMONSTRATION. — Si H est un hyperplan d'appui extrême de C, il existe une base de H formée de vecteurs portés par C; soit E_i un sous-espace de dimension finie, E_i' un sous-espace de dimension finie engendré par les vecteurs de cette base et contenant E_i. Si E_j est le sous-espace engendré par E_i' et par un vecteur situé hors de H, la trace de H sur E_i est un hyperplan d'appui extrême de C_j. Si E_j n'est pas contenu dans H, on se ramène à ce cas en prenant la trace de E_i sur H. Réciproquement, si H a la propriété énoncée et si $H \cap C$ n'engendre pas H, soit H″ le supplémentaire dans H du sous-espace engendré par $H \cap C$; soit E_i un sous-espace de dimension finie dans H″; il existe E_j contenant E_i tel que la trace C_j engendre H_j et il y a contradiction.

DÉFINITION. — *Le cône d'appui d'un ensemble convexe* C *en un point* x *de* C est la réunion des demi-droites $[x, y \rightarrow)$, issues de x et passant par un point y de C différent de x. *Le cône d'appui de* C *autour d'une variété* V est la réunion des demi-variétés $[V, y \rightarrow)$, limitées par V et engendrées par V et un point y de C non situé dans V.

Le cône d'appui en x est identique à l'enveloppe convexe de la réunion de C et de la variété E_x engendrée par la facette de x dans C; c'est le cône d'appui de C autour de E_x. La variété engendrée par la facette de x dans le cône d'appui de C en x est identique à E_x.

Le cône d'appui de C autour de la variété V est l'enveloppe convexe de la réunion de C et de V; c'est aussi la somme directe de C et de V. La projection de C sur une variété V′ parallèlement à V est la trace sur V′ du cône d'appui de C autour de V.

Si E est muni d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel et si E est de dimension infinie, la variété engendrée par la facette d'un point x de C, où C est un ensemble convexe fermé, peut ne pas être fermée pour la topologie considérée. Quelle que soit la dimension de E, le cône d'appui de C en x n'est en général pas fermé. L'adhérence de ce cône est le *contingent de* C *en* x [4], qui peut être en tout point différent du cône d'appui. On ne change pas le cône d'appui en un point x d'un ensemble convexe C en remplaçant C par sa trace sur un voisinage de x dans E. Si le cône d'appui de C autour d'une variété V est fermé, l'image de C dans l'espace quotient de E par V est fermée; s'il existe un sous-espace supplémentaire topologique de V, alors la projection de C sur ce sous-espace parallèlement à V est fermée.

PROPOSITION. *Un ensemble fermé convexe* C *est l'intersection des cônes d'appui de ses différents points dans un espace vectoriel topologique.*

DÉMONSTRATION. — Si y appartient à tous les cônes d'appui de C en ses différents points et si z est un point de C, la trace de C sur la demi-droite $[z, y \to)$ est un segment fermé; soit x une de ses extrémités; le cône d'appui de C en x contient la demi-droite $[x, y \to)$ donc y appartient au segment $[x, z]$ et par suite à C.

PROPOSITION. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété* V *soit variété d'appui d'un ensemble convexe* C *est que la variété* V *soit facette d'un point de* V *dans le cône d'appui de* C *autour de* V.

Supposons désormais que C est un cône convexe de sommet O dans l'espace vectoriel E et que C engendre E. La facette d'un point x de C contient la facette de O dans C, qui sera appelée *sommet généralisé*. Toute variété d'appui qui rencontre C est un sous-espace vectoriel qui contient le sommet généralisé. Une *arête* de C est la trace de C sur une droite d'appui extrême de C; une *face* de C est la trace de C sur un hyperplan d'appui extrême de C; elle peut n'être engendrée par la facette d'aucun de ses points dans le cas de dimension infinie.

L'ensemble des sous-espace d'appui de C est un ensemble inductif pour la relation d'inclusion. E est un élément maximal de cet ensemble. Il n'y a pas toujours un hyperplan d'appui : par exemple, soient E un espace vectoriel à base dénombrable, C le cône des points x de E dont la dernière coordonnée non nulle est positive; C est un cône convexe dont O est point extrémal; les sous-espaces d'appui sont les sous-espaces tels que $x_i = 0$ pour $i > p$; tous ces sous-espaces sont de dimension finie; il n'y a pas de sous-espace d'appui de dimension infinie; C est partout dense dans E muni de la topologie fine; toute projection plane est fermée et identique à un plan.

L'ensemble des sous-espaces d'appui de C qui ne passent pas par une droite D donnée est aussi un ensemble inductif pour la relation d'inclusion. Un élément maximal de cet ensemble, V′, est un hyperplan d'appui si pour tout plan passant par D, la trace C′ du cône d'appui de C autour de V′ n'est pas un demi-plan limité par D; en effet, si V′ n'était pas un hyperplan dans ce cas, le sous-espace engendré par la facette, dans le cône d'appui de C autour de V′, d'une droite d'appui de C′ autre que D (ou le sous-espace engendré par V′ et D′ si D′ n'appartient pas à C′) serait un sous-espace d'appui de C passant par V′ et ne contenant pas D.

Proposition. — *Soit* C *un cône convexe dans* E *et* V *un sous-espace d'appui de* C. *Si* V *ne contient pas une droite donnée* D, *il existe un hyperplan d'appui de* C *passant par* V *et ne contenant pas* D *sauf s'il existe une projection plane de* C *sur un plan orthogonal à* V *qui soit un demi-plan limité par* D.

Proposition. — *Si le cône d'appui* C′ *de* C *autour de* V *est facette d'un de ses points,* C *possède un hyperplan d'appui passant par* V.

Démonstration. — Soit D une demi-droite dont la facette dans C′ est C′; la trace C″ de C′ sur un sous-espace passant par D supplémentaire à V est un cône convexe dont O est point extrémal et qui est la facette de D. Aucune projection plane de C″ n'est un demi-plan limité par D et il existe un hyperplan d'appui de C passant par V d'après la proposition précédente.

COROLLAIRE 1. — *Si* C *est facette d'un de ses points*, C *possède un hyperplan d'appui. En particulier, tout cône convexe de dimension finie possède un hyperplan d'appui.*

DÉMONSTRATION. — On se ramène au cas précédent en prenant pour V le sommet généralisé de C. Si E est un espace vectoriel topologique, et si C est un cône convexe engendré par un ouvert de E qui ne contient pas O, l'intérieur de C est identique à son intérieur pour la topologie fine ([2], ex. 3f p. 67); il existe un hyperplan d'appui d'après le corollaire et cet hyperplan est tel que l'intérieur de C soit entièrement contenu dans un des demi-espaces qu'il détermine, donc c'est un hyperplan fermé.

On retrouve ainsi le théorème de Hahn-Banach.

COROLLAIRE 2. — *Si* C *possède un sous-espace d'appui de codimension finie* V, *il possède un hyperplan d'appui.*

DÉMONSTRATION. — Une projection de C parallèlement à V est un cône convexe C′ de dimension finie; soit V′ un hyperplan d'appui de C′. L'hyperplan V + V′ est un hyperplan d'appui de C.

COROLLAIRE 3. — *Si* C *est facette d'un de ses points et si l'adhérence de toute projection plane de* C *est un angle saillant, tout sous-espace d'appui* V *est l'intersection* $\mathcal{H}$ *des hyperplans d'appui qui le contiennent.*

DÉMONSTRATION. — Soit D une droite qui appartient à $\mathcal{H}$ et non à V. Alors il existe un sous-espace d'appui maximal V′ qui contient V et non D. Si V′ n'est pas un hyperplan, soit C′ la trace sur un plan passant par D du cône d'appui de C autour de V′; c'est un angle saillant qui possède une droite d'appui extrême D′ différente de D; le sous-espace engendré par V′ et D′ (ou la facette de D′ dans C′ si D′ appartient à C′) est un sous-espace d'appui extrême de C qui contient V′ et non D et V′ est hyperplan d'appui de C, donc D $\notin \mathcal{H}$.

REMARQUE. — Il existe des cônes convexes n'ayant qu'un seul hyperplan d'appui : un demi-espace ouvert auquel on ajoute l'origine est un cône convexe dont O est point extrémal et qui a pour seul hyperplan d'appui l'hyperplan qui le limite.

Si E est un espace vectoriel ayant une base dénombrable, l'ensemble des points dont la première coordonnée non nulle est positive est un cône convexe de sommet O dont le seul hyperplan d'appui est un hyperplan d'appui extrême; tout sous-espace d'appui extrême est de dimension infinie.

L'ensemble des sous-espaces d'appui extrême d'un cône convexe C est un ensemble inductif pour la relation d'inclusion car le sous-espace engendré par la réunion d'une famille croissante de sous-espaces d'appui extrême est un sous-espace d'appui extrême. L'ensemble des sous-espaces d'appui extrême ne contenant pas une droite donnée D est aussi un ensemble inductif pour cette relation, donc il existe un sous-espace d'appui extrême maximal ne contenant pas D, mais la dimension de ce sous-espace est quelconque.

PROPOSITION. — *Soit* C *un cône convexe,* L *un sous-espace d'appui extrême ne contenant pas une droite donnée* D; *pour que* L *soit contenu dans un hyperplan d'appui extrême ne contenant pas* D, *il faut et il suffit qu'il existe une projection plane de* C *sur un plan contenant* D *qui admette une demi-droite d'appui extrême autre que* D.

DÉMONSTRATION. — Soit L′ le sous-espace d'appui extrême maximal de C qui contient L et non D; si L′ n'est pas un hyperplan, la trace du cône d'appui de C autour de L′ sur tout plan passant par D n'admet pas de droite d'appui extrême autre que D, ce qui est contraire à l'hypothèse.

PROPOSITION. — *Si* C *est facette d'un de ses points, est fermé pour la topologie fine et si toute projection plane de* C *est un angle saillant fermé,* C *est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent et qui sont limités par un hyperplan d'appui extrême. Tout sous-espace d'appui extrême est l'intersection des hyperplans d'appui extrême qui le contiennent.*

DÉMONSTRATION. — Soit L un sous-espace d'appui extrême de C, D une demi-droite intérieure à C; si un sous-espace d'appui extrême maximal L′ qui contient L et non D n'est pas un hyperplan, toute projection plane de la projection C′ de C parallèlement à L′ sur un sous-espace passant par D est un angle saillant fermé qui possède une droite d'appui extrême

$D' \neq D$ projection d'une génératrice Δ de C'; le sous-espace engendré par la facette de Δ dans C est un sous-espace d'appui extrême de C qui contient L' et non D. Il en résulte que tout sous-espace d'appui extrême est contenu dans un hyperplan d'appui extrême et est l'intersection des hyperplans d'appui extrême qui le contiennent même si C n'est pas fermé. Soit $\mathcal{H}$ l'intersection de tous les demi-espaces limités par un hyperplan d'appui extrême de C et contenant C, et D_1 une droite qui appartient à $\mathcal{H}$ et non à C, M la droite d'appui extrême de la trace de C sur le plan passant par D_1 et D, et qui sépare D_1 et D; par la facette de M dans C il passe un hyperplan d'appui extrême de C qui ne contient pas D et tel que le demi-espace qui contient C ne contienne pas D.

Supposons désormais E muni d'une topologie d'espace localement convexe compatible avec la structure vectorielle.

