ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

M. DE WILDE
P. B. A. LECOMTE

Cohomologie 3-différentiable de l'algèbre de Poisson d'une variété symplectique

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 4 (1983), p. 83-94
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_83_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 4 (1983), 83-94.

COHOMOLOGIE 3-DIFFÉRENTIABLE DE L'ALGÈBRE DE POISSON D'UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

par M. DE WILDE et P. B. A. LECOMTE

Introduction.

L'objet de cette note est l'étude de la cohomologie de Chevalley associée à la représentation adjointe de l'algèbre de Poisson d'une variété symplectique. Le premier espace de cohomologie a été déterminé par Avez et Lichnerowicz [1]. En supposant les cochaînes locales (i.e. opérateurs différentiels multilinéaires), S. Gutt a calculé les second et troisième espaces de cohomologie (cf. [3] et [6]). Enfin, à propos des variétés de contact, Lichnerowicz suggère dans [8] la considération de cocycles 3-différentiables qui seraient des générateurs de cette cohomologie. C'est en partie à élucider cette question dans le cas symplectique que cet article est consacré. Nous montrons que, comme dans le cas de l'algèbre des champs de vecteurs, la considération du symbole permet de scinder l'étude de la cohomologie en un problème purement algébrique (posé essentiellement au niveau des jets des champs considérés) et en l'exploitation des informations ainsi obtenues au niveau global. Ce problème algébrique, qui a une réponse simple dans le cas de l'algèbre des champs de vecteurs, est non résolu pour l'algèbre de Poisson. En nous limitant aux cochaînes 3-différentiables, nous déterminons complètement la cohomologie correspondante. La cohomologie 2-différentiable se décrit à partir de la cohomologie de de Rham et de l'homomorphisme de Chern-Weyl du fibré des repères symplectiques; la cohomologie 3-différentiable possède en outre une famille de générateurs analogues à ceux décrits par Lichnerowicz dans [8] et dont le 2-cocycle S^3_Γ de Vey [9] est le premier exemple.

1. Notations.

On considère une variété M de classe C_∞, connexe, à base dénombrable et séparée, munie d'une forme symplectique F; la dimension $m = 2n$ de M est supposée strictement plus grande que 2.

On note N l'espace des fonctions de classe C_∞ sur M muni du crochet de Poisson $\{,\}$ associé à F et on désigne par ∂ l'opérateur de bord de la cohomologie de Chevalley associée à la représentation adjointe de N; si $C \in \Lambda^p(N)$, on a explicitement

$$(1) \quad (\partial C)(u_0, \ldots, u_p) = \sum_i (-1)^i \{u_i, C(\ldots \hat{\imath} \ldots)\} + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} C(\{u_i, u_j\}, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots)$$

où $\hat{\imath}$ indique l'omission de u_i.

On désigne par μ l'application bijective de T_x^*M sur T_xM définie par $\mu^{-1} : T_xM \to T_x^*M : X \to -i(X)F$ et son extension naturelle aux tenseurs covariants. On pose $\mu F = \Lambda$.

On se limite dans cet article, sauf dans le § 2, à la considération des cochaînes différentiables, c'est-à-dire de cochaînes qui sont des opérateurs différentiels multilinéaires en leurs arguments. Pour une telle cochaîne C, le *symbole* σ_C est défini de la façon usuelle à partir des termes de C d'ordre total maximum. Son *symbole lexicographique* $\bar{\sigma}_C$ est obtenu de façon analogue à partir des termes d'ordre $\vec{r} = (r_0, \ldots, r_{p-1})$ tels que $r_0 + \cdots + r_{p-1}$ soit maximum et que $\vec{r}$ soit maximum dans l'ordre lexicographique. Vu l'antisymétrie de C, pour un tel $\vec{r}$, on a toujours $r_0 \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_{p-1}$.

2. Réduction aux cochaînes nulles sur les constantes.

Soit un sous-espace $L \subset \Lambda(N)$ stable par ∂, contenant l'identité $\mathbf{1}$ de N dans N, tel que $\mathbf{1} \wedge L \subset L$ et tel que $i(1)L \subset L$, où $i(1)$ est le produit intérieur par l'élément $1 \in N$; L contient le bord $\hat{F}$ de $\mathbf{1}$ et, puisque

$$\hat{F} \wedge C = \partial(\mathbf{1} \wedge C) + \mathbf{1} \wedge \partial C,$$

on a $\hat{F} \wedge L \subset L$.

