ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-LUC BRYLINSKI

Théorie du corps de classes de Kato et revêtements abéliens de surfaces

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 3 (1983), p. 23-38

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_3_23_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1983), 23-38

THÉORIE DU CORPS DE CLASSES DE KATO ET REVÊTEMENTS ABÉLIENS DE SURFACES

par Jean-Luc BRYLINSKI

Introduction.

Soit K un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel fini. Supposons K de caractéristique p. La théorie du corps de classes local fournit dans ce cas, pour tout entier r, une forme bilinéaire non dégénérée

$$K^*/(K^*)^{p^r} \otimes W_r(K) \bmod (\mathcal{F} - I)\, W_r(K) \longrightarrow \mathbf{Z}/p^r$$

où $W_r(K)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de longueur r. On peut filtrer K^* par des sous-groupes $U_K^{(n)}$. On détermine ici la filtration duale sur $W_r(K)$, en employant un procédé de calcul de cette forme bilinéaire dû à Kato. On en déduit la valeur du conducteur d'Artin d'une extension de Witt-Artin-Schreier de K.

Ensuite, on étudie un revêtement de Witt-Artin-Schreier d'une surface sur un corps fini, au voisinage d'un point où le lieu de ramification du revêtement est lisse. Utilisant la théorie du corps de classes de Kato, on majore le conducteur d'Artin de la restriction du revêtement à un germe de courbe transverse au lieu de ramification et on donne un théorème de jet suffisant pour ce conducteur d'Artin. On termine par le calcul de ce conducteur d'Artin dans le cas d'une extension de groupe $\mathbf{Z}/p^2$.

Je suis heureux de remercier Pierre Deligne et Gérard Laumon pour d'instructives discussions, ainsi que les participants d'un groupe de travail sur la théorie de Kato (et de Parshin) qui s'est réuni à l'Ecole Normale Supérieure en 1978-1979, en particulier Christophe Soulé qui en a été l'animateur. Je suis très reconnaissant à Kazuya

Kato de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce petit travail et de m'avoir communiqué son manuscrit de [1] dès avril 1981.

1. Extensions de Witt-Artin-Schreier d'un corps local (de dimension 1).

Soit K un corps complet pour une valuation discrète v, de caractéristique p, de corps résiduel k. Pour r un entier $r \geqslant 1$, on considère l'anneau $W_r(K)$ des vecteurs de Witt de longueur r; on écrit un élément de $W_r(K)$ sous la forme $(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$. Les lois d'addition et de multiplication sont données par certains polynômes à coefficients entiers [cf. 4, chapitre II § 6].

On se donne un isomorphisme entre K et $k((t))$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout entier* $m \in \mathbf{Z}$, *les éléments* $(x_0, \ldots, x_{r-1})$ *de* $W_r(K)$ *tels que* $v(x_i) \geqslant p^{i-r+1}.\, m$ *pour tout* $i \in [0, \ldots, r-1]$ *forment un sous-groupe* $W_r^{(m)}(K)$ *de* $W_r(K)$. *Les groupes* $W_r^{(m)}(K)$ *forment une filtration décroissante de* $W_r(K)$ *qui est exhaustive et séparée. Le groupe quotient* $W_r^{(m)}(K)/W_r^{(m+1)}(K)$ *est engendré par les éléments de la forme*

$$(0, \ldots, x_i = \lambda \,.\, t^{p^{i-r+1}m}, 0, \ldots, 0)$$

avec $i \in [0, \ldots, r-1]$ *tel que* $\dfrac{m}{p^{r-1-i}}$ *soit entier, et* $\lambda \in k$.

Supposons de plus k parfait.

Soit $\mathcal{F} : W_r(K) \longrightarrow W_r(K)$ le relèvement canonique de l'endomorphisme de Frobenius de K. On munit le groupe $W_r(K)/(\mathcal{F} - I)(W_r(K))$ de la filtration quotient notée $W_r^{(m)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)$. Pour $m > 0$, le groupe

$$W_r^{(m)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)/W_r^{(m+1)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)$$

est nul.

Pour $m = 0$, on a un isomorphisme :

$$[k/(F - I)(k)]^r \xrightarrow{\approx} W_r^{(0)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)/W_r^{(1)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)$$

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1}) \longrightarrow \text{classe de } (\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1}).$$

Pour $m < 0$, le groupe est nul si la valuation p-adique de m est au moins égale à r. Si la valuation p-adique de m est $r-1-i$ avec $i \geqslant 0$, on a un isomorphisme :

$$k \xrightarrow{\approx} W_r^{(m)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I)/W_r^{(m+1)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I)$$

$$\lambda \longrightarrow \text{classe de } (0, \ldots, \underset{i\text{-ème place}}{\lambda \,.\, t^{m/p^{r-1-i}}}, 0, \ldots, 0).$$

Démonstration. – L'addition dans $W_r(K)$ étant donnée par la formule :

$$(a_0, \ldots, a_{r-1}) \dot{+} (b_0, \ldots, b_{r-1}) = (S_0(a_i, b_i), S_1(a_i, b_i), \ldots, S_{r-1}(a_i, b_i))$$

nous faisons la remarque suivante

LEMME 1. – *Si on munit $\mathbf{Z}[a_0, \ldots, a_{r-1}, b_0, \ldots, b_{r-1}]$ de la graduation pour laquelle a_i et b_i sont de poids p^i, $S_j(a_0, \ldots, b_{r-1})$ est un polynôme homogène de degré p^j.*

Si donc $(x_0, \ldots, x_{r-1})$ et $(y_0, \ldots, y_{r-1})$ sont dans $W_r^{(m)}(K)$, $S_j(x_0, \ldots, y_{r-1})$ est somme de monômes en les x_i et les y_i, tous de valuation au moins égale à $m \,.\, p^{-r+1+j}$. On a donc $(x_0, \ldots, x_{r-1}) \dot{+} (y_0, \ldots, y_{r-1}) \in W_r^{(m)}(K)$. Ceci montre que $W_r^{(m)}(K)$ est un sous-groupe de $W_r(K)$, compte tenu du fait que $-x = (p^r - 1) \,.\, x$ dans ce groupe.