PROPOSITION. — *Soit* C *un cône convexe dans* E *qui ne coupe aucun plan selon un demi-plan. Si le cône d'appui de* C *autour de toute droite est fermé,* C *est fermé.*

DÉMONSTRATION. — Soit d une demi-droite qui n'appartient pas à C mais qui est adhérente à C. Soient D la droite qui contient d, et E_0 le sous-espace engendré par la facette de D dans le cône d'appui de C autour de D; par hypothèse le cône d'appui de C autour de D est fermé; si D_1 est une droite d'appui de la trace de C sur un plan E_1 contenu dans E_0 et passant par D, le demi-plan ouvert limité par D_1 et contenant d ne contient aucun point de C, ce qui est impossible. Si E_0 se réduit à la droite D, il existe un plan passant par D et qui ne rencontre pas C; si D_1 est une droite de ce plan, le cône d'appui de C autour de D_1 n'est pas fermé.

DÉFINITION. — Un sous-espace d'appui L d'un cône convexe C appelé un sous-espace d'*appui strict* si la trace de C sur L est le sommet généralisé de C.

PROPOSITION. — *Soit* C *un cône convexe fermé dans* E *dont* O *est point extrémal; le cône d'appui de* C *autour de tout sous-espace d'appui strict* M *de dimension finie est fermé.*

DÉMONSTRATION. — Soit D une demi-droite adhérente au cône d'appui mais qui ne lui appartient pas; pour tout voisinage symétrique V de O, une variété N du sous-espace M′ engendré par D et M, parallèle à M et rencontrant D coupe $V + C$; soit $C_V = (\overline{C + V}) \cap N$; C_V est un ensemble fermé dans N qui, pour V assez petit, ne rencontre pas M; lorsque V varie, dans l'espace complet N de dimension finie l'intersection des ensembles fermés bornés C_V est non vide; comme $\overline{C + V} \subset C + 2V$, cette intersection appartient à C, donc il existe un point y dans $C \cap N$ et le cône d'appui considéré contient le sous-espace passant par y et M.

Dans le cas où E est de dimension finie, cette proposition résulte de la compacité dans l'ensemble des demi-droites.

Remarque. — Même dans le cas de dimension finie, un cône convexe dont le cône d'appui autour de toute droite est fermé peut ne pas être fermé; ainsi un demi-plan dans R^2 dont on a ôté une des demi-droites d'appui extrême n'est pas fermé.

Si O est point extrémal d'un cône convexe C et si C possède un hyperplan d'appui strict H, la trace de C sur un hyperplan affine parallèle à H est un ensemble convexe pseudo-borné. S'il n'existe pas d'hyperplan d'appui strict de C, aucune section de C par un hyperplan n'est pseudo-bornée.

3. Famille de formes:

Définition. — Un *appui* d'un cône convexe C de sommet O dans un espace vectoriel topologique localement convexe E est un demi-espace limité par un hyperplan d'appui fermé de C et qui contient C. Toute forme linéaire continue qui s'annule sur un hyperplan d'appui est une *forme d'appui.* On définit de même *appui extrême, forme d'appui extrême, appui strict forme d'appui strict.*

Soit H un hyperplan d'appui de C; cet hyperplan est l'ensemble des points x de E tels que $\langle h, x\rangle = 0$. L'appui correspondant de C sera l'ensemble des points x de E tels que $\langle h, x\rangle \geqslant 0$ si, pour tout $c \in C$, on a $\langle h, c\rangle \geqslant 0$.

L'ensemble de toutes les formes linéaires continues qui sont positives ou nulles (resp. nulles) pour tout point de C est le *polaire de* C (rep. l'orthogonal de C) noté C^0 (resp. $C^\perp$); C^0 est un cône convexe dans le dual topologique de E, fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$. Si E est muni de la topologie fine, C^0 est un cône convexe dans le dual algébrique E^* de E; $C^\perp$ est le sommet généralisé de C^0. Si Γ est un ensemble quelconque de E, son polaire est le polaire du cône convexe de sommet O qu'il engendre. Si l'espace vectoriel topologique qui contient Γ est le dual topologique E' d'un espace vectoriel topologique et que la topologie considérée sur E' n'est pas compatible avec la dualité entre E et E' (si elle est plus fine que la topologie de Mackey $\tau(E', E)$ [3]), nous appellerons *polaire* de Γ *dans* E (resp. *orthogonal de* Γ *dans* E), la trace sur E du polaire (resp. orthogonal) de Γ dans le dual topologique E'' de E' muni de la topologie donnée; ce cas se présentera si E et E^* sont munis de la topologie fine.

Le polaire de Γ^0 contient l'enveloppe convexe de Γ et de l'ensemble réduit à 0. Si Γ est un ensemble contenu dans l'espace vectoriel topologique E dont le dual topologique est E', Γ^0 est l'enveloppe fermée convexe de Γ et de $\{O\}$ pour la topologie $\sigma(E, E')$.

PROPOSITION. — *Soit* C *un cône convexe qui engendre l'espace vectoriel* E *muni de la topologie fine*, C^0 *son polaire. La facette dans* C^0 *d'une forme* f *qui s'annule sur un hyperplan* F *est la trace sur* C_0 *de l'orthogonal de la trace* C' *de* C *sur* F.

DÉMONSTRATION. — Soit h une forme d'appui de C qui s'annule sur C' et H l'hyperplan sur lequel s'annule h; l'intersection G de H et de F est un sous-espace d'appui de codimension 2 de C qui contient C'. Le cône d'appui G' de C autour de G est un cône dont O est point extrémal et qui admet pour hyperplans d'appui F et H; il s'ensuit que G' est contenu strictement dans un demi-espace et qu'il possède un hyperplan d'appui H' différent de H et de F. Si h' est une forme qui s'annule sur F', on a $h' = \lambda f + (1 - \lambda)h$ avec $O < \lambda < 1$ et h' appartient à la facette de f dans C. Inversement toute forme h qui appartient à cette facette est telle qu'il existe une forme h' telle que $f = \lambda h + (1 - \lambda)h'$ et si x appartient à C', on devra avoir $\langle h, x\rangle = \langle h', x\rangle = 0$.

COROLLAIRE 1. — *Si* f *est une forme d'appui extrême de* C, $[O, f \rightarrow)$ *est une arête de* C^0.

En effet C' engendre F et toute forme d'appui de C qui s'annule sur C' est proportionnelle à f, donc la facette de f dans C^0 est $[0, f \rightarrow)$ qui est une arête de C^0.

Corollaire 2. — *Pour que* C *possède un hyperplan d'appui strict, il faut que* C^0 *soit facette d'un de ses points. Si* C^0 *est facette d'un de ses points et si* C *est l'intersection de ses appuis, alors* C *possède un appui strict.*

En effet, si f est une forme d'appui strict de C, alors C′ engendre le sommet généralisé S de C et tout hyperplan d'appui de C contient S. Si C est l'intersection de ses appuis, le sommet généralisé S est l'intersection de tous les hyperplans d'appui et une forme f dont C^0 est la facette est une forme d'appui strict.

En particulier, tout cône convexe fermé saillant dans un espace de dimension finie possède un hyperplan d'appui strict.

Remarquons qu'une arête de C^0 peut ne pas être engendrée par une forme d'appui extrême de C dans le cas où il n'y a pas d'hyperplan d'appui extrême qui passe par C′.

Définition. — Deux ensembles du dual topologique E′ d'un espace vectoriel topologique E sont *équivalents* (resp. *équivalents pour les inégalités*) si leurs orthogonaux dans E (resp. polaires dans E) coïncident.

Définition. — Un ensemble Ω de formes linéaires continues ω_i définies sur un espace vectoriel topologique E est *incompatible* si $\langle \omega_i, x\rangle = 0$ pour tout $\omega_i \in \Omega$ entraîne $x = 0$. L'ensemble Ω est *irréductible* (resp. *irréductible pour les inégalités*) si pour tout $\omega_i \in \Omega$ il existe $x \in$ E tel que $\langle \omega_j, x\rangle = 0$ pour tout $\omega_j \neq \omega_i$, $\langle \omega_i, x\rangle \neq 0$ (resp. $\langle \omega_j, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $\omega_j \neq \omega_i$, $\langle \omega_i, x\rangle < 0$).

Ainsi, si E est un espace vectoriel topologique, E′ son dual topologique, un *ensemble* Ω *de* E′ *est incompatible s'il est total pour la topologie* σ (E′, E), *il est irréductible s'il est topologiquement libre pour la topologie* σ (E′, E). Cette notion dépend seulement de la dualité entre E et E′. En particulier E est le dual topologique de E′ muni de la topologie σ (E′, E); un *ensemble incompatible de* E *sera un ensemble total dans* E pour la topologie σ (E, E′) et par suite un ensemble total dans E pour n'importe quelle topologie compatible avec la dualité entre E et E′. Un *ensemble irréductible dans* E *sera un ensemble topologiquement libre* dans E muni d'une topologie comprise entre σ (E, E′) et τ (E, E′).

Si E′ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la topologie

τ (E′, E), tout ensemble total pour $\mathfrak{T}$ est incompatible, mais un ensemble incompatible peut ne pas être total pour $\mathfrak{T}$; par exemple dans un espace préhilbertien une famille orthonormale $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ telle que $(x|e_i) = 0$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ entraîne $x = 0$ n'est pas forcément totale. Tout ensemble irréductible est topologiquement libre pour $\mathfrak{T}$ mais un ensemble topologiquement libre pour $\mathfrak{T}$ peut ne pas être irréductible.

Si un ensemble irréductible est maximal, il est incompatible. On ne peut pas toujours extraire d'un ensemble incompatible un ensemble irréductible et incompatible équivalent : si E est un espace vectoriel muni de la topologie fine, et si $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une base algébrique de E, l'ensemble des formes linéaires ω_i telles que :

$$\langle \omega_j, e_i \rangle = \lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij} = \mu_j^i, \qquad \mu_k \neq \mu_l \qquad \text{si } k \neq l$$

est un ensemble incompatible et tout sous-ensemble infini est incompatible mais non irréductible (les λ_{ij} sont les termes d'un tableau de Van-der-Monde et toute matrice extraite de ce tableau a un déterminant nul).

Soit Ω un ensemble incompatible et irréductible du dual topologique E′ d'un espace vectoriel topologique E; supposons qu'il existe x et $y \in \mathrm{E}$ tels que :

$$\langle \omega_i, x \rangle = \langle \omega_i, y \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad \omega_i \in \Omega, \quad \omega_i \neq \omega_j$$
$$\langle \omega_j, x \rangle = \lambda \langle \omega_j, y \rangle \neq 0$$

alors $\quad \langle \omega_i, x\text{-}\lambda y \rangle = \langle \omega_j, x\text{-}\lambda y \rangle = 0 \qquad$ et $\qquad x = \lambda y$

Par suite à tout ensemble incompatible et irréductible Ω on peut associer d'une manière unique l'ensemble des vecteurs $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de E tels que :

$$\langle \omega_i, e_i \rangle = 1, \quad \langle \omega_j, e_i \rangle = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq j, \quad \omega_i, \quad \omega_j \in \Omega$$

l'ensemble des vecteurs $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est la *pseudo-base topologique* associée à Ω.

Exemples de pseudo-bases topologiques: Si E est un espace vectoriel muni de la topologie fine, toute base algébrique est une pseudo-base topologique; une pseudo-base topologique de E qui n'est pas une base algébrique sera appelée plus brièvement *pseudo-base*. Dans un espace de Hilbert toute base orthonormale est une pseudo-base topologique. Si E est l'espace $\mathrm{L}^1(\mathrm{N})$ des suites absolument sommable, l'ensemble des suites dont tous les termes sont nuls sauf un qui vaut 1 est une pseudo-base topologique pour la topologie définie par la norme $||x|| = \sum_{i \in I} |x_i|$ par exemple.

