ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PASCAL LAUBIN

Front d'onde analytique et décomposition microlocale des distributions

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 3 (1983), p. 179-199

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_3_179_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1983), 179-199

FRONT D'ONDE ANALYTIQUE ET DÉCOMPOSITION MICROLOCALE DES DISTRIBUTIONS

par Pascal LAUBIN

Introduction.

Nous étudions une décomposition de $\delta(x-y)$ en vue de deux types de problèmes : la décomposition du front d'onde analytique d'une distribution et la représentation des distributions comme sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes.

Des décompositions de $\delta(x)$ ont été étudiées par de nombreux auteurs, [1], [2], [7], [11]. Elles conduisent à représenter $\delta(x-y)$ comme intégrale de distributions singulières dans une seule direction mais en tout point $x=y$. Suivant certaines idées de Sjöstrand, [13], [14], nous considérons ici une décomposition plus complète qui supprime cet inconvénient. L'opérateur que nous construisons a la forme d'un opérateur Fourier-intégral à phase complexe. Son étude est l'objet de la section 2.

Cette décomposition permet de retrouver le résultat fondamental de Bengel et Schapira, [1], concernant la décomposition du front d'onde analytique des distributions. La démonstration que nous en donnons dans la section 3 n'utilise pas le théorème des tuboïdes d'holomorphie de Bros et Iagolnitzer, ni la résolution du problème de Cousin à croissance.

Enfin, dans la section 4, nous établissons quelques théorèmes concernant la représentation globale des distributions comme sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes (théorèmes 4.5 et 4.6). Les domaines de définition de ces fonctions sont des tuboïdes donnés de manière explicite à partir d'un recouvrement de $\dot{T}^*\mathbf{R}^n$ et de la distribution. Les fonctions construites sont ainsi holomorphes dans un voisinage complexe du complémentaire du support analytique de la distribution.

Vu la forme de l'opérateur considéré dans la section 2, la définition la mieux adaptée du front d'onde analytique est celle de Sjöstrand-Bros-Iagolnitzer, [6], [13]. Nous renvoyons le lecteur à [6] pour la discussion des propriétés fondamentales et des théorèmes de composition du front d'onde analytique à partir de cette définition.

1. Notations et définitions.

On désigne par $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) l'espace réel (resp. complexe) de dimension n. Si z, $\zeta \in \mathbf{C}^n$, on écrit $z \,.\, \zeta = \langle z, \zeta\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j\zeta_j$. Si Ω (resp. V) est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$), on note $A(\Omega)$ (resp. $\mathcal{O}(V)$) l'ensemble des fonctions analytiques (resp. holomorphes) dans Ω (resp. V).

Le support d'une distribution $\mathcal{T}$ est noté $[\mathcal{T}]$, le support analytique $[\mathcal{T}]_a$ et le front d'onde analytique $\mathrm{WF}_a\mathcal{T}$. On écrit S_{n-1} la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ et on pose

$$\dot{T}^* e = e \times \mathbf{R}^n\backslash\{0\}, \qquad S^* e = e \times S^{n-1}$$

si $e \subset \mathbf{R}^n$. Un sous-ensemble A de $\dot{T}^*\mathbf{R}^n$ est dit conique si $(x, \xi) \in A$ et $\lambda > 0$ impliquent $(x, \lambda\xi) \in A$.

Un *profil* est un ouvert Λ de $\mathbf{C}^n$ tel que $x + iy \in \Lambda$ et $t > 0$ impliquent $x + ity \in \Lambda$. On appelle *base* du profil Λ l'ouvert

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists y \in \mathbf{R}^n : x + iy \in \Lambda\} .$$

Le profil Λ est dit *convexe* si $\Lambda_x = \{y \in \mathbf{R}^n : x + iy \in \Lambda\}$ est un cône convexe ouvert de $\mathbf{R}^n$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. On considère aussi $\Lambda_x^* = \{\xi \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\} : y \,.\, \xi \geqslant 0 \ \forall y \in \Lambda_x\}$ qui est un cône convexe fermé de $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ éventuellement vide et

$$\Lambda^* = \{x, \xi) \in \dot{T}^*\Omega : \xi \in \Lambda_x^*\} .$$

Un *tuboïde de profil* Λ est un ouvert $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbf{C}^n$ inclus à Λ et tel que pour tout compact K de Λ il existe $r > 0$ pour lequel

$$\{x + ity : 0 < t < r ,\ x + iy \in \mathrm{K}\} \subset \widetilde{\Omega} .$$

Une fonction f holomorphe dans un tuboïde $\widetilde{\Omega}$ de profil convexe Λ et de base Ω est *à croissance lente* si pour tout compact K de Λ il existe des constantes $\mathrm{C}, r, p > 0$ telles que

$$|f(x + ity)| \leqslant \mathrm{C}\, t^{-p} \quad \text{si} \quad 0 < t < r \quad \text{et} \quad x + iy \in \mathrm{K} . \tag{1.1}$$

Dans ces conditions, il existe une et une seule distribution $b(f) \in \mathrm{D}^*(\Omega)$, appelée *valeur au bord de* f, telle que, pour tout ouvert ω de Ω et tout cône fermé Γ tels que $\omega + i\Gamma \subset \Lambda$, on ait

$$b(f)(\varphi) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ \Gamma}} \int f(x + iy)\, \varphi(x)\, dx , \quad \varphi \in \mathrm{D}(\omega) . \tag{1.2}$$

De plus

$$\mathrm{WF}_a\, b(f) \subset \Lambda^* . \tag{1.3}$$

2. Décomposition de $\delta(x - y)$.

Considérons la phase complexe

$$\Phi(x , y , \rho) = (x - y) . \nu + i\delta\,(|x - \mu|^2 + |y - \mu|^2)$$

où δ est un nombre réel strictement positif, $x, y \in \mathbf{R}^n$ et $\rho = (\mu , \nu) \in \dot{\mathrm{T}}^* \mathbf{R}^n$. Pour tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$ on pose

$$(\mathrm{T}_\rho \varphi)(x) = \pi^{-\frac{3n}{2}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n/2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{3n}{2} - 1}\, dt \int e^{it\Phi(x,y,\rho)} \left(1 + \frac{i\delta}{2}\,(x - y) . \nu\right) \varphi(y)\, dy .$$

LEMME 2.1. – *Soit* K *un compact de* $\mathbf{R}^n$, r *et* R *des nombres réels vérifiant* $0 < r < \mathrm{R}$, P *est polynôme et* $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$. *Il existe des constantes* $\mathrm{C}^{(k)}_{\alpha,\beta}$ *positives telles que*

$$\left| \mathrm{D}^\alpha_x\, \mathrm{D}^\beta_\rho \left(\int e^{it\Phi(x,y,\rho)}\, \mathrm{P}(x , y , \nu)\, \varphi(y)\, dy \right) \right| \leqslant \mathrm{C}^{(k)}_{\alpha,\beta} (1 + t(1 + |\mu|))^{-k} , \tag{2.1}$$

si $x \in \mathrm{K}$, $\mu \in \mathbf{R}^n$ *et* $r \leqslant |\nu| \leqslant \mathrm{R}$.