Il est alors évident que $W_r^{(m)}(K)/W_r^{(m+1)}(K)$ est engendré par les éléments du type $(0, \ldots, x_i = \lambda \,.\, t^{m/p^{r-1-i}}, 0, \ldots, 0)$ avec $\dfrac{m}{p^{r-1-i}}$ entier, $\lambda \in k$.

Si p divise m/p^{r-1-i}, l'élément $\lambda \,.\, t^{m/p^{r-1-i}}$ est en fait dans K^p (on utilise l'hypothèse que k est parfait). Supposant alors $m < 0$, l'élément considéré est donc dans

$$W_r^{(m+1)}(K) + (\mathcal{P} - I)\, W_r^{(m)}(K).$$

Ceci montre que $W_r^{(m)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I)/W_r^{(m+1)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I)$ est engendré par les éléments du type plus haut, avec $r - 1 - i = v_p(m)$. Il est alors immédiat que $\lambda \longmapsto (0, \ldots, \lambda \,.\, t^{m/p^{r-1-i}}, 0, \ldots, 0)$ est un isomorphisme de k sur

$$W_r^{(m)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I)/W_r^{(m+1)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I).$$

Pour $m = 0$, on note que

$$\mathcal{P}(x_0, \dots x_{r-1}) - (x_0^p, \dots, x_{r-1}^p) \in W_r^{(1)}(K).$$

On a un homomorphisme

$$k^r \longrightarrow W_r^{(0)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I)/W_r^{(1)}(K) \bmod (\mathcal{P} - I)\ ,$$

et d'après ce qu'on vient de voir, il s'annule sur les éléments de la forme $(x_0^p - x_0, \dots, x_{r-1}^p - x_{r-1})$. Il est immédiat qu'on obtient l'isomorphisme de l'énoncé. La fin de la démonstration consiste à montrer que $W_r^{(1)}(K) \subset (\mathcal{P} - I) W_r(K)$, le cas $r = 1$ résulte du lemme de Hensel, et de là on effectue une récurrence triviale.

Nous allons appliquer cette construction à la théorie du corps de classes (local) pour K, en supposant donc k fini. La construction fondamentale de cette théorie est l'homomorphisme de réciprocité :

$$\varphi_K : K^* \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

qui identifie le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale K^{ab}, de K à la limite projective des quotients de K^* par des sous-groupes fermés d'indice fini (voir [4, XIII, § 4 et XIV, § 6]. Pour tout m, l'homomorphisme

$$\varphi_K \otimes 1 : K^* \otimes (Z/m) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \otimes (Z/m)$$

est un isomorphisme de groupes topologiques. Par ailleurs, pour $m = p^r$, on sait que le dual de Pontryagin de $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \otimes (Z/p^r)$ est isomorphe à $W_r(K)/(\mathcal{P} - I) W_r(K)$ (c'est une généralisation de la théorie d'Artin-Schreier [4, X, § 3]).

D'où un accouplement continu :

$$\text{(WI)} \quad [K^* \otimes (Z/p^r)] \otimes W_r(K)/(\mathcal{P} - I) W_r(K) \longrightarrow \mathbf{Z}/p^r$$

qui identifie chacun des deux groupes au dual de Pontryagin de l'autre. On a la filtration de $K^* \otimes (\mathbf{Z}/p^r)$ induite par la filtration de K^* par les sous-groupes $U_K^{(n)} = \{x \text{ tq} x = 1 \bmod t^n\}$.

THEOREME 1. – *Pour la forme bilinéaire* WI, *l'orthogonal de* $U_K^{(n)}$ *est l'image de* $W_r^{(-n+1)}(K)$ *dans* $W_r(K)/(\mathcal{P} - I) W_r(K)$, *pour tout entier* $n \geq 1$.

COROLLAIRE. – *Soit* $m \geq 0$. *Si*

$$(x_0, \dots, x_{r-1}) \in W_r^{(-m)}(K), (x_0 \dots, x_{r-1}) \notin W_r^{(1-m)}(K),$$

le conducteur d'Artin de l'extension de Witt-Artin-Schreier définie par $(x_0, \dots, x_{r-1})$ *est égal à* $m + 1$.

Pour déduire le corollaire du théorème, il suffit d'appliquer [4, VI, § 2]. La démonstration du théorème requiert la description de la forme bilinéaire WI donnée par Kato. Cet auteur introduit le corps $K((T))$ et le complété $\hat{K}_2(K((T)))$ de son groupe K_2 de Milnor, pour la filtration définie par les sous-groupes V_n engendrés par les symboles (x, y) avec $x = 1 \bmod. T^n$.