Une pseudo-base topologique est un ensemble topologiquement libre dans l'espace vectoriel topologique E, mais à tout ensemble topologiquement libre on ne peut pas associer un ensemble incompatible et irréductible. Une pseudo-base topologique peut ne pas être totale : soit $(e_i)_{i \in I}$ une base algébrique d'un espace vectoriel E, $(\omega_i)_{i \in I}$ l'ensemble incompatible et irréductible correspondant, E_1 l'espace vectoriel somme de E et de Re_0 muni de la topologie fine; l'ensemble des formes linéaires $\overline{\omega}_i$ dont la restriction à E est ω_i et qui prennent la valeur 1 en e_0 est un ensemble incompatible et irréductible dans le dual algébrique de E ; la pseudo-base topologique associée dans E_1 est l'ensemble $(e_i)_{i \in I}$ qui n'est pas total dans E_1. Remarquons que, dans cet ensemble, le polaire de l'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ dans E_1 a pour hyperplan d'appui l'hyperplan E ; soit ω_0 une forme qui s'annule sur E ; l'ensemble $(\omega_0, (\overline{\omega}_i)_{i \in I})$ est équivalent pour les inégalités à l'ensemble irréductible et incompatible $(\overline{\omega}_i)_{i \in I}$, sans être lui-même irréductible.

Soit E un espace vectoriel topologique, $(e_i)_{i \in I}$ une pseudo-base topologique associée à l'ensemble incompatible et irréductible $(\omega_i)_{i \in I}$ de E'. Si on munit E de n'importe quelle topologie qui rende continues les formes ω_i, même si E' n'est plus le dual topologique de E l'ensemble $(e_i)_{i \in I}$ reste une pseudo-base topologique. La moins fine des topologies pour lesquelles $(e_i)_{i \in I}$ est une pseudo-base topologique de E est la Ω-topologie, c'est-à-dire la topologie dont un système fondamental de voisinages de l'origine sera constitué des ensembles V_J, où V_J est l'ensemble des points y de E tels que :

$$|\langle \omega_i, y \rangle| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } i \in J, \qquad J \text{ fini dans } I.$$

L'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ étant total dans E' muni de la topologie $\sigma(E', E)$, cette Ω-topologie est séparée (car c'est la Ω-topologie sur $E = \mathcal{L}(E', R)$ voir [3]).

Proposition. — *Si* E *est muni de la* Ω*-topologie, la pseudo-base topologique associée à* Ω *est totale et tout point est somme de la famille sommable* $(\langle \omega_i, x \rangle e_i)_{i \in I}$.

Démonstration. — Soit $x_i = \langle \omega_i, x \rangle$. Un point x est entièrement déterminé par la donnée de la famille $(x_i)_{i \in I}$ de ses *coordonnées*. Un voisinage V_J de x contient toutes les combinaisons linéaires $\sum_{i \in J'} x_i e_i$ où J' est un ensemble fini d'indices contenant J, donc la famille $(x_i e_i)_{i \in I}$ a pour somme x. Il s'ensuit que l'ensemble $(e_i)_{i \in I}$ est total dans E muni de la Ω-topologie. Cette proposition ne reste plus vraie si l'on remplace la Ω-topologie par une topologie plus fine.

Remarques. — 1) Soit E un espace vectoriel topologique, E′ son dual topologique, $(e_i)_{i \in I}$ une pseudo-base topologique de E totale dans E; alors l'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ est la pseudo-base topologique associée à l'ensemble incompatible et irréductible $(e_i)_{i \in I}$ de E et c'est une pseudo-base topologique totale pour toute topologie sur E′ compatible avec la dualité entre E et E′; ainsi *dans le dual algébrique* E^* *d'un espace vectoriel* E, *il existe toujours des pseudo-bases topologiques totales pour* σ (E^*, E).

2) L'existence d'une pseudo-base topologique dans un espace vectoriel topologique est conditionnée par l'existence d'un ensemble total et topologiquement libre dans son dual topologique.

3) Soient E un espace vectoriel topologique ayant une pseudo-base topologique $(e_i)_{i \in I}$, E′ son dual topologique. E est un sous-espace vectoriel de $R^{E'}$. L'application φ qui a un point x de E fait correspondre le point de $R^{E'}$ (ou de R^I) de coordonnées $(x_i)_{i \in I}$ est une application biunivoque de E sur un sous-espace vectoriel F de $R^I \subset R^{E'}$. Si on munit $R^{E'}$ de la Ω-topologie (où $\Omega = (\omega_i)_{i \in I}$, ensemble irréductible et incompatible auquel est associée $(e_i)_{i \in I}$), R^I est muni de la topologie produit et F sera un sous-espace vectoriel topologique de R^I (qui contient le sous-espace $R^{(I)}$ des points n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées différentes de 0 si la pseudo-base topologique est totale; l'application φ sera un isomorphisme de E sur F. Comme deux pseudo-bases topologiques ne sont pas toujours équipotentes, la donnée de E ne détermine pas complètement F. Un espace vectoriel topologique possède une pseudo-base topologique s'il existe un espace R^I tel que E soit isomorphe à un sous-espace vectoriel de R^I, muni de la topologie induite par la topologie produit ou une topologie plus fine sur R^I, le sous-espace $R^{(I)}$ étant partout dense dans F pour la topologie

induite si l'on veut que la pseudo-base topologique soit totale dans E; on pourra prendre un sous-espace vectoriel F partout dense dans R^I pour la topologie considérée. Si F est supposé fermé dans R^I pour la topologie produit l'espace E qui lui correspond est un espace de type minimal ([3], ex. 13, p. 61), c'est-à-dire que sa topologie est la moins fine des topologies localement convexes compatibles avec sa structure d'espace vectoriel. *Ainsi tout espace vectoriel topologique* E *sur lequel il existe une topologie minimale possède une pseudo-base topologique totale.*

Proposition. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique,* $(e_i)_{i\in I}$ *un ensemble total et topologiquement libre,* $(\omega_i)_{i\in I}$ *la pseudo-base topologique associée dans le dual topologique* E' *de* E; *alors* $(e_i)_{i\in I}$ *est une pseudo-base topologique totale si et seulement si la* Ω*-topologie est séparée; par contre* $(e_i)_{i\in I}$ *est une pseudo-base topologique totale dans le dual topologique* E_1 *de l'espace vectoriel* E' *muni de la* $(e_i)_{i\in I}$*-topologie.*

Démonstration. — Si $(e_i)_{i\in I}$ est une pseudo-base topologique, $(\omega_i)_{i\in I}$ est un ensemble total dans E' muni de la topologie σ (E', E) et la Ω-topologie est séparée. La même démonstration que précédemment montre que si $(e_i)_{i\in I}$ est un ensemble total et topologiquement libre de E, tout point x de E est somme de la famille sommable $(\langle\omega_i, x\rangle e_i)$ pour la Ω-topologie; dire que E muni de cette topologie est un espace de Hausdorff signifie que $x_i = 0$ pour tout $i \in I$ entraîne $x = \sum_{i\in I} 0e_i = 0$, donc l'ensemble $(\omega_i)_{i\in I}$ est incompatible et $(e_i)_{i\in I}$ est une pseudo-base topologique. Si on munit E' de la $(e_i)_{i\in I}$-topologie qui est séparée puisque $(e_i)_{i\in I}$ est total dans E, alors $(\omega_i)_{i\in I}$ devient une pseudo-base topologique totale d'après la proposition précédente, donc un ensemble incompatible pour le dual topologique E_1 de E; il en résulte que $(e_i)_{i\in I}$ est une pseudo-base topologique dans E_1 qui est partout dense dans E.

Dans le cas où $(e_i)_{i\in I}$ est une base algébrique de E muni de la topologie fine, la $(e_i)_{i\in I}$-topologie est identique à la topologie $\sigma(E^*, E)$. Mais E_1 peut différer de E; en particulier, soit E un espace vectoriel topologique, $(e_i)_{i\in I}$ une pseudo-base topologique totale de E, F un espace vectoriel topologique quelconque, E_2 l'espace somme directe de E et de F, p la projection canonique de E_2 sur E; munissons E_2 de la topologie image réciproque de la topologie de E par p; soit $(e'_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E_2 telle que e'_i se projette sur e_i; l'ensemble des vecteurs e'_i est total et topologiquement libre dans E_2, mais tout point de F a toutes ses coordonnées nulles par rapport à ces vecteurs, donc $(e_i)_{i \in I}$ n'est pas une pseudo-base topologique de E_2. Ici, E_2 n'est pas un espace de Hausdorff.

Définition. — Soit E un espace vectoriel topologique, E′ son dual topologique. Une *base topologique* $(e_i)_{i \in I}$ de E est un ensemble topologiquement libre tel que tout point x de E soit somme d'une famille sommable $(\xi_i e_i)_{i \in I}$ pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Proposition. — *Une base topologique est une pseudo-base topologique $(e_i)_{i \in I}$ telle que la famille $(x_i e_i)_{i \in I}$ soit sommable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Démonstration. — L'ensemble $(e_i)_{i \in I}$ est un ensemble total et topologiquement libre, donc un ensemble incompatible et irréductible; soit $(\omega_i)_{i \in I}$ la pseudo-base topologique associée dans E′. Comme ω_i est une forme continue de E, $\langle \omega_i, x \rangle$ est la limite des valeurs $\left\langle \omega_i, \sum_{j \in J} \xi_j e_j \right\rangle$ suivant le filtre des sections de l'ensemble des parties finies J de I, et $\langle \omega_i, x \rangle = \xi_i = x_i$ pour tout $i \in I$. Si pour un $x \in E$, on avait $x_i = 0$ pour tout $i \in I$, E étant séparé, $x = 0$ donc l'ensemble irréductible $(\omega_i)_{i \in I}$ est un ensemble incompatible et $(e_i)_{i \in I}$ est la pseudo-base topologique associée.

Exemples de bases topologiques: Toute pseudo-base topologique dans un espace vectoriel muni de la Ω-topologie; toute base algébrique dans un espace vectoriel muni de la topologie fine; toute base orthonormale dans un espace de Hilbert; la pseudo-base topologique considérée dans $L^1(N)$.

Proposition. — *Si un espace vectoriel topologique possède une base topologique, il en est de même pour tout sous-espace vectoriel de codimension finie.*

Démonstration. — Faisons un raisonnement par récurrence. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base topologique de E, H_n un sous-espace vectoriel de E de codimension n; supposons que tout sous-espace vectoriel de codimension $n-1$ possède une pseudo-base topologique. Soit H_{n-1} un tel sous-espace qui contient H_n, $(e'_i)_{i\in I'}$ une base topologique de H_{n-1}, e'_p un vecteur de cette base non situé dans H_n. Le plan passant par e'_p et e'_j coupe H_n selon un vecteur e''_j; l'ensemble $(e''_j)_{j\in I'-\{p\}}$ est un ensemble topologiquement libre. Un système fondamental de voisinages V_{n-1} d'un point x dans H_{n-1} est obtenu en prenant le produit d'un voisinage V_n de x dans H_n et d'un voisinage de 0 dans Re'_p; un tel voisinage contient au moins une combinaison linéaire des vecteurs e'_i qui peut s'exprimer comme une combinaison linéaire $x'_p e'_p + \sum_{j\in J} x''_j e''_j$. Tout voisinage de x dans H_n contient la trace d'un voisinage V_{n-1} donc contient la combinaison linéaire $\Sigma x''_j e''_j$ considérée ci-dessus. Ainsi la famille $(x''_j e''_j)$ est sommable et $(e''_j)_{j\in I'-\{p\}}$ est une base topologique pour H_n.