Démonstration. — L'opérateur différentiel

$$L(y\,,\rho\,,D_y) = i\,\frac{\nu + 2i\delta(y-\mu)}{|\nu|^2 + 4\delta^2\,|y-\mu|^2}\,.\,D_y$$

vérifie

$$L(y\,,\rho\,,D_y)\,(e^{it\Phi(x,y,\rho)}) = te^{it\Phi(x,y,\rho)}\,.$$

Une récurrence facile montre que

$$({}^tL)^k = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_{\alpha,k}(y\,,\rho)\,D_y^\alpha$$

avec les majorations

$$|a_{\alpha,k}(y\,,\rho)| \leqslant C_{\alpha,k}(1 + |\mu|)^{-k} \quad \text{si } y\in K\,,\ \mu\in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad r\leqslant |\nu| \leqslant R\,.$$

Si $P_m(x\,,y\,,\rho)$ désigne un polynôme de degré au plus égal à m par rapport à μ, on a

$$\begin{aligned}&|t^k\int e^{it\Phi(x,y,\rho)}P_m(x\,,y\,,\rho)\,\varphi(y)\,dy|\\ &\quad = |\int e^{it\Phi(x,y,\rho)}\,({}^tL)^k\,(P_m(x\,,y\,,\rho)\,\varphi(y))\,dy| \leqslant C_k(1+|\mu|)^{m-k}\,,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}&|\int e^{it\Phi(x,y,\rho)}\,P_m(x\,,y\,,\rho)\,\varphi(y)\,dy|\\ &\qquad\leqslant C'_k(1 + |\mu|)^m\,(1 + t(1 + |\mu|))^{-k}\,. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

D'autre part on peut écrire

$$D_x^\alpha\,D_\rho^\beta(e^{it\Phi(x,y,\rho)}\,(P(x\,,y\,,\nu)) = e^{it\Phi(x,y,\rho)}\sum_{m\leqslant|\alpha|+|\beta|} t^m\,P_m(x\,,y\,,\rho)\,.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}&|D_x^\alpha D_\rho^\beta\Big(\int e^{it\Phi(x,y,\rho)}\,P(x\,,y\,,\nu)\,\varphi(y)\,dy\Big)|\\ &\qquad\leqslant C_{\alpha,\beta}^{(k)}\sum_{m\leqslant|\alpha|+|\beta|} t^m(1 + |\mu|)^m(1 + t(1 + |\mu|))^{-k}\\ &\qquad\leqslant C_{\alpha,\beta}^{(k)}\,(1 + t(1 + |\mu|))^{|\alpha|+|\beta|-k}\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

L'inégalité (2.1) assure la convergence de l'intégrale qui définit $T_\rho\varphi$. De plus, la fonction $(x\,,\rho) \longrightarrow (T_\rho\varphi)\,(x)$ est de classe C_∞ pour tout $\varphi\in D(\mathbf{R}^n)$ et, dans les conditions du lemme,

$$|D_x^\alpha D_\rho^\beta(T_\rho\varphi)(x)| \leqslant C_{\alpha;\beta}\int_0^{+\infty} t^{\frac{3n}{2}-1}(1+t(1+|\mu|))^{-\frac{3n}{2}-1}\,dt$$
$$\leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\mu|)^{-\frac{3n}{2}}. \tag{2.3}$$

THEOREME 2.2. – *On a*

$$\int_{S^*\mathbf{R}^n}(T_\rho\varphi)(x)\,d\sigma(\rho) = \varphi(x) \tag{2.4}$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ *et tout* $x \in \mathbf{R}^n$.

Ici σ désigne le produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ et de la mesure superficielle de S_{n-1}.

Démonstration. – Des applications successives du théorème de Fubini permettent de placer l'intégrale par rapport à μ en tête. En calculant cette intégrale, on obtient

$$(2\pi)^{-n}\int d\xi\int e^{i(x-y)\cdot\left(\xi+\frac{i\delta|\xi|}{2}(x-y)\right)}\left(1+\frac{i\delta}{2}(x-y)\cdot\frac{\xi}{|\xi|}\right)\varphi(y)\,dy\,.$$

Cette dernière expression est égale à $\varphi(x)$ car il s'agit de la formule d'inversion de Fourier où $\mathbf{R}^n$ a été remplacé par le contour complexe $\xi \longrightarrow \xi + i\delta\,|\xi|\,(x-y)/2$. (Voir par exemple [7] p. 270 et [6] p. 785 pour un calcul analogue).

L'égalité (2.4) s'étend aux distributions à support compact. Si $\mathscr{C} \in C_\infty^*(\mathbf{R}^n)$, on pose $(T_\rho\mathscr{C})(\varphi) = \mathscr{C}({}^tT_\rho\varphi)$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. L'opérateur $\varphi \longrightarrow T_\rho\varphi$ étant autoadjoint pour tout ρ, (2.3) et (2.4) sont applicables à ${}^tT_\rho\varphi$. En utilisant la continuité de la distribution $\mathscr{C}$, on obtient encore

$$|D_\rho^\beta(T_\rho\mathscr{C})(\varphi)| \leqslant C\sup_{|\alpha|\leqslant m}\sup_K |D_y^\alpha D_\rho^\beta({}^tT_\rho\varphi)(y)| \leqslant C_\beta(1+|\mu|)^{-\frac{3n}{2}}. \tag{2.5}$$

COROLLAIRE 2.3. – *Pour toute distribution* $\mathscr{C}$ *à support compact*

$$\int_{S^*\mathbf{R}^n} T_\rho\mathscr{C}\,d\sigma(\rho) = \mathscr{C}. \tag{2.6}$$

Démonstration. – Par (2.3),

$$\int_{|\mu|<R} T_\rho\varphi\,d\sigma(\rho) \longrightarrow \varphi \quad \text{dans} \quad C_\infty(\mathbf{R}^n) \quad \text{si} \quad R \longrightarrow +\infty\,.$$

De là

$$\int_{S*\mathbf{R}^n} (T_\rho \mathcal{C})(\varphi)\, d\sigma(\rho) = \lim_{R\to+\infty} \int_{|\mu|\leqslant R} \mathcal{C}({}^t T_\rho \varphi)\, d\sigma(\rho)$$
$$= \lim_{R\to\infty} \mathcal{C}\Big(\int_{|\mu|\leqslant R} {}^t T_\rho \varphi\, d\sigma(\rho)\Big).$$
$$= \mathcal{C}(\varphi).$$

Désignons par $\mathbf{T}$ le noyau de l'opérateur T. Le front d'onde analytique de $\mathbf{T}$ est décrit par le résultat suivant.

THEOREME 2.4. — *On a*

$$\mathrm{WF}_a \mathbf{T} \subset (\{((x, x, x, \xi), (t\xi, -t\xi, 0, 0)) : (x, \xi) \in \dot{T}^* \mathbf{R}^n,\ t > 0\}. \tag{2.7}$$

Nous allons identifier $\mathbf{T}$ à la valeur au bord d'une fonction holomorphe. Pour cela nous devons estimer la partie imaginaire du prolongement holomorphe de Φ dans $\mathbf{C}^{4n}$.

LEMME 2.5. — *Posons* $\alpha = (z, w, \rho)$. *Il existe* $c_0 > 0$ *tel que*

$$\mathcal{I}\Phi(z, w, \rho) \geqslant \begin{cases} \delta(|\mathcal{R}z - \mathcal{R}\mu|^2 + |\mathcal{R}w - \mathcal{R}\mu|^2) - c_0\, |\mathcal{I}\alpha|\, |\alpha| \\ (\mathcal{I}z - \mathcal{I}w)\,.\,\mathcal{R}\nu - c_0\, |\mathcal{I}\alpha|^2 \end{cases} \tag{2.8}$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{C}^{4n}$.

Démonstration. — La partie imaginaire de Φ vaut

$$(\mathcal{R}z - \mathcal{R}w)\,.\,\mathcal{I}\nu + (\mathcal{I}z - \mathcal{I}w)\,.\,\mathcal{R}\nu + \delta(|\mathcal{R}z - \mathcal{R}\mu|^2 - |\mathcal{I}z - \mathcal{I}\mu|^2 + |\mathcal{R}w - \mathcal{R}\mu|^2 - |\mathcal{I}w - \mathcal{I}\mu|^2).$$

La première inégalité est immédiate. Pour la seconde on remarque que

$$\mathcal{I}\Phi(z, w, \rho) \geqslant (\mathcal{I}z - \mathcal{I}w)\,.\,\mathcal{R}\nu - |\mathcal{R}z - \mathcal{R}w|\,|\mathcal{I}\nu| + \frac{\delta}{2}\,|\mathcal{R}z - \mathcal{R}w|^2 - c\,|\mathcal{I}\alpha|^2$$
$$\geqslant (\mathcal{I}z - \mathcal{I}w)\,.\,\mathcal{R}\nu - \frac{1}{2\delta}\,|\mathcal{I}\nu|^2 - c\,|\mathcal{I}\alpha|^2 .$$

Introduisons l'ouvert

$$\widetilde{\Omega} = \{\alpha \in \mathbf{C}^{4n} : (\mathcal{I}z - \mathcal{I}w)\,.\,\mathcal{R}\nu > c_0\,|\mathcal{I}\alpha|^2 \quad \text{ou} \quad \delta(|\mathcal{R}z - \mathcal{R}\mu|^2 + |\mathcal{R}w - \mathcal{R}\mu|^2) > c_0\,|\mathcal{I}\alpha|\,|\alpha|, \mathcal{R}\nu \neq 0\}$$

qui est un tuboïde de profil convexe

$$\widetilde{\Lambda} = \{\alpha \in \mathbf{C}^{4n} : (\mathcal{I}z - \mathcal{I}w) \,.\, \mathcal{R}\nu > 0 \quad \text{ou} \quad |\mathcal{R}z - \mathcal{R}\mu| + |\mathcal{R}w - \mathcal{R}\mu| \neq 0 \,,\, \mathcal{R}\nu \neq 0\} \,.$$