Posons $L_{nc} = L \cap \ker i(1)$; il est clair que $\partial L_{nc} \subset L_{nc}$ et que $\hat{F} \in L_{nc}$ si bien que $C \to \hat{F} \wedge C$ induit une application $F_\# : H(L_{nc}, \partial) \to H(L_{nc}, \partial)$.

La cohomologie $H(L,\partial)$ se calcule en termes de la cohomologie $H(L_{nc},\partial)$ comme suit :

PROPOSITION 2.1. — (i) *L'application*

$$\varphi : L_{nc}^2 \to L : \quad (C_1, C_2) \to C_1 + \mathbf{1} \wedge C_2$$

induit un isomorphisme $\varphi_\# : H(L_{nc}^2,\partial') \to H(L,\partial)$, *où*

$$\partial' : (C_1, C_2) \to (\partial C_1 + \hat{F} \wedge C_2, -\partial C_2).$$

(ii) *La cohomologie* $H(L_{nc}^2,\partial')$ *est isomorphe à*

$$H(L_{nc},\partial)/\mathrm{im}\, F_\# \oplus \ker F_\# .$$

Preuve. — Il est facile de montrer que φ est une bijection d'inverse

$$\varphi^{-1} : C \to (C - \mathbf{1} \wedge i(1)C, i(1)C)$$

et que $\partial' = \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi$. D'où (i).

Pour (ii), on procède de la même manière que dans [7] où est traité le cas $L = \wedge_{1\text{-diff}}(N)$ de l'espace des cochaînes 1-différentiables.

La proposition 1 est applicable à $\Lambda_{loc}(N)$, $\Lambda_{diff}(N)$ et $\Lambda_{k\text{-diff}}(N)$ qui sont respectivement les sous-espaces de $\Lambda(N)$ formés des cochaînes locales, différentiables et k-différentiables en chaque argument (le fait que $\partial\Lambda_{k\text{-diff}}(N) \subset \Lambda_{k\text{-diff}}(N)$ est établi plus bas). Comme on ne s'intéresse ici qu'à ces sous-espaces, dans la suite, sauf mention explicite du contraire, les cochaînes envisagées sont supposées nulles sur les constantes.

3. Structure du symbole.

Il est utile d'examiner la forme locale du bord ∂C d'une cochaîne différentiable C. Supposons donc que $M = \mathbf{R}^m$ et que F est la forme symplectique canonique.

Il est clair que l'application

$$\theta : \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}} C_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}} D^{\alpha_0} u_0 \dots D^{\alpha_{p-1}} u_{p-1} \to \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}} C_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}} \xi_0^{\alpha_0} \dots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}.$$

est une bijection linéaire de $\Lambda^p_{\mathrm{diff\,nc}}(N)$ sur l'espace $\mathbf{P}^p$ des polynômes antisymétriques en $\xi_0, \ldots, \xi_{p-1} \in \mathbf{R}^{m*}$ à coefficients dans N et de degré 1 au moins en chaque variable; θ induit sur $\mathbf{P} = \oplus \mathbf{P}^p$ un opérateur de cohomologie $\delta = \theta \circ \partial \circ \theta^{-1}$ qu'il est facile d'expliciter : si on pose

$$d(\Sigma C_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1}} \xi_0^{\alpha_0} \ldots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}}) = \Sigma (dC_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1}}) \xi_0^{\alpha_0} \ldots \xi_{p-1}^{\alpha_{p-1}},$$

alors

$$\begin{aligned}(\delta P)(\xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_i (-1)^i \Lambda(\xi_i, (dP)(\ldots \hat{i} \ldots)) \\ + \sum_{i<j} (-1)^j \Lambda(\xi_i,\xi_j)[P(\ldots,\underset{(i)}{\xi_i+\xi_j},\ldots \hat{j} \ldots) - P(\ldots \hat{j} \ldots) \\ - P(\ldots,\underset{(i)}{\xi_j},\ldots \hat{j} \ldots)].\end{aligned}$$