Proposition. — *Si* E *est un espace vectoriel topologique métrisable pour la topologie* $\sigma(E, E')$, *toutes les bases topologiques ont même puissance.*

Démonstration. — Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_j)_{j\in J}$ deux bases topologiques, $(\omega_i)_{i\in I}$ et $(\omega'_j)_{j\in J}$ les ensembles incompatibles et irréductibles correspondants. L'ensemble A_{e_i} des formes ω'_j qui ne s'annulent pas sur le vecteur e_i est un ensemble dénombrable car la famille $(\langle\omega'_j, e_i\rangle e'_j)$ étant sommable dans l'espace métrisable E, chaque point a au plus une infinité dénombrable de coordonnées non nulles. Pour toute forme ω'_j il existe un vecteur e_i tel que $\langle\omega'_j, e_i\rangle \neq 0$ puisque l'ensemble $(e_i)_{i\in I}$ est total. Ainsi l'ensemble $(\omega'_j)_{j\in J}$ est la réunion des ensembles A_{e_i} dénombrables lorsque i parcourt I; par suite la puissance de $(\omega'_j)_{j\in J}$ est inférieure à la puissance de $(e_i)_{i\in I}$ et, en faisant le raisonnement inverse on prouve que les deux bases sont équipotentes.

Remarquons que si E est métrisable pour $\sigma(E, E')$, alors $\sigma(E, E')$ et $\tau(E, E')$ sont identiques (voir [3]). Ce théorème reste vrai si E est métrisable pour une topologie $\mathcal{T}$ et que les bases considérées sont telles que la famille $(x_i e_i)$ soit sommable pour cette topologie; c'est ce qui se produit dans le cas d'une base orthonormale d'un espace hilbertien.

II. — POLYÈDRES ET PYRAMIDES CONVEXES

1. Polyèdres et pyramides convexes dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Soit R^n l'espace vectoriel à n dimensions.

Définition. — Une *pyramide convexe* $h(S)$ de sommet 0 est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini S de demi-droites $[0, z \rightarrow)$. Si le sous-espace vectoriel engendré par S est R^n, S est *non dégénéré.*

Si S est non dégénéré, un hyperplan d'appui extrême de $h(S)$ contient $(n - 1)$ droites linéairement indépendantes de S : soit S′ l'ensemble des formes d'appui extrêmes : S′ est la réunion d'un ensemble fini de demi-droites.

Si S est dégénéré, un *hyperplan d'appui extrême impropre* est un hyperplan d'appui dont la trace sur le sous-espace engendré par S est une hyperplan d'appui extrême de S. Rappelons les résultats suivants :

Une pyramide convexe est l'intersection de ses appuis extrêmes (propres et impropres) : le polaire de S est l'enveloppe convexe de S′. Il en résulte que le polaire d'une pyramide convexe est une pyramide convexe même si S est dégénéré et que pour qu'un ensemble fermé soit une pyramide convexe il faut et il suffit qu'il soit l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces.

Les faces d'une pyramide convexe sont des pyramides convexes; toute facette de dimension k est face d'une facette de dimension $k + 1$. Si d est la dimension de la facette de O dans S, pour tout l compris entre d et $p - 1$ où p est la dimension du sous-espace engendré par S, il existe au moins une facette de dimension l; en particulier, si $d = 0$ la pyramide convexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes. Le polaire de S engendre un sous-espace vectoriel de dimension $n - d$. Les formes d'appui extrême impropres sont les points de la facette de O dans le polaire de S, les formes d'appui extrême propres sont les points dont les facettes engendrent un sous-espace vectoriel de dimension $n - d + 1$ dans le polaire de S. L'ensemble des formes d'appui de la pyramide convexe qui s'annulent sur une facette qui engendre un sous-espace vectoriel de dimension k est une facette de l'enveloppe convexe de S' qui engendre un sous-espace vectoriel de dimension $n - k$.

Si la pyramide convexe engendre un sous-espace de dimension p, la facette du sommet de S' engendre un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$.

Définition. — Un *polyèdre convexe* P est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces affines.

Plongeons R^n dans un espace vectoriel E à $(n+1)$ dimensions de sorte que R^n soit l'hyperplan affine ensemble des points x tels que : $\langle \omega_0, x \rangle = 1$. Alors P est l'intersection d'une pyramide convexe P' avec R^n. Cette pyramide convexe est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E engendrés par les sous-espaces affines qui définissent P. Soit P'_+ l'intersection de P' avec le demi-espace $\langle \omega_0, x \rangle \geqslant 0$; le polyèdre convexe est aussi l'intersection de P'_+ avec R^n.

Pour que le polyèdre P soit borné, il faut et il suffit que le point ω_0 soit intérieur au polaire de P.

Soit $\overline{R^n}$ l'espace R^n complété par les points à l'infini, qui correspondent d'une manière biunivoque aux demi-droites d'origine O situées dans l'hyperplan E_0 défini comme l'ensemble des points x tels que $\langle \omega_0, x \rangle = 0$. Les points de R^n sont dits *points propres* de $\overline{R^n}$, les autres points sont *impropres*. Un polyèdre convexe P dans R^n est complété dans $\overline{R^n}$ en ajoutant les points correspondants aux directions des demi-droites contenues dans P. Soit $\overline{P}$ le complété de P; alors $\overline{P^n}$ correspond d'une façon biunivoque à P'_+. Nous définissons la notion de *segment* dans $\overline{R^n}$ de la façon suivante :

1) Si x et y sont propres, le segment qui les joint dans $\overline{R^n}$ est le segment qui les joint dans R^n.

2) Si x est propre et y impropre, le segment qui les joint est la demi-droite d'origine x, parallèle à la demi-droite d'origine O qui définit y.

3) Si x et y sont impropres, le segment qui les joint est l'ensemble des demi-droites du cône engendré par les demi-droites d'origine O qui définissent x et y. Si x et y sont deux demi-droites opposées, le segment qui les joint se réduit par définition au couple (x, y).

Étant donné un ensemble $\overline{A}$ contenu dans $\overline{R^n}$, son enveloppe convexe sera la réunion des segments joignant deux points quelconques de $\overline{A}$. Les points impropres de cette enveloppe convexe forment l'enveloppe convexe des points impropres de $\overline{A}$.

Proposition. — *Tout polyèdre convexe* P *de* R^n *est la trace sur* R^n *de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points propres ou impropres de* $\overline{R^n}$.

Démonstration. — P'_+ est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de demi-droites, donc $\overline{P}$ est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\overline{R^n}$. Plus précisément : soit $\mathcal{F}'_0$ la facette de O dans P', $\mathcal{F}''_0 = \mathcal{F}'_0 \cap E_0$ est la facette de O dans $P'' = P'_+ \cap E_0$. Soit H un sous-espace supplémentaire au sous-espace engendré par $\mathcal{F}''_0$ dans E. La trace de P'_+ sur H est une pyramide convexe, enveloppe convexe de l'ensemble fini des arêtes $[O, A_i \rightarrow)$, où $A_i \in R^n$ et de $H \cap P''$. La pyramide convexe P'_+ est l'enveloppe convexe de P'' et des arêtes $[O, A_i \rightarrow)$. Les points A_i sont déterminés modulo $\mathcal{F}''_0$.

Les points A_i engendrent un polyèdre convexe borné P_1 dans R^n. Le polyèdre convexe P est la somme dans E de P_1 et de P'', qui correspond à l'ensemble des points impropres de $\overline{P}$. La facette dans P d'un point A_i engendre le sous-espace affine translaté du sous-espace engendré par la facette $\mathcal{F}''_0$ de O dans P''. Ce sont les facettes de dimension minima. Toute autre facette engendre un sous-espace somme de deux sous-espaces engendrés respectivement par une facette dans P et une facette dans P'.

Pour que P_1 soit réduit à un sommet, il faut et il suffit que P soit une pyramide convexe. Ce cas est caractérisé par la propriété : la facette en O de P' n'est pas contenue dans E_0.

2. Nouvelle caractérisation des pyramides convexes dans les espaces vectoriels de dimension finie :

Proposition. — *Si* P *est une pyramide convexe, le cône d'appui en tout point* x *de* P *est fermé.*

En effet ce cône d'appui est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermés.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône convexe* P *soit une pyramide convexe est que le cône d'appui en tout point x de* P *soit fermé.*

DÉMONSTRATION. — Nous pouvons nous ramener au cas où O est point extrémal du cône en considérant le quotient de P par le sous-espace engendré par la facette de O dans P. Supposons le théorème vrai pour les pyramides convexes qui engendrent un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et démontrons qu'il est vrai pour une pyramide convexe qui engendre un sous-espace vectoriel de dimension n. Montrons d'abord que, dans ces conditions, le cône convexe P est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes. Soit $[O, x \to)$ une demi-droite de P : si ce n'est pas une arête, tout plan qui passe par cette droite coupe P selon un angle de côtés $[O, x_1 \to)$ et $[O, x_2 \to)$ et qui contient $[O, x \to)$ à son intérieur : la facette de $[O, x_1 \to)$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension inférieure à n et cette facette est un cône convexe dont le cône d'appui en chaque point est fermé; c'est donc une pyramide convexe qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini d'arêtes : ces arêtes sont arêtes de P. Donc $[O, x_1 \to)$ est une combinaison linéaire positive de ces arêtes : il en est de même pour $[O, x_2 \to)$ et par suite pour $[O, x \to)$.

Montrons maintenant que P ne peut avoir qu'un nombre fini d'arêtes. S'il y en avait une infinité, on pourrait en extraire une suite $[O, x_i \to)$ tendant vers une droite $[O, A_1 \to)$ qui appartient à P. Le cône d'appui de P autour de $[O, A_1 \to)$ est aussi un ensemble fermé : on pourra extraire de la suite $[O, x_i \to)$ une suite infinie $[O, x'_i \to)$ telle que les demi-plans $[OA_1, x'_i \to)$ (demi-plan passant par A_1 et x'_i et limité par OA_1) tendent vers le demi-plan $[OA_1, A_2 \to)$. Dans cette suite il y a une infinité d'arêtes non situées dans le plan OA_1A_2, car les arêtes situées dans ce plan sont des arêtes de l'intersection de P avec ce plan. Ayant déterminé les génératrices :

$$[O, A_1 \to), \ldots; \qquad [O, A_{p-1} \to), \ldots$$

et une suite $(x_i^{(p-2)})$ extraite de la suite (x_i) telle que :

$$[O, A_1A_2 \ldots A_{p-2}, x_i^{p-2} \to) \to [OA_1 \ldots A_{p-2}, A_{p-1} \to)$$

nous déterminons la demi-droite $[O, A_p \rightarrow)$ par la condition qu'il existe une sous-suite $(x_i^{(p-1)})$ de $(x_i^{(p-2)})$ telle que :

$$[OA_1 \dots A_{p-1}, x_i^{p-1} \rightarrow) \rightarrow [OA_1 \dots A_{p-1}, A_p \rightarrow).$$

Par récurrence, nous déterminerons ainsi les génératrices :

$$[O, A_1 \rightarrow), \dots, [O, A_n \rightarrow);$$

la suite $(x_i^{(n-1)})$ est alors située dans le demi-espace

$$[OA_1 \dots A_{n-1}, A_n \rightarrow)$$

Montrons que pour i assez grand le point $x_i^{(n-1)}$ a des coordonnées positives par rapport à la base formée par $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$.