LEMME 2.6. – *Pour tout compact* K *de* $\widetilde{\Omega}$ *il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\mathcal{I}\Phi(\mathcal{R}\alpha + it\,\mathcal{I}\alpha) \geqslant ct \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathrm{K} \quad \text{et} \quad t \in \,]0,1] \,. \tag{2.9}$$

Démonstration. – Sinon il existe des suites $\alpha_m \in \mathrm{K}$ et $t_m \in \,]0,1]$ telles que

$$\mathcal{I}\Phi(\mathcal{R}\alpha_m + it_m\,\mathcal{I}\alpha_m) < \frac{t_m}{m} \,. \tag{2.10}$$

On peut supposer que $\alpha_m \longrightarrow \alpha \in \mathrm{K}$ et $t_m \longrightarrow t \in [0,1]$. Si $t \neq 0$ on obtient $\mathcal{I}\Phi(\mathcal{R}\alpha + it\,\mathcal{I}\alpha) \leqslant 0$ ce qui contredit $\mathcal{R}\alpha + it\,\mathcal{I}\alpha \in \widetilde{\Omega}$. Supposons donc $t = 0$. Si $\mathcal{R}z = \mathcal{R}w = \mathcal{R}\mu$ on a

$$(\mathcal{I}z - \mathcal{I}w) \,.\, \mathcal{R}\nu > c_0 \,|\,\mathcal{I}\alpha|^2 > 0 \,,$$

mais, par (2.8) et (2.9), $(\mathcal{I}z_m - \mathcal{I}w_m) \,.\, \mathcal{R}\nu_m - c_0\,t_m \,|\,\mathcal{I}\alpha_m|^2 < \dfrac{1}{m}$ donc $(\mathcal{I}z - \mathcal{I}w) \,.\, \mathcal{R}\nu \leqslant 0$ ce qui est absurde. Si

$$|\mathcal{R}z - \mathcal{R}\mu| + |\mathcal{R}w - \mathcal{R}\mu| \neq 0 \,,$$

on utilise l'inégalité

$$\delta(|\mathcal{R}z_m - \mathcal{R}\mu_m|^2 + |\mathcal{R}w_m - \mathcal{R}\mu_m|^2) - c_0 t_m \,|\,\mathcal{I}\alpha_m|\,|\alpha_m| < \frac{t_m}{m}$$

qui conduit encore à une absurdité.

Par (2.9), la fonction

$$\begin{aligned} g(z\,,w\,,\rho) &= \pi^{-\frac{3n}{2}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{i\delta}{2}\,(z - w)\,.\,\nu\right) \int_0^{+\infty} t^{\frac{3n}{2}-1}\, e^{it\Phi(z,w,\rho)}\, dt \\ &= \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{\pi^{3n/2}} \, \frac{1 + \dfrac{i\delta}{2}\,(z - w)\,.\,\nu}{\left(\dfrac{1}{i}\,\Phi(z\,,w\,,\rho)\right)^{3n/2}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

est holomorphe et à croissance lente dans $\widetilde{\Omega}$. On utilise ici la fonction

$\sqrt{z}$ holomorphe dans $\mathbf{C}\backslash\{(x,0) : x \leqslant 0\}$ qui coïncide avec $\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$.

La valeur au bord de f est la distribution $\mathbf{T}$. De fait, si φ, $\Psi \in \mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$, $\chi \in \mathrm{D}(\dot{\mathrm{T}}^* \mathbf{R}^n)$ et $\nu_0 . \nu > 0$ dans le support de χ, on a

$$b(f)(\varphi \otimes \Psi \otimes \chi) = \lim_{s \to 0+} \int f(x + is\nu_0, y, \rho)\, \varphi(x)\, \Psi(y)\, \chi(\rho)\, dx\, dy\, d\rho$$
$$= \pi^{-\frac{3n}{2}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \lim_{s \to 0+} \int \varphi(x)\, \chi(\rho)\, dx\, d\rho$$
$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{3n}{2}-1}\, a(t, x + is\nu_0, \rho)\, dt$$

où

$$a(t, z, \rho) = \int e^{it\Phi(z,y,\rho)} \left(1 + \frac{i\delta}{2}\,(z - y).\nu\right) \Psi(y)\, dy .$$

Comme $\Phi(z, y, \rho) - \Phi(\mathcal{R}z, y, \rho)$ est indépendant de y et

$$\mathcal{I}\Phi(z, y, \rho) = \mathcal{I}\Phi(\mathcal{R}z, y, \rho) + \mathcal{I}z . \nu - \delta\, |\mathcal{I}z|^2 ,$$

(2.1) fournit la majoration

$$|a(t, x + is\nu_0, \rho)| \leqslant C_k (1 + t)^{-k} \quad \text{si} \quad x \in [\varphi],\ \rho \in [\chi],\ t > 0$$

dès que s est assez petit. Par le théorème de Lebesgue, on a

$$b(f)(\varphi \otimes \Psi \otimes \chi) = \int \varphi(x)\, \chi(\rho)\, (\mathrm{T}_\rho \Psi)(x)\, dx\, d\rho .$$

On obtient donc (2.7) comme conséquence de (1.3).

Cette inclusion a des conséquences importantes.

COROLLAIRE 2.7. – *Pour toute distribution* $\mathcal{C}$ *à support compact et tout* $\rho = (\mu, \nu) \in \dot{\mathrm{T}}^* \mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{WF}_a \mathrm{T}_\rho \mathcal{C} \subset \begin{cases} \{(\mu, t\nu) : t > 0\} & si \quad \rho \in \mathrm{WF}_a \mathcal{C} \\ \phi & sinon \end{cases} \tag{2.12}$$

Démonstration. – Par les théorèmes de composition du front d'onde analytique (voir par exemple [6]), on a

$$\mathrm{WF}_a \mathrm{T}_\rho \mathcal{C} \subset \{(x, \xi) \in \dot{\mathrm{T}}^* \mathbf{R}^n : \exists (y, \eta) \in \mathrm{WF}_a \mathcal{C} \cup [\mathcal{C}] \times \{0\} \quad \text{et}$$
$$(\sigma, \tau) \in \mathbf{R}^{2n} : ((x, y, \mu, \nu), (\xi, -\eta, \sigma, \tau)) \in \mathrm{WF}_a \mathrm{T}\}$$
$$\subset \{(x, \xi) \in \dot{\mathrm{T}}^* \mathbf{R}^n : \exists (y, \eta) \in \mathrm{WF}_a \mathcal{C} \quad \text{et}$$
$$t > 0 : x = y = \mu,\ \xi = \eta = t\nu\}.$$

COROLLAIRE 2.8. — *Pour toute distribution* $\mathcal{C}$ *à support compact et toute partie mesurable* e *de* $S^*\mathbf{R}^n$, *on a*

$$\mathrm{WF}_a\left(\int_e \mathrm{T}_\rho \mathcal{C}\, d\sigma(\rho)\right) \subset \{(x\,,t\xi) : (x\,,\xi) \in \bar{e} \cap \mathrm{WF}_a \mathcal{C}\,, t > 0\}\,. \quad (2.13)$$

Démonstration. — Si e est relativement compact on peut appliquer les théorèmes de composition. On obtient alors

$$\mathrm{WF}_a\left(\int_e \mathrm{T}_\rho \mathcal{C}\, d\sigma(\rho)\right) \subset \{(x\,,\xi) \in \mathrm{T}^*\,\mathbf{R}^n : \exists(\mu\,,\nu) \in \bar{e} \quad \text{et}$$
$$(y\,,\eta) \in \mathrm{WF}_a \mathcal{C} \cup [\mathcal{C}] \times \{0\} : ((x\,,y\,,\mu\,,\nu)\,,\ (\xi\,,-\eta\,,0\,,0)) \in \mathrm{WF}_a \mathbf{T}\}$$
$$\subset \{(x\,,t\xi) : (x\,,\xi) \in \bar{e} \cap \mathrm{WF}_a \mathcal{C}\,,\ t > 0\}\,.$$