On remarque en particulier que si P est homogène de degré $(r_0,\ldots,r_{p-1})$, le terme i de la première somme est de degré $(r_0,\ldots,r_{i-1},1,r_i,\ldots,r_{p-1})$ et que si $r_i > 1$, le terme i,j de la seconde se développe en

$$(-1)^j \sum_{0<k<r_i} \frac{1}{k!} \Lambda(\xi_i,\xi_j)(\xi_j D_{\xi_i})^k P(\ldots \hat{j} \ldots)$$

dont chaque terme est de degré

$$(r_0,\ldots,r_{i-1},r_i+1-k,r_{i+1},\ldots,r_{j-1},1+k,r_j,\ldots,r_{p-1}).$$

Dès lors, comme annoncé, ∂C *est k-différentiable si* C *l'est.*

Notons également que, puisque $C \in \Lambda_{\mathrm{diff,nc}}(N)$ est antisymétrique, son degré lexicographique maximum est de la forme

$$\vec{r} = (r_0,\ldots,r_{k_0-1},\underset{(k_1)}{2,\ldots,2},1,\ldots,1) \quad (r_0 \geqslant \ldots \geqslant r_{k_0-1} > 2)$$

et il résulte facilement de ce qui précède que la composante $\bar{\sigma}_{\partial C}$ de $\theta\,\partial C$ de degré maximum dans l'ordre lexicographique s'exprime en termes de la composante analogue $\bar{\sigma}_C$ de θC par

$$\bar{\sigma}_{\partial C} = \sum_{\substack{i<j \\ k_0 \leqslant j \leqslant k_1}} (-1)^j \Lambda(\xi_i,\xi_j)(\xi_j D_{\xi_i}) \bar{\sigma}_C(\ldots \hat{j} \ldots).$$

On peut interpréter cette relation comme suit.

Un polynôme de degré 2 en $\xi_1, \ldots, \xi_s$ et antisymétrique en ces variables s'identifie naturellement à une application s-linéaire en les matrices $\mu^{-1}\xi_i \otimes \xi_i (i \leqslant s)$ et, par suite, à une forme s-linéaire alternée sur l'algèbre de Lie $\mathrm{sp}(n,\mathbf{R})$ qui est précisément engendrée par ces matrices.

Pour $x \in \mathrm{M}$ et $\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{p-1}$ fixés, $\bar{\sigma}_{\mathrm{C}}(\xi_0, \ldots, \xi_{p-1})$ s'identifie donc à l'évaluation en $\mu^{-1}\xi_i \otimes \xi_i (k_0 \leqslant i < k_1)$ d'une cochaîne de $\mathrm{sp}(n,\mathbf{R})$ à valeurs dans l'espace des polynômes en $\xi_0, \ldots, \xi_{k_0-1}$ de degré > 2 en chaque argument. Un calcul élémentaire montre alors que la formule précédente peut s'écrire

$$\bar{\sigma}_{\partial\mathrm{C}} = (-1)^{k_0+1}\, \Delta\bar{\sigma}_{\mathrm{C}}$$

où Δ est le bord de Chevalley associé à la représentation naturelle de $\mathrm{sp}(n,\mathbf{R})$ sur l'espace des polynômes de degré $(r_0, \ldots, r_{k_0-1})$ en $\xi_0, \ldots, \xi_{k_0-1}$.

Pour $n \geqslant 2$, l'algèbre $\mathrm{sp}(n,\mathbf{R})$ est simple si bien que [2]

$$\ker \Delta = \mathscr{P}_0 \otimes \mathscr{C}_0 \oplus \operatorname{im} \Delta \tag{3}$$

où $\mathscr{P}_0$ est l'algèbre des polynômes invariants par l'action du groupe $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{R})$ et $\mathscr{C}_0$ l'espace des cochaînes scalaires invariantes sur $\mathrm{sp}(n,\mathbf{R})$. Par ailleurs, on sait [10] qu'un élément de $\mathscr{P}_0$ en les variables $\xi_1, \ldots, \xi_k$ est un polynôme en les $\Lambda(\xi_i,\xi_j)(i<j\leqslant k)$ et que l'algèbre $\mathscr{C}_0$ est engendrée par les restrictions à $\mathrm{sp}(n,\mathbf{R})$ des formes invariantes sur **gl** $(2n,\mathbf{R})$ définies par