Comme

$$[O, x_i^{(n-1)} \rightarrow) \rightarrow [O, A_1 \rightarrow)$$

pour i assez grand la première coordonnée de $x_i^{(n-1)}$ est positive.

Comme $[OA_1 \dots A_p, x_i^{(n-1)} \rightarrow) \rightarrow [OA_1 \dots A_p, A_{p+1} \rightarrow)$ la trace de $[OA_1 \dots A_p, x_i^{(n-1)} \rightarrow)$ sur le sous-espace $(OA_{p+1}, \dots, A_n)$ est une demi-droite $[O, y_i \rightarrow)$ qui tend vers $[O, A_{p+1} \rightarrow)$; la $(p+1)$-ième coordonnée de $x_i^{(n-1)}$ est égale à la $(p+1)$-ième coordonnée de y_i qui est positive pour i assez grand. Il en résulte que $[O, x_i \rightarrow)$ ne peut pas être une arête.

Remarquons que la condition du théorème est équivalente à la suivante : un cône convexe fermé P est une pyramide convexe si et seulement si l'enveloppe convexe de P avec toute génératrice est fermée. D'après les résultats du premier chapitre, il en résulte que l'enveloppe convexe de P avec toute droite est fermée : *Si l'adhérencc de la trace d'un cône convexe* P *sur tout plan est un angle saillant et si l'enveloppe convexe de* P *avec toute droite est fermée,* P *est une pyramide convexe.*

Si P est une pyramide convexe, son cône d'appui autour de tout sous-espace vectoriel L est la somme directe du cône d'appui de P autour du sous-espace engendré par la trace de P sur L qui est fermé et d'un sous-espace d'appui strict de dimension finie; donc le cône d'appui de P autour de L est fermé. Inversement :

Corollaire 1. — *Un cône convexe fermé tel que le cône d'appui autour de tout sous-espace de codimension* 2 *soit fermé est une pyramide convexe.*

Démonstration. — Si P n'est pas une pyramide convexe, il existe une droite D telle que l'enveloppe convexe de $P \cup D$ ne soit pas fermée. Ceci revient à dire que l'on peut trouver une demi-droite D' telle que le demi-plan Π limité par D et contenant D' ne contienne aucun point de P autre que ceux situés sur D. Si D est intérieure ou extérieure à P, il est évident que cette situation ne peut pas se présenter. Le cas à étudier est celui où D est sur la frontière de P. Alors, aucun point de la trace de P sur Π ne peut être intérieur à P et, P étant facette d'un de ses points il passe par le plan Π un hyperplan d'appui H de P. La trace P_1 de P sur H est un cône convexe fermé dont D est droite frontière; il passe par D un hyperplan d'appui H_1 de P_1, qui ne contient pas D' et l'enveloppe convexe de $H_1 \cup P$ n'est pas fermée puisque H est adhérent à cet ensemble sans lui appartenir, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Une autre démonstration de ce théorème a été donnée par Mirkil [6]. Par suite : *un cône convexe fermé* P *est une pyramide convexe si et seulement si toutes ses projections planes sont fermées.*

3. Pyramides convexes de dimension infinie; définitions; exemples. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe sur le corps des réels, $\mathfrak{T}$ sa topologie.

Définition. — Une *$\mathfrak{T}$-pyramide convexe* est un cône convexe tel que le cône d'appui en tout point x de P soit fermé. Un *$\mathfrak{T}$-polyèdre convexe* est la trace d'une $\mathfrak{T}$-pyramide convexe sur un hyperplan affine fermé.

L'enveloppe convexe d'une $\mathfrak{T}$-pyramide convexe P avec toute droite est fermée et le cône d'appui de P autour de tout sous-espace engendré par une facette est fermé; il en résulte que *le cône d'appui de* P *autour de tout sous-espace de dimension finie est fermé* (en appliquant 1-2).

Nous supposerons que les pyramides convexes considérées ont le point O pour sommet; alors toute intersection finie de $\mathfrak{T}$-pyramides convexes est une $\mathfrak{T}$-pyramide convexe.

Toute $\mathfrak{T}$-pyramide convexe est une $\mathfrak{T}'$-pyramide convexe pour une topologie $\mathfrak{T}$ plus fine que $\mathfrak{T}'$ et telle que E muni de $\mathfrak{T}'$ soit encore un espace vectoriel topologique localement convexe. Si nous munissons E de la topologie fine nous obtenons la plus grande classe de $\mathcal{T}$-pyramides convexes. Une *pyramide convexe* est une pyramide convexe pour la topologie fine de E (même si l'on considère parallèlement une autre topologie sur E). De même on a les *polyèdres convexes.*

Supposons désormais E muni de la topologie fine; la trace d'une pyramide convexe P sur un sous-espace L quelconque de E est une pyramide convexe dans L car le cône d'appui en un point x de la trace de P sur L est la trace sur L du cône d'appui de P en x. Inversement :

Proposition. — *Si l'espace vectoriel* E *a une base dénombrable, une pyramide convexe est un cône convexe dont la trace sur tout sous-espace de dimension finie est une pyramide convexe dans ce sous-espace.*

Remarquons qu'en général la projection d'une pyramide convexe sur un sous-espace vectoriel n'est pas une pyramide convexe.

Nous allons donner quelques exemples de pyramides convexes qui nous permettront de voir les différences entre les pyramides convexes dans les espaces vectoriels de dimension finie ou infinie.

1) Définition. — Une *pyramide simpliciale* S d'un espace vectoriel E est l'enveloppe convexe de l'ensemble des vecteurs d'une base algébrique de E.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E; la pyramide simpliciale S est l'ensemble des points x de E dont toutes les coordonnées x_i sont positives ou nulles. S est l'enveloppe convexe de ses arêtes qui sont les demi-droites $[O, e_i \rightarrow)$. Les formes linéaires ω_i telles que :

$$\langle \omega_i, e_i \rangle = 1, \qquad \langle \omega_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \neq j, \qquad i \ \textit{et} \ j \in I$$

sont les formes d'appui extrême de S et S est l'intersection de ses appuis extrêmes. L'ensemble des formes ω_i est un ensemble incompatible et irréductible et $(e_i)_{i \in I}$ est la pseudobase associée. La trace de S sur une variété d'appui V est une pyramide simpliciale dans V; la projection de S sur un sous-espace V' parallèlement à un sous-espace d'appui extrême est une pyramide simpliciale de V'. Le cône d'appui en un point x de S de coordonnées x_i différentes de O pour tout i

dans l'ensemble d'indices J fini est l'ensemble des points y tels qu'il existe $\lambda \neq 0$ pour lequel :

$$x + \lambda(y - x) \in S$$

ou encore $$x_i + \lambda(y_i - x_i) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

Si $i \in \complement J$, cette inégalité se réduit à $\lambda y_i \geqslant 0$. Donc on devra avoir $y_i \geqslant 0$, avec $\lambda \geqslant 0$, pour tout $i \in \complement J$. Les inégalités obtenues pour $i \in J$ sont en nombre fini; il existe toujours une solution λ et le cône d'appui de S en x est l'ensemble des points y tels que $y_i \geqslant 0$ pour tout i pour lequel $x_i = 0$ et ce cône d'appui est fermé : S est une pyramide convexe.

La facette du point x dans S est la facette de x dans le cône d'appui de S en x; c'est l'ensemble des points y tels que $y_i = 0$ pour tout indice i tel que $x_i = 0$. La facette de tout point engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie; S n'a point intérieur.

Le cône d'appui autour d'un sous-espace d'appui extrême L est fermé car c'est le cône d'appui en x de la pyramide simpliciale image de S par l'application canonique de E sur l'espace quotient de E par L. Le cône d'appui autour de tout sous-espace n'est pas fermé; en effet, on obtient une nouvelle base de E en conservant un des vecteurs e_0 et en remplaçant e_i par une combinaison linéaire à coefficients positifs de e_i et d'un vecteur ε_i, où $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs situés dans un plan fixe H passant par e_0 et qui converge vers un vecteur d n'appartenant pas à S. Le cône d'appui de la pyramide simpliciale S autour d'un sous-espace supplémentaire à H n'est pas fermé.

Le dual de E est isomorphe à l'espace R^I des familles de puissance I. Le polaire de S n'est pas une pyramide convexe puisque c'est l'ensemble des familles dont tous les termes sont positifs ou nuls, l'ensemble des termes positifs pouvant être infini, et que sa trace sur un sous-espace de dimension finie n'est pas pyramide convexe; le polaire de S n'est pas non plus l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes qui sont les demi-droites $[0, \omega_i \rightarrow)$.

S possède des hyperplans d'appui strict; un tel hyperplan est défini par une forme h qui prend des valeurs strictement positives sur tous les vecteurs de la base.

2) L'exemple précédent peut être généralisé :

Définition. — Une *pyramide simpliciale généralisée* dans un espace vectoriel E est le polaire d'un ensemble irréductible et incompatible de formes $(\omega_i)_{i \in I}$ dans le cas où le cône d'appui en un point x tel que $\langle \omega_i, x \rangle = 0$ pour tout $i \in J$ est l'ensemble des points y tels que $\langle \omega_i, y \rangle \geqslant 0$ pour tout $i \in J$.

Les pyramides simpliciales généralisées ont été étudiées dans [1]. Rappelons qu'une telle pyramide possède des arêtes qui sont les vecteurs de la pseudo-base associée à $(\omega_i)_{i \in I}$. Ces arêtes engendrent une pyramide simpliciale S' strictement contenue dans S si S n'est pas une pyramide simpliciale. Le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême est fermé mais il existe des sous-espaces autour desquels le cône d'appui de S n'est pas fermé. Si I n'est pas dénombrable, la pyramide simpliciale généralisée ne possède pas d'hyperplan d'appui strict.

La trace d'une pyramide simpliciale généralisée sur un hyperplan, dont la trace sur le sous-espace E' engendré par les arêtes de S est un hyperplan d'appui strict de S', est une *pyramide convexe sans arêtes.*

3) Donnons un exemple de pyramide convexe qui ne possède pas d'hyperplan d'appui extrême.

Soit E un espace vectoriel ayant une base dénombrable $(e_0, e'_0, e_1, \dots, e_n)$. Soit (ε_i) une suite de vecteurs ne contenant ni e_0 ni e'_0, telle que chaque ε_i soit combinaison linéaire positive de e_0 et de e'_0 et que e_0 et e'_0 soient adhérents à l'ensemble des ε_i. Posons :

$$e'_i = e_i + \lambda_i \varepsilon_i \qquad \lambda_i > 0$$

Les vecteurs $((e'_i)_{i \in N}, e_0, e'_0)$ forment une base de E. Soit P le cône convexe engendré par les vecteurs (e_i, e'_i) où $i \in N$. Soit E_p un sous-espace de dimension finie, E'_p le plus petit sous-espac contenant E_p engendré par les vecteurs $(e_i, e_0, e'_0)_{i \in N}$; E''_p est aussi engendré par les vecteurs $(e_i, e_0, e'_0)_{i \in N}$. La trace de P sur E'_p est l'enveloppe convexe des vecteurs (e_i, e'_i) qui appartiennent à E'_p, donc c'est une pyramide convexe et le cône convexe P dont la trace sur tout sous-espace vectoriel de dimension finie est une pyramide convexe est lui-même une pyramide convexe. Soit H le sous-espace engendré par les vecteurs e_i. Le demi-hyperplan limité par H et contenant e_0 n'appartient pas au cône d'appui de P autour de H puisqu'il ne contient aucune génératrice de P, mais ce demi-hyperplan est limite des demi-hyperplans passant par H et contenant e'_i ; le cône d'appui de P autour d'un sous-espace d'appui extrême n'est pas fermé. S'il existait un hyperplan d'appui de P passant par H, sa trace sur le plan passant par e_0 et e'_0 serait un appui de la projection P_1 de P sur ce plan parallèlement à H, et contiendrait e_0 ou e'_0. Or la trace de P sur l'hyperplan H_1 engendré par H et e_0 n'engendre pas cet hyperplan.