Comme $K((T))$ est le complété pour la topologie T-adique du corps des fractions M de l'anneau $O_K[[T]]$, on a.

$$\hat{K}_2(K((T))) = \hat{K}_2(M).$$

Soit alors σ l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de $O_K[[T]]$, différents de l'idéal (T). Pour $\mathfrak{P} \in \sigma$, on note $\kappa(\mathfrak{P})$ le corps des fractions de $O_K[[T]]/\mathfrak{P}$. D'après Milnor, [2, § 2] on a un homomorphisme :

$$\partial_{\mathfrak{P}} : K_2(M) \longrightarrow K_1(\kappa(\mathfrak{P})) = \kappa(\mathfrak{P})^*.$$

L'extension $k(\mathfrak{P})$ de $k((T))$ est finie, d'où un homorphisme

$$\Delta_{\mathfrak{P}} : K_2(M) \xrightarrow{\partial_{\mathfrak{P}}} \kappa(\mathfrak{P})^* \xrightarrow{N} k((T))^*.$$

Kato donne un sens à la définition $\operatorname{res}(x) = \prod_{\mathfrak{P} \in \sigma} \Delta_{\mathfrak{P}}(x), x \in K_2(M)$ et montre que ceci définit un homomorphisme res de $\hat{K}_2(M)$ vers $k((T))^*$, qu'on peut appeler *résidu de Kato* (voir [1]).

Pour en déduire WI, il faut introduire l'exponentielle de Artin-Hasse [cf. 5, V, § 16]. Pour tout corps L de caractéristique p, on considère l'application $E_i : L \longrightarrow L(T))^*$ telle que

$$E_i(x) = \prod_{(n,p)=1} (1 - (x \cdot T^{(p^i)})^n)^{\mu(n)/n}$$

où μ (–) est la fonction de Möbius.

Si $W(L)$ est l'anneau des vecteurs de Witt (de longueur infinie) sur L, l'application

$$E : W(L) \longrightarrow L((T))^*$$

$$(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots) \longrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} E_i(x_i)$$

est un homomorphisme d'anneaux. Pour r entier $\geqslant 0$, soit $T^{(r)}(L)$

l'image par E de l'ensemble des éléments de $W(L)$ satisfaisant $x_i = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$.

On a donc un homomorphisme induit de $W_r(L)$ vers $L((T))^*/T^{(r)}(L)$. Pour $L = \mathbf{F}_p$, on en déduit un isomorphisme de $W_r(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/p^r$ vers $\mathbf{F}_p((T))^*/T^{(r)}(\mathbf{F}_p)$. Ceci dit, pour calculer $WI(\overline{F} \otimes \overline{(x_0, \ldots, x_{r-1})})$ avec $F \in K^*$, $(x_0, \ldots, x_{r-1}) \in W_r(K)$ (on dénote par une barre en haut leurs images dans des groupes quotients), on forme l'élément

$$\left(\prod_{i=0}^{r-1} E_i(x_i), y\right) \quad \text{de} \quad K_2(K((T))$$

on lui applique res pour trouver un élément de $k((T))^*$, on applique la norme de $k((T))$ à $\mathbf{F}_p((T))$ pour trouver un élément de $\mathbf{F}_p((T))^*$ et on prend son image dans $\mathbf{F}_p((T))^*/T^{(r)}(\mathbf{F}_p)$, d'où un élément de $\mathbf{Z}/p^r$ (cf. [1, §4]). A ce stade, une écriture plus ramassée de la forme bilinéaire (WI) ne s'impose pas.

Nous utilisons le résidu de Kato pour le calcul suivant :

PROPOSITION 2. — *Pour* m *et* n *deux entiers positifs, avec* $m \leqslant n$ *et* $V_p(m) = r-1-i, i \leqslant 0$ *on considère l'application*

$k \times k \longrightarrow \mathbf{Z}/p^r$

$\lambda \otimes \lambda' \longrightarrow WI[(1 + \lambda t^n) \otimes (0, \ldots, x_i = \lambda' . t^{-m/p^{r-1-i}}, 0, \ldots, 0)]$.

C'est une forme bilinéaire qui est nulle pour $m < n$, *non-dégénérée pour* $m = n$.

Démonstration. — On posera $m' = + m/p^{r-1-i}$. Par construction, m' est premier à p. On doit d'abord calculer le résidu de l'élément $(E_i(\lambda' . t^{-m'}), 1 + \lambda t^n)$ de $\hat{K}_2(L((T))$. D'après les propriétés de continuité de res [1, § 1], on a :

$$\operatorname{res}(E_i(\lambda' . t^{-m'}), 1 + \lambda t^n)$$
$$= \prod_{(a,p)=1} [\operatorname{res}(1 - (\lambda' . t^{-m'} . T^{(p^i)})^a, 1 + \lambda t^n)]^{\mu(a)/a}.$$

Pour calculer chacun de ces résidus, il n'est pas gênant (pour a fixé) de faire une extension finie de k (et de K) pour se ramener au cas où les racines d'ordre a de l'unité sont dans k. On peut alors écrire

$$1 - (\lambda' . t^{-m'} . T^{p^i})^a = \prod_{\zeta^a = 1} [1 - \zeta \lambda' . t^{-m'} . T^{p^i}].$$

Le diviseur $\mathcal{P}_\zeta$ de $O_K[[T]]$, d'équation $1 - \zeta\lambda' . t^{-m'} . T^{p^i}$ est un diviseur premier de hauteur 1, puisque m' est premier à p.

On a donc $\partial_{\mathcal{P}_\zeta}(1 - \zeta\lambda' . t^{-m'} . T^{p^i}, 1 + \lambda t^n) = 1 + \lambda t^n$.

Le corps $\kappa(\mathcal{P}_\zeta)$ est une extension de degré m' de $k((T))$, engendrée par l'élément t tel que $t^{+m'} = \zeta\lambda' . T^{p^i}$. Un calcul facile montre que

$$N_{\kappa(\mathcal{P}_\zeta)/k((T))}(1 + \lambda t^n) = (1 + \lambda^{-m'/d} . \zeta^{n/d} . \lambda'^{n/d} . T^{p^i \frac{n}{d}})^d$$

où d est le p.g.c.d. de m' et de n. Les diviseurs $\mathcal{P}_\zeta$(pour $\zeta^a = 1$) sont les seuls qui ont une contribution non nulle au résidu.