$$\eta_k : (\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_{4k-2}) \to (\alpha . \mathrm{tr})(\mathrm{A}_0 \ldots \mathrm{A}_{4k-2}) \quad (k \leqslant m) \tag{4}$$

où α indique l'antisymmétrisation [5]; en particulier, évalué en des A_j de la forme $\mu^{-1}\xi_j \otimes \xi_j$, un élément de $\mathscr{C}_0$ est également un polynôme en les $\Lambda(\xi_i,\xi_j)$.

Désignons par $\mathscr{L}_0$ le produit $\mathscr{P}_0 \otimes \mathscr{C}_0 \otimes \mathscr{T}$ où $\mathscr{T}$ est l'espace des champs de tenseurs antisymétriques contravariants sur M.

PROPOSITION 3.1. — *Si* C *est un cocycle différentiable et d'ordre total* t, *en le corrigeant par un cobord, on peut supposer son symbole de la forme*

$$\sigma_{\mathrm{C}} = \sum_{\substack{r_0 \geqslant \ldots \geqslant r_{p-1} \\ |\vec{r}|=t}} \alpha . \mathrm{P}_{\vec{r}}$$

où $\mathrm{P}_{\vec{r}} \in \mathscr{L}_0$ *pour tout* $\vec{r}$.

Preuve. — Supposons d'abord que $M = \mathbf{R}^m$. On se convainc sans peine, en utilisant (3), que si $P \in \mathbf{P}$ est homogène de degré $(r_0,\ldots,r_{k_0-1},2,\ldots,2,1,\ldots,1)$, avec $r_i < 2$ pour $i > k_0$, et si $\Delta P = 0$, alors $P = P' + \Delta P''$ où $P' \in \mathscr{L}_0$ et $P'' \in \mathbf{P}$. Par suite, vu (2), si $\vec{r}_0$ est le degré lexicographique maximum de θC, $\bar{\sigma}_C$ est de la forme

$$\bar{\sigma}_C = P_{\vec{r}_0} + \Delta P$$

où $P_{\vec{r}_0} \in \mathscr{L}_0$; en remplaçant C par $C - \partial\theta^{-1}P$, on voit que l'on peut supposer que $\bar{\sigma}_C \in \mathscr{L}_0$.

Soit $\vec{s} < \vec{r}_0$ et supposons avoir corrigé C par des cobords de manière que

$$\sigma_C = \sum_{\substack{r_0 \geqslant \ldots \geqslant r_{p-1} \\ |\vec{r}|=t}} \alpha . P_{\vec{r}}$$

où, pour $\vec{r} > \vec{s}$, $P_{\vec{r}} \in \mathscr{L}_0$, $\vec{s}$ étant de la forme $(s_0,\ldots,s_{p-1})$ avec $s_0 \geqslant \ldots \geqslant s_{p-1}$. Désignons par $\vec{s_2}$ le $(p+1)$-uple obtenu en intercalant un 2 parmi ceux de $\vec{s}$. La composante d'ordre $\vec{s_2}$ de $\theta\,\partial C$ est la somme de $\Delta P_{\vec{s}}$ et de termes de la forme

$$(*) \qquad \Lambda(\xi_i, dP_{\vec{r}}(\ldots\hat{i}\ldots))$$

$$\text{et } (**) \qquad \Lambda(\xi_i,\xi_j)(\xi_j D_{\xi_i})^k P_{\vec{r}}(\ldots\hat{j}\ldots)$$

avec $\vec{r} > \vec{s}$. Pour $P_{\vec{r}} \in \mathscr{L}_0$, (*) et (**) sont également des éléments de $\mathscr{L}_0$. Dès lors, vu (3), il résulte de $\partial C = 0$ que $\Delta P_{\vec{s}} = 0$; $P_{\vec{s}}$ est donc de la forme $P'_{\vec{s}} + \Delta P''_{\vec{s'}}$ où $P'_{\vec{s}} \in \mathscr{L}_0$ et $\vec{s'} < \vec{s}$. En défalquant $\partial\theta^{-1}P'_{\vec{s'}}$ de C, on voit que l'on n'altère pas les termes de σ_C de degré $> \vec{s}$ alors que l'on modifie sa composante de degré $\vec{s}$ de manière que ce soit un élément de $\mathscr{L}_0$. D'où la thèse.