Nous pouvons résumer les résultats précédents :

Théorème. — *Une pyramide convexe dans un espace vectoriel de dimension infinie n'a pas toujours des arêtes ni des appuis extrêmes. Son polaire peut n'être ni une pyramide convexe ni l'enveloppe convexe de ses arêtes. Une pyramide convexe peut ne pas posséder d'hyperplan d'appui strict.*

4. Étude des pyramides convexes.

Proposition. — *Si la facette de tout point x d'une pyramide convexe* P *engendre un sous-espace de dimension finie, la pyramide est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Démonstration. — La facette de tout point x de P est une pyramide convexe, enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes, qui sont aussi arêtes de P car leur facette est contenue dans la facette de x.

Corollaire. — *Si une pyramide convexe* P *est contenue dans une pyramide simpliciale, la facette de tout point engendre un sous-espace de dimension finie et la pyramide convexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

En effet la facette de tout point de P est contenue dans la facette de ce point dans la pyramide simpliciale et cette facette engendre un sous-espace de dimension finie. Il en résulte que *l'intérieur de* P *est vide.*

Remarque. — Soit E un espace vectoriel ayant une base dénombrale, $(E_n)_{n\in N}$ une suite de sous-espaces de dimension croissante telle que E soit réunion de cette suite. E_n est un sous-espace de dimension n. Soit P le cône convexe de E réunion des pyramides convexes P_n telles que P_n engendre E_n et contient à son intérieur une demi-droite D et P_{n+1} est la pyramide convexe de E_{n+1} enveloppe convexe de P_n et de deux demi-droites D_n et D'_n, où D_n et D'_n n'appartiennent pas à E_n et déterminent un angle saillant auquel D est intérieure. P *est une pyramide convexe enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes* qui sont les demi-droites D_n et D'_n où n varie dans N, *et* D *est intérieure à* P.

PROPOSITION. — *Dans une pyramide convexe* P, *une suite infinie d'arêtes ne converge pas.*

DÉMONSTRATION. — Soit D_n une suite d'arêtes; supposons que cette suite converge, c'est-à-dire que tout voisinage d'une certaine demi-droite D contienne une des arêtes D_n. Si H est un hyperplan affine supplémentaire à D et $(V_i)_{i \in I}$ un système fondamental de voisinages dans H de la trace d de D sur H, les cônes de sommet O qui s'appuient sur les V_i forment un système fondamental de voisinages de D dans E; tout voisinage V_i de d contient au moins la trace d_n sur H d'une arête D_n et, dans H, les d_n forment une suite qui converge vers d pour la topologie fine; une telle suite est contenue dans un sous-espace vectoriel h de dimension finie de H. Les arêtes D_n sont contenues dans le sous-espace vectoriel de E engendré par h; ces arêtes sont arêtes de la pyramide convexe trace sur h de la pyramide convexe P; cette trace ne peut avoir qu'un ensemble fini d'arêtes; toute suite convergente d'arêtes dans une pyramide convexe est finie.

THÉORÈME. — *Par tout sous-espace d'appui extrême* M *d'une pyramide convexe* P *passe un sous-espace d'appui extrême de dimension infinie. Toute facette est contenue dans une facette plus grande.*

DÉMONSTRATION. — Soit D une droite qui n'appartient pas à M; nous avons vu (I) que dans l'ensemble des sous-espaces d'appui extrême passant par M et ne contenant pas D il existe un élément maximal M'. Si M' était un sous-espace d'appui extrême de dimension finie, M' serait le sous-espace engendré par la facette dans P d'un point x de la trace de P sur M', puisque cette trace est un ensemble convexe dans un espace de dimension finie, et la projection P' de P sur un sous-espace supplémentaire à M' serait un cône convexe fermé dont O est point extrémal. La trace de P' sur un plan passant par D est un angle saillant fermé ; soit D' une droite d'appui extrême de cet angle différente de D et M'' sa facette dans P' ; le sous-espace N engendré par M' et M'' est un sous-espace d'appui extrême de P qui contient M' et non D ; un sous-espace d'appui extrême maximal est de dimension infinie.

Remarquons que, dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie, ce théorème prouve que tout sous-espace d'appui extrême est contenu dans un hyperplan d'appui extrême. Partant de ce résultat et du fait que la pyramide convexe est alors l'intersection de ses appuis extrêmes (voir I), on peut redémontrer qu'une pyramide convexe de dimension finie est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces.

PROPOSITION. — *Si une pyramide convexe est l'intersection de ses appuis extrêmes, son polaire est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes pour la topologie* $\sigma(E^*, E)$ *si la pyramide engendre* E.

DÉMONSTRATION. — Soit Π l'ensemble des formes d'appui extrême de P ; nous avons vu (1,3) que toute forme d'appui extrême de P est sur une arête du polaire de P. Le polaire de Π dans E est la pyramide convexe P ; son bipolaire est l'enveloppe fermée convexe de Π pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ (voir I) et $\Pi^{00} = P^0$.

DÉFINITION. — Une *pyramide propre* est une pyramide convexe telle que le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême soit fermé.

Cette définition est équivalente à la suivante : une pyramide propre est un cône convexe fermé tel que le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême soit fermé.

Toute pyramide convexe dans un espace de dimension finie est une pyramide propre. Une pyramide simpliciale et une pyramide simpliciale généralisée sont des pyramides propres.

PROPOSITION. — *La trace* P' *d'une pyramide propre* P *sur un sous-espace* E' *est une pyramide propre ; la projection* P'' *sur un sous-espace* E'' *parallèlement à un sous-espace* L'' *d'appui extrême de* P *est une pyramide propre.*

Démonstration. — Tout sous-espace d'appui extrême L' de P' est la trace sur E' d'un sous-espace d'appui extrême L' de P engendré par la facette de L' dans P; le cône d'appui de P' autour de L' est la trace sur E' du cône d'appui de P autour de L'; il est fermé. De même si M est un sous-espace d'appui extrême de P'', alors M est la trace sur E'' d'un sous-espace d'appui extrême de P et le cône d'appui de P'' autour de L'' est encore fermé.

Proposition. — *Le cône d'appui d'une pyramide propre* P *autour de tout sous-espace d'appui* L *sur lequel la trace* P' *de* P *engendre un sous-espace* L' *de codimension finie dans* E, *est fermé.*

En effet la projection de P sur un sous-espace E' parallèlement à L' est une pyramide de dimension finie dont le cône d'appui autour de la trace de L sur E' est fermé.

Théorème. — *Toute pyramide propre qui engendre l'espace vectoriel* E *est l'intersection de ses appuis extrêmes.*

Démonstration. — On peut supposer que O est point extrémal de P; sinon il suffira de prendre le quotient de P par le sommet généralisé de P, qui sera encore une pyramide propre. Soit L un sous-espace d'appui extrême de P et D une droite non contenue dans L. Dans l'ensemble des sous-espaces d'appui extrême de P qui passent par L et qui ne contiennent pas D, il y a un élément maximal L'. Si L' n'est pas un hyperplan, soit P'' la projection de P sur un sous-espace qui contient D parallèlement à L'. Alors P'' est une pyramide propre dont O est point extrémal; la trace de P'' sur un plan passant par D est un angle saillant *fermé*; une droite d'appui extrême de cet angle au moins est différente de D; soit D' cette droite d'appui, L'' sa facette dans P''; le sous-espace engendré par L' et L'' est un sous-espace d'appui extrême de P qui ne contient pas D; ceci est impossible si L' est maximal, donc L' est un hyperplan et *tout sous-espace d'appui extrême de* P *qui ne contient pas une droite* D *peut être plongé dans un hyperplan d'appui extrême qui ne contient pas* D. Soit F l'ensemble des formes d'appui extrême de P; le polaire de F contient P; inversement soit x un point du polaire de F dans E; il y a un sous-espace de dimension finie E_i qui contient x et la trace

P_i de P sur E_i est une pyramide convexe; tout hyperplan d'appui extrême de P_i est trace sur E_i d'un hyperplan d'appui extrême de P et x appartient à P_i donc à P.

Remarque. — L'exemple de la pyramide simpliciale généralisée montre que P peut être intersection d'un sous-ensemble de l'ensemble de ses appuis extrêmes.

Proposition. — *Tout sous-espace d'appui extrême d'une pyramide propre est l'intersection des hyperplans d'appui extrêmes qui le contiennent.*

Démonstration. — Soit L un sous-espace d'appui extrême de la pyramide propre P et $(H_i)_{i \in I}$ la famille des hyperplans d'appui extrême qui contiennent L. Alors soit D une droite qui appartient à l'intersection $\mathcal{H}$ de cette famille et non à L; l'ensemble des sous-espaces d'appui extrême de P qui contiennent L et non D possède un élément maximal; la démonstration précédente prouve que cet élément maximal est un hyperplan, donc D n'appartient pas à $\mathcal{H}$.

Corollaire 1. — *Toute arête du polaire d'une pyramide propre* P *est engendrée par une forme d'appui extrême de* P; *si* P^0 *est facette d'un de ses points* g, *alors* g *est une forme d'appui strict.*

Démonstration. — Si f est sur une arête de P^0, toute forme qui s'annule sur le sous-espace K engendré par la trace de P sur l'hyperplan F sur lequel s'annule f est proportionnelle à f; comme K est l'intersection des hyperplans d'appui extrême qui le contiennent, F est hyperplan d'appui extrême de P. Si P^0 est facette de g, toutes les formes d'appui de P s'annulent sur le sous-espace K' engendré par la trace de P sur l'hyperplan G sur lequel s'annule g, donc K' est le sommet généralisé de P.

Corollaire 2. — *Le cône d'appui d'une pyramide propre* P *autour d'un sous-espace d'appui extrême* L *est l'intersection des appuis extrêmes qui sont limités par un hyperplan d'appui extrême contenant* L.

En effet la projection P' de P sur un sous-espace E' parallèlement à L est une pyramide propre intersection de ses appuis extrêmes; les hyperplans d'appui extrême de P' sont trace sur E' des hyperplans d'appui extrême de P qui contiennent L.

Corollaire 3. — *L'enveloppe convexe* Π *de l'ensemble des arêtes du polaire d'une pyramide propre est une pyramide convexe.*

Démonstration. — P est le polaire de Π si E^* est muni de la topologie $\sigma(E^*, E)$. Soit $f \in \Pi$, F l'hyperplan sur lequel s'annule f et P' la trace de P sur F. Montrons que *le cône d'appui de* Π *en* f *est l'ensemble des formes* g *qui s'annulent sur un hyperplan* G *dont la trace sur le sous-espace engendré par* P' *est un hyperplan d'appui de* P'; ainsi ce cône d'appui est le polaire de P' et il est fermé pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ donc pour la topologie fine sur E^*.