On a donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(1 - (\lambda' . t^{-m'} . T^{p^i})^a, 1 + \lambda t^n) \\ = \prod_{\zeta^a = 1} (1 + \lambda^{-m'/d} . \zeta^{n/d} . \lambda'^{n|d} . T^{p^i \frac{n}{d}})^d .\end{aligned}$$

Soit alors b le p.g.c.d. de a et de $\frac{n}{d}$. Le produit ci-dessus vaut :

$$\left(1 + \lambda^{-\frac{am'}{bd}} . \lambda'^{\frac{an}{bd}} . T^{\frac{ap^i n}{bd}}\right)^{bd} .$$

On a $\operatorname{res}(E_i(\lambda' . t^{-m'}), 1 + \lambda t^n)$

$$= \prod_{(a,p)=1} \left[1 + \lambda^{-\frac{am'}{bd}} . \lambda'^{\frac{an}{bd}} . T^{\frac{ap^i n}{bd}}\right]^{\mu(a)bd/a}$$

Supposons maintenant $n \geqslant +m = p^{r-1-i}m'$. Alors

$\frac{a p^i n}{bd} \geqslant \frac{a}{b} . p^i . \frac{n}{m'} \geqslant \frac{a}{b} . p^{r-1} \geqslant p^{r-1}$ et l'inégalité a lieu si et seulement si $\frac{a}{b} = 1$ et $\frac{n}{m'} = p^{r-1-1}$. Si donc $n > +m$, on a

$\operatorname{res}(E_i(\lambda' . t^{-m'}), 1 + \lambda . t^n) \equiv 1 \bmod T^{p^{r-1}+1}$. La norme de cet élément est dans $\mathbf{F}_p((T))^*$, un élément de l'image de E congru à un modulo $T^{p^{r-1}+1}$, donc un élément de $T^{(r)}(\mathbf{F}_p)$; son image dans $\mathbf{Z}/p^r$ est donc nulle. Si maintenant on a $n = m$, dans le calcul de $\overline{WI(1 + \lambda t^n, (0, \ldots, \lambda' . t^{-m'}, 0, \ldots, 0))}$, seuls comptent les termes tels que $a = b$, donc a divise $\frac{n}{d} = p^{r-1-i}$, donc $a = 1$ puisque a est premier à p. On a donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(E_i(\lambda'.t^{-m'}), 1+\lambda t^n) &\equiv (1+\lambda\lambda'^{p^{r-1-i}}.T^{p^{r-1}})^{m'} \\ &\equiv (1+m'\lambda\lambda'^{p^{r-1-i}}.T^{p^{r-1}}) \bmod (T^{p^{r-1}+1}).\end{aligned}$$

D'où immédiatement :

$$\overline{\mathrm{WI}(1+\lambda t^n}, \overline{(0,\ldots,\lambda'.t^{-m'},\ldots 0)} = p^{r-1}\, m'\, \mathrm{Tr}_{k/\mathbf{F}_p}(\lambda\lambda'^{p^{r-1-i}}) .$$

Comme m' est premier à p, et la trace une forme bilinéaire non dégénérée sur k, la proposition est établie.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème 1. D'après la proposition 2 et le fait que WI est non dégénérée, il suffit de montrer que pour tout $n \geqslant 0$, les groupes $(K^*/U_K^{(n)}) \otimes (\mathbf{Z}/p^r)$ et $W_r^{(-n+1)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)$ sont finis de même cardinal.

Pour $n = 1$, ces deux groupes sont isomorphes à $\mathbf{Z}/p^r$ (voir la proposition 1). Il suffit alors de montrer que pour $n \geqslant 1$, les groupes $[U_K^{(n-1)}/U_K^{(n)}] \otimes (\mathbf{Z}/p^r)$ et

$$W_r^{(-n+1)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)/W_r^{(-n+2)}(K) \bmod (\mathcal{F} - I)$$

ont même cardinal. Un calcul direct, analogue à celui de [6, § 1.7] montre que le premier est de cardinal $\# k$ si $v_p(n-1) \leqslant r-1$ et 0 si $v_p(n-1) \geqslant r$.

Il en est de même du deuxième groupe d'après la proposition 1, et le fait que le conoyau de l'opération $x \longrightarrow F.x - x$ du corps fini k est d'ordre p. Ceci prouve le théorème.

2. Etude locale d'un revêtement de Witt-Artin-Schreier d'une surface sur un corps fini.

On se donne un corps fini k, une surface X lisse, sur k de corps de fonctions K. On considère un revêtement de Witt-Artin-Schreier de X, définie par un vecteur de Witt $(x_0, \ldots, x_{r-1}) \in W_r(K)$. On note $\chi : \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \longrightarrow \mathbf{Z}/p^r$ le caractère que définit ce vecteur de Witt.

LEMME 2. — *Pour* D *une courbe irréductible sur* X, *si le caractère* χ *est ramifié le long de* D, *il existe* i *tel que la valuation* $v_D(x_i)$ *soit strictement négative.*

C'est une conséquence immédiate du lemme de Hensel.

On choisit maintenant un point x de X, tel que le lieu de ramification de χ soit lisse en x. On note D_0 la composante de ce lieu qui contient x. Soit A_x le complété de l'anneau local de X en x, K_x son corps des fractions. Soit D un diviseur irréductible de $\mathrm{Spec}(A_x)$, $A_{x,D}$ le complété de A_x pour la topologie définie par l'idéal J_D de D. C'est un anneau de valuation discrète dont un générateur t de J_D est une uniformisante. Le corps résiduel de $A_{x,D}$ est le corps $k(D)_x$, complété en x du corps $k(D)$ des fonctions rationnelles sur la courbe D. On note $K_{x,D}$ le corps des fractions de $A_{x,D}$. C'est le type même d'un corps local de dimension 2, au sens de Kato [1, § 4] et de Parshin [3]. C'est un corps isomorphe à $k((u))((t))$.