Pour conclure il suffit donc de prouver le résultat suivant. Si $\bar{e} \cap S^*[\mathcal{C}] = \phi$ il existe une fonction $g \in \mathrm{A}(\mathbf{R}^n)$ telle que

$$\int_e \mathrm{T}_\rho \mathcal{C}(\varphi)\, d\sigma(\rho) = \int g(x)\, \varphi(x)\, dx\,,\ \varphi \in \mathrm{D}(\mathbf{R}^n)\,. \quad (2.14)$$

Par la première inégalité (2.8), il existe une constante $c > 0$ telle que $\mathcal{J}\Phi(x\,,y\,,\rho) \geqslant \delta\,|y - \mu|^2 \geqslant c(1 + |\mu|)^2$ si $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in [\mathcal{C}]$, $\rho \in e$. En utilisant (2.11) on obtient

$$\int_e (\mathrm{T}_\rho \mathcal{C})(\varphi)\, d\sigma(\rho) = \int \varphi(x) \underset{(y)}{\mathcal{C}} \left(\int_e g(x\,,y\,,\rho)\, d\sigma(\rho)\right) dx\,.$$

Désignons par F la projection de $\bar{e}$ sur $\mathbf{R}^n$. La fonction

$$\int_e g(x\,,y\,,\rho)\, d\sigma(\rho)$$

se prolonge par une fonction holomorphe dans un voisinage complexe de $\mathrm{U} = \mathbf{R}^n \times \complement \mathrm{F}$ car pour tout compact K de U il existe $c_1 > 0$ tel que $\mathcal{J}\Phi(z\,,w\,,\rho) \geqslant \delta\,|\mathcal{R}w - \mu|^2 - c_0\,|\mathcal{J}\alpha|\,|\alpha| \geqslant c_1(1 + |\mu|)^2$ si $(\mathcal{R}z\,,\mathcal{R}w) \in \mathrm{K}$, $\rho \in e$ et $|\mathcal{J}z| + |\mathcal{J}w|$ est assez petit. Ceci démontre (2.14).

Si $\mathcal{C}$ est une distribution à support compact, on définit une distribution $\mathrm{T}\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}^n \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathbf{R}^n$ par la relation

$$(\mathrm{T}\mathcal{C})(\varphi \otimes \chi) = \int \chi(\rho)\, (\mathrm{T}_\rho \mathcal{C})(\varphi)\, d\sigma(\rho)\,. \quad (2.15)$$

COROLLAIRE 2.9. — *On a*

$$\mathrm{WF}_a \mathrm{T}\mathcal{C} \subset \{(x\,,x\,,\xi)\,,\ (t\xi\,,0\,,0)) : (x\,,\xi) \in \mathrm{WF}_a \mathcal{C}\,,\ t > 0\}\,. \quad (2.16)$$

Démonstration. – De fait

$$\mathrm{WF}_a \mathbf{T}\mathcal{C} \subset \{((x,\mu,\nu),\ (\xi,\sigma,\tau)) : \exists\,(y,\eta)\in \mathrm{WF}_a\mathcal{C}\cup[\mathcal{C}]\times\{0\}$$
$$((x,y,\mu,\nu),\ (\xi,-\eta,\sigma,\tau))\in \mathrm{WF}_a\mathbf{T}\}$$
$$\subset \{((x,x,\xi),\ (t\xi,0,0)) : (x,\xi)\in \mathrm{WF}_a\ \mathcal{C},\ t>0\}.$$

Remarque 2.10. – Par (2.7) on peut écrire

$$\mathrm{WF}_a\mathbf{T} = \{((x,x,x,\xi),\ (t\xi,-t\xi,0,0)) : (x,\xi)\in \mathrm{E},\ t>0\}$$

où E est un fermé de $\dot{\mathrm{T}}^*\mathbf{R}^n$. Le raisonnement qui conduit à (2.13) montre que

$$\mathrm{WF}_a\mathcal{C} = \mathrm{WF}_a\left(\int_{\mathrm{S}^*\mathbf{R}^n} \mathrm{T}_\rho\mathcal{C}\,d\sigma(\rho)\right)$$
$$\subset \{(x,t\xi) : (x,\xi)\in \mathrm{E}\cap \mathrm{WF}_a\mathcal{C},\ |\xi|=1,\ t>0\}.$$

Tout point $\rho\in\dot{\mathrm{T}}^*\,\mathbf{R}^n$ étant singulier pour au moins une distribution à support compact, on obtient

$$\{((x,x,x,\xi),(t\xi,-t\xi,0,0)) : (x,\xi)\in \mathrm{S}^*\,\mathbf{R}^n : t>0\}\subset \mathrm{WF}_a\mathbf{T}.$$

3. Décomposition du front d'onde analytique.

L'objet de cette section est de démontrer le

THEOREME 3.1. – *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{C}$ une distribution dans Ω. Si $\mathrm{WF}_a\mathcal{C}\subset\bigcup_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{F}_j$ où $\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_\mathrm{N}$ sont des fermés coniques de $\dot{\mathrm{T}}^*\,\mathbf{R}^n$, il existe des distributions $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_\mathrm{N}$ dans Ω telles que*

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathcal{C}_j \quad et \quad \mathrm{WF}_a\mathcal{C}_j\subset \mathrm{F}_j \quad si \quad j=1,\dots,\mathrm{N}. \tag{3.1}$$

Lorsque la distribution $\mathcal{C}$ est à support compact on peut réaliser cette décomposition explicitement. Soit $\mathrm{F}=\bigcup_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{F}_j$ et

$$\mathrm{G}_j = \{\rho\in \mathrm{S}^*\,\mathbf{R}^n : d(\rho,\mathrm{F}_j)\leqslant d(\rho,\mathrm{F}_k)\ \forall k\}.$$

Il est clair que

$$S^*\mathbf{R}^n = \bigcup_{j=1}^{N} G_j \quad \text{et} \quad G_j \cap F = F_j \cap S^*\mathbf{R}^n, \quad j = 1, \dots, N. \tag{3.2}$$

Si le support de $\mathcal{T}$ est compact, on peut prendre

$$\mathcal{T}_j = \int_{G \setminus \bigcup_{k<j} G_k} T_\rho \mathcal{T} \, d\sigma(\rho). \tag{3.3}$$

De fait, (3.1) résulte de (2.6) et (2.13).

En vue du cas général rappelons la propriété suivante qui résulte de la résolution du problème de Cousin pour les fonctions analytiques réelles.

Lemme 3.2. – *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* $\mathcal{T}_m$ *une suite de distributions dans* Ω. *On suppose la famille* $[\mathcal{T}_m]_a$ *localement finie. Alors il existe une distribution* $\mathcal{T}$ *dans* Ω *telle que, si* U *est un ouvert de* Ω *et* $[\mathcal{T}_m]_a \cap U = \emptyset$ *pour* $m > M$, $\mathcal{T} - \sum_1^M \mathcal{T}_m$ *est la distribution d'une fonction analytique dans* U.

Démonstration du théorème 3.1. – Supposons d'abord que le support analytique de $\mathcal{T}$ est compact. Soit $\mathcal{T}_m$ une suite de distributions à support compact dans Ω, dont les supports sont localement finis et dont la somme vaut $\mathcal{T}$. Par (2.16) on sait que

$$WF_a T\mathcal{T}_m \subset \{((x, x, \xi), (t\xi, 0, 0)) : (x, \xi) \in WF_a \mathcal{T}, t > 0\}.$$

Les supports analytiques des distributions $T\mathcal{T}_m$ sont donc localement finis dans $\Omega \times \dot{T}^*\Omega$. Soit S une somme des $T\mathcal{T}_m$ au sens du lemme 3.2.