Lemme. — Π *est l'ensemble des formes* f *telles que* F *contienne un sous-espace d'appui extrême de codimension finie.*

En effet, si $f \in \Pi$, f est combinaison linéaire finie de formes h_i d'appui extrême et F contient le sous-espace intersection des hyperplans d'appui extrême H_i correspondants. Inversement, si F contient le sous-espace d'appui extrême F' de codimension finie, F' est l'intersection d'un ensemble fini d'hyperplans H_i; la projection de P parallèlement à F' est une pyramide convexe de dimension finie et la trace de F est un hyperplan d'appui; la restriction de f au sous-espace engendré par cette pyramide convexe de dimension finie est combinaison linéaire des restrictions des formes h_i qui sont des formes d'appui extrême.

Si g appartient au cône d'appui de P^0 en f, alors $\langle g, x\rangle = 0$ si $\langle f, x\rangle = 0$ avec $x \in P$. Inversement, si g a la propriété énoncée, et si G est l'hyperplan sur lequel s'annule g, la projection de P sur un plan parallèlement à $F \cap G$ est un angle fermé dont O est point extrémal et qui a pour droite d'appui la trace de F; la trace de G est une droite quelconque. Cet angle a une autre droite d'appui D'. Une forme qui s'annule sur l'hyperplan engendré par D' et $F \cap G$ est une forme d'appui de P qui appartient au segment $[f, g]$.

Définition. — Une *pyramide stricte* est une pyramide convexe telle que le cône d'appui autour de *tout* sous-espace soit fermé.

Par exemple toute pyramide dans un espace de dimension finie est une pyramide stricte. L'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces est une pyramide stricte, qui est somme directe d'un sous-espace quelconque et d'une pyramide convexe qui engendre un sous-espace de dimension finie.

Une pyramide stricte est une pyramide propre; tout sous-espace d'appui est l'intersection des hyperplans d'appui qui le contiennent; une pyramide stricte possède un hyperplan d'appui strict [1] donc son polaire est facette d'un de ses points.

PROPOSITION. — *Le polaire d'une pyramide stricte est une pyramide convexe.*

Soit f une forme d'appui de P; le *cône d'appui de* P^0 *en* f *est le polaire de la trace* P′ *de* P *sur l'hyperplan* F *sur lequel s'annule* f. En effet, si g appartient au cône d'appui de P^0 en f, alors g s'annule sur P′ ou y prend des valeurs positives. Inversement, si G est l'hyperplan sur lequel s'annule g, le cône d'appui de P autour de $F \cap G$ a pour trace sur un plan un angle fermé dont O est point extrémal et dont la trace de F est un appui; cet angle a une autre droite d'appui D′ et l'hyperplan engendré par D′ et $F \cap G$ est un hyperplan d'appui H′ de P; une forme h' qui s'annule sur H′ est une forme d'appui de P qui appartient au segment $[f, g]$.

CONJECTURE. — *Toute pyramide stricte est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces.*

5. Polyèdres convexes:

PROPOSITION. — *Soit* E *un espace vectoriel; un polyèdre convexe est un ensemble convexe fermé pour la topologie fine tel que le cône d'appui en chaque point de cet ensemble soit fermé pour la topologie fine.*

Plongeons l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel E_1 somme directe de E et d'un espace à une dimension de sorte que E soit l'hyperplan affine de E_1 ensemble des points x tels que $\langle \omega_0, x \rangle = 1$; E_1 est muni de la topologie fine. Soit E_0 l'hyperplan de E sur lequel s'annule la forme ω_0; on peut compléter E en lui ajoutant les points *impropres* (comme dans le cas de dimension finie II,1) qui correspondent d'une manière biunivoque aux demi-droites d'origine 0 contenues dans E_1; soit

φ l'application biunivoque de E dans l'ensemble des points impropres de E. Le polyèdre convexe C est complété en $\overline{C}$. Dans E_1, le cône convexe de sommet O qui s'appuie sur C est une pyramide convexe. On définit une application biunivoque de P sur $\overline{C}$: l'image par cette application d'une génératrice de P non située dans E_1 est la trace de cette génératrice sur E, qui est un point propre de $\overline{C}$; l'image d'une génératrice D de P située dans E_0 est le point impropre de $\overline{C}$ image par φ de D. *Si le polyèdre convexe* C *n'est pas pseudo-borné,* P *admet un sous-espace d'appui extrême situé dans* E_0. *Si* C *est pseudo-borné,* E_0 *est hyperplan d'appui strict de* P.

Un *simplexe* de E est la trace d'une pyramide simpliciale S de E sur un hyperplan affine parallèle à un hyperplan d'appui strict de S; *un simplexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes et toute facette engendre un sous-espace de dimension finie;* ces deux propriétés sont encore vraies pour tout polyèdre convexe contenu dans un simplexe. Dans un polyèdre convexe pseudo-borné, toute suite convergente de points extrémaux est finie.

Un *polyèdre propre* est un polyèdre convexe tel que le cône d'appui autour de toute variété d'appui extrême soit fermé; c'est l'intersection de ses appuis extrêmes; toute variété d'appui extrême est l'intersection des hyperplans d'appui extrême affines qui la contiennent.

Un *polyèdre strict* est un polyèdre convexe tel que le cône d'appui autour de toute variété soit fermé.

Proposition. — *L'image d'un polyèdre strict par une application affine est fermée. Toute forme linéaire définie sur un polyèdre strict prend des valeurs infinies ou atteint son extremum sur une variété d'appui.*

Démonstration. — Soient f une application affine de l'espace vectoriel E qui contient le polyèdre convexe C dans un espace vectoriel F, P la pyramide convexe de E_1 engendrée par C. L'application f se prolonge d'une manière unique en une application $\overline{f}$ de E_1 dans l'espace vectoriel F_1 somme directe de F et d'un espace à une dimension Re_0'; le noyau de f est le sous-espace vectoriel de E_1 translaté du noyau de f dans E.

L'image de P par $\bar{f}$ peut s'identifier à la projection de P sur un sous-espace vectoriel supplémentaire au noyau de $\bar{f}$. Cette projection est fermée puisque P est une pyramide stricte; l'image de C par f, trace sur F de l'image de P par $\bar{f}$ est donc fermée. Si F est la droite réelle, l'image de C est un segment fermé si f est toujours finie. Soit x un point de C où f atteint son extremum; l'image réciproque par f de cet extremum contient tout segment dont x est point intérieur; c'est une variété d'appui de C.

CONJECTURE. — *Tout polyèdre strict pseudo-borné est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

III. PYRAMIDES TOPOLOGIQUES. APPLICATIONS.

1. Définitions:

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe sur le corps des réels, $\mathfrak{T}$ sa topologie.

DÉFINITION. — Une *pyramide topologique* est l'adhérence (pour $\mathfrak{T}$) d'une pyramide convexe. Un *polyèdre topologique* est l'adhérence d'un polyèdre convexe.

Toute pyramide convexe est une pyramide topologique pour la topologie fine et réciproquement. Toute pyramide de dimension finie est une pyramide topologique. Toute $\mathfrak{T}$-pyramide convexe est une pyramide topologique de E, mais le réciproque est fausse.

Une pyramide simpliciale généralisée (II. 3) est une pyramide topologique de E pour la Ω-topologie sur E, si Ω est l'ensemble incompatible et irréductible associé à S; pour cette topologie, *la pyramide simpliciale généralisée est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes*. Pour des topologies plus fines, ceci n'est plus vrai.

Le polaire d'une pyramide propre qui engendre un espace vectoriel F *est une pyramide topologique pour la topologie* σ (F*, F), adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes. (II, 4); une pyramide topologique de ce type peut ne pas être une pyramide convexe comme le montre l'exemple d'une pyramide simpliciale. Le *polaire d'une pyramide stricte est une pyramide topologique et une pyramide convexe* (II, 4). Le polaire d'un cône convexe peut être une pyramide topologique même si le cône C n'est pas une pyramide convexe : si R_b^I est l'espace des fonctions bornées définies sur l'ensemble I, muni de la topologie fine, le cône C ensemble des fonctions bornées positives n'est pas une pyramide convexe [1], mais son polaire est la pyramide topologique enveloppe fermée convexe pour la topologie $\sigma((R_b^I)^*, R_b^I)$ de l'ensemble $(\omega_i)_{i \in I}$ où ω_i est l'application de R_b^I dans R qui à $(x_i)_{i \in I}$ fait correspondre x_i (en effet l'enveloppe convexe de l'ensemble incompatible $(\omega_i)_{i \in I}$ est une pyramide convexe).

Soit P une pyramide propre dans un espace vectoriel F; supposons que O soit point extrémal de P; si on munit E de la Ω-topologie où Ω est l'ensemble des formes d'appui extrême de P, alors P est fermée. *Pour toute topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la Ω-topologie une pyramide propre est une pyramide topologique et une $\mathcal{T}$-pyramide propre* (car le cône d'appui autour de tout sous-espace d'appui extrême est l'intersection des appuis extrêmes qui contiennent le sous-espace d'appui extrême et il est fermé pour la Ω-topologie. Si on munit E d'une topologie $\mathcal{T}'$ pour laquelle l'intérieur de P n'est pas vide, alors toute forme d'appui extrême de P est continue pour $\mathcal{T}'$ car le demi-espace ouvert qui contient l'intérieur de P pour la topologie fine contient l'intérieur de P pour $\mathcal{T}'$ et est limité par un hyperplan d'appui extrême qui ne peut donc pas être partout dense dans E pour $\mathcal{T}'$. *Une pyramide propre est une pyramide topologique pour toute topologie pour laquelle son intérieur n'est pas vide.*

Une pyramide topologique peut être l'adhérence de plusieurs pyramides convexes : par exemple si S est une pyramide simpliciale généralisée d'un espace vectoriel E, dont l'ensemble des arêtes engendre un sous-espace de codimension 1, le polaire de S est l'adhérence de l'enveloppe convexe de toutes ses arêtes, et aussi l'adhérence de l'enveloppe convexe des arêtes $[O, \omega_i \rightarrow)$ où $(\omega_i)_{i \in I}$ est l'ensemble incompatible et irréductible auquel l'ensemble des arêtes de S est associé : remarquons que toute forme d'appui extrême f qui n'est pas une des formes ω_i est limite d'une famille de ces formes pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.

2. Pyramides simpliciales topologiques.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une pseudo-base topologique d'un espace vectoriel topologique E, associée à l'ensemble $(\omega_i)_{i\in I}$ du dual topologique E′ de E; la trace du cône convexe S, polaire de $(\omega_i)_{i\in I}$ dans E, sur le sous-espace vectoriel Π engendré par $(e_i)_{i\in I}$ contient la pyramide simpliciale S′, enveloppe convexe de l'ensemble $(e_i)_{i\in I}$; S est l'adhérence de S′ pour la $(e_i)_{i\in I}$-topologie sur E; l'adhérence de S′ pour la topologie donnée peut être strictement contenue dans S. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base topologique de E, alors S est l'adhérence de S′ pour la topologie donnée.

Définition. — Une *pyramide simpliciale topologique* d'un espace vectoriel topologique E est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des vecteurs d'une base topologique de E.

Une pyramide simpliciale topologique est l'adhérence d'une pyramide simpliciale qui engendre un sous-espace vectoriel partout dense dans E, mais l'adhérence d'une pyramide simpliciale qui engendre un sous-espace vectoriel partout dense dans E n'est pas toujours une pyramide simpliciale topologique. Une pyramide simpliciale topologique est le polaire de la pseudo-base topologique associée à la base topologique.