Kato a défini une application de réciprocité :

$$\Phi_{x,D} : K_2(K_{x,D}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{x,D}^{ab}/K_{x,D})$$

qui lui permet de généraliser à la dimension 2 la théorie du corps de classes. Nous avons besoin des deux faits suivants :

(i) Le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_2(K_{x,D}) & \xrightarrow{\Phi_{x,D}} & \mathrm{Gal}(K_{x,D}^{ab}/K_{x,D}) \\ \delta\downarrow & & \downarrow\omega \\ K_1(k(D)_x) & \xrightarrow{\varphi_{k(D)x}} & \mathrm{Gal}(k(D)_x^{ab}/k(D)_x) \end{array}$$

où δ est le bord en K-théorie algébrique, déjà utilisé au § 1, ω l'homomorphisme déduit du fait que $k(D)_x$ est le corps résiduel de $K_{x,D}$, et $\varphi_{k(D)_x}$ l'application de réciprocité pour le corps local $k(D)_x$.

(ii) Pour tout diviseur D de $\mathrm{Spec}(A_x)$, on considère le caractère $\chi_{x,D}$ de $\mathrm{Gal}(K_{x,D}^{ab}/K_{x,D})$ déduit de χ. Pour $u, v \in K_x^*$, on a $\chi_{x,D} \circ \Phi_{x,D}(u,v) = 1$ sauf pour un nombre fini de courbes D et de plus :

$$\boxed{\prod_{\substack{D \text{ courbe} \\ \text{de } \mathrm{Spec}(A_x)}} \chi_{x,D} \circ \Phi_{x,D}(u,v) = 1}$$

Ceci est la *loi de réciprocité de Parshin,* que cet auteur a énoncée dans [3]. On pose $\omega_D = \chi_{x,D} \circ \Phi_{x,D}$: c'est un caractère de $K_2(K_{x,D})$, pour D une courbe de $\mathrm{Spec}(A_x)$.

LEMME 3. – (i) *Pour toute courbe* D *de* $\mathrm{Spec}(A_x)$, *distincte de* D_0, *le caractère* $\chi_{x,D}$ *se factorise par un caractère de* $\mathrm{Gal}(k(D)_x^{ab}/k(D)_x)$.

(ii) ω_{D_0} *s'annule sur le sous-groupe de* $K_2(K_{x,D_0})$ *engendré par les symboles* (u, v) *avec* $u, v \in A_x[t^{-1}]^*$ *(où* t *est une équation locale de* D_0*).*

Démonstration. – (i) traduit le fait que χ est non ramifié le long de toute courbe de $\mathrm{Spec}(A_x)$ distincte de D_0. Si maintenant $u, v \in A_x(t^{-1})^*$, on a $0 = v_D(u) = v_D(v)$ pour une telle courbe D, donc $\omega_D(u, v) = 1$.

La loi de réciprocité donne alors : $\omega_{D_0}(u, v) = 1$.

PROPOSITION 3. – *Soit* D *une courbe de* $\mathrm{Spec}(A_x)$ *distincte de* D_0, *et* χ_D *le caractère de* $\mathrm{Gal}(k(D)_x^{ab}/k(D)_x$ *défini dans le lemme 3. Soit* $g \in A_x$ *une équation de* D, *et soit* $u \in A_x$, *dont l'image dans* $k(D)_x$ *est notée* $\bar{u}$.

On a : $$\boxed{\chi_D \circ \varphi_{K(D)_x}(\bar{u}) = \omega_{D_0}(g, u)^{-1}}$$

Démonstration. – On applique la loi de réciprocité au couple (g, u). On a $\chi_D \circ \varphi_{k(D)_x}(\bar{u}) = \omega_D(g, u)$ d'après la commutativité du diagramme (i). Si D' est une courbe de $\mathrm{Spec}(A_x)$ distincte de D_0 et de D, on a $0 = v_{D'}(g) = v_{D'}(u)$, donc $\omega_{D'}(g, u) = 0$ d'après le lemme 3. La loi de réciprocité donne

$$\begin{aligned} \chi_D \circ \varphi_{k(D)_x}(\bar{u}) &= \omega_D(g, u) \\ &= \omega_{D_0}(g, u)^{-1}. \end{aligned}$$

Soit $K_2(K_{x,D_0})^{(n)}$ (pour $n \geqslant 0$) le sous-groupe de $K_2(K_{x,D_0})$ engendré par les symboles (u, v) avec

$$u \in 1 + t^n . A_{x,D_0}, v \in K^*_{x,D_0}.$$

COROLLAIRE. – *Si* ω_{D_0} *s'annule sur* $K_2(K_{x,D_0})^{(n)}$, *alors pour toute courbe* D *de* $\mathrm{Spec}(A_x)$ *distincte de* D_0, $\chi_D \circ \varphi_{k(D)_x}$ *s'annule sur le groupe* $U_{k(D)_x}^{(n)}$, *donc le conducteur d'Artin de* χ_D *est au plus égal à* n.

C'est clair.

THEOREME 2. – *Supposons que* $(x_0, \ldots, x_{r-1})$ *soit dans* $W_r^{(-m)}(K_{x,D_0})$. *Alors* ω_{D_0} *s'annule sur* $K_2(K_{x,D_0})^{(m+1)}$.