Pour passer à une variété M quelconque, il suffit de procéder comme dans [4], proposition 4.1.

4. Espaces de cohomologie 2 et 3-différentiable.

a) Rappelons brièvement la description de la cohomologie 1-différentiable donnée par A. Lichnerowicz [7]. Il est aisé de constater que l'application

$$\boldsymbol{\mu} : \Lambda(M) \to \Lambda_{1\text{-diff},nc}(N) : \ \Omega \to [\boldsymbol{\mu}(\Omega) : (u_0,\ldots,u_{p-1}) \ \to \Omega(X_{u_0},\ldots,X_{u_{p-1}})],$$

où $X_u = \mu^{-1}\, du$ est le champ hamiltonien de u, est une bijection linéaire telle que $\boldsymbol{\mu} \circ d = \partial \circ \boldsymbol{\mu}$. Il en résulte aussitôt que

PROPOSITION 4.1 [7]. — *L'espace* $H(\Lambda_{1\text{-diff},nc}(N), \partial)$ *est naturellement isomorphe à l'espace* $H(\Lambda(M),d)$ *de cohomologie de de Rham de* M.

Pour décrire les espaces de cohomologie 2 et 3-différentiable, on va d'abord construire des cocycles ou des cochaînes dont les symboles engendrent l'espace $\mathscr{C}_0$ et l'espace $\mathscr{P}_3$, sous-espace de $\mathscr{P}_0$ formé des polynômes de degré 3 en chaque argument.

b) Si Γ est une connexion sur M, on a construit dans [4] des cochaînes 1-différentiables E_k^0 sur $\mathscr{H}(M)$ telles que

$$\sigma_{E_k^0} = \eta_k \qquad \text{et} \qquad \partial E_k^0 = T_k,$$

où les η_k sont définis par (4) et les T_k sont, à un facteur près, les représentants des classes-trace de M fournis par l'homomorphisme de Chern-Weil associé à la connexion Γ. Si on pose

$$E_k(u_0,\ldots,u_{4k-2}) = E_k^0(X_{u_0},\ldots,X_{u_{4k-2}}),$$

E_k est une cochaîne 2-différentiable sur N, de symbole

$$\eta_k(\mu^{-1}\xi_0 \otimes \xi_0,\ldots,\mu^{-1}\xi_{4k-2} \otimes \xi_{4k-2})$$

et de bord $\boldsymbol{\mu} T_k$.

c) Soit ∇ la dérivation covariante associée à la connexion Γ. On note $L_X\nabla$ la dérivée de Lie de ∇ dans la direction de X :

$$(L_X\nabla)(Y,Z) = [X,\nabla_Y Z] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Y[X,Z],$$

et τ l'application $X \to L_X\nabla$, à valeurs dans les champs de tenseurs de type $\binom{1}{2}$ sur M. On pose

$$\mathscr{L}\Gamma : u \to (\mathscr{L}_u\Gamma : X,Y,Z \to F(\tau_{X_u}(X,Y),Z)).$$

Lorsque Γ est une connexion symplectique (c'est-à-dire sans torsion et telle que $\nabla F = 0$), $\mathscr{L}_u\Gamma$ est un champ de 3-tenseurs covariants symétriques; on observe en outre que le symbole de $\mathscr{L}\Gamma$ est

$$\sigma_{\mathscr{L}\Gamma}(\xi) = \xi \otimes \xi \otimes \xi.$$

Soit alors $P \in \mathscr{P}_3$. En le polarisant en chaque argument, on obtient une application multilinéaire alternée $\tilde{P}$ sur l'espace des 3-tenseurs covariants symétriques. Posons

$$D_P(u_0,\ldots,u_{p-1}) = \tilde{P}(\mathscr{L}_{u_0}\Gamma,\ldots,\mathscr{L}_{u_{p-1}}\Gamma).$$

Visiblement, $D_P \in \Lambda_{3\text{-diff},nc}(N)$ et $\sigma_{D_P} = P$. En fait,

PROPOSITION 4.2. — *Pour tout* $P \in \mathscr{P}_3$, D_P *est un cocycle, sa classe de cohomologie dans* $H(\Lambda_{3\text{-diff}}(N),\partial)$ *n'est pas nulle et ne dépend pas de la connexion* Γ.

Preuve. — Il est clair que τ, comme 1-cochaîne à valeurs dans les champs de tenseurs de type $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, est un 1-cocycle pour la dérivée de Lie sur ces champs; dès lors, comme $\mathscr{L}_{X_u}F = 0$, $\mathscr{L}\Gamma$ est un 1-cocycle de Chevalley de N pris comme 1-cochaîne à valeurs dans les champs de 3-tenseurs covariants symétriques; D_P est donc un cocycle puisque

$$\partial D_P = \sum_{i\leqslant p} (-1)^{i+1}\tilde{P}(\mathscr{L}\Gamma,\ \ldots,\ \underset{(i)}{\partial\mathscr{L}\Gamma},\ \ldots,\ \mathscr{L}\Gamma).$$

En outre, D_P ne saurait être le bord d'une cochaîne E 3-différentiable si $P \neq 0$, car ∂E n'a aucun terme de degré 3 en chaque argument.

Si Γ' est une connexion symplectique, la différence $\nabla' - \nabla = A$ est un champ de tenseurs de type $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sur M si bien que $\tau' = \tau + \partial A$. Si on pose $\alpha = F(A(.,.),.)$, on a donc $\mathscr{L}\Gamma' = \mathscr{L}\Gamma + \partial\alpha$ de sorte que

$$\tilde{P}(\mathscr{L}\Gamma',\ldots,\mathscr{L}\Gamma') = \tilde{P}(\mathscr{L}\Gamma,\ldots,\mathscr{L}\Gamma) + \partial\left(\sum_{i\leqslant p}(-1)^{i+1}\tilde{P}(\mathscr{L}\Gamma,\ldots,\mathscr{L}\Gamma,\underset{(i)}{\alpha},\mathscr{L}\Gamma',\ldots,\mathscr{L}\Gamma')\right);$$

ainsi, la classe de D_P ne dépend pas de la connexion Γ.

Remarque. — La construction précédente fournit une manière commode et intrinsèque de construire et de généraliser le cocyle S^3_Γ introduit par J. Vey [9] qui joue un rôle important dans l'étude des $*$-produits de (M,F) : en effet, on constate sans difficulté que $S^3_\Gamma = D_P$ lorsque P est le polynôme $\Lambda(\xi_0,\xi_1)^3$.

d) On note $\mathrm{I(N)}$ le sous-espace de $\Lambda_{3\text{-diff}, nc}(\mathrm{N})$ engendré par les cochaînes de la forme

$$\mathrm{D_P} \wedge \mathrm{E}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{E}_{i_k} \wedge \mu\Omega(\mathrm{P} \in \mathscr{P}_3, i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \Omega \in \Lambda(\mathrm{M})).$$

Il est clair que $\partial \mathrm{I(N)} \subset \mathrm{I(N)}$.

THÉORÈME 4.3. — *L'inclusion* $\mathrm{I(N)} \hookrightarrow \Lambda_{3\text{-diff, nc}}(\mathrm{N})$ *induit un isomorphisme en cohomologie.*

Preuve. — Il suffit d'établir la proposition pour $\mathbf{R}^m$ muni de la structure symplectique canonique, le passage à $(\mathrm{M,F})$ s'opérant au moyen des suites exactes de Mayer-Vietoris comme dans [4], théorème 9.1.

Lorsque $\mathrm{M} = \mathbf{R}^m$, les classes-trace sont nulles; il existe donc des T'_k tels que $\mathrm{T}_k = d\mathrm{T}'_k$; les $\mathrm{E}_k\text{-}\mu\mathrm{T}'_k$ sont alors des cocycles 2-différentiables de même symbole que les E_k. On peut donc supposer que les E_k sont des cocycles. Fixons une base P_ℓ $(\ell \leqslant a)$ de $\mathscr{P}_3$. Tout élément de $\mathrm{I(N)}$ s'écrit alors de manière unique

$$\sum_{\ell} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_\ell} \wedge \mathrm{E}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{E}_{i_k} \wedge \mu\Omega_{\ell, i_1, \ldots, i_k}. \tag{5}$$

Cela étant,

(i) *Tout cocyle* C 3-*différentiable et nul sur les constantes est cohomologue à un élément de* $\mathrm{I(N)}$.

Preuve de (i). — Il résulte de la proposition 2 qu'il existe un $\mathrm{D} \in \Lambda_{3\text{-diff}, nc}(\mathrm{N})$ tel que le symbole dans l'ordre lexicographique de $\mathrm{C} - \partial\mathrm{D}$ soit un élément de $\mathscr{P}_3 \otimes \mathscr{C}_0 \otimes \mu\Lambda(\mathrm{M})$. Quitte à remplacer C par $\mathrm{C} - \partial\mathrm{D}$, on peut donc supposer que $\bar{\sigma}_{\mathrm{C}}$ est le symbole d'un C' de la forme (5).

Ce C' est un cocycle. En effet, si $\vec{r}$ est l'ordre lexicographique de C et si $\vec{r_1}$ désigne le $(p+1)$-uple obtenu en intercalant un 1 parmi ceux de $\vec{r}$, le symbole dans l'ordre lexicographique des termes d'ordre $\vec{r_1}$ de $\partial\mathrm{C}$ s'obtient en ajoutant à celui,

$$\sum_{\ell} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{P}_\ell \otimes (\eta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{i_k}) \otimes \mu d\Omega_{\ell, i_1, \ldots, i_k},$$

de $\partial\mathrm{C}'$, les contributions des termes de C d'ordre total $|\vec{r}| - 1$, lesquelles appartiennent nécessairement à $\operatorname{im}\Delta$. En vertu de (3), les formes $\Omega_{\ell,i_1,\ldots,i_k}$ sont donc fermées et, par suite, C′ est un cocycle.

Comme $C - C'$ est d'ordre $< \vec{r}$, on achève la preuve de (i) par récurrence sur l'ordre de C.

(ii) *Si* $C \in I(N)$ *est le bord d'une cochaîne* D 3-*différentiable, alors* C *est le bord d'un élément de* I(N).

Preuve de (ii). — De façon générale, si D est 3-différentiable, un terme de D d'ordre $\vec{s}$ contribue dans ∂D à des termes d'ordre $\vec{s}_2$ et à des termes d'ordre $\vec{s}_1$, les symboles dans l'ordre lexicographique des premiers étant en outre des éléments de $\operatorname{im}\Delta$.

Vu (3), il en résulte que si $C = \delta D$, de la forme (4), est d'ordre $\vec{r}$, $\bar{\sigma}_C$ s'obtient en prenant dans ∂D les contributions d'ordre $\vec{s}_1$ où $\vec{s}$ est tel que $\vec{s}_1 = \vec{r}$; en conséquence, l'ordre $\vec{t}$ de D est tel que $\vec{t}_1 \geqslant \vec{r}$ et les termes d'ordre $\vec{t}_2$ de ∂D sont nuls; vu (2), on a donc $\Delta\bar{\sigma}_D = 0$. En procédant comme dans la preuve de la proposition 2, on voit que l'on peut corriger D par un bord pour que $\bar{\sigma}_D$ prenne la forme

$$\sum_{\ell} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} P_\ell \otimes (\eta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{i_k}) \otimes \mu\Omega'_{\ell, i_1,\ldots,i_k}.$$

Les termes d'ordre $\vec{t}_1$ de ∂D sont alors donnés par

$$\sum_{\ell} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} P_\ell \otimes (\eta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{i_k}) \otimes \mu\, d\Omega'_{\ell, i_1,\ldots,i_k}.$$

Si $\vec{t}_1 < \vec{r}$, les formes $\Omega'_{\ell, i_1,\ldots,i_k}$ sont fermées et, si $\vec{t}_1 = \vec{r}$,

$$d\Omega'_{\ell, i_1,\ldots,i_k} = \Omega_{\ell,i_1,\ldots,i_k}.$$

En retirant à D l'élément

$$\sum_{\ell} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} D_{P_\ell} \wedge E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_1} \wedge \mu\Omega'_{\ell,i_1,\ldots,i_k}$$

et à C le bord de celui-ci, on diminue l'ordre de D si bien qu'une récurrence sur ce dernier permet de conclure.

On déduit sans peine de ce qui précède le

THÉORÈME 4.4. — *On a*

(i) $H(\Lambda_{3\text{-diff},nc}(N),\partial) \cong \mathscr{P}_3 \otimes H(\Lambda_{2\text{-diff},nc}(N),\partial)$

(ii) $H(\Lambda_{3\text{-diff}}(N),\partial) \cong \mathscr{P}_3 \otimes H(\Lambda_{2\text{-diff}}(N),\partial)$

(iii) $H(\Lambda_{2\text{-diff},nc}(N),\partial) \cong H(\Lambda(M)^{2^m},\partial_0)$ où

$$\partial_0(\Omega_{i_1\ldots i_k}\,(i_1<\ldots<i_k)) = ((-1)^k\, d\Omega_{i_1\ldots i_k} + \sum_j \sum_{i_{j-1}<\ell<i_j} (-1)^{j-1} T_\ell \wedge \Omega_{i_1\ldots i_{j-1}\ell i_j\ldots i_k}).$$

Pour (i), on note que si $C \in I(N)$ est 2-différentiable et si $C = \partial D$, $D \in I(N)$, alors D est la somme d'un cocycle et d'un élément 2-différentiable de $I(N)$. Donc le plongement naturel de $H(\Lambda_{2\text{-diff},nc}(N),\partial)$ dans $H(\Lambda_{3\text{-diff},nc}(N),\partial)$ est injectif. Le point (i) est alors immédiat.

Pour (ii), on observe que le $\hat{F}$ de la proposition 2.1 est en fait μF. On en tire sans difficulté que, si $I'(N)$ est l'espace engendré par les cochaînes

$$D_P \wedge E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_k} \wedge C \quad (P \in \mathscr{P}_3\,;\, i_1<\ldots<i_k \leqslant m;\quad C \in \Lambda_{1\text{-diff}}(N)),$$

l'inclusion naturelle de $I'(N)$ dans $\Lambda_{3\text{-diff}}(N)$ induit un isomorphisme en cohomologie. On conclut alors comme en (i).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. AVEZ, A. LICHNEROWICZ, Dérivations et premier groupe de cohomologie pour des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique *C.R.A.S.*, Paris, 275 A (1972), 113-114.

[2] P. CARTIER, Théorie des algèbres semi-simples, exposé n° 7, in *Séminaire Sophus Lie*, École Normale Supérieure, Paris, 1954-1955.

[3] M. DE WILDE, S. GUTT, P. LECOMTE, A propos des deuxième et troisième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique, à paraître.

[4] M. DE WILDE, P. LECOMTE, Cohomology of the Lie algebra of smooth vector fields of a manifold, associated to the Lie derivative of smooth forms, à paraître dans *Journ. de Math. Pures et Appl.*

[5] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, *Connections, curvature and cohomology, III.* Academic Press, New-York, London, 1972.

[6] S. GUTT, Second et troisième espaces de cohomologie différentiable de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique, *Ann. H. Poincaré*, 33 (1980), 1-31.

[7] A. LICHNEROWICZ, Cohomologie 1-différentiable des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact, *J. Math. Pures et Appl.*, t. 53 (1974), 459-484.

[8] A. LICHNEROWICZ, Cohomologies attachées à une variété de contact et applications, à paraître.

[9] J. VEY, Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comment. Math. Helvet.*, 50 (1975), 421-454.

[10] H. WEYL, The classical groups, their invariants and representations, *Princeton Math. Series*, Princeton, 1946.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1983.

M. DE WILDE et P. B. A. LECOMTE,
Université de Liège
Institut de Mathématique
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 Liège (Belgique).