On a

$$WF_a S \subset \{((x, x, \xi), (t\xi, 0, 0)) : (x, \xi) \in WF_a \mathcal{T}, \ t > 0\}. \tag{3.4}$$

De fait si U est un ouvert d'adhérence compacte dans Ω et N un entier tel que $U \cap [\mathcal{T}_m] = \emptyset$ si $m > N$, on a $\mathcal{T} = \sum_1^N \mathcal{T}_m$ dans U et $S - \sum_1^N T_m \in A(U \times \dot{T}^*\Omega)$. Il suffit alors de remarquer que

$$WF_a \left(\sum_1^N T\mathcal{T}_m\right) \subset \{((x, x, \xi), (t\xi, 0, 0)) : \\ (x, \xi) \in WF_a \left(\sum_1^N \mathcal{T}_m\right), \ t > 0\}.$$

Par (3.4), la distribution S s'écrit

$$S(\varphi \otimes \chi) = \int \chi(\rho)\, S_\rho(\varphi)\, d\rho\,, \quad \varphi \in D(\Omega)\,, \quad \chi \in D(\dot{T}^* \Omega)\,.$$

Soit G un voisinage compact de $S^* [\mathscr{C}]_a$ dans $S^* \Omega$. Montrons que

$$\mathscr{C} - \int_G S_\rho \, d\sigma(\rho) \in A(\Omega)\,. \tag{3.5}$$

Soient U et N comme ci-dessus. On a

$$\mathscr{C} - \int S_\rho \, d\sigma(\rho) = \mathscr{C} - \sum_1^N \mathscr{C}_m + \int_{S^* \mathbf{R}^n \backslash G} T_\rho \left(\sum_1^N \mathscr{C}_m\right) d\sigma(\rho)$$
$$- \int_G \left(S_\rho - \sum_1^N T_\rho \mathscr{C}_m\right) d\sigma(\rho)\,.$$

Cette expression est analytique dans U car

$$\mathscr{C} = \sum_1^N \mathscr{C}_m \quad \text{dans U}, \qquad S - \sum_1^N T\mathscr{C}_m \in A(U \times \dot{T}^* \Omega)$$

et

$$\overline{S^* \mathbf{R}^n \backslash G} \cap \dot{T}^* U \cap WF_a \left(\sum_1^N \mathscr{C}_m\right) = \emptyset\,.$$

Considérons alors des fermés G_j de $S^* \mathbf{R}^n$ tels que

$$\bigcup_1^N G_j = S^* \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad G_j \cap F = F_j \cap S^* \mathbf{R}^n\,, \quad j = 1, \ldots, N\,.$$

A une fonction analytique près, on peut prendre

$$\mathscr{C}_j = \int_{G \cap \left(G_j \backslash \bigcup_{k<j} G_k\right)} S_\rho \, d\sigma(\rho)\,.$$

Passons au cas général. On peut ici utiliser le théorème 2.1 de [1] sur les faisceaux souples. Pour être complet nous donnons une démonstration autonome. Nous supposerons $N = 2$, ce qui n'est pas une restriction.

Soit ω_m une suite d'ouverts relativement compacts tels que

$$\bar{\omega}_m \subset \omega_{m+1} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcup_1^\infty \omega_m\,.$$

Il existe des suites $\mathscr{C}_m^{(1)}$, $\mathscr{C}_m^{(2)}$ de distributions dans Ω telles que

$$WF_a \mathscr{C}_m^{(j)} \subset F_j \cap \dot{T}^* \omega_m \tag{3.6}$$

$$\mathrm{WF}_a(\mathscr{C}-(\mathscr{C}_m^{(1)}+\mathscr{C}_m^{(2)}))\cap \dot{\mathrm{T}}^*\,\overline{\omega}_m \subset \mathrm{F}\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\partial\omega_m \tag{3.7}$$

$$\mathrm{WF}_a(\mathscr{C}_{m+1}^{(j)}-\mathscr{C}_m^{(j)})\subset \mathrm{F}_j\cap\dot{\mathrm{T}}^*(\overline{\omega_{m+1}}\backslash\omega_m), \tag{3.8}$$

pour $j=1,2$ et $m\geqslant 1$. De fait, si $\alpha\in \mathrm{D}(\omega)$ est égal à 1 dans ω_2 on a

$$\mathrm{WF}_a(\alpha\mathscr{C})\subset(\mathrm{F}_1\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\overline{\omega}_1)\cup(\mathrm{F}_2\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\overline{\omega}_1)\cup(\mathrm{F}\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,(\overline{\omega}_2\backslash\omega_1))$$
$$\cup\,\dot{\mathrm{T}}^*\complement\,\omega_2\,.$$

Par ce qui précède il existe $\mathscr{C}_1^{(1)}$ et $\mathscr{C}_1^{(2)}\in \mathrm{D}^*(\Omega)$ tels que

$$\mathrm{WF}_a\mathscr{C}_1^{(j)}\subset \mathrm{F}_j\cap\dot{\mathrm{T}}^*\overline{\omega}_1$$

et

$$\mathrm{WF}_a(\mathscr{C}_1^{(1)}+\mathscr{C}_1^{(2)}))\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\overline{\omega_1}\subset \mathrm{F}\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\partial\omega_1\,.$$

Supposons maintenant $\mathscr{C}_m^{(j)}$, $j=1,2$, construits et déterminons $\mathscr{C}_{m+1}^{(j)}$. On voit comme ci-dessus qu'il existe $\mathrm{T}_{m+1}^{(j)}\in \mathrm{D}^*(\Omega)$, $j=1,2$, vérifiant

$$\mathrm{WF}_a\,\mathrm{T}_{m+1}^{(j)}\subset \mathrm{F}_j\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\overline{\omega_{m+1}} \tag{3.9}$$

$$\mathrm{WF}_a(\mathscr{C}-(\mathrm{T}_{m+1}^{(1)}+\mathrm{T}_{m+1}^{(2)}))\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\overline{\omega_{m+1}}\subset \mathrm{F}\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\partial\omega_{m+1} \tag{3.10}$$

De (3.6), (3.7) et (3.9), (3.10) on déduit

$$\mathrm{WF}_a(\mathrm{T}_{m+1}^{(1)}+\mathrm{T}_{m+1}^{(2)}-\mathscr{C}_m^{(1)}-\mathscr{C}_m^{(2)})\subset \mathrm{F}\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,(\overline{\omega_{m+1}}\backslash\omega_m)\,.$$

Par la première partie de la démonstration on peut trouver S_1, $\mathrm{S}_2\in \mathrm{D}^*(\Omega)$ tels que $\mathrm{WF}_a\,\mathrm{S}_j\subset \mathrm{F}_j\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,(\overline{\omega_{m+1}}\backslash\omega_m)$ et

$$\mathrm{T}_{m+1}^{(1)}+\mathrm{T}_{m+1}^{(2)}-\mathscr{C}_m^{(1)}-\mathscr{C}_m^{(2)}=\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2\,.$$

Posons

$$\mathrm{S}=\mathrm{T}_{m+1}^{(1)}-\mathscr{C}_m^{(1)}-\mathrm{S}_1=\mathscr{C}_m^{(2)}-\mathrm{T}_{m+1}^{(2)}+\mathrm{S}_2\,.$$

Il est clair que $\mathrm{WF}_a\,\mathrm{S}\subset \mathrm{F}_1\cap \mathrm{F}_2\cap\dot{\mathrm{T}}^*\,\overline{\omega_{m+1}}$. Les distributions $\mathscr{C}_{m+1}^{(1)}=\mathrm{T}_{m+1}^{(1)}-\mathrm{S}$, $\mathscr{C}_{m+1}^{(2)}=\mathrm{T}_{m+1}^{(2)}+\mathrm{S}$ vérifient encore (3.9), (3.10). L'inclusion (3.8) est également satisfaite car

$$\mathscr{C}_{m+1}^{(j)}-\mathscr{C}_m^{(j)}=\mathrm{S}_j\,,\ j=1,2\,.$$

Les supports analytiques des distributions, $\mathscr{C}_1^{(j)}$, $\mathscr{C}_2^{(j)}-\mathscr{C}_1^{(j)}$ $\mathscr{C}_3^{(j)}-\mathscr{C}_2^{(j)},\dots$ sont localement finis. Par le lemme 3.2 il existe des distributions $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, qui vérifient $\mathscr{C}_j-\mathscr{C}_m^{(j)}\in \mathrm{A}(\omega_m)$ pour tout m. Il est clair que $\mathrm{WF}_a\mathscr{C}_j\subset \mathrm{F}_j$, en outre, par (3.7), $\mathscr{C}-(\mathscr{C}_1+\mathscr{C}_2)\in \mathrm{A}(\Omega)$.

4. Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes.

Nous commençons par décrire une famille de tuboïdes.

DEFINITION 4.1. – *Un fermé conique* F *de* $\dot{T}^* \mathbf{R}^n$ *est dit convexe par fibre si* $F_x = \{\xi : (x, \xi) \in F\}$ *est un cône convexe fermé de* $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}^n$.

Si F est un tel fermé et G est un fermé de $\mathbf{R}^n$, on désigne par $\Omega_{F,G}$ l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^n$ tels que

$$\mathcal{I}z \,.\, \nu > \delta(|\mathcal{I}z|^2 - |\mathcal{R}z - \mu|^2 - |y - \mu|^2) \tag{4.1}$$

si $(\mu, \nu) \in F$, $|\nu| = 1$ et $y \in G$. On définit également un profil convexe $\Lambda_{F,G}$ de base $\mathbf{R}^n$ par les relations

$$\Lambda_{F,G;x} = F_x^{*0} = \{y \in \mathbf{R}^n : y \,.\, \xi > 0 \ \forall \xi \in F_x\} \text{ si } x \in G \tag{4.2}$$

$$\Lambda_{F,G;x} = \mathbf{R}^n \quad \text{si} \quad x \notin G\,.$$

En vertu du théorème des bipolaires, on a

$$F_x = \Lambda^*_{F,G;x} \backslash \{0\} = \{\xi \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\} : y \,.\, \xi \geqslant 0 \ \forall y \in \Lambda_{F,G;x}\} \quad \text{si} \quad x \in G\,.$$

Remarquons que $\mathcal{R}z + it\mathcal{I}z \in \Omega_{F,G}$ si $z \in \Omega_{F,G}$ et $t \in]0,1]$. De fait, si $(\mu, \nu) \in F$, $|\nu| = 1$ et $y \in G$, on a

$$t\mathcal{I}z \,.\, \nu > \delta t(|\mathcal{I}z|^2 - |\mathcal{R}z - \mu|^2 - |y - \mu|^2)$$
$$\geqslant \delta(t^2 |\mathcal{I}z|^2 - |\mathcal{R}z - \mu|^2 - |y - \mu|^2)\,.$$

Par définition, $\Omega_{F,G}$ est un voisinage complexe de $\mathbf{R}^n \backslash G$. Plus précisément $\Omega_{F,G} \supset \{z \in \mathbf{C}^n : |\mathcal{I}z| + \delta |\mathcal{I}z|^2 < \frac{\delta}{2} d^2(\mathcal{R}z, G)\}$.

LEMME 4.2. – $\Omega_{F,G}$ *est un ouvert pseudoconvexe de* $\mathbf{C}^n$.

Démonstration. – On vérifie aisément que $\Omega_{F,G}$ est ouvert. Cela étant

$$\Omega_{F,G} = \bigcap_{\substack{(\mu,\nu)\in F \\ |\nu|=1,\, y \in G}} \{z \in \mathbf{C}^n : \mathcal{I}z \,.\, \nu > \delta(|\mathcal{R}z|^2 - |\mathcal{R}z - \mu|^2 - |y - \mu|^2)\}$$

est pseudoconvexe car

$$\varphi(z) = \delta(|\mathcal{I}z|^2 - |\mathcal{R}z - \mu|^2 - |y - \mu|^2) - \mathcal{I}z \,.\, \nu$$

est pluriharmonique pour tous y, μ, ν.

LEMME 4.3. – $\Omega_{F,G}$ *est un tuboïde de profil* $\Lambda_{F,G}$.

Démonstration. – Il est clair que $\Omega_{F,G} \subset \Lambda_{F,G}$. Soit K un compact de $\Lambda_{F,G}$. Supposons qu'il existe des suites $z_m \in K$ et $t_m \longrightarrow 0+$ telles que $\mathcal{R}z_m + it_m \mathcal{I}z_m \notin \Omega_{F,G}$. On peut alors trouver $(\mu_m, \nu_m) \in F$ et $y_m \in G$ pour lesquels $|\nu_m| = 1$ et

$$t_m \mathcal{I}z_m \,.\, \nu_m \leqslant \delta(t_m^2 |\mathcal{I}z_m|^2 - |\mathcal{R}z_m - \mu_m|^2 - |y_m - \mu_m|^2) . \qquad (4.3)$$

Quitte à considérer des sous-suites, on peut supposer que $z_m \longrightarrow z \in K$ et $\nu_m \longrightarrow \nu$. Par (4.3), on a alors $\mu_m \longrightarrow \mathcal{R}z$ et $y_m \longrightarrow \mathcal{R}z$. De là $(\mathcal{R}z, \nu) \in F$, $\mathcal{R}z \in G$ et, puisque $z \in \Lambda_{F,G}$, $\mathcal{I}z \,.\, \nu > 0$. De (4.3), on tire encore $\mathcal{I}z_m \,.\, \nu_m \leqslant \delta t_m |\mathcal{I}z_m|^2$ donc, en passant à la limite, $\mathcal{I}z \,.\, \nu \leqslant 0$ ce qui est absurde.

LEMME 4.4. – *Pour tout compact* K *de* $\Omega_{F,G}$, *il existe* $c, r > 0$ *tels que*

$$\mathcal{I}\Phi(\mathcal{R}z + it\mathcal{I}z, y, \rho) \geqslant c(t + |\mathcal{R}z - \mu|^2) \quad \textit{si} \quad \begin{cases} z \in K, \ 0 < t \leqslant 1 \\ d(y, G) \leqslant r, \ \rho \in F, \ |\nu| = 1 . \end{cases} \qquad (4.4)$$

Démonstration. – Sinon il existe des suites $z_m \in K$, $t_m \in]0,1]$, $\rho_m \in F$ et $y_m \in \mathbf{R}^n$ telles que $d(y_m, G) \leqslant 1/m$, $|\nu_m| = 1$ et

$$t_m \mathcal{I}z_m \,.\, \nu_m + \delta(|\mathcal{R}z_m - \mu_m|^2 + |y_m - \mu_m|^2 - t_m^2 |\mathcal{I}z_m|^2) < \frac{1}{m}(t_m + |\mathcal{R}z_m - \mu_m|^2) . \qquad (4.5)$$

Cette inégalité montre que les suites μ_m et y_m sont bornées. Quitte à considérer des sous-suites on peut donc supposer que

$z_m \longrightarrow z \in K$, $\rho_m \longrightarrow \rho \in F$, $y_m \longrightarrow y \in G$ et $t_m \longrightarrow t \in]0,1]$.

Si $t \neq 0$, on obtient

$$t\mathcal{I}z \,.\, \nu + \delta(|\mathcal{R}z - \mu|^2 + |y - \mu|^2 - t^2 |\mathcal{I}z|^2) \leqslant 0 ,$$

ce qui entraîne $\mathcal{R}z + it\mathcal{I}z \notin \Omega_{F,G}$. Ceci est absurde car $z \in K \subset \Omega_{F,G}$ et $t \in]0,1]$.

Si $t = 0$, (4.5) conduit à $\mathcal{R}z = y = \mu$. Puisque $z \in \Omega_{F,G}$ on a alors $\mathcal{I}z \,.\, \nu > 0$. Mais, dès que $m > 1/\delta$, on a, par (4.5),

$$\mathcal{I}z_m \,.\, \nu_m - \delta t_m |\mathcal{I}z_m|^2 < \frac{1}{m}$$

donc $\mathcal{I}z \,.\, \nu \leqslant 0$, ce qui est absurde.

THEOREME 4.5. – *Soit* F *un fermé conique de* $\dot{T}^*\mathbf{R}^n$ *convexe par fibre et* e *une partie mesurable de* $F \cap S^*\mathbf{R}^n$. *Pour toute distribution* $\mathcal{T}$ *à support compact, la fonction*

$$f(z) = \int_e \underset{(y)}{\mathcal{T}} (g(z, y, \rho))\, d\sigma(\rho) \tag{4.6}$$

est holomorphe et à croissance lente dans $\Omega_{F,\overline{[\mathcal{T}]}}$. On a

$$b(f) = \int_e T_\rho \mathcal{T}\, d\sigma(\rho). \tag{4.7}$$

En outre, si $x \in \mathbf{R}^n$ *et* $\{x\} \times F_x \cap WF_a \mathcal{T} = \emptyset$, *la fonction* f *se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de* x.