Démonstration. – Nous ferons usage des notations et constructions de Kato [1, § 4]. On choisit un isomorphisme $A_{x,D_0} \simeq k((u))[[t]]$, d'où $K_{x,D_0} \simeq k((u))((t))$. On considère un élément de $K_2(K_{x,D_0})^{(m+1)}$ de la forme (g, h) avec $g = 1 \bmod t^{m+1}. A_{x,D_0}$. On doit former l'élément $\left(\prod_{i=0}^{r-1} E_i(x_i), g, h\right)$ de $\hat{K}_3(K_{x,D_0}((T)))$, lui appliquer l'opération "résidu de Kato $\mathrm{res}^{(2)}$" pour trouver un élément de $\hat{K}_2(k(D_0)_x((T)))$, puis une nouvelle opération "résidu de Kato $\mathrm{res}^{(1)}$" pour trouver un élément de $\hat{K}_1(k((T))) = k((T))^*$. Ensuite on procède comme au § 1 pour trouver un élément de $\mathbf{Z}/p^r$ qui n'est autre que $\omega_{D_0}(g,h)$. Pour que cet élément soit nul, il suffit que l'élément trouvé dans $k((T))^*$ soit congru à 1 modulo $T^{(p^{r-1}+1)}$. Il suffit pour cela, d'après [loc. cit, theorem 1] de montrer que $\mathrm{res}^{(2)}\left(\prod_{i=0}^{r-1} E_i(x_i), g, h\right)$ est dans $\hat{K}_2(k(D_0)_x((T)))^{(p^{r-1}+1)}$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de hauteur 1 de $A_{x,D_0}[[T]]$, distinct de (T). Le corps $\kappa(\mathfrak{P})$ est une extension finie de $k(D_0)_x((T))$. On peut montrer que la norme de $\hat{K}_2(\kappa(\mathfrak{P}))^{(q)}$ est contenue dans $\hat{K}_2(k(D_0)_x((T)))^{(q)}$ pour tout entier q (voir [1, Prop. 2]). D'après la construction de $\mathrm{res}^{(2)}$, il suffit de montrer que pour un tel diviseur $\mathfrak{P}$ on a :

$$\delta_{\mathfrak{P}}\left(\prod_{i=0}^{r-1} E_i(x_i), g, h\right) \in \hat{K}_2(\kappa(\mathfrak{P}))^{(p^{r-1}+1)}$$

où $\delta_{\mathfrak{P}} : \hat{K}_3(K_{x,D_0}((T))) \longrightarrow \hat{K}_2(\kappa(\mathfrak{P}))$ est le bord en K-théorie de Milnor construit par Bass et Tate.

Pour ce faire, il suffit de considérer chaque $E_i(x_i)$ modulo le groupe des unités de $K_{x,D_0}((T))$ congrues à 1 modulo $T^{p^{r-1+1}}$. On peut donc remplacer $E_i(x_i)$ par $\prod_{\substack{(n,p)=1 \\ n \leqslant p^{r-1-i}}} \left(1-\left(x_i T^{p^i}\right)^n\right)^{\mu(n)/n}$.

Un diviseur $\mathcal{R}$ qui interviendra non trivialement dans le calcul du résidu aura une équation du type $x_i . T^{p^i} = \zeta$, avec $\zeta^b = 1$, pour b convenable, premier à p et i tel que $v_{D_0}(x_i) < 0$. Pour que ce diviseur soit premier, il faut et il suffit que x_i ne soit pas un élément de K^p_{x,D_0}, ce que nous supposerons provisoirement. Le fait que $(x_0, \ldots, x_{r-1})$ soit dans $W_r^{(-m)}(K_{x,D_0})$ implique que $p^{r-1-i} . (-v_{D_0}(x_i)) \leqslant m$. Comme g est congru à un modulo $t^{m+1} . A_{x,D_0}$, on peut écrire :

$$g = 1 + \left(\frac{1}{x_i}\right)^{p^{r-1-i}} ty, \text{ avec } y \in A_{x,D_0}.$$

On a alors $\delta_{\mathfrak{r}}(E_i(x_i), g, h) = (\overline{g}, \overline{h})$, où $\overline{g}$ et $\overline{h}$ sont les images de g et h dans $\kappa(\mathcal{R})$.

Or $\overline{g} = 1 + \zeta^{pi-r+1} . T^{p^{r-1}} \overline{t} . \overline{y}$, puisque $x_i . T^{p^i} = \zeta$ dans $\kappa(\mathcal{R})$.

De plus, $\overline{t}$ est de valuation > 0 dans $\kappa(\mathcal{R})$ puisque x_i est de valuation < 0 et $\overline{y}$ est de valuation $\geqslant 0$ (c'est une fonction régulière sur la surface $\mathrm{Spec}(A_{x,D_0}[[T]])$). Ceci montre que $\delta_{\mathfrak{r}}(E_i(x_i), g, h)$ est dans $\hat{K}_2(\kappa(\mathcal{R}))^{(p^{r-1+1})}$. Le cas où $x_i \in K^p_{x,D_0}$ se traite en remplaçant le diviseur $\mathcal{R}$ par le diviseur $y_i . T^{p^{i-a}} = \zeta$, où a est le plus grand entier tel que $x_i \in K^{(p^a)}_{x,D_0}$ et $y_i = x_i^{(p^{-a})}$.

On obtient alors une congruence encore meilleure. Dans tous les cas, on a donc trouvé la congruence voulue, et le théorème 2 en découle.

Soit E l'ensemble des diviseurs Δ de $\mathrm{Spec}(A_x)$ pour lesquels il existe i tel que $v_\Delta(x_i) \neq 0$.