Proposition. — *Si $(\omega_i)_{i\in I}$ est l'ensemble incompatible et irréductible dont le polaire est la pyramide simpliciale topologique* S, *et* Ω_i *l'hyperplan sur lequel s'annule* ω_i, *l'adhérence de la facette de tout point x de* S *est l'intersection des hyperplans* Ω_i *qui contiennent x;* S *est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes qui sont engendrées par les vecteurs e_i de la base topologique; l'adhérence d'un sous-espace d'appui extrême* L *est l'intersection des hyperplans* Ω_i *qui contiennent* L.

Démonstration. — Si S′ est la trace de S sur le sous-espace Π engendré par les vecteurs e_i, la facette dans S d'un point x de S′ est la facette de ce point dans S′; la facette d'un tel point engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie et les arêtes de S′ sont arêtes de S. Si x n'appartient pas à S′, sa facette est contenue dans le sous-espace Ω_J intersection des hyperplans $(\Omega_j)_{j\in J}$ qui passent par x; tout vecteur e_k où $k \notin J$ appartient à la facette de x dans S car si y est le point de S de coordonnées $\frac{x_i}{t}$, $\frac{x_k + t - 1}{t}$ où $1 > t > 1 - x_k$, alors x est intérieur au segment $[y, e_k]$; Ω_J, qui est l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs e_k où $k \notin J$ (d'après les propriétés d'une base topologique) est l'adhérence du sous-espace engendré par la facette de x dans S, qui engendre ainsi un sous-espace vectoriel de dimension infinie. L'adhérence de L contient l'adhérence de la facette de tout point x de $L \cap S$ et c'est l'intersection des hyperplans Ω_i qui contiennent L.

Remarque. — La facette de x n'est pas toujours fermée : si E est l'espace $L^2(N)$ des suites de carré sommable $(x_i)_{i \in N}$ muni de la norme hilbertienne et si $x_i = 0$ pour $i \leqslant p$, un point y tel que $y_i = 0$ pour $i \leqslant p$ et $y_i = \frac{ix_i}{2i-1}$ pour $i > p$ appartient encore à $L^2(N)$ mais ce point est adhérent à la facette de x et ne lui appartient pas.

Théorème. — *L'intersection d'une pyramide simpliciale topologique avec un sous-espace fermé de codimension finie est une pyramide topologique enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Démonstration. — Utilisons un raisonnement par récurrence. Soit Π le sous-espace vectoriel engendré par les arêtes de la pyramide simpliciale topologique S qui a pour trace sur Π la pyramide simpliciale S' ; un hyperplan fermé H de E a pour trace sur Π l'hyperplan H' de Π.

1) Si H n'est pas un hyperplan d'appui de S, soit $[O, e_0 \to)$ une arête de S non située dans H. Si $V(x)$ est un voisinage d'un point x de S dans H, la trace, sur le demi-espace ouvert H^+ limité par H et qui ne contient pas e_0, du cône de sommet e_0 qui s'appuie sur $V(x)$ est un voisinage d'un point de S et contient un point z' de S'. La demi-droite $[e_0, z' \to)$ coupe H en un point x' de $S' \cap H$.

2) Si H n'est pas un hyperplan d'appui de S, la trace sur H de S est la pyramide simpliciale topologique S_1 du sous-espace d'appui extrême fermé de S qu'elle engendre et S_1 est l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes, qui sont des arêtes de S.

Supposons que la trace de S sur tout sous-espace fermé de codimension $(k-1)$ soit l'adhérence de la trace de S' sur ce sous-espace. Soit H_k un sous-espace fermé de codimension k et H_{k-1} un sous-espace fermé de codimension $(k-1)$ qui le contient. Si H_k n'est pas un hyperplan d'appui de la trace S_{k-1} de S sur H_{k-1}, on est ramené au cas 1). Si H_k est hyperplan d'appui de S_{k-1}, soit H'_k le sous-espace d'appui extrême fermé de S_{k-1} engendré par la trace S_k de S sur H_k; ce sous-espace est la trace sur H_{k-1} d'un sous-espace d'appui extrême fermé H'' de S; la trace S'' de S sur H'' est une pyramide simpliciale topologique et sa trace sur le sous-espace H'_k de codimension $(k-1)$ dans H'' est l'adhérence de la trace de S' sur ce sous-espace, donc l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes; cette trace est S_k.

Corollaire 1. — *Une pyramide topologique, adhérence d'une pyramide convexe contenue dans le cône convexe engendré par les vecteurs d'une base topologique est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Corollaire 2. — *L'intersection d'une pyramide simpliciale topologique avec un ensemble fini de demi-espaces est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes.*

Corollaire 2. — (*Théorème de Rosenbloom généralisé* [7]) *: L'intersection* C *de la pyramide topologique* S *avec un ensemble fini* $(H_i)_{i \leqslant n}$ *d'hyperplans affines fermés contient un point extrémal. Si* C *est pseudo-borné,* C *est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux qui ont n coordonnées au plus sur les vecteurs de la base topologique différentes de* 0.

Démonstration. — Soit K l'intersection des hyperplans H_i; le sous-espace vectoriel K_1 engendré par K et $\{O\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de codimension n, sur lequel la trace Σ de S est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses arêtes; le sous-espace engendré par la facette d'une de ses arêtes dans S' est de dimension n au plus. La trace sur K d'une arête de Σ est un point extrémal de C. Si C est pseudo-borné, toute arête de Σ coupe K et C est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

3. Applications.

Je ne donnerai que des applications immédiates des résultats précédents à l'analyse.

1) Soit E l'espace des fonctions analytiques réelles sur [O, 1] qui ont un prolongement analytique complexe dans la boule ouverte $|z| < 1$; munissons E de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de [O, 1], pour les fonctions et toutes leurs dérivées. L'ensemble des fonctions e_n où $e_n(x) = x^n$ est une base topologique de E car toute fonction f est somme de la famille $\left(\frac{1}{p!}f^{(p)}(0)\,e_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$. Soit S le cône convexe fermé engendré par les vecteurs e_n; S est une pyramide simpliciale topologique.

Soit g une fonction analytique réelle sur [O, 1] admettant le point 1 comme point singulier ou non, dont toutes les dérivées en O et par suite en tout point de [O, 1] sont positives ou nulles. Alors la fonction g se prolonge analytiquement dans la boule $|z| < 1$ et g appartient à E; une telle fonction est une fonction *absolument monotone* sur [O, 1]. Le cône S est l'ensemble de ces fonctions.

Toute distribution au sens de L. Schwartz à support compact dans [0, 1] induit une forme linéaire canonique sur E. Soit T_i une famille de telles distributions. L'ensemble des fonctions absolument monotones f telles que $T_i(f) \leqslant c_i$ où c_i est une constante, est un polyèdre topologique; s'il est pseudo-borné, il est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux qui correspondent aux polynômes réels à coefficients positifs. Une forme linéaire qui atteint son extremum sur un tel polyèdre topologique l'atteint en un point extrémal.

Exemple. — Cherchons s'il existe une fonction analytique absolument monotone f qui prend en deux points a et b des valeurs a' et b' et qui a une valeur minima en un point c. Supposons $a = 0$, $a' = 0$, $b' > 0$. Si f existe, f sera un point extrémal du polyèdre P intersection de S avec l'ensemble des fonctions de E qui prennent la valeur O en 0 et la valeur b' en b. Ce polyèdre topologique coupe l'arête $[0, e_n \rightarrow)$ au point $g = \frac{b'}{b^n} e_n$. Ainsi $f = \frac{b'}{b}$ si $c > b$ et f n'existe pas si $b > c$.

De même si on cherche en quel point de ce polyèdre topologique P on aura un extremum pour $\int_0^1 f(x)\,dx$, il faudra que $\dfrac{b'}{b^n(n+1)}$ soit extremum, c'est-à-dire que $n = -\dfrac{1}{\mathrm{L}\,b} - 1$. Il en résulte : le *minimum n'est jamais atteint*; *si* $b > \dfrac{1}{e}$, *le maximum est atteint pour la fonction* f *telle que* $f(x) = \dfrac{b'}{b}\,x$; si $b > 1/e$, *le maximum est atteint en une arête au moins de* S (*deux si* $\mathrm{Lb} = -\dfrac{2}{2k+3}$)

2) Soit G un groupe compact abélien, $L^2(G)$ l'espace de Hilbert formé des fonctions à valeur complexes mesurables et de carré sommable, muni du produit scalaire : $(f|g) = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$. L'ensemble $\hat{G}$ des caractères (α_n) sur G est discret et $\hat{G}$ est une famille orthonormale complète (considérée comme appartenant à $L^2(G)$ [5]) Tout élément f de $L^2(G)$ s'écrit :

$$f = \Sigma \hat{f}(\alpha_n)\alpha_n \qquad \text{avec} \qquad \hat{f}(\alpha_n) = \int f(x)\;\overline{(x|\alpha_n)}\,dx.$$

Le cône S formé des éléments f tels que $\hat{f}(\alpha_n) \geqslant 0$ pour tout $\alpha_n \in \hat{G}$ est une pyramide simpliciale topologique; soit P l'intersection de S avec l'ensemble fini de demi-espaces

$$F_i(f) = \int f(x)\overline{F_i(x)}\,dx \leqslant c_i, \quad \text{où} \quad F_i \in L^2(G) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Alors P est l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble de ses points extrémaux, qui sont de la forme : $g = \sum_1^k \hat{g}(\alpha_n)\alpha_n$. Pour les obtenir explicitement nous écrirons :

$$F_i(f) = \sum_1^k \hat{g}(\alpha_n) \int \overline{F_i(x)}\;(x|\alpha_n)\,dx = \sum_1^k \hat{g}(\alpha_n)\widehat{F}_i(\alpha_n) \leqslant c_i$$

ce qui permet de déterminer $\hat{g}(\alpha_n)$ et par suite g. D'où :

Proposition. — *Tout point de* P *est limite d'une suite d'éléments de la forme* $\sum_1^k a_n \hat{F}_i(\alpha_n)$. *En particulier, si* $G = [0, 1]$, *tout élément de* P *est de la forme* $\sum_1^k a_n \int \overline{F_n(x)} e^{2i\pi nx}\,dx$.

On peut ainsi retrouver les résultats de Bernstein.

3) Si G est un groupe abélien localement compact, soit E l'ensemble des éléments de $L^2(G)$ qui sont des fonctions presque périodiques à gauche [5]. Une telle fonction est limite de combinaisons linéaires finies de caractères de G et le raisonnement précédent s'applique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bastiani et C. Ehresmann, Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet, *C.R. Ac. Sc.* 1959, t. 248, p. 2695-2697.

[2] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologique*, Ch. I et II, Hermann, Paris, 1953.

[3] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. III, IV, V, Hermann, Paris, 1955.

[4] G. Choquet, Convergences, *Ann. Un. Grenoble*, t. XXIII, 1948, p. 57-111.

[5] L.H. Loomis, An introduction to abstract Harmonic Analysis, *The Un. Series in Higher Mathematics.*

[6] Mirkil, *Jour. Canadien de Mathématiques*, 1957-1, p. 1-4.

[7] P. Rosenbloom, Quelques classes de problèmes extrémaux, *Bull. Soc. Math. France*, 1951, t. 79, p. 1-58.