Démonstration. – Une récurrence aisée montre que

$$D_y^\beta g(z, y, \rho) = \sum_{k=0}^{|\beta|} \frac{P_{\beta,k}(z, y, \rho)}{\left(\frac{1}{i}\Phi(z, y, \rho)\right)^{\frac{3n}{2}+k}} \tag{4.8}$$

où $P_{\beta,k}$ est un polynôme de degré au plus égal à k par rapport à μ.

Par le lemme 4.4, l'expression $\underset{(y)}{\mathcal{T}}(g(z, y, \rho))$ est définie pour $z \in \Omega_{F,[\mathcal{T}]}$ et $\rho \in F$, $|\nu| = 1$. Soit K un compact de $\Omega_{F,\overline{[\mathcal{T}]}}$. En vertu de (4.4) et (4.8), on a, si $z \in K$, $t \in]0,1]$ et $\rho \in F$, $|\nu| = 1$,

$$\begin{aligned}
&|\underset{(y)}{\mathcal{T}}(g(\mathcal{R}z + it\mathcal{I}z, y, \rho))| \\
&\qquad \leqslant C \sup_{|\beta| < m} \sup_{d(y,[\mathcal{T}]) < r} |D_y^\alpha g(\mathcal{R}z + it\mathcal{I}z, y, \rho)| \\
&\qquad \leqslant C \sup_{|\beta| < m} \sum_{k=0}^{|\beta|} c_k \frac{(1 + |\mathcal{R}z - \mu|^2)^k}{(t + |\mathcal{R}z - \mu|^2)^{\frac{3n}{2}+k}} \\
&\qquad \leqslant \frac{C'}{t^m}(t + |\mathcal{R}z - \mu|^2)^{-\frac{3n}{2}}
\end{aligned}$$

car $t(1 + |\mathcal{R}z - \mu|^2) \leqslant t + |\mathcal{R}z - \mu|^2$. On en déduit

$$|f(\mathcal{R}z + it\mathcal{I}z)| \leqslant \frac{C'}{t^m} \int_{S^*\mathbf{R}^n} (t + |\mathcal{R}z - \mu|^2)^{-\frac{3n}{2}} d\sigma(\rho) \leqslant \frac{C_1}{t^{m+n}},$$

donc f est holomorphe et à croissance lente dans $\Omega_{F,\overline{[\mathcal{T}]}}$.

Démontrons (4.7). Soit Γ un cône fermé de $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ et $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$ tels que $[\varphi] + i\Gamma \subset \Omega_{\mathrm{F},[\bar{\mathscr{C}}]}$. Si $v \in \Gamma$ et $|v|$ est assez petit, on a $\mathscr{I}\Phi(x + iv, y, \rho) > 0$ et

$$\int f(x + iv)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int \varphi(x)\,dx \int_e \underset{(y)}{\mathscr{C}}\,(g(x + iv, y, \rho))\,d\sigma(\rho)$$

$$= \pi^{-\frac{3n}{2}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_e \underset{(y)}{\mathscr{C}} \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{3n}{2}-1}\, a(t, v, y, \rho)\,dt\right) d\sigma(\rho) \qquad (4.9)$$

où

$$a(t, v, y, \rho) = \int e^{it\Phi(x+iv,y,\rho)} \left(1 + \frac{i\delta}{2}\,(x + iv - y)\,.\,\nu\right) \varphi(x)\,dx\,.$$

En raisonnant comme dans le lemme 2.1 au moyen de l'opérateur

$$\mathrm{L}_1(x, v, \rho, \mathrm{D}_x) = \frac{1}{i}\,\frac{-\nu - 2i\delta(x - iv - \mu)}{|\nu - 2\delta v|^2 + 4\delta^2\,|x - \mu|^2}\,.\,\mathrm{D}_x$$

on voit qu'il existe des constantes $\mathrm{C}_{\alpha,k}$ telles que

$$|\mathrm{D}_y^\alpha\, a(t, v, y, \rho)| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha,k}(1 + t(1 + |\mu|))^{-k}$$

si $t > 0$, $\rho \in \mathrm{F} \cap \mathrm{S}^*\,\mathbf{R}^n$, $d(y, [\mathscr{C}]) \leqslant r$ et $v \in \Gamma$ est assez petit. Cette inégalité permet de passer à la limite pour $v \longrightarrow 0$ sous les intégrales de (4.9) par le théorème de Lebesgue, ce qui fournit (4.7).

Supposons maintenant que $\{x\} \times \mathrm{F}_x \cap \mathrm{WF}_a\mathscr{C} = \phi$. Dans $\Omega_{\mathrm{F,G}}$ la fonction f est donnée par

$$\pi^{-\frac{3n}{2}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_e d\sigma(\rho) \int_0^{+\infty} t^{\frac{3n}{2}-1} \underset{(y)}{\mathscr{C}} \left(\left(1 + \frac{i\delta}{2}\,(z - y)\,.\,\nu\right) e^{it\Phi(z,y,\rho)}\right) dt\,. \qquad (4.10)$$

Montrons qu'il existe ϵ, $r > 0$ tels que

$$\left|\underset{(y)}{\mathscr{C}} \left(\left(1 + \frac{i\delta}{2}\,(z - y)\,.\,\nu\right) e^{it\Phi(z,y,\rho)}\right)\right| \leqslant \mathrm{C}\,e^{-\epsilon t(1+|\mu|)} \qquad (4.11)$$

si $|z - x| < r$, $\rho \in \mathrm{F}$ et $t > 0$. Cette inégalité permet de prolonger f dans $\{z \in \mathbf{C}^n : |z - x| < r\}$ par l'expression (4.10).

En explicitant φ dans (4.11), on obtient

$$e^{-t(\mathscr{I}z.\nu - \delta|\mathscr{I}z|^2) - \delta t|\mathscr{R}z - \mu|^2}$$

$$\left|\underset{(y)}{\mathscr{C}} \left(e^{-ity.\nu - \delta t|y-\mu|^2} \left(1 + \frac{i\delta}{2}\,(z - y)\,.\,\nu\right)\right)\right|. \qquad (4.12)$$

Par définition du front d'onde analytique (voir [6], [13]) on peut trouver ϵ, $r > 0$ tels que

$$\left| \underset{(y)}{\mathscr{C}} \left(e^{-ity.\nu - \delta t|y-\mu|^2} \left(1 + \frac{i\delta}{2}(z-y).\nu\right)\right)\right| \leqslant C e^{-\epsilon t}$$

si $(\mu, \nu) \in F$ et $|\mu - x| < r$. Il suffit pour cela d'invoquer la définition du front d'onde analytique en tout point (x, ν), $\nu \in F_x \cap S_{n-1}$, et d'utiliser ensuite la compacité de $F_x \cap S_{n-1}$. D'autre part il existe $c > 0$ tel que $|\mathcal{R}z - x| < r/2$ et $|x - \mu| \geqslant r$ impliquent $|\mathcal{R}z - \mu| \geqslant c(1 + |\mu|)$. En tenant compte de ces deux contributions dans (4.12) on obtient (4.11) si $|z - x|$ est assez petit.

THEOREME 4.6. – *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, $F_1, \ldots, F_N$ *des fermés coniques de* $\dot{T}^* \mathbf{R}^n$ *convexes par fibre qui recouvrent* $\dot{T}^* \mathbf{R}^n$ *et* $\mathscr{C}$ *une distribution dans* Ω. *Il existe des fonctions* f_j *holomorphes dans les ouverts* $U_j = \Omega_{F_j,[\mathscr{C}]}$, $j = 1, \ldots N$, *à croissance lente dans* $U_j \cap (\Omega + i\mathbf{R}^n)$ *et telles que*

$$\mathscr{C} - \sum_{j=1}^{N} b(f_j) \in A(\Omega). \tag{4.13}$$

En outre, si $x \in \Omega$ *et* $\{x\} \times F_{j,x} \cap WF_a \mathscr{C} = \phi$, *la fonction* f_j *se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de* x.

Remarquons que, par définition de U_j, f_j est holomorphe dans un voisinage de $\mathbf{R}^n \backslash [\mathscr{C}]$ et même de $\mathbf{R}^n \backslash [\mathscr{C}]_a$.

La formule (4.16) donne une expression explicite de l'ouvert U de $\mathbf{C}^n$ où la fonction (4.13) admet un prolongement holomorphe. En particulier, si $\Omega = \mathbf{R}^n$ on a $U = \mathbf{C}^n$.

Démonstration. – Soient ω_m des ouverts relativement compacts dans Ω tels que $\overline{\omega_m} \subset \omega_{m+1}$, $\Omega = \bigcup_1^\infty \omega_m$ et A_m des ouverts de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $\overline{A_{m+1}} \subset A_m$, $[\mathscr{C}] = \bigcap_1^\infty A_m$.

Pour tout m, on peut trouver une fonction $f \in C_0(\overline{\omega_m})$ et un multiindice α tels que

$$\mathscr{C}(\varphi) = \int f(x)\, D^\alpha \varphi(x)\, dx \quad \text{si} \quad \varphi \in D(\omega_m).$$

Considérons également une fonction $\rho \in C_\infty(\mathbf{R}^n)$ égale à 1 dans un voisinage V de $[\mathscr{C}]$ et dont le support est inclus à A_m. On pose

$$\mathscr{T}_m(\varphi) = \int_{\omega_m} f(x)\, D^\alpha(\rho\varphi)(x)\, dx\,, \quad \varphi \in D(\mathbf{R}^n)\,.$$

Par construction $\mathscr{T}_m = \mathscr{T}$ dans ω_m et $[\mathscr{T}_m] \subset \overline{\omega_m \cap A_m}$.

Introduisons les ouverts

$$U_{j,m} = \Omega_{F_j, \overline{A_m}} \quad \text{et} \quad \Omega_{j,m} = \Omega_{F_j, \overline{A_m} \setminus \omega_m}\,.$$

On a

$$U_{j,m} \subset \Omega_{j,m} \cap U_j$$

et

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} U_{j,m} = U_j\,, \quad \Omega_j = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_{j,m} = \Omega_{F_j, [\mathscr{T}] \cap \partial\Omega}\,.$$

En particulier Ω_j est un ouvert pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$.

Posons encore

$$e_j = F_j \cap S^* \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad e_j' = e_j \setminus \bigcap_{k<j} e_k\,.$$

Par le théorème 4.5, la fonction

$$f_{j,m}(z) = \int_{e_j'} \underset{(y)}{\mathscr{T}_m}\, (g(z, y, \rho))\, d\sigma(\rho) \tag{4.14}$$

est holomorphe et à croissance lente dans $U_{j,m}$. De plus

$$\mathscr{T}_m = \sum_{j=1}^{N} b(f_{j,m})\,.$$

On a

$$[\mathscr{T}_p - \mathscr{T}_q] \subset (\overline{A_p} \setminus \omega_p) \cup (\overline{A_q} \setminus \omega_q)$$

pour tous p, q. De fait, si par exemple $p < q$,

$$[\mathscr{T}_p - \mathscr{T}_q] \subset [\mathscr{T}_p] \cup [\mathscr{T}_q] \subset \overline{A}_p$$

et $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}_q = \mathscr{T}$ dans ω_p. Comme

$$\Omega_{j,p} \cap \Omega_{j,q} = \Omega_{F_j, (\overline{A_p} \setminus \omega_p) \cup (\overline{A_q} \setminus \omega_q)}\,,$$

la fonction $f_{j,p} - f_{j,q}$ se prolonge dans $\Omega_{j,p} \cap \Omega_{j,q}$ pour tous p, q. Puisque Ω_j est pseudoconvexe on peut trouver des fonctions $g_{j,p} \in \mathcal{O}(\Omega_{j,p})$ telles que

$$f_{j,p} - f_{j,q} = g_{j,p} - g_{j,q} \quad \text{dans} \quad U_{j,p} \cap U_{j,q}\,.$$

Définissons une fonction $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$ par les conditions

$$f_j = f_{j,m} - g_{j,m} \quad \text{dans} \quad U_{j,m}\,. \tag{4.15}$$

Par définition de $\Omega_{j,m}$, la fonction $g_{j,m}$ est holomorphe dans un voisinage complexe du complémentaire de $G_m \backslash \omega_m$. La fonction f_j est donc à croissance lente dans $U_j \cap (\Omega + i\mathbf{R}^n)$.

Soit

$$\Omega^{(m)} = \bigcap_{j=1}^{N} \Omega_{j,m} = \{z \in \mathbf{C}^n : |\Im z| + \delta |\Im z|^2 < \frac{\delta}{2} d^2(\Re z, \overline{A_m} \backslash \omega_m)\}.$$

Si $p < q$ on a

$$\Omega^{(p)} \cap \Omega^{(q)} \cap \mathbf{R}^n = \omega_p \cup \complement \overline{A_p}.$$

Comme $\mathscr{C}_p = \mathscr{C}_q = \mathscr{C}$ dans ω_p et $\mathscr{C}_p = \mathscr{C}_q = 0$ dans $\complement A_p$, il vient

$$\sum_{j=1}^{N} (g_{j,p} - g_{j,q}) = \sum_{j=1}^{N} (b(f_{j,p}) - b(f_{j,q})) = \mathscr{C}_p - \mathscr{C}_q = 0$$

dans $\Omega^{(p)} \cap \Omega^{(q)} \cap \mathbf{R}^n$. Par prolongement analytique

$$\sum_{j=1}^{N} g_{j,p} = \sum_{j=1}^{N} g_{j,q} \quad \text{dans} \quad \Omega^{(p)} \cap \Omega^{(q)}.$$

Désignons par g la fonction holomorphe dans

$$U = \bigcup_{1}^{\infty} \Omega^{(m)} = \{z \in \mathbf{C}^n : |\Im z| + \delta |\Im z|^2 < \frac{\delta}{2} d^2(\Re z, [\mathscr{C}] \cap \partial\Omega)\} \tag{4.16}$$

égale à $\sum_{j=1}^{N} g_{j,m}$ dans $\Omega^{(m)}$. En utilisant (4.15) on obtient

$$\mathscr{C} - \sum_{j=1}^{N} b(f_j) = \mathscr{C}_m - \sum_{j=1}^{N} b(f_{j,m} - g_{j,m}) = g$$

dans ω_m. Ceci démontre (4.13).

Supposons enfin que $x \in \Omega$ et $\{x\} \times F_{j,x} \cap WF_a \mathscr{C} = \emptyset$. Prenons m assez grand pour que $x \in \omega_m$. Par le théorème 4.5, $f_{j,m}$ se prolonge au voisinage de x. Vu (4.15) il en est de même pour f_j car $x \in \Omega_{j,m}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Bengel, P. Schapira, Décomposition microlocale analytique des distributions, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 29-3 (1979), 101-124.

[2] J.M. Bony, Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques, *Astérisque*, 34-35 (1976), 43-91.

[3] J. BROS, D. IAGOLNITZER, Causality and local analyticity: mathematical study, *Ann. Inst. H. Poincaré,* section A, 18 (2) (1973), 147-184.

[4] J. BROS, D. IAGOLNITZER, Tuboïdes dans $\mathbf{C}^n$ et généralisation d'un théorème de Grauert, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 26-3 (1976), 49-72.

[5] L. HÖRMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables,* North-Holland Publ. Comp., 1973.

[6] P. LAUBIN, Sur le « wave front set » analytique d'une distribution, *Bull. Acad. Roy. Belgique,* (1982), 782-796.

[7] G. LEBEAU, Fonctions harmoniques et spectre singulier, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.,* 4[e] série, 13 (2) (1980), 269-291.

[8] J.L. LIEUTENANT, Decomposition of analytic functions on $\mathbf{R}^n$ in sum of holomorphic functions in conic tubes, *Bull. Soc. Sc. Liège,* 49[e] année, 9-10 (1980), 347-357.

[9] A. MARTINEAU, Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, *Proc. of the Intern. Summer Institute,* Lisboa, (1964).

[10] A. MELIN, J. SJÖSTRAND, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, *Comm. in Part. Diff. Eq.,* 1 (4) (1976), 313-400.

[11] M. SATO, T. KAWAÏ, M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Springer Lecture Notes in Math.,* 287 (1971), 265-529.

[12] P. SCHAPIRA, Théorie des hyperfonctions, *Springer Lecture Notes in Math.,* 126 (1970).

[13] J. SJÖSTRAND, Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, *Comm. in Part. Diff. Eq.,* 5 (1) (1980), 41-94.

[14] J. SJÖSTRAND, Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems, *Math. Ann.,* 254 (1980), 211-256.

Manuscrit reçu le 10 septembre 1982.

Pascal LAUBIN,
Université de Liège
Institut de Mathématique
15, avenue des Tilleuls
B-4000 Liège (Belgique).