COROLLAIRE. — *Supposons les nombres* $v_{D_0}(x_i)$ *positifs ou premiers à* p *et supposons* $E = \{D_0\}$. *Alors le plus petit entier* m *tel que* ω_{D_0} *s'annule sur* $K_2(K_{x,D_0})^{(m)}$ *est égal au conducteur d'Artin du caractère* χ_D, *pour toute courbe* D *de* $\mathrm{Spec}(A_x)$ *transverse à* D_0.

Démonstration. – D'abord, le théorème dit que m est fini, et entraîne que $\chi_D \circ \varphi_{k(D)_x}(1 + \overline{h}\,\overline{t}^m) = \omega_{D_0}(g, 1 + h\,t^m)^{-1} = 1$ pour D une courbe irréductible d'équation g de $\mathrm{Spec}(A_x)$, et pour $h \in A_x$.

En particulier, χ_D est de conducteur d'Artin au plus égal à m. Sous les hypothèses du corollaire, le vecteur de Witt $(x_0, \ldots, x_{r-1})$ est dans $W_r^{(-m+1)}(K_{x, D_0})$. De plus, pour toute courbe D transverse à D_0, le vecteur de Witt $(\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_{r-1})$ est tel que $v_{k(D)_x}(x_i) = v_{D_0}(x_i)$. Comme ces valuations sont premières à p, posant $M = -\sup[v_{D_0}(x_i) \times p^{r-1-i}]$, la Proposition 1 dit que $(x_0, \ldots, x_{r-1})$ est dans $W_r^{(-M)}(k(D)_x) \bmod(\mathcal{P} - I)$, mais pas dans $W_r^{(-M+1)}(k(D)_x$.

Le corollaire du théorème 1 dit alors que le conducteur d'Artin de χ_D est égal à $M + 1$. Le théorème 2 donne alors $m \leqslant M + 1$; comme on a démontré l'inégalité en sens inverse, le corollaire est prouvé.

Remarques. – 1) Bien entendu, on ne peut pas toujours se ramener au cas où les valuations $v_{D_0}(x_i)$ sont positives et premières à p. Un exemple étudié par Laumon montre toutefois que cette hypothèse n'implique pas la séparabilité de l'extension résiduelle de $k(D_0)_x$.

2) Lorsque la courbe de ramification D_0 est donnée, la condition que $E = \{D_0\}$ est vraie en tous les points de D_0, sauf un nombre fini d'entre eux.

PROPOSITION 4. – *Supposons* ω_{D_0} *nul sur* $K_2(K_{x, D_0})^{(m+1)}$. *Pour toute courbe* D *de* $\mathrm{Spec}(A_x)$ *transverse à* D_0, *et pour toute courbe* D_1 *de* $\mathrm{Spec}(A_x)$ *qui a même jet que* D *à l'ordre* m, *les conducteurs d'Artin de* χ_D *et* χ_{D_1} *sont égaux.*

Démonstration. – Grâce à la définition du conducteur d'Artin, il suffit de montrer que pour tout entier N et pour tout $g \in A_x$, on a

$$\chi_D \circ \varphi_{k(D)_x}(1 + \overline{g}.\overline{t}^N) = \chi_{D_1} \circ \varphi_{k(D_1)_x}(1 + \overline{g}\,\overline{t}^N).$$

D'après la proposition 3, il s'agit de montrer que si h (resp. h_1) est une équation de D (resp. de D_1) on a :

$$\omega_{D_0}(h, 1 + g\,.\,t^N) = \omega_{D_0}(h_1, 1 + g\,.\,t^N).$$

Comme t et h sont des coordonnées locales en x, on peut écrire :

$$h_1 = \sum_{i,j \geqslant 0} a_{i,j} \,.\, t^i h^j .$$

Puisque D et D_1 ont même jet à l'ordre m, on peut supposer qu'il en est de même pour h et h_1. Ceci signifie $a_{0,1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ pour $i + j \leqslant m - 1$, $(i,j) \neq (0,1)$.

On a donc :

$$h_1/h = 1 + \sum_{i+j \geqslant m+1} t^i h^{j-1} \equiv 1 + \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ i+j \geqslant m+1}} t^i h^{j-1} \bmod t^m \, A_{x, D_0}$$

puisque pour $i + j \geqslant m + 1$, on a bien $i \geqslant m$ ou bien $j \geqslant 1$. On peut donc écrire $h_1/h = u \,.\, v$ avec $u \in A_x^*$ et $v \in 1 + t^m \,.\, A_{x, D_0}$.

On a $\omega_{D_0}(u, 1 + g \,.\, t^N) = 1$ d'après le lemme 3, et $\omega_{D_0}(v, 1 + g \,.\, t^N) = 1$ par hypothèse. Donc

$$\omega_{D_0}(h_1/h, 1 + g t^N) = 1,$$

d'où la proposition.

Cette proposition, jointe au théorème 2, fournit un *ordre de jet suffisant* pour le conducteur d'Artin du caractère χ_D pour toute courbe de X transverse à D_0 en un quelconque point lisse de D (c'est-à-dire qu'une courbe D_1 ayant même jet que D à un certain ordre, est telle que χ_{D_1} et χ_D ont même conducteur d'Artin). On peut aussi montrer que pour une courbe D distincte de D_0 donnée, la coupant en un point lisse, il existe un entier k tel que toute courbe D_1 ayant même jet que D à l'ordre k ait même conducteur d'Artin que D.

Nous voulons indiquer que le théorème 1 donne un procédé effectif, pour calculer le conducteur de la restriction à une courbe transversale générale d'un revêtement de Witt-Artin-Schreier. Nous allons l'illustrer sur le cas d'une extension définie par un vecteur de Witt de longueur 2 : $(x_0, x_1) \in W_2(K)$; le diviseur D_0 étant choisi, on pose : $-v_{D_0}(x_i) = m_i \,.\, p^{r_i}$, avec m_i premier à p.

Pour tout point x de D_0 en dehors d'un ensemble fini de points, on peut écrire : $x_i = g_i(t, u) \,.\, t^{-m_i \cdot p^{r_i}}$ $(i = 0,1)$, avec $g_i(t, u) \in A_x^*$ (on a choisi un isomorphisme entre A_x et $k[[t, u]]$, t étant une équation de D_0 en x). Le caractère χ ne dépendant que de l'image de (x_0, x_1) dans $W_2(K) \bmod(\mathcal{P} - I)$, on peut aussi supposer : $x_i \notin A_x^p + t^2 . A_x$.

Le corollaire du théorème 1 ramène le calcul du conducteur de χ_D, pour D une courbe transverse à D_0 au point x, à celui du plus petit entier m tel que $(\overline{x}_0, \overline{x}_1)$ appartienne à $W_r^{(-m+1)}(K)$, où $\overline{x}_i$ est l'image dans $k(D)_x$.

Supposons d'abord $r_0 = 0$, i.e. $v_{D_0}(x_0) = m_0$ premier à p. Si D est distincte d'un nombre fini de courbes de $\operatorname{Spec}(A_x)$, g_1 n'est pas élément de $A_x^p + t^2 . A_x + J_D$ où J_D est l'idéal de D. Si donc on écrit $\overline{g}_1 = y^p + h$ avec $v(h) \geqslant 1$ dans $k(D)_x$, on a en fait $v(h) = 1$.

Dans $W_2(k(D)_x)$, on a alors l'égalité :

$$(\overline{x}_0, \overline{x}_1) + (\mathcal{P} - I) . (0, -y . t^{-m_1 . p^{r_1 - 1}})$$
$$= (x_0, t^{-m_1 . p^{r_1}} [h + y . t^{m_1 (p-1) p^{r_1 - 1}}])$$

d'après les formules d'addition dans $W_2(-)$ qu'on trouve dans [4, II, § 6]. On en tire :

$$(\overline{x}_0, \overline{x}_1) \in W_r^{(-m-1)}(K) - W_r^{(-m)}(K),$$

avec $m = \sup(p.m_0 + 1, m_1 . p^{r_1})$.

Supposons maintenant $r_0 > 0$; écrivons $\overline{g}_0 = z^p + k$ avec $v(k) = 1$ dans $k(D)_x$, de la même manière que plus haut. On a alors :

$$(\overline{x}_0, \overline{x}_1) + (\mathcal{P} - I)(-z . t^{-m_0 . p^{r_0 - 1}}, 0)$$
$$= (t^{-m_0 . p^{r_0}} [k + z . t^{m_0 (p-1) p^{r_0 - 1}}], \xi),$$

où $$\xi = \overline{x}_1 + Q(z . t^{-m_0 . p^{r_0 - 1}}),$$

où $$Q(X) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} (-1)^i [X^i (X - X^p)^{p-i} + X^{ip+p-i}]$$

dont le terme dominant (pour $p \neq 2$) est $2 . X^{p(p-1)+1}$.

Dans $k(D)_x$, la valuation de $\overline{x}_1$ est $-m_1 p^{r_1}$, celle de $Q(z . t^{-m_0 . p^{r_0 - 1}})$ est $-[p(p-1) + 1] \times m_0 \times p^{r_0 - 1}$.

Lorsque $m_1 . p^{r_1} \neq [p(p-1) + 1] m_0 . p^{r_0 - 1}$, la valuation de ξ est $-\sup(m_1 . p^{r_1}, (p^2 - p + 1) . m_0 . p^{r_0 - 1})$. L'entier m vaut alors :

$$\sup(p(m_0 . p^{r_0} - 1, m_1 . p^{r_1}, (p^2 - p + 1) . m_0 . p^{r_0 - 1}).$$

Comme on a toujours

$$m(m_0 \,.\, p^{r_0} - 1) + 1 \leqslant (p^2 - p + 1) \,.\, m_0 \,.\, p^{r_0 - 1}\,,$$

on trouve : $m = \sup(m_1 \,.\, p^{r_1}\,, (p^2 - p + 1) \,.\, m_0 \,.\, p^{r_0 - 1})$.

Nous ne traiterons pas le cas où

$$m_1 \,.\, p^{r_1} = (p^2 - p + 1) \,.\, m_0 \,.\, p^{r_0 - 1}\,.$$

Nous nous bornerons à remarquer que, d'après des calculs inédits de Laumon, si L est l'extension de K de groupe $\mathbf{Z}/p^2$ définie par le vecteur de Witt $(x_0\,, x_1)$, la structure de l'anneau des entiers de L est assez différente suivant que $m_1 \,.\, p^{r_1} \leqslant m_0 \,.\, p^{r_0}(p^2 - p + 1)$ ou que $m_1 \,.\, p^{r_1} > m_0 \,.\, p^{r_0}(p^2 - p + 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. KATO, Residue homomorphisms in Milnor K-theory, à paraître dans *"Advanced studies in pure mathematics"*, vol. 2, 1981.

[2] J. MILNOR, Algebraic K-theory and quadratric forms, *Invent. Math.*, 9 (1970), 318-344.

[3] A.W. PARSHIN, Corps de classes et K-théorie algébrique, *Ouspekhi Math. Nauk,* T. 30 vol. 1 (1975) (181), 253-254, traduit en français dans *Matematika,* III.

[4] J.P. SERRE, Corps locaux, *Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Nancago,* VIII, Hermann, 1968.

[5] J.P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes,* Paris, Hermann, 1959.

[6] J.P. SERRE, Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos, *Publ. Soc. Math. de France,* 1961.

Manuscrit reçu le 14 juin 1982.

Jean-Luc BRYLINSKI,

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex.