ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NGHIÊM XUÂN HAI

La transformation de Fourier-Plancherel analytique des groupes de Lie. I : algèbres de Weyl et opérateurs différentiels

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 4 (1983), p. 95-133

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_95_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 4 (1983), 95-133.

LA TRANSFORMATION DE FOURIER-PLANCHEREL ANALYTIQUE DES GROUPES DE LIE I. ALGÈBRES DE WEYL ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

par NGHIÊM XUÂN HAI

0. Introduction.

Cet article est la première partie d'un travail dans lequel nous proposons une détermination analytique de la Transformation de Fourier-Plancherel d'un groupe de Lie résoluble, connexe et simplement connexe sur $\mathbf{R}$. Elle repose sur une détermination à partir de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G, d'une représentation infinitésimale de $\mathfrak{g}$ par des opérateurs différentiels antisymétriques opérant sur une variété analytique, représentation qui est canonique à isomorphismes canoniques d'opérateurs Fourier-Intégraux près. *Cette construction est entièrement nouvelle et donne analytiquement en une seule fois les représentations unitaires du dual réduit de* G. Elle munit le dual de G d'une structure analytique en termes d'opérateurs Fourier-Intégraux [4, 5, 8, 13].

Nous abordons ici seulement l'aspect algébrique de cette analyse de Fourier, laissant pour des exposés ultérieurs la partie analytique concernant les groupes nilpotents, puis les groupes résolubles.

Dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, il existe une structure algébrique canonique qui se décrit comme suit. Il existe une algèbre de Weyl A_m, qui est caractéristique (c'est-à-dire invariante par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$), dans laquelle $\mathfrak{g}$ opère par des dérivations. Le centre $\mathbf{K}$ de cette algèbre A_m est aussi caractéristique et, par la représentation adjointe, $\mathfrak{g}$ opère aussi dans $\mathbf{K}$ par des dérivations; ainsi on obtient les représentations de $\mathfrak{g}$ dans les algèbres de dérivations $\operatorname{Der}\mathbf{K}$ et $\operatorname{Der}A_m$. L'algèbre

Der $\mathbf{K} \oplus A_m$ possède naturellement une structure de produit semi-direct d'algèbres de Lie et apparaît comme une extension non triviale par $\mathbf{K}$ de Der A_m. La représentation de $\mathfrak{g}$ dans Der A_m n'est pas fidèle et ne peut se relever en une représentation (fidèle) dans Der $\mathbf{K} \oplus A_m$ que si un 2-cocycle canonique ω sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ est exact. Ceci arrive dans le cas nilpotent et la construction algébrique se termine là. Dans le cas général, on efface cette obstruction par introduction d'un nombre canonique de variables conjuguées algébriquement transcendentes sur A_m, ce qui est la transcription algébrique de l'introduction sur l'espace $\mathbf{K}^-$ des places de $\mathbf{K}$ de fonctions analytiques du type de logarithmes sur lesquelles $\mathfrak{g}$ agit encore par dérivation. La surface de Riemann associée est donc un recouvrement à une infinité de feuillets d'un certain ouvert de Zariski de $\mathbf{K}^-$. On pourra alors réaliser $\mathfrak{g}$ comme des opérateurs différentiels sur cette variété.

1.

Dans ce travail, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble sur un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique 0, algébriquement clos ou égal à $\mathbf{R}$. Lorsqu'il est défini, on note G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

La filtration naturelle de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est écrite $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ et elle sera prolongée au corps enveloppant $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

L'antiautomorphisme principal τ de $\mathfrak{g}$ se prolonge aussi à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et à $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$; il sera noté exponentiellement. Un sous-ensemble de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ est dit caractéristique s'il est invariant par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$ et fortement caractéristique s'il est aussi invariant par les anti-automorphismes de $\mathfrak{g}$. Sont utilisés les symboles exponentiels suivants : * pour désigner l'espace dual, $\hat{}$ pour désigner l'espace des caractères, $^\#$ pour désigner le centre, et enfin, ^{A} pour désigner le commutant de A.

2.

Un élément X d'un $\mathfrak{g}$-module M est appelé un $\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo N de poids $\lambda(X)$ lorsque $N \subset M$ et si l'on peut trouver un élément $\lambda(X) \in \mathfrak{g}^*$ tel que l'on ait pour tout $Y \in \mathfrak{g}$:

$$Y.X \in <\lambda(X), \quad Y> X + N.$$

On pose alors

$$\mu(X,Y) = Y.X - <\lambda(X),Y\rangle X.$$

Par exemple, un $\mathfrak{g}$-vecteur propre modulo 0 est un semi-invariant. L'ensemble des semi-invariants de $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ est noté E. Spécialement pour la lettre E, on note $A^E = A \cap E$ et A_E le localisé de A par $A \cap E$.

Lorsque le corps $\mathbf{k}$ n'est pas algébriquement clos, ces notions se traduisent un peu différemment. Une partie $\mathfrak{g}$-adaptée modulo N d'un $\mathfrak{g}$-module M est un sous-ensemble V dont l'image dans le passage au quotient par N et élimination des éléments nuls est une réunion des bases d'une somme directe de $\mathfrak{g}$-modules simples. Une telle partie est dite maximale si cette somme directe est le socle de $\mathfrak{g}$ dans M/N.

3.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ dite 2-nilpotente si $[\mathfrak{n},[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]] = 0$. On note Z_0 l'élément 1 de $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ et on dit qu'une base est standard si elle s'écrit

$$(Z_0,Z_1,\ldots,Z_R,P_1,P_2,\ldots,P_M,Q_1,Q_2,\ldots,Q_M)$$

au moyen de générateurs Z_i, P_j, Q_k qui commutent ensemble deux à deux, excepté les couples de générateurs conjugués P_i et Q_i qui vérifient $[P_i,Q_i] = Z_0$. On dit que P_i est la variable conjuguée de Q_i et vice-versa, et (P_i,Q_i) est appelé un couple de variables conjuguées. Les générateurs Z_j sont appelés variables centrales si $j \neq 0$.

Pour les algèbres de Lie bilatères, la référence est [9]. Rappelons que ces algèbres de Lie bilatères $\mathfrak{h}$ possèdent aussi un corps enveloppant réduit $\mathscr{F}(\mathfrak{h})$ et une algèbre enveloppante réduite $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ dans lesquelles Z_0 est identifié à 1 et ces notions généralisent celles des algèbres de Lie ordinaires. On a encore une filtration

$$\mathscr{E}(\mathfrak{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_n(\mathfrak{h}).$$

4.

On appelle anneau de Weyl sur un anneau commutatif unifère A l'anneau engendré (sans relations supplémentaires) sur A par une base standard

$$(Z_0, Z_1, \ldots, Z_R, P_1, \ldots, P_M, Q_1, \ldots, Q_M) \qquad \text{avec} \qquad Z_0 = 1$$

et on le note

$$A[Z_1, \ldots, Z_R, P_1, \ldots, P_M, Q_1, \ldots, Q_M].$$

Dans ce qui suit on suppose que A commute aux éléments de la base; le centre de l'anneau de Weyl est égal à $A[Z_1, \ldots, Z_R]$. Lorsque le centre admet un corps des fractions $\mathbf{K} = \operatorname{Fract} A[Z_1, \ldots, Z_R]$ on appelle algèbre de Weyl engendrée par la base standard ci-dessus l'algèbre $\mathbf{K}[P_1, \ldots, P_M, Q_1, \ldots, Q_M]$ engendrée par les variables conjugués P_i, Q_i sur $\mathbf{K}$; elle est évidemment une algèbre de Weyl à $2M$ variables sur $\mathbf{K}$.

5.

Dérivations d'un anneau de Weyl

$$\mathcal{A} = A[Z_1, \ldots, Z_R, P_1, \ldots, P_M, Q_1, \ldots, Q_M].$$

On suppose que le corps des fractions de $\mathcal{A}^\#$ existe et on le note $\mathbf{K}$. On note A_M l'algèbre de Weyl $\mathbf{K}\mathcal{A}$. Le centre de A_M est égal à $\mathbf{K}$ et toute dérivation de $\mathcal{A}$ laisse stable son centre $\mathcal{A}^\#$, donc définit par restriction à $\mathcal{A}^\#$ un élément de l'algèbre $\operatorname{Der} \mathcal{A}^\#$ des dérivations de $\mathcal{A}^\#$; cette dérivation se prolonge en un unique élément de $\operatorname{Der} \mathbf{K}$. Réciproquement, toute dérivation de $\mathbf{K}$ se prolonge en une dérivation de A_M si on décide qu'elle annulera les P_i, Q_j. De cette manière, on identifie $\operatorname{Der} \mathbf{K}$ à une sous-algèbre de $\operatorname{Der} A_M$ qui est un supplémentaire de l'idéal $\operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_M$ formé des dérivations de A_M qui annulent $\mathbf{K}$. Naturellement $\operatorname{Der} A_M$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathbf{K}$ et $\operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_M$ est un idéal pour cette structure avec $\operatorname{Der} \mathbf{K}$ comme sous-algèbre supplémentaire. On a donc un produit semi-direct

$$\operatorname{Der} A_M = \operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus \operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_M.$$

Comme toute dérivation de A_M nulle sur $\mathbf{K}$ provient de l'action adjointe d'un élément de A_M [3], on peut identifier $\mathrm{Der}_{\mathbf{K}} A_M$ avec $A_M/\mathbf{K}$. L'ensemble $\mathrm{Der}\,\mathbf{K} \oplus A_M$ possède naturellement une structure d'algèbre de Lie bilatère sur $\mathbf{K}$ obtenue comme produit semi-direct, structure qui dépend du choix de la base $(P_1, \ldots, P_M, Q_1, \ldots, Q_M)$ mais qui est toujours la même à isomorphisme près; on utilisera sans restriction l'algèbre de Lie bilatère $\mathrm{Der}\,\mathbf{K} \oplus A_M$, d'autant plus que la base des P_i, Q_i étant déjà donnée dans le contexte, on sous-entend que $\mathrm{Der}\,\mathbf{K}$ est la sous-algèbre des dérivations nulles sur cette base.

Considérant A_M comme une extension de $\mathrm{Der}_{\mathbf{K}} A_M = A_M/\mathbf{K}$, on obtient une suite exacte non scindée d'algèbres de Lie bilatères :

$$0 \to \mathbf{K} \to \mathrm{Der}\,\mathbf{K} \oplus A_M \to \mathrm{Der}\,A_M \to 0$$

et $\mathrm{Der}\,\mathbf{K} \oplus A_M$ est une extension de $\mathrm{Der}\,A_M$ par $\mathbf{K}$. C'est cette algèbre qui sert dans la suite pour calculer les représentations de $\mathfrak{g}$.

6.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant résoluble sur un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique 0, on applique le Théorème de Lie à l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la construction qui suit. On note $\mathfrak{g}_n$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ et on appelle *suite de composition canonique de* $\mathfrak{g}$ la suite des idéaux

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}_{n+1} = \mathfrak{g}$$

où pour tout $p = 1, 2, \ldots, n$, $\mathfrak{g}_p$ est le plus grand idéal de $\mathfrak{g}_n$ tel que $\mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_{p-1}$ un $\mathfrak{g}$-module semi-simple (i.e. $\mathfrak{g}_p/\mathfrak{g}_{p-1}$ est le socle du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}_n/\mathfrak{g}_{p-1}$).

7. Le Théorème algébrique principal.

Dans l'énoncé qui suit, on met en évidence un sous-corps canonique $\mathbf{K}_{n+1}$ de $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ auquel sont liés canoniquement les objets suivants :

un sous-corps $\mathbf{K}$ qui est le commutant de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathbf{K}_{n+1}$,
une algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_{n+1}$ sur $\mathbf{K}_{n+1}$.
une algèbre de Weyl A_m sur $\mathbf{K}$.

Il existe alors une représentation canonique de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre $\mathrm{Der}\,A_m$ qui est en fait définie sur $\mathfrak{g}\mathbf{K} + A_m$ et dont le noyau est exactement $\mathbf{K}$. Cette représentation ne peut pas toujours se relever en une représentation de $\mathfrak{g}\mathbf{K} + \mathrm{A}_m$ dans l'extension $\operatorname{Der}\mathbf{K} \oplus \mathrm{A}_m$ de $\operatorname{Der}\mathrm{A}_m$ (cf. § 5), l'obstruction étant un 2-cocycle ω sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$. Ce 2-cocycle est exact dans le cas nilpotent et cela simplifie énormément l'exposé. Dans le cas général, on obtient une représentation de $\mathfrak{g}$ en introduisant de nouvelles variables conjuguées, ce qui correspond à des fonctions transcendantes sur l'espace $\mathbf{K}^-$ des places de $\mathbf{K}$ (ce sont des logarithmes pour $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et les dérivations associées. On obtient alors une réalisation analytique infinitésimale de la Transformation de Fourier-Plancherel de G, ce qui sera décrit ultérieurement.

THÉORÈME A. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble sur un corps* $\mathbf{k}$ *de caractéristique* 0, *algébriquement clos ou égal à* $\mathbf{R}$, *et la suite de composition canonique de* $\mathfrak{g}$ *notée*

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}_{n+1} = \mathfrak{g}$$

(*ici* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n$ *si* $\mathfrak{g}$ *est nilpotent*).

I. *Les sous-corps commutatifs canoniques.*

Il existe un unique sous-corps $\mathbf{K}_{n+1}$ *de* $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ *tel que pour tout* $p = 1, 2, \ldots, n+1$, $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_{n+1} \cap \mathscr{K}(\mathfrak{g}_p)$ *soit le centre du commutant dans* $\mathscr{K}(\mathfrak{g}_p)$ *de* $\mathbf{K}_{p-1} = \mathbf{K}_{n+1} \cap \mathscr{K}(\mathfrak{g}_{p-1})$.

Pour tout $p = 1, 2, \ldots, n+1$ *et* $j = 1, 2, \ldots, n+2$, *on définit :*

$$\mathbf{K}_{p,j} = (\mathbf{K}_p)^{\mathfrak{g}_{j-1}}, \quad \mathbf{B}_p = \mathbf{K}_p \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g}_p) \quad et \quad \mathbf{B}_{p,j} = \mathbf{K}_{p,j} \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g}_p).$$

Les sous-corps $\mathbf{K}_p$, $\mathbf{K}_{p,j}$ *et les anneaux* $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{B}_{p,j}$ *sont canoniques, commutatifs et fortement caractéristiques et le centre de* $\mathscr{K}(\mathfrak{g}_p)$ *est égal à* $\mathbf{K}_{p,p+1}$.

II. *La partie nilpotente.*

II.1. *Pour tout* $p = 1, 2, \ldots, n+1$, *les sous-corps* $\mathbf{K}_{p,j}$ *sont des extensions pures de* $\mathbf{k}$, *de* $\mathbf{K}_{p-1,j}$ *et si* $j \leqslant n$, *de* $\mathbf{K}_{p,j+1}$ *et de* $\mathbf{K}_{p-1,j} . \mathbf{K}_{p,j+1}$. *Les corps des fractions des anneaux* $\mathbf{B}_{p,j}$ *sont les* $\mathbf{K}_{p,j}$.

II.2. *Le commutant* $\mathfrak{h}_p$ *de* $\mathbf{K}_p$ *dans* $\mathfrak{g}_p\mathbf{K}_p \subset \mathscr{K}(\mathfrak{g}_p)$ *est une algèbre de Heisenberg fortement caractéristique sur* $\mathbf{K}_p$ (*et contient* $\mathbf{K}_p$).

II.3. *L'ensemble* $\mathfrak{h}_p$ *engendre une algèbre de Weyl fortement caractéristique sur* $\mathbf{K}_p$, *qui s'identifie à l'algèbre enveloppante réduite*

$\mathscr{E}(\mathfrak{h}_p)$. *La représentation adjointe dans* $\mathscr{E}(\mathfrak{h}_p)$ *définit une représentation* ρ_p *de* $\mathfrak{g}_p\mathbf{K}_p$ *dans l'algèbre*

$$\mathrm{Der}\ \mathscr{E}(\mathfrak{h}_p) \cong \mathrm{Der}\ \mathbf{K}_p \oplus \mathscr{E}(\mathfrak{h})/\mathbf{K}_p .$$

Le noyau de ρ_p *est égal à* $\mathbf{K}_{p,p+1}$ *et son image est*

$$\mathrm{Der}_{\mathbf{K}_{p,p+1}}\mathbf{K}_p \oplus \mathfrak{h}_p/\mathbf{K}_p .$$

Pour toute base pure de $\mathbf{K}_p$ *sur* $\mathbf{K}_{p,p+1}$, *il existe donc une base de variables conjuguées dans* $\mathfrak{g}_p\mathbf{K}_p$ *et la réunion de ces deux bases avec la base standard de* $\mathfrak{h}_p$ *est une base standard d'une algèbre de Weyl. Hormis la localisation par un même semi-invariant appartenant à* $\mathbf{K}_{p,n+1}$, *on peut supposer que tous les éléments de base sont entiers (i.e. dans* $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_p)$*) et en conséquence,* $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_p)\mathbf{K}_{p,p+1}$ *est une algèbre de Weyl fortement caractéristique sur* $\mathbf{K}_{p,p+1}$. *Avec une base standard choisie, on précise les notations dans le cas* $p = n$:

$$\mathrm{A_M} = \mathscr{U}(\mathfrak{g}_n)\mathbf{K}_{n,n+1} = \mathbf{K}_{n,n+1}[\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P_M},\mathrm{Q}_1,\ldots,\mathrm{Q_M}] .$$

III. <u>La partie résoluble.</u>

L'ensemble $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}\mathbf{K}_{n,n+1} + \mathrm{A_M}$ *est une algèbre de Lie bilatère sur* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *dont* $\mathrm{A_M}$ *est un idéal. On note* ρ_{n+1} *la représentation de* $\mathfrak{g}'$ *dans* $\mathrm{Der\ A_M}$ *définie par l'action adjointe et on identifie encore*

$$\mathrm{Der\ A_M}\ \text{ à }\ \mathrm{Der}\ \mathbf{K}_{n,n+1} \oplus \mathrm{A_M}/\mathbf{K}_{n,n+1} .$$

Soit $\mathscr{C} = (\mathbf{K}_{n,n+1})^{\mathfrak{g}}$.

III.1. *L'action adjointe représente* $\mathfrak{g}$ *par des dérivations de* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *qui commutent entre elles, donc l'image de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathrm{Der}\ \mathbf{K}_{n,n+1}$ *engendre sur* $\mathscr{C}$ *et sur* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *des espaces vectoriels de même dimension* s. *Soient* $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_s$ *des éléments de* $\mathfrak{g}$ *définissant une base de ces espaces vectoriels.*

III.2. *Le noyau* $\mathfrak{h}_{n+1}$ *de* ρ_{n+1} *est une algèbre de Lie 2-nilpotente sur* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *et pour toute base standard*

$$(\mathrm{Z}_0,\mathrm{Z}_{\mathrm{R}+1},\ldots,\mathrm{Z}_r,\mathrm{P}_{\mathrm{M}+1},\ldots,\mathrm{P}_m,\mathrm{Q}_{\mathrm{M}+1},\ldots,\mathrm{Q}_m)\quad de\quad \mathfrak{h}_{n+1},$$

$(\mathrm{Z}_{\mathrm{R}+1},\ldots,\mathrm{Z}_r)$ *est une base pure de* $\mathbf{K}_{n+1}$ *sur* $\mathbf{K}_n$.

III.3. *Soient* $\mathfrak{g}^{\sim} = \mathfrak{g}\mathscr{C} + \mathrm{A_M}$ *et* $\rho^{\sim}$ *la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}^{\sim}$ *dans* $\mathrm{Der\ A_M}$. *Il existe un supplémentaire* $\mathfrak{h}^{\sim}$ *de* $\mathrm{A_M}$ *dans* $\mathfrak{g}^{\sim}$ *tel que* $[\mathfrak{h}^{\sim},\mathfrak{h}^{\sim}) \subset \mathscr{C}$ *et* $\mathfrak{h}^{\sim} \oplus \mathscr{C}$ *est une algèbre de Lie 2-nilpotente sur* $\mathscr{C}$. *Le* *noyau* $\mathfrak{h}_{n+1}^{\sim}$ *de* $\rho^{\sim}$ *restreint à* $\mathfrak{h}^{\sim} \oplus \mathscr{C}$ *admet une base standard*

$$(Z_0, Z_{R+1}, \ldots, Z_r, P_{M+1}, \ldots, P_m, Q_{M+1}, \ldots, Q_m)$$

formée de $\mathfrak{g}$*-vecteurs propres modulo* $\mathscr{C}$ *et cette base est aussi une base sur* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *de* $\mathfrak{h}_{n+1}$.

III.4. *On peut compléter la base standard ci-dessus en une base de* $\mathfrak{h}^{\sim} \oplus \mathscr{C}$ *avec des éléments* $S_i^{\sim} \in S_i + \mathfrak{h}_{n+1}^{\sim} + A_M$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ *qui commutent aux* P_j, Q_j *pour* $j = 1, 2, \ldots, m$.

III.5. *Soit* A_m *l'algèbre de Weyl sur*

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{n,n+1}(Z_{R+1}, \ldots, Z_r) = \mathbf{k}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_r)$$

engendrée par A_M *et* $\mathfrak{h}_{n+1}$:

$$A_m = \mathbf{K}[P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_m] \quad \text{(cf. II.3 et III.3).}$$

L'algèbre A_m *est fortement caractéristique et la représentation adjointe* ρ *de* $\mathfrak{g}\mathbf{K} + A_m$ *dans* $\operatorname{Der} A_m = \operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus A_m/\mathbf{K}$ *a* $\mathbf{K}$ *pour noyau. Cette représentation* ρ *se relève en une représentation de* $\mathfrak{g}\mathbf{K} + A_m$ *dans* $\operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus A_m$ *si et seulement si le* 2*-cocycle* ω *naturellement défini en cette situation sur* $\mathfrak{g}$ *et prenant ses valeurs dans* $\mathbf{K}$ *est exact* (*i.e. est un cobord*).

III.6. *Ce* 2*-cocycle* ω *est un cobord si et seulement si les éléments* $S_i^{\sim}$ *de* III.4 *peuvent être choisis commutant deux à deux pour* $i = 1, 2, \ldots, s$.

8.

Les corps $\mathbf{K}_p$ ont une position simple par rapport à $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_p)$ que l'on peut décrire au moyen d'une base pure explicitement construite dans la suite. Comme on s'intéresse d'abord aux places unitaires (correspondant aux représentations unitaires du groupe G) de ces corps, on choisit les éléments de cette base pure fonctions propres de τ, la valeur propre étant alors égale à leur filtration dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Les corps $\mathbf{K}_p$ sont alors munis d'une graduation invariante sous l'action de $\mathfrak{g}$ et compatible avec l'action de τ. Les deux propositions qui suivent portent sur ces bases.

Proposition 1. — *Pour tout* $p = 1, 2, \ldots, n$, *il existe une base pure* $q^{p,1}$ *de* $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_{p,1}$ *qui engendre une algèbre de polynômes* $\mathbf{A}_p$ *invariante sous l'action de* $\mathfrak{g}$ *et un semi-invariant* Δ_p *appartenant à* $\mathbf{A}_{p-1}$ *tel que le* *localisé* $(\mathbf{A}_p)_{\Delta_p}$ *soit une algèbre invariante par* $\mathfrak{g}$, *par* τ *et contenant* $\mathbf{B}_p = \mathbf{K}_p \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g}_p)$. *L'algèbre* $(\mathbf{A}_p)_{\mathrm{E}}$ *est fortement caractéristique.*

La base pure $q^{p,1}$ est la réunion de bases partielles $q_{r,j}$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$ et $r < j \leqslant n+1$, cette décomposition reflétant l'action nilpotente de la suite de composition canonique de $\mathfrak{g}_n$. En particulier, il existe dans $\mathfrak{g}_j\mathbf{A}_{j-1}(\Delta_j)^{-1}$ une base partielle $q_{j,r}$ conjuguée à $q_{r,j}$. On définit $\mathbf{A}_{p,j} = \mathbf{A}_p \cap \mathbf{K}_{p,j}$.

PROPOSITION 2. — *Dans ce qui suit, on a* $p = 1, 2, \ldots, n$.

1. *Pour tout entier* j *tel que* $p < j \leqslant n+1$, $q_{p,j}$ *se compose d'éléments de* $\mathfrak{g}_p\mathbf{A}_{p-1}$ *qui sont des* $\mathfrak{g}$*-vecteurs propres modulo* $\mathbf{A}_{p-1,j+1}$ *(ou* $\mathbf{A}_{p-1,n+1}$ *si* $j = n+1$*) et aussi lorsque* $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, *des parties réelles et des parties imaginaires de tels* $\mathfrak{g}$*-vecteurs propres (obtenus par complexification).*

2. *L'ensemble* $q_{p,n+1}$ *est une base pure de* $\mathbf{K}_{p,n+1}$ *sur* $\mathbf{K}_{p-1,n+1}$.

3. *L'ensemble* $q_{p,j}$ *pour* $p < j \leqslant n$ *est une base pure de* $\mathbf{K}_{p,j}$ *sur* $\mathbf{K}_{p-1,j}.\mathbf{K}_{p,j+1}$.

4. *L'ensemble* $(q_{p,p+1}, q_{p,p+2}, \ldots, q_{p,n+1})$ *est une base pure de* $\mathbf{K}_p$ *sur* $\mathbf{K}_{p-1}$.

5. *L'ensemble* $(\mathrm{Z}_0, q_{p,p})$ *est une base standard d'une algèbre de Heisenberg et* $q_{p,p}$ *se compose d'éléments de* $\mathfrak{g}_p\mathbf{A}_{p-1}(\Delta_p)^{-1}$ *qui sont des* $\mathfrak{g}$*-vecteurs propres modulo* $\mathbf{A}_{p-1}(\Delta_p)^{-1}$. *Le commutant* $\mathfrak{h}_p$ *de* $\mathbf{K}_p$ *dans* $\mathfrak{g}_p\mathbf{K}_p$ *a pour base standard*

$$(\mathrm{Z}_0, q_{2,2}, q_{3,3}, \ldots, q_{p,p}).$$

6. *Pour tout* $j = p, p+1, \ldots, n$, $q_{p,j}$ *admet une base conjuguée* $q_{j,p}$ *formée d'éléments de* $\mathfrak{g}_j\mathbf{A}_{j-1}(\Delta_j)^{-1}$ *qui sont des* $\mathfrak{g}$*-vecteurs propres (ou des parties réelles ou imaginaires de tels* $\mathfrak{g}$*-vecteurs propres si* $\mathbf{k} = \mathbf{R}$*) modulo une combinaison linéaire de* Z_0 *et des éléments des bases* $q_{r,l}$ *avec* $1 \leqslant r \leqslant j-1$ *et* $p+1 \leqslant l \leqslant r$, *les coefficients étant des éléments de* $\mathbf{A}_{j-1,p+1}(\Delta_j)^{-2}$.

La réunion $q^{p,\varnothing}$ *des bases* $q_{r,l}$ *avec* $r, l \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *forme avec* Z_0 *une base standard d'une algèbre de Heisenberg et engendre sur* $\mathbf{K}_{p,p+1}$ *l'algèbre de Weyl*

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g}_p)\mathbf{K}_{p,p+1} = \mathbf{K}_{p,p+1}[q^{p,\varnothing}].$$

7. *Pour tout* $j = 1, 2, \ldots, n+1$, $q_{p,j}$ *commute à* $\mathfrak{g}_{j-1}$ *et* $\mathbf{K}_{p,j}$ *admet pour base pure sur* $\mathbf{k}$ *la réunion* $q^{p,j}$ *des bases partielles* $q_{r,l}$ *avec*

$1 \leqslant r \leqslant p$, $r < l$ *et* $j \leqslant l \leqslant n+1$. *On a en particulier* $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_{p,1} = \mathbf{K}_{p,2}$.

8. *L'algèbre* $\mathfrak{g}_p\mathbf{K}_p$ *admet pour base sur* $\mathbf{K}_p$ *la réunion* $q^{p,\geqslant}$ *des bases partielles* $q_{r,l}$ *avec* $p \geqslant r \geqslant l \geqslant 2$ *et on a*

$$\mathfrak{g}_p \Delta_p \subset \mathbf{A}_{p-1} \vee \{q^{p,\geqslant}, q_{p,p+1}, q_{p,p+2}, \ldots, q_{p,n+1}, Z_0\}$$

(la notation ici introduite désigne l'ensemble des combinaisons linéaires symétrisées des éléments de bases se trouvant sous l'accolade $\{\ldots\}$, *le symbole* $\vee$ *dénote le produit symétrisé avec les coefficients qui sont donc des éléments de* $\mathbf{A}_{p-1}$).

9. *Les bases* $q_{p,j}$ *pour* $j = 1, 2, \ldots, n+1$ *se composent de* τ*-vecteurs propres de parité égale à leur filtration dans* $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$. *Il existe sur* $\mathbf{K}_n$ *une unique graduation* $d(?)$ *dont la valeur sur les éléments de base pure que nous venons de décrire coïncide avec leur filtration dans* $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_n)$. *Cette graduation est invariante par l'action de* $\mathfrak{g}$ *et compatible avec l'action de* τ, *i.e. les éléments homogènes de* $\mathbf{K}_n$ *ont une parité sous l'action de* τ *égale à celle de leur degré. (Ceci est aussi vrai pour* $\mathbf{K}_{n+1}$).

10. *On note* $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_R) = (q_{1,n+1}, q_{2,n+1}, \ldots, q_{n,n+1})$ *et* $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ *le reste de la base pure de* $\mathbf{K}_n$ *c'est-à-dire la réunion des* $q_{p,j}$ *avec* $2 \leqslant p < j \leqslant n$. *On a donc*

$$\mathbf{K}_{n,n+1} = \mathbf{k}(Z_1, \ldots, Z_R) \qquad et \qquad \mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{n,n+1}(Q_1, \ldots, Q_N).$$

Il est bon de remarquer que les deux propositions précédentes décrivent seulement la base pure de $\mathbf{K}_n$ et concernent la partie II du Théorème A. Une construction précise et explicite de cet objet a été exposée dans un cours de 3e Cycle à Orsay [11] en 1979 (Publ. Math. Orsay 79-06) et elle ne sera plus détaillée ici.

9. Démonstration de la partie II du Théorème A.

(qui sera référencée dans la suite A.II.*l* où *l* est le numéro de l'assertion).

Cette preuve passe par la construction explicite des bases $q_{p,j}$ et la vérification des assertions de A.II et des propositions 1 et 2. Si la construction est d'un intérêt dans la mesure où elle donne une construction explicite de la Transformation de Fourier-Plancherel du groupe de Lie que l'on verra plus tard, les vérifications sont relativement faciles; elles ne seront pas exposées en détail.

Pour chaque entier $p = 1, 2, \ldots, n$, on choisit une base l_p d'un supplémentaire de $\mathfrak{g}_{p-1}$ dans $\mathfrak{g}_p$ constituée de $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathfrak{g}_{p-1}$ (ou des parties réelles et des parties imaginaires de tels $\mathfrak{g}$-vecteurs propres si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$).

Pour $j = p, p+1, \ldots, n+1$, on obtient $q_{p,j}$ et $q_{j,p}$ en analysant au mieux l'action de $\mathfrak{g}_j \supset \mathfrak{g}_{j-1}$ dans $\mathbf{K}_p$. En particulier l'action spécifique de $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1}$ dans $\mathbf{K}_p$ se décrit par des commutateurs avec la base partielle $q_{p,j}$ et on choisit en même temps une base partielle $l_{j,p} \subset l_j\mathbf{K}_{p-1}$ pour décrire l'action adjointe de $\mathfrak{g}_j$ qui est « supplémentaire » à celle de $\mathfrak{g}_{j-1}$, une diagonalisation de $l_{j,p}$ donnera ensuite la base conjuguée $q_{j,p}$. La démonstration est faite par récurrence sur $p = 1, 2, \ldots, n$ et on décrit les pas $p = 1$ et $p = 2$ pour introduire le lecteur.

Si $p = 1$, $\mathfrak{g}_1$ est le centre de $\mathfrak{g}_n$ et l_1 commute déjà à $\mathfrak{g}_n$. Il n'y a aucune action de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{1,n+1}$. On pose donc $q_{1,1} = q_{1,2} = \cdots = q_{1,n} = \varnothing$ et $q_{1,n+1} = l_1$. Les bases duales $l_{1,1}, l_{2,1}, \ldots, l_{n,1}$ et $q_{1,1}, q_{2,1}, \ldots, q_{n,1}$ sont vides aussi.

Si $p = 2$, la situation est encore assez simple. Comme $\mathbf{K}_1$ est central pour $\mathfrak{g}_n$, la représentation adjointe dans $\operatorname{Der}\mathbf{K}_1$ est nulle pour $\mathfrak{g}_n$ et n'intervient pas dans le calcul. L'ensemble $\mathfrak{g}_2\mathbf{K}_1$ est une algèbre de Lie 2-nilpotente sur $\mathbf{K}_1$ qui commute à $\mathbf{K}_1$. On choisit une partie maximale $l_{2,2}$ de l_2 telle que la matrice $[l_{2,2};l_{2,2}]$ formée par les commutateurs des éléments de $l_{2,2}$ entre eux soit de déterminant non nul (ce qui revient à choisir une base d'un supplémentaire du centre de $\mathfrak{g}_2\mathbf{K}_1$). Lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos $l_{2,2}$ et le sous-ensemble $l_2^3 = l_2^2\backslash l_{2,2}$ sont tous les deux formés de $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathbf{K}_1$. Dans le cas $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, on exigera que $l_{2,2}$ et l_2^3 soient $\mathfrak{g}$-adaptées modulo $\mathbf{K}_1$. Il se trouve que l'on peut satisfaire aux deux conditions en même temps si l'on se permet une substitution linéaire à coefficients dans $\mathbf{A}_1$, substitution que l'on peut décrire simplement par la multiplication par un semi-invariant complexe de $\mathbf{A}_1$ pour rendre le poids réel, ceci ayant pour effet de décomposer le $\mathfrak{g}$-module simple de dimension 2 dont on est parti. Une diagonalisation symplectique de $l_{2,2}$ avec des coefficients dans $\mathbf{K}_1$ donne la base symplectique $q_{2,2}$.

On projette ensuite $l^{2,3}$ parallèlement à $\mathbf{K}_1 \vee \{l_{2,2}\}$ sur le commutant de $\mathfrak{g}_2$ qui est exactement le centre de $\mathbf{K}_1\mathfrak{g}_2$ et on obtient une base pure de $\mathbf{K}_2$ sur $\mathbf{K}_1$. On analyse maintenant l'action adjointe de la suite de composition canonique de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathbf{K}_2$ sur cette base pure elle-même. Cette action adjointe étant nilpotente, on peut la trianguler comme suit :

par une substitution triangulaire avec des coefficients dans $\mathbf{A}_1$, on obtient des bases partielles $q_{2,3}, q_{2,4}, \ldots, q_{2,n+1}$ telles que $q_{2,j}$ commute à $\mathfrak{g}_{j-1}$ et décrit exactement l'action adjointe de $\mathfrak{g}_j$ qui est supplémentaire à celle de $\mathfrak{g}_{j-1}$. Ceci revient à trouver une partie maximale $q_{2,j}$ et une base conjuguée $l_{j,2}$ contenue dans l_j (ou $\mathbf{A}_1 \vee \{l_j\}$ si $\mathbf{k}=\mathbf{R}$) telle que la matrice des commutateurs $[l_{j,2};q_{2,j}]$ a un déterminant non nul. Ce déterminant est en fait un semi-invariant de $\mathbf{A}_1$ si ces bases sont $\mathfrak{g}$-adaptées. Ainsi en même temps que l'on construit les bases $q_{2,j}$ on sélectionne aussi les bases conjuguées $l_{j,2}$ et les bases l_j^3 qui se composent des éléments de $\mathbf{A}_1 \vee \{l_j\}$ que l'on n'a pas pris dans $l_{j,2}$. On impose à ces bases d'être des parties $\mathfrak{g}$-adaptées modulo $\mathbf{A}_1$ et d'être maximales comme on vient de voir ci-dessus. Ce schéma est celui de la construction générale que nous exposons maintenant.

Hypothèses de récurrence.

On suppose que sont déterminées les bases partielles $q_{r,j}$ pour $r < p$ et $r \leqslant j \leqslant n+1$, les bases conjuguées $l_{j,r}$ et les bases restantes l_j^r (i.e. telles que $(l_{j,2},l_{j,3},\ldots,l_{j,r-1},l^{j,r})$ est une base obtenue par substitution $\mathbf{A}_{r-1}$-linéaire symétrisée à partir de l_j). Ces objets satisfont aux propriétés suivantes.

LEMME 1. — P1. *Les bases $l_{j,r}$ et $l^{j,r+1}$ se composent d'éléments de l_j et seulement dans le cas $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ elles sont formées des éléments des types suivants :*

— *des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathfrak{g}_{j-1}$ contenus dans l_j;*

— *des couples d'éléments de l_j qui sont en fait la partie réelle et la partie imaginaire d'un $\mathfrak{g}$-vecteur propre complexe modulo $\mathfrak{g}_{j-1} \otimes \mathbf{C}$;*

— *de $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathfrak{g}_{j-1}\mathbf{A}_{r-1}$ de la forme $\mathrm{A} \vee \mathrm{L} + \mathrm{A}' \vee \mathrm{L}'$ avec A, A' dans $\mathbf{A}_{r-1}$, L, L' dans l_j tels que $\mathrm{A} + \sqrt{-1}\,\mathrm{A}'$ soit un semi-invariant de poids non réel complexe conjugué de celui de $\mathrm{L} + \sqrt{-1}\,\mathrm{L}'$. Dans ce cas $\mathrm{A} \vee \mathrm{L}' - \mathrm{A}' \vee \mathrm{L}$ a aussi un poids réel et se retrouve dans une autre base $l_{j,s}$.*

P2. *Pour $j = r+1, r+2, \ldots, n$, $(l_{j,2}, l_{j,3}, \ldots, l_{j,r})$ définit une famille maximale d'éléments de* $\operatorname{Der} \mathbf{K}_r$ *provenant de l'action adjointe de $\mathfrak{g}_j$ et qui sont linéairement indépendants des dérivations provenant de $\mathfrak{g}_{j-1}$. La matrice des commutateurs $[l_{j,r};q_{r,j}]$ a un déterminant non nul, semi-invariant et appartenant à $\mathbf{A}_{r-1}$.*

P3. *La base $(l_{r,2}, l_{r,3}, \ldots, l_{r,r})$ définit une famille maximale d'éléments de*

Der $\mathfrak{h}_r$ *provenant de l'action adjointe de* $\mathfrak{g}_r$ *dans* $\mathfrak{h}_r$ *et qui sont* $\mathbf{K}_r$*-linéairement indépendants des dérivations provenant de* $\mathfrak{g}_{r-1}$. *On a encore*

$$\mathrm{Det}\,[l_{r,r};l_{r,r}] \in \mathbf{A}_{r-1}^{\mathrm{E}}\backslash\{0\}.$$

P4. Pour $r \leqslant j \leqslant n$, $q_{j,r}$ *s'obtient par triangularisation :*

$$q_{j,r} \subset \mathbf{A}_{j-1}(\Delta_j)^{-1} \vee \{Z_0,l_{j,r},l_{j,r-1},\ldots,l_{j,2},l^{j-1,\geqslant}\}$$

où $l^{j-1,\geqslant} = \bigcup_{j-1\geqslant i\geqslant k\geqslant 2} l_{i,k}$.

P5. *La matrice* $[l_{j,r};q_{p,j}]$ *a ses coefficients semi-invariants dans* $\mathbf{A}_{r-1}$ (*ou provenant de semi-invariants complexes pour* $\mathbf{k} = \mathbf{R}$) *et est régulière si* $p = r$.

P6. *La base* $q_{p,j}$ *commute à* $l_{j,r}$ *si* $2 \leqslant r \leqslant p \leqslant j \leqslant n+1$.

L'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_{p-1} \subset \mathfrak{g}_{p-1}\mathbf{K}_{p-1}$ a pour base

$$(Z_0,q_{2,2},q_{3,3},\ldots,q_{p-1,p-1})$$

sur $\mathbf{K}_{p-1}$ et est fortement caractéristique par la proposition 2 que nous supposons déjà vérifiée en ce qui concerne les indices $< p$. La représentation adjointe ρ_{p-1} dans $\mathfrak{h}_{p-1}$ réalise $\mathfrak{g}_p\mathbf{K}_{p-1}$ comme une sous-algèbre de Lie bilatère sur $\mathbf{K}_{p-1}$ de

$$\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}_{p-1} = \mathrm{Der}\,\mathbf{K}_{p-1} \oplus (\mathfrak{h}_{p-1})/\mathbf{K}_{p-1}$$

(car toute dérivation de $\mathfrak{h}_{p-1}$ nulle sur $\mathbf{K}_{p-1}$ s'identifie à l'action adjointe d'un élément de $(\mathfrak{h}_{p-1})^2$; si de plus les poids des éléments d'une base standard sont nuls, ce qui est le cas ici puisque l'action est nilpotente, on peut se restreindre à l'action adjointe des éléments de $\mathfrak{h}_{p-1}$). L'image de ρ_{p-1} contient $\mathfrak{h}_{p-1}/\mathbf{K}_{p-1}$ car $\mathfrak{h}_{p-1} \subset \mathfrak{g}_{p-1}\mathbf{K}_{p-1}$. Notons δ_{p-1} l'action adjointe dans $\mathbf{K}_{p-1} = (\mathfrak{h}_{p-1})^{\#}$ qui est évidemment une représentation dans $\mathrm{Der}\,\mathbf{K}_{p-1}$. D'après le Lemme 1. P2 l'image de δ_{p-1} a une base sur $\mathbf{K}_{p-1}$ égale à

$$\delta_{p-1}(l^{p,>}) \qquad \text{avec} \qquad l^{p,>} = \bigcup_{p\geqslant r>j\geqslant 2} l_{r,j}.$$

Par la projection θ parallèle à $\mathbf{K}_{p-1} \vee \{l^{p,>},q_{2,2},\ldots,q_{p-1,p-1}\}$ on obtient donc une base du commutant de $\mathfrak{h}_{p-1}$ (c'est-à-dire du noyau de

$\rho_{p-1})$ à partir de (Z_0, l_p^p). Un calcul facile utilisant le fait que l'on a des combinaisons linéaires qui doivent commuter aux scalaires appartenant à $\mathbf{K}_{p-1}$ montre que le commutateur de deux éléments de cette base est dans $\mathfrak{g}_{p-1}\mathbf{K}_{p-1}$; devant en plus commuter à $\mathfrak{h}_{p-1}$ il sera dans $\mathbf{K}_{p-1}$. Le noyau de ρ_{p-1} est donc une algèbre de Lie 2-nilpotente sur $\mathbf{K}_{p-1}$ qu'on note $\mathfrak{h}'_p$. La base $(Z_0, q_{p,p}, q_{p,p+1}, \ldots, q_{p,n+1})$ de $\mathfrak{h}'_p$ se construit à partir de $\theta(l_p^p)$ en diagonalisant l'action de la suite de composition canonique de $\mathfrak{g}$.

Lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, on choisit une partie maximale $l_{p,p} \subset l_p^p$ telle que $\operatorname{Det}[\theta(l_{p,p});\theta(l_{p,p})] \neq 0$ ou ce qui revient au même, telle que $\theta(l_{p,p})$ soit la base d'un supplémentaire du centre de $\mathfrak{h}'_p$. On pose $l_p^{p+1} = l_p^p \backslash l_{p,p}$. Les éléments de bases sont des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathfrak{g}_{p-1}$. Lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, on remplace cette condition par la condition P1. Après cette extension par des scalaires qui sont des parties réelles et imaginaires de semi-invariants complexes provenant de $\mathbf{A}_{p-1}$ on peut remplacer l_p^p par une nouvelle base $\bar{l}_p^p = (l_{p,p}, l_p^{p+1})$ vérifiant P1, avec $l_{p,p}$, l_p^{p+1} composées d'éléments réels, fonction propres de τ et telles que

$$\operatorname{Det}[\theta(l_{p,p});\theta(l_{p,p})] \neq 0.$$

On choisit $l_{p,p}$ maximal pour les conditions précédentes. Alors $\theta(l_{p,p})$ est la base d'un supplémentaire de $(\mathfrak{h}'_p)^{\#}$. Supposons par contradiction que $\theta(l_{p,p})$ engendre seulement un sous-espace symplectique non supplémentaire du centre. On peut alors choisir dans $\theta(l_p^{p+1}) \otimes \mathbf{C}$ deux $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo... notés Q et Q' tels que $(\theta(l_{p,p}), Q, Q')$ engendrent un sous-espace contenant un sous-espace symplectique strictement plus grand que celui de base $\theta(l_{p,p})$. Projetant parallèlement à $\theta(l_{p,p})$, on peut supposer que Q et Q' commutent déjà à cette base. On peut aussi supposer $[Q,\bar{Q}] = [Q',\bar{Q}'] = 0$ car dans le cas contraire on met facilement la maximalité en défaut. De même on peut supposer que Q et Q' n'engendrent pas un sous-espace symplectique réel de dimension 4 et que Q et Q' ne sont pas tous réels. On pose alors

$$Q = Q_+ + iQ_-, \quad Q' = Q'_+ + iQ'_- \quad \text{et} \quad a_{uv} = [Q_u, Q'_v] \quad \text{pour} \quad u,v = +,-.$$

On a, d'après nos hypothèses $a_{++}a_{--} - a_{-+}a_{+-} = 0$ et on peut supposer que a_{++} est non nul. Soient λ le poids de Q et λ' celui de Q'. Par un changement de base, on va rendre ces poids réels, ce qui impliquera que les parties réelles et imaginaires sont elles-mêmes des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres et engendrent des $\mathfrak{g}$-modules de dimension 1 parmi lesquels on peut constituer un espace symplectique de dimension 2. La construction décrite termine donc notre preuve par l'absurde tout en donnant la forme explicite du changement de base. En particulier elle ne concerne que des éléments de base qui ne sont pas des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres réels modulo... donc ne s'applique pas deux fois aux éléments de l_j. On peut supposer par exemple λ non réel. On a

$$\mathrm{D} = \frac{a_{++} + ia_{-+}}{a_{++} - ia_{-+}} = \frac{a_{++} + ia_{-+} + i(a_{+-} + ia_{--})}{a_{++} - ia_{-+} + i(a_{+-} - ia_{--})} = \frac{[\mathrm{Q},\mathrm{Q}']}{[\bar{\mathrm{Q}},\mathrm{Q}']}$$

ce qui montre que D est un élément de $\mathbf{K}_{p-1} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ qui est semi-invariant de poids réel $\lambda - \bar{\lambda}$. Se trouvant dans un corps de fractions rationnelles D a une expression irréductible $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ et on a $\bar{\mathrm{D}} = \mathrm{D}^{-1}$ ce qui donne $\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{B}\bar{\mathrm{B}}$. On en déduit que $\bar{\mathrm{A}}$ divise B et B divise $\bar{\mathrm{A}}$ et ces deux polynômes sont proportionnels : $\bar{\mathrm{A}} = \bar{c}\mathrm{B}$ avec $c \in \mathbf{C}$. Il vient $\mathrm{D} = c\frac{\mathrm{A}}{\bar{\mathrm{A}}}$ et $\mathrm{A}/\bar{\mathrm{A}}$ est aussi un semi-invariant de poids $\lambda - \bar{\lambda}$. Comme $\mathrm{A}/\bar{\mathrm{A}}$ est une fraction irréductible, A lui-même est un semi-invariant : pour tout $\mathrm{T} \in \mathfrak{g}$,

$$[\mathrm{T},\mathrm{A}/\bar{\mathrm{A}}]\bar{\mathrm{A}} = [\mathrm{T},\mathrm{A}]\bar{\mathrm{A}} - \mathrm{A}[\mathrm{T},\bar{\mathrm{A}}] = \langle \lambda - \bar{\lambda}, \mathrm{T}\rangle \mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}$$

donc A divise [T,A]; comme l'action de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbf{A}_{p-1}$ conserve le degré, les deux polynômes sont proportionnels $[\mathrm{T},\mathrm{A}] = \delta\mathrm{A}$ avec $\delta \in \mathbf{C}$. Il vient alors $\delta - \bar{\delta} = \langle \lambda - \bar{\lambda}, \mathrm{T}\rangle$ ce qui montre que le poids $\lambda(\mathrm{A})$ a la même partie imaginaire que $\lambda = \lambda(\mathrm{Q})$. Avec $\mathrm{A} = \mathrm{A}_+ + i\mathrm{A}_-$, l'élément $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{Q} = \mathrm{A}_+\mathrm{Q}_+ + \mathrm{A}_-\mathrm{Q}_- + i(\mathrm{A}_+\mathrm{Q}_- - \mathrm{A}_-\mathrm{Q}_+)$ est bien de poids réel. Le changement de base $(\mathrm{Re}\mathrm{Q},\mathrm{Im}\mathrm{Q}) \to (\mathrm{Re}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{Q},\mathrm{Im}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{Q})$ se fait donc avec des coefficients qui sont des parties réelle et imaginaire d'un semi-invariant et son Jacobien est le semi-invariant réel $\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}$. Si Q′ n'est pas réel on peut encore trouver un semi-invariant A′ pour obtenir deux $\mathfrak{g}$-modules de dimension 1 engendrés par $\mathrm{Re}\,\bar{\mathrm{A}}'\mathrm{Q}'$ et $\mathrm{Im}\,\bar{\mathrm{A}}'\mathrm{Q}'$. On pourra par exemple choisir $\mathrm{Re}\,\bar{\mathrm{A}}\mathrm{Q}$ et $\mathrm{Re}\,\bar{\mathrm{A}}'\mathrm{Q}'$ pour former une base symplectique car leur commutateur est un semi-invariant réel non nul proportionnel à $\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}'\bar{\mathrm{A}}'$.

Détermination de la base conjuguée $(q_{p,2},q_{p,3},\ldots,q_{p,p-1})$ *à partir de* $(l_{p,2},\ldots,l_{p,p-1})$ en trois étapes : i) Projeter parallèlement à la base $q^{p-1,\varnothing}$ (cf. Proposition 2.6) sur le commutant de cette base. ii) Inverser la matrice des commutateurs suivante :

$$[l_{p,2},l_{p,3},\ldots,l_{p,p-1};q_{2,p},q_{3,p},\ldots,q_{p-1,p}]$$

qui reste inchangée dans la projection car $q^{p-1,\varnothing}$ commute aux $q_{r,p}$ et multiplier par cette matrice pour obtenir des éléments P_i conjugués aux éléments Q_i de la base $(q_{p,2}, q_{p,3}, \ldots, q_{p,p-1})$, iii) Rendre les P_i commutants entre eux : les deux opérations précédentes occasionnent la localisation par les semi-invariants qui sont au dénominateur de la base $q^{p,\varnothing}$ et par le déterminant de la matrice des commutateurs qui est aussi un semi-invariant appartenant à $\mathbf{A}_{p-2}$. Les éléments de bases P_i appartiennent à l'espace

$$(\mathbf{A}_{p-2})_{\mathrm{E}} \vee \{l_{p,2}, l_{p,3}, \ldots, l_{p,p-1}, q^{p-1,\varnothing}\}$$

et leurs commutateurs sont des éléments de $(\mathbf{A}_{p-1})_{\mathrm{E}}$ qui définissent une 2-forme fermée et polynômiale, à une localisation semi-invariante près. On démontre par ailleurs directement qu'un semi-invariant ne peut pas dépendre des variables appartenant aux bases $q_{r,j}$ avec $j < n+1$, et cette localisation ne change pas le caractère polynômial en ce qui concerne la recherche de la primitive. La 2-forme est donc exacte et on peut trouver des éléments $\nu_i \in (\mathbf{A}_{p-1})_{\mathrm{E}}$ tels que les $P_i - \nu_i$ commutent entre eux. Par des formules explicites, on peut vérifier que les différentes transformations conservent le degré (et l'homogénéité) et donnent des vecteurs propres pour l'action de τ si on choisit la primitive grâce à une formule du type de Poincaré (on peut même écrire une formule similaire à la formule de Taylor qui a toutes les vertus désirées). On obtient ainsi la base cherchée qui est notée

$$(Z_0, q^{p-1,\varnothing}, q_{p,2}, q_{p,3}, \ldots, q_{p,p-1}, q_{2,p}, q_{3,p}, \ldots, q_{p-1,p}).$$

Cette base est standard et engendre une algèbre de Heisenberg.

Détermination de $q_{p,p}$ (fin).

Il suffit de projeter $l_{p,p}$ parallèlement à la base précédente sur le commutant de cette base, puis d'effectuer une diagonalisation symplectique pour obtenir la base $q_{p,p}$. Cette diagonalisation localise par le Pfaffien de la matrice des commutateurs qui est un semi-invariant, d'autant plus que tous les coefficients de cette matrice des commutateurs sont déjà des semi-invariants.

Calcul des bases $l_{p,j}, l_p^{j+1}, q_{p,j}, l_{j,p}$ pour $j = p+1, p+2, \ldots, n+1$.

On fait une récurrence sur l'indice j.

Pour chaque entier j on construit une projection θ_j sur le commutant de $\mathfrak{g}_{j-1}$ et de $(l_{j,2},l_{j,3},\ldots,l_{j,p-1})$. On a alors

$$\theta_j(l_p^j) \subset (\mathbf{A}_{p-1})_{\mathrm{E}} \vee \{Z_0,l_p^j,q^{p,\geqslant},q_{p,p+1},q_{p,p+2},\ldots,q_{p,j-1}\}.$$

Cette projection se fait en intégrant une 1-forme polynômiale fermée, ce qui traduit l'aspect nilpotent de l'action adjointe de la suite de composition de $\mathfrak{g}_n$.

Une base pure de $\mathbf{K}_p$ sur $\mathbf{K}_{p-1}$ est égale à

$$(q_{q,p+1},q_{p,p+2},\ldots,q_{p,j-1},\theta(l_p^j)).$$

Par construction, l'action adjointe de $\mathfrak{g}_{j-1}\mathbf{K}_p$ dans $\mathbf{K}_p$ donne un espace vectoriel sur $\mathbf{K}_p$ de dérivations dont une base est égale à l'image des $l_{k,r}$ avec $2 \leqslant k < r$ et $k \leqslant j-1$. Une démonstration en tout point semblable à celle que nous venons de voir pour $j = p$ montre qu'au moyen d'éventuels changements de base décrits par P1 (voir le lemme 1) on peut supposer avoir $l_j^p = (l_{j,p},l_j^{p+1})$ et $l_p^j = (l_{p,j},l_p^{j+1})$ choisies telles que $l_{j,p}$ engendre un nombre maximal de dérivations de $\mathbf{K}_p$ linéairement indépendantes des dérivations provenant de $\mathfrak{g}_{j-1}$. Pour cela il suffit de choisir parallèlement $l_{p,j}$ dont l'image $\theta_j(l_{p,j})$ est une partie d'une base pure de $\mathbf{K}_p$ qui commute déjà à $\mathfrak{g}_{j-1}$ et de choisir $l_{j,p}$ et $l_{p,j}$ maximales telles que la matrice carrée des commutateurs $[l_{j,p};\theta_j(l_{p,j})]$ est de déterminant non nul. On peut démontrer indépendamment que ces commutateurs sont des semi-invariants. Parmi les propriétés les plus utiles des bases pures que nous construisons, figure celle d'engendrer des sous-anneaux de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_p)$ qui sont stables sous l'action de $\mathfrak{g}$. Pour cela, il suffit que les éléments des bases soient entiers (i.e. dans l'algèbre enveloppante) et soient des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathbf{A}_{p-1}$ (ou des parties réelle et imaginaire de tels vecteurs propres complexifiés). Ceci se fait simplement en multipliant par un semi-invariant convenable. La base $q_{p,j}$ est celle obtenue à partir de $\theta_j(l_{p,j})$.

Vérification des propriétés annoncées.

Ce travail est long mais facile. Beaucoup des propriétés sont acquises par construction : P1, P2, P3, P4, P6 etc... Les propriétés de semi-invariance résultent de l'identité de Jacobi, compte tenu du fait qu'on a des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo un objet qui commute à l'autre membre du commutateur. Une analyse directe et fonctionnelle, compte tenu de l'action de $\mathfrak{g}_n$ dans les corps $\mathbf{K}_p$ qui est nilpotente et polynômiale, montre que ces corps ne peuvent pas contenir de semi-invariants non annulés par $\mathfrak{g}_n$. Tous ces semi-invariants sont donc en fait des éléments centraux et appartiennent à $(\mathbf{K}_{p,n+1})^{\mathrm{E}}$. Les propriétés annoncées dans A.II résultent directement de la connaissance des bases $q_{p,j}$. Par exemple, le commutant de $\mathbf{K}_{p-1}$ dans $\mathscr{K}(\mathfrak{g}_p)$ est engendré par $\mathfrak{h}_p$ puisque $\mathscr{K}(\mathfrak{g}_p)$ est un corps de Weyl dont on connaît une base standard. Le centre de ce commutant est engendré par le centre de $\mathfrak{h}_p$, donc par la base pure $(q_{p,p+1}, q_{p,p+2}, \ldots, q_{p,n+1})$ et est bien égal à $\mathbf{K}_p$. Pour avoir des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres, nous avons dû introduire le produit symétrisé. Les différents coefficients (que nous avons utilisés lors des projections sur des commutants proviennent de commutateurs et) sont toujours homogènes et fonctions propres de τ comme polynômes sur les éléments des bases pures, les différentes primitives de formes fermées sont aussi de bonne variance, d'où la variance des éléments de bases sous l'action de τ, variance qui est directement liée à leur filtration dans l'algèbre enveloppante. De plus, ceci explique l'existence de la graduation naturelle sur les corps commutatifs $\mathbf{K}_p$, graduation née de la filtration de l'algèbre enveloppante, mais devenant exacte grâce à la commutativité.

Comme $\mathbf{B}_p \subset (\mathbf{A}_p)_{\Delta_p} \subset (\mathbf{A}_p)_{\mathrm{E}}$, on a $(\mathbf{B}_p)_{\mathrm{E}} = (\mathbf{A}_p)_{\mathrm{E}}$ et clairement on a un objet caractéristique, sa définition étant intrinsèque.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les différentes assertions encore en suspens [11].

10. Démonstration de la partie III du Théorème A.

Rappelons que $\mathrm{A_M} = \mathscr{U}(\mathfrak{g}_n)\mathbf{K}_{n,n+1}$ a pour base « standard » $q^{n,\varnothing}$ qui est la réunion

$$\bigcup_{i,j=1}^{n} q_{i,j} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P_M}, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q_M})$$

et que $\mathbf{K}_{n,n+1}$ a pour base pure la réunion

$$(q_{1,n+1}, q_{2,n+1}, \ldots, q_{n,n+1}) = (\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z_R}).$$

(i) Grâce à ces bases, on identifie $\mathrm{Der}\,\mathrm{A_M}$ à

$$\mathrm{Der}\,\mathbf{K}_{n,n+1} \oplus \mathrm{A_M}/\mathbf{K}_{n,n+1}$$

et on note ρ_{n+1} la représentation naturelle de $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}\mathbf{K}_{n+1} + \mathrm{A_M}$ dans $\mathrm{Der}\,\mathrm{A_M}$. On note δ_{n+1} la représentation de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathrm{Der}\,\mathbf{K}_{n,n+1}$ définie par l'action adjointe. Comme $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_n$ et $[\mathfrak{g}_n, \mathbf{K}_{n,n+1}] = 0$, δ_{n+1} réalise

$\mathfrak{g}$ en des dérivations commutatives. Complétons $(S_1, S_2, \ldots, S_s)$ en une base $(S_1, S_2, \ldots, S_S)$ d'un supplémentaire de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathfrak{g}$. Pour tout $S \in \mathfrak{g}$, il existe des coefficients $c_i \in \mathbf{K}_{n,n+1}$ tels que

$$\delta_{n+1}(S) - \sum_{i=1}^{s} c_i \delta_{n+1}(S_i) = 0$$

et on aura pour tout $j = 1, 2, \ldots, s$

$$0 = [\delta_{n+1}(S_j), \delta_{n+1}(S)] - \sum_{n=1}^{s} (c_i)^{S_j} \delta_{n+1}(S_i) - \sum_{n=1}^{s} c_i[\delta_{n+1}(S_j), \delta_{n+1}(S_i)]$$

ceci entraîne que c_i commute à tout S_j et par conséquent à $\mathfrak{g}$ tout entier.

(ii) L'image de ρ_{n+1} contient déjà $\rho_{n+1}(A_M) = A_M/\mathbf{K}_{n,n+1}$ et pour tout $S \in \mathfrak{g}$, il existe un unique polynôme symétrisé $R(S)$ sans terme constant en les P_i, Q_i tel que $\theta'(S) = \theta(S) - R(S)$ commute aux P_i, Q_i; θ' est la projection sur le commutant des P_i, Q_i qui est nulle sur les polynômes symétrisés. On note θ'' la projection sur le noyau de ρ_{n+1} parallèlement à $S_1, S_2, \ldots, S_s$ et aux polynômes symétrisés en les P_i, Q_i. Pour tout $S \in \mathfrak{g}$, il existe des coefficients uniques $c_i \in \mathscr{C}$ tels que

$$\theta''(S) = \theta'(S) - \sum_{i=1}^{s} c_i(S)\theta'(S_i).$$

Lemme 2. — *Pour tout* S *et* S' *appartenant à* $\mathfrak{g}$, *on a* :

$$[\theta'(S), \theta'(S')] \in \mathbf{K}_{n,n+1}, \qquad [S, \theta''(S')] \in \mathbf{K}_{n,n+1}$$

et

$$[\theta''(S), \theta''(S')] \in (\mathbf{K}_{n,n+1})^{\mathfrak{g}} = \mathscr{C}.$$

Le commutateur $[S, \theta''(S')]$ est un élément de $\mathfrak{g}_n + A_M \subset A_M$ qui doit commuter aux P_i, Q_i, il est donc central et appartient à $\mathbf{K}_{n,n+1}$. Le même raisonnement vaut pour le premier commutateur du Lemme 2. En conséquence, le troisième doit commuter aux $\theta'(S_i)$ pour tout i d'après l'identité de Jacobi et sera donc central.

S'inspirant de la démonstration du changement de base semi-invariant du lemme 1. P1, on montre que tout $c \in \mathscr{C}$ est un quotient de deux semi-invariants de $\mathbf{A}_{n,n+1}$. Par conséquent, une multiplication par un semi-invariant convenable rendra tous les générateurs que nous construisons entiers (i.e. dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$). Un peu plus loin, sera montrée l'existence de termes correctifs φ_i tels que $[\mathfrak{g},\theta''(S_i)-\varphi_i] \subset \mathscr{C}$. Par une diagonalisation symplectique de la base $(\theta''(S_{s+1})-\varphi_{s+1},\ldots,\theta''(S_S)-\varphi_S)$ qui n'utilise que des coefficients dans $\mathscr{C}$, on obtient la base standard de $\mathfrak{h}_{n+1}$ que l'on cherche et pour laquelle on peut trouver un semi-invariant Δ_{n+1} vérifiant :

PROPOSITION 3. — *Il existe un semi-invariant* Δ_{n+1} *appartenant à* $\mathbf{A}_{n,n+1}$ *tel que le noyau* $\mathfrak{h}_{n+1}$ *de* ρ_{n+1} *admet une base standard*

$$(Z_0,Z_{R+1},Z_{R+2},\ldots,Z_r,P_{M+1},P_{M+2},\ldots,P_m,Q_{M+1},Q_{M+2},\ldots,Q_m)$$

dont tous les éléments sont dans $(\mathfrak{g}+\mathscr{U}(\mathfrak{g}_n))\mathbf{A}_{n,n+1}(\Delta_{n+1})^{-1}$ *et sont transportés par l'action adjointe de* $\mathfrak{g}$ *dans* $(\mathbf{A}_{n,n+1}(\Delta_{n+1})^{-1})^{\mathfrak{g}}$.

(iii) L'algèbre $\mathfrak{h}_{n+1}$ est 2-nilpotente et engendre un corps dont le centre est $\mathbf{K}_{n,n+1}(Z_{R+1},\ldots,Z_r)$, ce centre est évidemment une extension pure de $\mathbf{K}_{n,n+1}$ d'après le Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Comme $S_1, S_2, \ldots, S_s$ induisent des dérivations indépendantes de $\mathbf{K}_{n,n+1}$, il est aisé de voir que le commutant de $\mathbf{K}_{n,n+1}$ dans $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ « ne dépend pas des variables $S_1, S_2, \ldots, S_s$ » et est engendré par $\mathfrak{h}_{n+1}$; en conséquence le centre de ce commutant est exactement $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{K}_n(Z_{R+1},Z_{R+2},\ldots,Z_r)$. Est donc vérifiée la première assertion de la première partie du Théorème A. Les autres assertions de A.I sont évidentes, car elles résultent du caractère intrinsèque des objets introduits.

(iv) La base

$$(S_1,S_2,\ldots,S_s,Z_{R+1},Z_{R+2},\ldots,Z_r,P_{M+1},P_{M+2},\ldots,P_m,Q_{M+1},Q_{M+2},\ldots,Q_m)$$

engendre $\mathfrak{g}^{\sim}$ modulo A_M et décrit entièrement son action adjointe dans $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{n,n+1}(Z_{R+1},\ldots,Z_r)$. On peut évidemment se restreindre à $(S_1,S_2,\ldots,S_s)$ ou à $(\theta'(S_1),\theta'(S_2),\ldots,\theta'(S_s))$ pour décrire cette action adjointe. De même, pour montrer que les Z_j, P_j, Q_j sont des $\mathfrak{g}$-vecteurs propres modulo $\mathscr{C}$ (ou modulo $(\mathbf{A}_{n,n+1}(\Delta_{n+1})^{-1})^{\mathfrak{g}}$ ce qui revient au même avec un choix convenable de Δ_{n+1}), il suffira de le vérifier pour les $S_1, \ldots, S_s$. Nous allons faire un changement de base algébrique de $\mathbf{K}$ qui mettra en évidence la géométrie de l'action adjointe de $\mathfrak{g}$: le groupe de Lie associé opère seulement par des translations (sur les variables « nilpotentes ») et des similitudes (sur les variables « résolubles »; pour le cas réel, les similitudes sont des similitudes complexes).

Nous appelons variable un élément de base pure de $\mathbf{K}$. Les variables ci-dessous notées Z, Z_j, Z_k font partie de la base $(Z_1,Z_2,\ldots,Z_r)$.

Une variable Z_j est dite *plus haute* qu'une variable Z_k si $Z_j \in q_{l,n+1}$ et $Z_k \in q_{p,n+1}$ avec les indices vérifiant $l < p \leqslant n+1$ (on pose $q_{n+1,n+1} = (Z_{R+1}, Z_{R+2}, \ldots, Z_r))$; on dit alors que Z_k est *de ligne* p et Z_j est *de ligne plus petite que* p.

Une variable est dite *résoluble* et notée avec la lettre V si elle est un semi-invariant (ou une partie réelle ou imaginaire d'un semi-invariant complexe si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$).

Une variable est dite *nilpotente* et notée avec la lettre U si $[\mathfrak{g}, U] \subset \mathscr{C}$; des variables $U_1, U_2, \ldots, U_u$ sont dites *effectives* si elles sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{K}^{\mathfrak{g}} = \mathscr{K}(\bar{\mathfrak{g}})^{\#}$. Il est alors équivalent de dire qu'il existe u éléments de $\mathfrak{g}$: $S_1, S_2, \ldots, S_u$ définissant des dérivations indépendantes dans $K^{\mathfrak{g}}(U_1, U_2, \ldots, U_s)$, condition équivalente à la non nullité du déterminant de la matrice des commutateurs

$$[S_1, S_2, \ldots, S_u; U_1, U_2, \ldots, U_u].$$

C'est cette dernière condition que nous utiliserons plus tard.

Proposition 4. — *Il existe un changement de base algébrique de* $\mathbf{K}$, *dans lequel on soustrait à tout* Z_j *un polynôme en les variables plus hautes* Z_k *et on divise par un polynôme semi-invariant en ces mêmes variables, qui transforme la base pure* $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_r)$ *de* $\mathbf{K}$ *en une base pure* $(U_1, U_2, \ldots, U_u, V_1, V_2, \ldots, V_v)$ *de* $\mathbf{K}$ *constituée par* u *variables nilpotentes effectives* U_i *et* v *variables résolubles* V_j *(donc* $u + v = r$*). Les variables* $Z_{R+1}, Z_{R+2}, \ldots, Z_r$ *sont transformées en des variables nilpotentes ou centrales.*

11.

Il est intéressant de donner une version intrinsèque de la Proposition 4.

D'abord, il est clair que $\mathbf{K}_{n,n+1}$ est le centre de $\mathscr{K}(\mathfrak{g}_n)$ et que $\mathbf{K}$ est le centre du commutant de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$. Dans ces deux corps qui sont des extensions pures de $\mathbf{k}$ et qui sont caractéristiques, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ opère par dérivations. On a donc l'énoncé suivant :

Proposition 5. — *L'action adjointe de* $\mathfrak{g}$ *dans le centre* $\mathbf{K}$ *du commutant de* $\mathfrak{g}_n$ *dans* $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ *et dans le sous-corps* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *de* $\mathbf{K}$ *constitué par le centre de* $\mathscr{K}(\mathfrak{g}_n)$ *est commutative. Il existe une base pure de* $\mathbf{K}$ *qui contient une* *base pure de* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *et qui se compose d'éléments de* $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ *qui sont, soit des* $\mathfrak{g}$*-vecteurs propres (au sens complexe etc., si* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$*), soit des éléments qui commutent à* $\mathfrak{g}$ *modulo* $(\mathbf{K}_{n,n+1})^{\mathfrak{g}}$. *En particulier les éléments qui forment la base pure de* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *sont du dernier type et centraux.*

Cette proposition est la version infinitésimale du fait que le groupe de Lie G opère dans $\mathbf{K}$ par des translations et des homothéties commutatives.

12. Preuve de la proposition 4.

Les poids $\lambda(Z)$ se prolongent à $\mathscr{C}\mathfrak{g}$ et on définit aussi $\mu(?,?)$ en posant

$$\mu(Z,T) = [T,Z] - \langle\lambda(Z),T\rangle Z.$$

On remarquera que le changement de base donne des éléments dont les poids sont toujours des éléments de $\mathfrak{g}^*$. On utilise les quatre lemmes suivants; le premier étant évident et le dernier une version « polynômiale » du Lemme de Poincaré, nous en omettrons la démonstration.

Lemme 3. — *Si* $S \in \mathscr{C}\mathfrak{g}$ *commute à toute variable plus haute que* Z *et* $a = \langle\lambda(Z),S\rangle$ *est non nul alors* $Z' = Z - \mu(Z,S)a^{-1}$ *vérifie* $[S,Z'] = aZ'$.

Comme a sera toujours central, le lemme qui suit s'applique.

Lemme 4. — *Si* $S \in \mathscr{C}\mathfrak{g}$ *commute à toute variable plus haute que* Z *et* $[S,Z] = aZ$ *avec* $a \in \mathscr{C}\backslash\{0\}$, *alors* Z *est un* $\mathfrak{g}$*-vecteur propre.*

Soit T un élément de $\mathfrak{g}$, on a $[T,Z] = \langle\lambda(Z),T\rangle Z + \mu(Z,T)$; évidemment $\langle\lambda(Z),T\rangle \in \mathscr{C}$ et $\mu(Z,T)$ ne dépend que des variables plus hautes que Z. Comme $[S,T] \in \mathscr{C}\mathfrak{g}_n$, on a $[[S,T],\mathbf{K}] = 0$ et en conséquence

$$\begin{aligned} 0 = [[S,T],Z] &= [S,\langle\lambda(Z),T\rangle Z + \mu(Z,T)] + [aZ,T] \\ &= a\langle\lambda(Z),T\rangle Z - a\langle\lambda(Z),T\rangle Z + a\mu(Z,T) \end{aligned}$$

donc $\mu(Z,T)$ est nul et Z est bien un $\mathfrak{g}$-vecteur propre. Ces deux lemmes transforment des variables en variables résolubles (il est clair que le lemme 4 s'applique aussi aux Z' construits par le lemme 3). Le lemme suivant construit des variables nilpotentes.

LEMME 5. — *Soient* $S \in \mathscr{C}\mathfrak{g}$ *et* Z *une variable telle que* $\langle \lambda(Z),S \rangle = 0$ *et* S *commute à toute variable plus haute que* Z. *Si* $C = [S,Z]$ *est non nul, alors* C *est un semi-invariant de poids* $\lambda(C) = \lambda(Z)$. *Pour tout* $T \in \mathscr{C}\mathfrak{g}$ *et commutant à toute variable plus haute que* Z, $[T,ZC^{-1}]$ *est central (donc* ZC^{-1} *est une variable centrale vis-à-vis de ces éléments* T) *et* $T' = T - [T,ZC^{-1}]S$ *commute à* ZC^{-1}.

Comme $[S,C] = 0$, on a $[S,ZC^{-1}] = 1$. Pour tout $T \in \mathscr{C}\mathfrak{g}$, on a aussi

$$0 = [[S,T],Z] = [C,T] + [S, \langle \lambda(Z),T \rangle Z + \mu(Z,T)] = [C,T] + \langle \lambda(Z),T \rangle C$$

et la première assertion est prouvée. Supposons de plus que T commute à toute variable plus haute que Z; pour tout $X \in \mathscr{C}\mathfrak{g}$ on a alors

$$0 = [[X,T],ZC^{-1}] = [X,\mu(ZC^{-1},T)] + [\mu(ZC^{-1},X),T]$$

et la nullité du dernier terme montre que l'avant-dernier est aussi nul, d'où la seconde assertion. La dernière assertion est évidente. Pour obtenir une variable nilpotente on va additionner un terme correctif qui est une primitive d'une 1-forme donnée par la version polynômiale suivante du Lemme de Poincaré qui traite même des puissances négatives des semi-invariants.

LEMME 6. — *Soit* $\mathbf{K} = \mathbf{k}(x,y)$ *un corps commutatif engendré sur le corps* $\mathbf{k}$ *par* $n + r$ *générateurs notés* $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *et* $y = (y_1,y_2,\ldots,y_r)$. *Dans tout ce lemme on prend* $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ et $k, l \in \{1,2,\ldots,r\}$. *Soient les « champs de vecteurs » :*

$$N_i = c_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{r} d_{i,l} y_l \frac{\partial}{\partial y_l} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$
$$R_k = \sum_{l=1}^{r} f_{k,l} y_l \frac{\partial}{\partial y_l} \quad (k=1,2,\ldots,r)$$

dont les coefficients c_i, $d_{i,l}$ *et* $f_{k,l}$ *sont des fonctions rationnelles invariantes (i.e. des éléments de* $\mathbf{K}$ *qui sont annulés par les dérivations* N_i *et* R_k). *On suppose de plus les coefficients* c_i *non nuls* (1). *On note* $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbf{N}^n$ *et* $v = (v_1,v_2,\ldots,v_r) \in \mathbf{Z}^r$ *les multi-indices sur*

(1) On remarquera que les champs R_k peuvent être nuls et les variables y_l « sans effet réel », et le « vrai » nombre de ces champs peut différer de celui des variables y_l.

lesquels porteront les sommations (finies) de ce lemme. On pose

$$d_i(v) = \sum_{l=1}^{r} d_{i,l}v_l, \qquad f_k(v) = \sum_{l=1}^{r} f_{k,l}v_l,$$

$$e_i(v) = 0 \quad si \quad d_i(v) = 0,$$

$$e_i(v) = 1 \quad si \quad d_i(v) \neq 0, \qquad u - \hat{j} = (u_1, u_2, \ldots, u_j - 1, \ldots, u_n)$$

$$g(u,v) = \sum_j^{\phi} d_j(v) + \sum_j^{0} c_j u_j + \sum_{k=1}^{r} f_k(v)\ (^2)$$

$$\mathrm{I}_j(x^u y^v) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{-c_j}{d_j(v)} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^p x^u y^v \quad (si\ d_j(v) \neq 0).$$

1. *Soit* ω *une 1-forme polynômiale fermée* (3) *de coefficients*

$$\varphi_i = \sum_{u,v} a_{i,u,v} x^u y^v$$

$$\psi_k = \sum_{u,v} b_{k,u,v} x^u y^v$$

dans lesquels les fonctions $a_{i,u,v}$ *et* $b_{k,u,v}$ *sont rationnelles invariantes.*

Lorsque ω *ne contient aucun monôme* $x^u y^v$ *pour lequel* $g(u,v) = 0$ *une primitive* Φ *de* ω *s'écrit :*

$$\Phi = \sum_{u,v} \frac{1}{g(u,v)} \left(\sum_j^{\phi} a_{j,u,v} \mathrm{I}_j(x^u y^v) + \sum_j^{0} a_{j,u-\hat{j},v} x^u y^v + \sum_{l=1}^{r} b_{l,u,v} x^u y^v \right)$$

2. *Soit* ω *une 2-forme polynômiale fermée* (4) *de coefficients*

$$a_{i,j} = \sum_{u,v} a_{i,j,u,v} x^u y^v$$

$$b_{i,k} = \sum_{u,v} b_{i,k,u,v} x^u y^v$$

$$c_{k,l} = \sum_{u,v} c_{k,l,u,v} x^u y^v$$

(2) La sommation $\sum_j^{\phi}$ porte sur les j tels que $d_j(v) \neq 0$ et $\sum_j^{0}$ sur les j tels que $d_j(v) = 0$, avec j appartenant à $\{1,2,\ldots,n\}$.

(3) I.e. vérifiant les relations de Jacobi

$$0 = \mathrm{N}_i\varphi_j - \mathrm{N}_j\varphi_i = \mathrm{N}_i\psi_k - \mathrm{R}_k\varphi_i = \mathrm{R}_k\psi_l - \mathrm{R}_l\psi_k = 0.$$

On rappelle que x figure avec des puissances positives et y peut avoir des puissances < 0.

(4) I.e. telle que

$$0 = \mathrm{N}_i a_{j,p} + \mathrm{N}_j a_{p,i} + \mathrm{N}_p a_{i,j} = \mathrm{N}_i b_{j,k} - \mathrm{N}_j b_{i,k} + \mathrm{R}_k a_{i,j}$$
$$= \mathrm{N}_i c_{k,l} - \mathrm{R}_k b_{i,l} + \mathrm{R}_l b_{i,k} = \mathrm{R}_m c_{k,l} + \mathrm{R}_k c_{l,m} + \mathrm{R}_l c_{m,k} = 0$$

pour tout $i, j, p = 1, 2, \ldots, n$ et tout $k, l, m = 1, 2, \ldots, r$.

dans lesquels les fonctions $a_{i,j,u,v}$, $b_{i,k,u,v}$ *et* $c_{k,l,u,v}$ *sont rationnelles invariantes. Lorsque les dénominateurs écrits ne s'annulent pas, une primitive de* ω *est la* 1*-forme de composantes*

$$\Phi_i = \sum_{u,v} \frac{1}{g(u,v) + e_i(v)} \left(\sum_j^{\phi} a_{i,j,u,v} \mathrm{I}_j(x^u y^v) + \sum_j^{0} a_{i,j,u,-j,v} x^u y^u + \sum_{l=1}^{r} b_{i,l,u,v} x^u y^v \right)$$

$$\Psi_k = \sum_{u,v} \frac{1}{g(u,v)} \left(- \sum_j^{\phi} b_{j,k,u,v} \mathrm{I}_j(x^u y^v) + \sum_j^{0} b_{k,j,u-j,v} x^u y^v + \sum_{l=1}^{r} c_{k,l,u,v} x^u y^v \right).$$

13. Fin de la preuve de la Proposition 4.

On fait une construction itérative sur les lignes $p = 1, 2, \ldots, n+1$. Pour $p = 1$, toutes les variables sont déjà résolubles. On voit que l'action de $\mathfrak{g}$ est entièrement déterminée par celles de $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_s$. En même temps que le changement de base pure de $\mathbf{K}$, on fait aussi un changement de base parmi les S_i, avec des coefficients dans $\mathscr{C}$ pour obtenir la propriété suivante que l'on prend comme hypothèse de récurrence : pour chaque ligne $q < p$, on obtient une nouvelle base $(\mathrm{S}'_1, \mathrm{S}'_2, \ldots, \mathrm{S}'_t, \mathrm{S}'_{t+1}, \ldots, \mathrm{S}'_s)$ dont les t premiers éléments agissent sur les nouvelles variables de ligne $\leqslant q$ par des dérivations du type du Lemme 6 et dont les $s - t$ éléments restants commutent aux variables de ligne $\leqslant q$. Dans ce qui suit on prend évidemment $q = p - 1$. Pour toute variable Z de la ligne p telle qu'il existe un élément $\mathrm{S} \in (\mathrm{S}'_{t+1}, \ldots, \mathrm{S}'_s)$ dont le poids $\lambda(\mathrm{S})$ ne s'annule pas en Z, on applique les Lemmes 3 et 4 pour en faire une variable résoluble. Pour toute autre variable Z de la ligne p, les commutateurs $[\mathrm{S}'_i, \mathrm{Z}]$ pour $i = 1, 2, \ldots, t$ ne dépendent que des variables de ligne $< p$ et définissent une 1-forme polynômiale fermée au sens du Lemme 6. Il existera alors une primitive Φ telle que $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z} - \Phi$ commute modulo $(\mathbf{K}_{p-1,n+1})^{\mathfrak{g}}$ à S'_1, $\mathrm{S}'_2, \ldots, \mathrm{S}'_t$. En effet, on peut contourner les restrictions du Lemme 6 par une homothétie dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ transformant N_i en $c'_i\mathrm{N}_i$ et R_k en $d'_k\mathrm{R}_k$: la 1-forme se transformera aussi par une homothétie et la fonction $g(u,v)$ devient

$$g'(u,v) = \sum_j^{\phi} c'_j d_j(v) + \sum_j^{0} c'_j c_j u_j + \sum_{k=1}^{r} d'_k f_k(v).$$

Avec un choix adéquat de l'homothétie, la fonction $g'(u,v)$ sera non nulle sur tous les monômes $x^u y^v$ qui sont effectivement présents et qui ne vérifient pas la condition

$$0 = d_j(v) = u_j = f_k(v) \quad \text{pour tout} \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et tout} \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Les monômes qui restent correspondent à une 1-forme fermée et centrale d'où notre assertion. La primitive choisie ne dépend que des variables de lignes $< p$ et commute à $S'_{t+1}, \ldots, S'_s$. On applique alors le Lemme 5 si Z' ne commute pas à l'un de ces éléments que l'on note S et on pose alors $U = Z'C^{-1}$. Ceci termine la construction de la nouvelle base pure de $\mathbf{K}_{p,n+1}$. Il reste à vérifier l'hypothèse de récurrence. Pour cela, il suffit de remarquer que si l'on choisit un sous-ensemble maximal de variables nilpotentes effectives, toute autre variable nilpotente devient centrale après soustraction d'une combinaison linéaire convenable des variables effectives choisies. La nouvelle base des S'_1 s'obtient maintenant par des calculs d'algèbre linéaire faciles.

Pour la ligne $p = n + 1$, la démonstration est identique, mais nous avons une information supplémentaire : la nouvelle base des S'_i ne comporte pas d'éléments qui commutent aux variables de lignes $< n + 1$ car les éléments S_i se représentent par des dérivations indépendantes de $\mathbf{K}_{n,n+1}$. Elle est donc vide et les dernières variables sont centrales.

Cette même démonstration s'applique aux éléments $\theta''(S_{s+1})$, $\theta''(S_{s+2}), \ldots, \theta''(S_S)$ car ils définissent par commutation aux S'_i une 1-forme polynômiale fermée et permet de compléter la preuve de la Proposition 3 que l'on a laissée en suspens.

14. Suite de la démonstration du Théorème A.III.

La base de $\mathfrak{h}_{n+1}$ écrite en la Proposition 3 est une base standard et on peut projeter $\theta'(S_1), \theta'(S_2), \ldots, \theta'(S_S)$ parallèlement à cette base sur son commutant. On note $\theta_1(S_i)$ les images par cette projection. Ces images ne commutent pas ensemble et leurs commutateurs définissent une 2-forme polynômiale fermée au sens du Lemme 6. La seconde assertion de ce Lemme, dont les restrictions peuvent être évitées comme auparavant, nous fournit une primitive σ_i qui rend les éléments $\theta_1(S_i) - \sigma_i$ commutatifs modulo $\mathscr{C}$.

PROPOSITION 6. — *Il existe des éléments*

$$\sigma_i \in \mathbf{A}_{n,n+1}(\Delta_{n+1})^{-1} \vee \{Z_0, Z_{R+1}, Z_{R+2}, \ldots, Z_r\}$$

tels que les éléments $S'_i = \theta_1(S_i) - \sigma_i$ *avec* $i = 1, 2, \ldots, s$ *commutent ensemble modulo* $(\mathbf{A}_{n,n+1}(\Delta_{n+1})^{-1})^{\mathfrak{g}}$. *Le nombre* u *des variables nilpotentes effectives et la codimension* s *de* $\mathfrak{h}_{n+1}$ *sont des invariants de* $\mathfrak{g}$. *Pour toute base* $(S_1^{\sim}, S_2^{\sim}, \ldots, S_s^{\sim})$ *d'un supplémentaire de* $\mathfrak{h}_{n+1}^{\sim}$ *dans* $\mathfrak{g}^{\sim}$ *telle que* $S_{u+1}^{\sim}, S_{u+2}^{\sim}, \ldots, S_s^{\sim}$ *commutent à toute variable nilpotente, il existe des éléments*

$$\sigma_i \in (\mathbf{A}_{n,n+1})_E \vee \{Z_0, Z_{R+1}, Z_{R+2}, \ldots, Z_r\}$$

tels que les commutateurs $[S_i^{\sim} - \sigma_i, S_j^{\sim} - \sigma_j]$ *s'annulent si* i *ou* j *est plus petit que* $u + 1$ *et sont des éléments de* $\mathscr{C}$.

La matrice antisymétrique restante définit une forme bilinéaire alternée canonique le sous-espace $\mathfrak{r}$ *de* $\mathscr{C}\mathfrak{g}$ *constitué par les éléments qui commutent à toute variable nilpotente de* $\mathbf{K}$. *Cette forme bilinéaire à valeurs dans* $\mathscr{C}$ *s'annule sur* $\mathscr{C}\mathfrak{g}_n$.

Soit $(U_1, U_2, \ldots, U_u, V_1, V_2, \ldots, V_v)$ une base pure de $\mathbf{K}$ formée par u variables nilpotentes effectives U_i et v variables résolubles V_j. Pour montrer que u est un invariant de $\mathfrak{g}$, il suffit de prouver que pour tout $S \in \mathscr{C}\mathfrak{g}$ et commutant aux U_i et tout $Z \in \mathbf{K}$ tels que $[S,Z] \in \mathscr{C}$, on a $[S,Z] = 0$. Dans ce qui suit on note l'action adjointe de S par le symbole $'$ et on se réfère seulement à cette action quand on parle d'invariance, de semi-invariance ou de poids. On considère tout élément de $\mathbf{K}$ comme une fraction rationnelle en $V_1, V_2, \ldots, V_v$ à coefficients appartenant à $\mathbf{k}(U_1, U_2, \ldots, U_u)$ et on parlera de la forme irréductible P/Q de l'élément Z de $\mathbf{K}$.

Quand Z est invariant, P et Q sont des semi-invariants car on a

$$0 = [S,Z] = (P'Q - Q'P)/Q^2$$

ce qui montre que P divise P' et par suite P' est un multiple de P puisque l'action de S n'augmente pas le degré. Évidemment Q sera aussi un semi-invariant de poids opposé à celui de P. Par hypothèse Z' est aussi un invariant qu'on écrit sous forme irréductible $Z' = R/T = (P'Q - Q'P)/Q^2$. Alors T divise Q : en effet soit D le p.g.c.d. de T et Q. On montre facilement par une décomposition en facteurs premiers que tout diviseur d'un semi-invariant est aussi un semi-invariant. Donc D est un semi-invariant qui divise Q ce qui entraîne que D divise Q'. Après simplifications il vient

$$\frac{R}{T} = \frac{P'Q/D - PQ'/D}{QQ/D}$$

donc T divise QQ/D; étant premier avec Q/D, il divise nécessairement $Q = TC$.

Comme T est semi-invariant T divise T′ d'où

$$\frac{R}{T} = \frac{CP' - P(CT'/T + C')}{TCC}.$$

On voit donc que C divise le numérateur, et étant premier avec P, C doit diviser C′. Ainsi C est un semi-invariant, donc $Q = TC$ l'est aussi. Soit μ le poids de Q. On a $Z' = (P' - \mu P)/Q$, donc $P' - \mu P$ est aussi un semi-invariant de poids μ. Il vient donc

$$P'' - \mu P' - \mu(P' - \mu P) = 0,$$

et en explicitant $P = \Sigma c_\alpha V^\alpha$ avec les monômes V^α dont les poids sont notés $\varphi(\alpha)$:

$$0 = \Sigma c_\alpha(\varphi(\alpha)^2 - 2\mu\varphi(\alpha) + \mu^2)V^\alpha = \Sigma c_\alpha(\varphi(\alpha) - \mu)^2 V^\alpha.$$

On conclut que $c_\alpha(\varphi(\alpha) - \mu)^2$ est nul pour tout multi-indice α; donc $c_\alpha = 0$ pour tout α tel que $\varphi(\alpha)$ n'est pas égal à μ ce qui entraîne que P est aussi un semi-invariant de poids μ et Z′ est nul.

Calculons maintenant les termes correctifs σ_i. Par le Lemme 2, les différents commutateurs sont des éléments de $\mathbf{K}_{n,n+1}$. Comme on ne localise que par des semi-invariants on a $[\theta_1(S_i), \theta_1(S_j)] \in (\mathbf{A}_{n,n+1})_E$. Il nous est loisible de chercher une primitive de la 2-forme dans une base $(\tilde{S_1}, \tilde{S_2}, \ldots, \tilde{S_s})$ dont les actions adjointes sont du type de celles du Lemme 6. La 2-forme est fermée grâce à l'identité de Jacobi et elle est polynômiale au sens du Lemme 6. Ce Lemme donne une primitive qui annule les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{j,k}$ de la 2-forme car on peut toujours rendre $g(u,v) + e_i(v)$ non nul. La primitive permet donc de rendre les dérivations du type nilpotent commutantes aux autres dérivations. Par ailleurs cette primitive ne peut augmenter le degré en les variables nilpotentes que d'une unité; la 2-forme ne dépendant pas des variables de ligne $n+1$, la primitive sera une fonction affine de $Z_{R+1}, Z_{R+2}, \ldots, Z_r$. Ceci démontre les assertions A.III.3 et A.III.4 ainsi que la première partie de la Proposition 6.

Il nous reste à prouver que les coefficients centraux de la 2-forme prise sur deux éléments de $\mathfrak{r}$ sont uniques (la dernière assertion de la Proposition est évidente). Pour cela nous allons montrer qu'un tel coefficient ne dépend pas de la primitive choisie, dès lors que ce coefficient est central. Soient S et T deux éléments de $\mathfrak{r}$. On note $\mathscr{B}(S,T)$ la valeur de la 2-forme sur le couple (S,T). Un autre choix de la primitive transformera la valeur $\mathscr{B}(S,T)$ en $\mathscr{B}(S,T) + [S,\mu] - [T,\lambda]$ où λ et μ sont des éléments de $\mathbf{K}$. Reprenons les notations du début de la preuve de la Proposition 6 et écrivons λ et μ comme des fractions rationnelles avec le plus petit dénominateur commun Q : $\lambda = A/Q$ et $\mu = B/Q$. Avec une extension algébrique, on va pouvoir faire un développement en série de Laurent vis-à-vis de l'action de T. On pose $[T,V_i] = \varphi_i V_i$ et pour tout monôme

$$V^\alpha = V_1^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} \dots V_v^{\alpha_v}, \qquad [T,V^\alpha] = \varphi(\alpha)V^\alpha = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i \varphi_i V^\alpha .$$

Les éléments φ_i sont dans $\mathscr{C}$ et φ est une application $\mathbf{Z}$-linéaire de $\mathbf{Z}^v$ dans $\mathscr{C}$. On note M l'image de φ qui est un $\mathbf{Z}$-module et on note M_0 la partie de M formée des images $\varphi(\alpha)$ avec V^α figurant effectivement dans Q. Par un raisonnement géométrique facile, on voit qu'il existe un point $\psi_0 \in M_0$ qui est extrêmal dans l'enveloppe convexe de M_0 et une base $(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_p)$ du $\mathbf{Q}$-module $\mathbf{Q}$M qui engendre M avec des coefficients dans $\mathbf{Z}$ et $M_0 - \psi_0$ avec des coefficients dans $\mathbf{N}$ non tous nuls. En réindexant, on obtient que $(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_p)$ est une base du $\mathbf{Q}$-module $\mathbf{Q}$M. On introduit les variables $X_1, X_2, \dots, X_p$ dont les poids sont les ψ_i : $[T,X_i] = \psi_i X_i$ et les variables $Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_v$ qui commutent à T et représenteront les variables $V_{p+1}, V_{p+2}, \dots, V_v$. Pour tout $j = 1, 2, \dots, v$ on peut écrire au moyen de coefficients $n_{j,i} \in \mathbf{Z}$

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{p} n_{j,i}\psi_i$$

et on pose

$$V_j = \prod_{i=1}^{p} X_i^{n_{j,i}} \quad \text{si} \quad j \leqslant p \qquad V_j = Y_j \prod_{i=1}^{p} X_i^{n_{j,i}} \quad \text{si} \quad j > p .$$

On a ainsi simplement introduit des racines $n^{\text{ièmes}}$ convenables des monômes V^α dont les poids sont justement les ψ_i. Les relations des commutations de ces racines avec $\mathfrak{g}$ sont évidentes et ne seront pas écrites. On a aussi une injection naturelle de $\mathbf{K}$ dans

$$\mathbf{k}(U_1,U_2,\dots,U_u,Y_{p+1},Y_{p+2},\dots,Y_v)(X_1,X_2,\dots,X_p).$$

Par construction, si on note β le multi-indice tel que $\varphi(\beta) = \psi_0$, on a

$$Q = c_\beta X^\beta + \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$$

et la dernière sommation porte sur les multi-indices α tels que $(\alpha-\beta)\in \mathbf{N}^p\backslash\{0\}$. On peut alors développer $1/Q$ en série de Laurent formelle :

$$1/Q = (c_\beta)^{-1}X^{-\beta}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\sum_{\alpha}\frac{c_\alpha}{c_\beta}X^{\alpha-\beta}\right)^j\right)$$

(car on peut resommer suivant les puissances croissantes de X sans jamais rencontrer que des sommes finies). On en déduit les développements de Laurent pour λ et μ :

$$\lambda = A/Q = \Sigma\, a_\alpha X^\alpha$$
$$\mu = B/Q = \Sigma\, b_\alpha X^\alpha .$$

On définit les formes **Z**-linéaires ζ et ξ par

$$[S,X^\alpha] = \zeta(\alpha)X^\alpha \qquad \text{et} \qquad [T,X^\alpha] = \xi(\alpha)X^\alpha$$

et on pose $b'_\alpha = [S,b_\alpha]$. Le terme correctif C dû au choix de la primitive est

$$C = [S,\mu] - [T,\lambda] = \sum_\alpha (b_\alpha\zeta(\alpha) + b'_\alpha - a_\alpha\xi(\alpha))X^\alpha$$

et C doit commuter à T puisqu'il est central. Comme $\xi(\alpha)$ n'est jamais nul si $\alpha \neq 0$, tous les coefficients de la série de Laurent de C sont nuls hormis le coefficient constant. Il vient alors $C = b'_0$ et on montre que ce dernier coefficient est aussi nul car il doit commuter à S en appliquant le résultat précédent.

Pour définir la 2-forme ω, nous avons dû choisir des bases standard et la définition ne paraît pas canonique. Or il n'en est rien. Dans ce qui suit, sera exposé le caractère intrinsèque de la définition de ω et précisés tous les arbitraires des choix de bases (ce qui sera utile un peu plus tard).

15. Définition intrinsèque de la 2-forme ω sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans K.

Les données sont les suivantes :

$\mathscr{C} = \mathscr{K}(\mathfrak{g}_n)^{\mathfrak{g}}$ = commutant de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{K}(\mathfrak{g}_n)$;

$\mathbf{K} = (\mathscr{K}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_n})^{\#}$ = centre du commutant de $\mathfrak{g}_n$ dans $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$;

$\mathfrak{k} = (\mathfrak{g}+\mathscr{K}(\mathfrak{g}_n))\mathbf{K}$, $\mathfrak{k}$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathbf{K}$;

$\mathfrak{l} = (\mathfrak{k})^{\mathbf{K}}$ = commutant de $\mathbf{K}$ dans $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ engendre l'algèbre de Weyl A_m sur $\mathbf{K}$.

La représentation adjointe ρ de $\mathfrak{g}\mathbf{K}$ dans $\operatorname{Der} A_m$ est fidèle et la représentation adjointe δ de $\mathfrak{g}\mathbf{K}$ dans $\operatorname{Der}\mathbf{K}$ est commutative. Comme A_m est une algèbre de Weyl sur $\mathbf{K}$, l'ensemble $\operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_m$ est un idéal de $\operatorname{Der} A_m$ qui admet une sous-algèbre supplémentaire $\mathscr{D}$; $\mathscr{D}$ est donc isomorphe à $\operatorname{Der}\mathbf{K} = \operatorname{Der} A_m/\operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_m$; on note p la projection sur $\mathscr{D}$ qu'on identifie à $\operatorname{Der}\mathbf{K}$, ce qui donne

$$\delta(X) = p \circ \rho(X) \quad \text{et} \quad \rho(X) - \delta(X) \in \operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_m \quad \text{lorsque} \quad X \in \mathscr{C}\mathfrak{g}.$$

D'autre part, comme toute dérivation de A_m qui est nulle sur $\mathbf{K}$ est intérieure, on a $\operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_m = \operatorname{ad}(A_m/\mathbf{K})$ et il existe une section $R : A_m/\mathbf{K} \to A_m$ telle que l'on ait

$$\rho(R(X)) = \rho(X) - \delta(X) \qquad \text{pour tout} \qquad X \in \mathscr{C}\mathfrak{g}.$$

L'application η définie par $\eta(X) = \rho(X) - \delta(X)$ sur $\mathscr{C}\mathfrak{g}$ est une représentation de $\mathscr{C}\mathfrak{g}$ dans $\operatorname{Der}_{\mathbf{K}} A_m$ au sens généralisé suivant :

$$[\eta(X),\eta(Y)] = \eta([X,Y]) - [\delta(X),\eta(Y)] + [\delta(Y),\eta(X)]$$

ce qui donne la relation suivante dans le relèvement

$$[R(X),R(Y)] = R([X,Y]) - \delta(X).R(Y) + \delta(Y).R(X) \quad \text{mod. } \mathbf{K}.$$

Dans cette formule $\delta(X).R(Y)$ par exemple est l'image de $R(Y) \in A_m$ sous l'action de la dérivation $\delta(X) \in \mathscr{D}$. On peut donc définir ω par :

$$\omega(X,Y) = [R(X),R(Y)] - R([X,Y]) + \delta(X).R(Y) - \delta(Y).R(X).$$

La 2-forme ω est un 2-cocycle sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ et vérifie la relation

$$0 = \omega(X,[Y,Z]) + \omega(Y,[Z,X]) + \omega(Z,[X,Y]) + \delta(X).\omega(Y,Z) \\ + \delta(Y).\omega(Z,X) + \delta(Z).\omega(X,Y).$$

Sur la définition même de la 2-forme ω, on voit facilement que sa classe de cohomologie ne dépend pas des différents choix qu'on a faits. On peut donc énoncer :

PROPOSITION 7. — *Il existe une classe de cohomologie canonique sur* $\mathfrak{g}$ *à valeurs dans* $\mathbf{K}$ *muni de l'action adjointe de* $\mathfrak{g}$. *On peut la prolonger en une classe de cohomologie sur* $\mathscr{C}\mathfrak{g}$. *Pour tout choix d'un ensemble*

$S_1^{\sim}, S_2^{\sim}, \ldots, S_u^{\sim}$ *d'éléments de* $\mathscr{C}\mathfrak{g}$ *définissant des dérivations indépendantes dans le sous-corps de* **K** *engendré par les variables nilpotentes, il existe dans cette classe de cohomologie un unique 2-cocycle* ω *qui contient* $S_1^{\sim}, \tilde{S}_2, \ldots, S_u^{\sim}$ *dans son noyau et qui ne prend que des valeurs dans* $\mathscr{C}$.

La démonstration de la Partie III du Théorème A ne demande plus que quelques calculs pour vérifier que l'on obtient une représentation π de $\mathfrak{g}\mathbf{K} + A_m$ en définissant π égal à l'injection canonique de A_m dans le deuxième facteur de $\operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus A_m$ et en posant $\pi(S_i^{\sim}) = \delta(S_i^{\sim}) \in \operatorname{Der} \mathbf{K}$ (= premier facteur de la somme directe) pour $i = 1, 2, \ldots, s$ [11]. Ces calculs sont standard et omis en conséquence. Pour la réciproque, il suffit de remarquer que l'image de $\mathscr{C}\mathfrak{g}$ dans $\operatorname{Der} \mathbf{K}$ est commutative, par conséquent les $S_i^{\sim}$ doivent commuter entre elles.

16. Latitude dans le choix des bases standard.

La construction explicite du Théorème A repose sur des choix de base standard qui ne sont que de deux types :

i) Choix de la base pure $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r, Q_1, Q_2, \ldots, Q_N)$ de $\mathbf{K}_{n+1}$. Pour tout autre choix d'une base pure du même type

$$(Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_r, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_N),$$

les variables conjuguées P'_i sont déterminées à l'addition d'un élément de $\mathbf{K}_n$ près :

$$P'_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} P_j + b_i$$
$$Q'_i = d_i .$$

Les éléments $a_{i,j}$, b_i et d_i appartiennent à $\mathbf{K}_{n+1}$. On a les relations sur ces coefficients du fait que la nouvelle base

$$(Z_0, Z'_1, \ldots, Z'_r, P'_1, P'_2, \ldots, P'_m, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_m)$$

est encore standard.

(ii) Choix des bases standard des algèbres de Heisenberg $\mathfrak{h}_p$. Lorsque l'on tient compte des libertés de choix offertes par le premier type, on peut se restreindre maintenant aux transformations symplectiques sur les éléments de base utilisant seulement des coefficients semi-invariants :

$$P' = \sum_{j=1}^{m} (a_{i,j}P_j + b_{i,j}Q_j)$$

$$Q' = \sum_{j=1}^{m} (c_{i,j}P_j + d_{i,j}Q_j).$$

Les coefficients $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$, $d_{i,j}$ sont maintenant des semi-invariants et forment une matrice symplectique.

17. Effacement algébrique de l'obstruction.

Voici une version algébrique de la recherche d'une primitive de ω sur un recouvrement de $\mathbf{K}^-$ correspondant à l'introduction de fonctions logarithmes donnant des variables conjuguées aux dérivations résolubles (i.e. du type R_k du Lemme 6).

Soit $V \oplus W$ un supplémentaire du commutant de $\mathbf{K}$ dans $\mathscr{C}\mathfrak{g}$ tel que $V \subset \mathfrak{r}$ et $W \cap \mathfrak{r} = 0$. La Proposition 6 définit une forme bilinéaire $\mathscr{B}$ sur $\mathfrak{r}$ et on munit $V \oplus \mathscr{C}$ d'une structure d'algèbre de Lie grâce au crochet : $[X,Y] = \mathscr{B}(X,Y)$ pour tous $X, Y \in V$, et $\mathscr{C}$ est dans le centre. On note V° le sous-ensemble V muni de ce crochet. On définit sur $V^\circ \oplus \operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus A_m$ une structure d'algèbre de Lie en prenant la structure déjà définie sur $\operatorname{Der} \mathbf{K} + A_m$, en imposant à V° de commuter cette sous-algèbre et en identifiant $[V^\circ, V^\circ] \subset \mathscr{C} \subset A_m$.

Proposition 8. — *Il existe une représentation naturelle π de $\mathfrak{g}$ dans $V^\circ \oplus \operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus A_m$ qui se prolonge à $\mathfrak{g}\mathbf{K} \oplus A_m$. La représentation π est fidèle, égale à l'injection canonique sur A_m et $\pi(v) \in v + \operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus A_m$ lorsque $v \in V$. On a aussi $\pi(W) \subset \operatorname{Der} \mathbf{K} \oplus A_m$.*

On prend les notations de A.III.5. Pour tout X appartenant à $\mathfrak{g}\mathbf{K} + A_m$, on note $R(X)$ l'unique polynôme symétrisé sans terme constant en les P_i, Q_i tel que $\theta(X) = X - R(X)$ commute à ces mêmes P_i, Q_i et on note $\delta(X)$ la dérivation de A_m dont l'action sur $\mathbf{K}$ coïncide avec l'action adjointe de X et qui annule les P_i, Q_i. On choisit enfin une primitive $\sigma(X)$ pour la 2-forme ω telle que l'on ait compensation de tous les coefficients pour les éléments de W et pour que les coefficients entre deux éléments de V soient centraux. On note p l'injection dans V° de la projection sur V. On a alors

$$\pi(X) = p(X) + R(X) + \delta(X) + \sigma(X)$$

et il est aisé de vérifier les assertions de la Proposition.

18. Représentation analytique d'une algèbre de Lie nilpotente réelle.

Le théorème A s'applique à l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ et suivant ses notations on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n$. La partie III du théorème est vide dans le cas présent. Comme il est bien connu que l'on peut représenter une base standard par des opérateurs différentiels x et $\frac{\partial}{\partial x}$, on a, en reprenant les notations du Théorème A et dė la Proposition 2 :

THÉORÈME B. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie rẹelle et nilpotente.*

On note R *la dimension algébrique de* $\mathbf{K}_{n,n+1}$, $R + N$ *celle de* $\mathbf{K}_n$ *et* $2(M-N)+1$ *la dimension de l'algèbre de Heisenberg* $\mathfrak{h}_n$ *(ces objets sont canoniques d'après le Théorème A). Il existe une représentation canonique* π *de* $\mathfrak{g}$ *par des opérateurs différentiels sur une variété* $\Omega \times \mathbf{R}^M$ *où* Ω *est l'ouvert de Zariski des places entières et unitaires* (5) *de* $\mathbf{K}_{n,n+1}$ *défini par la non nullité du semi-invariant* Δ_n.

La représentation π *réalise* $\mathfrak{g}$ *par des opérateurs différentiels du premier ordre en* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_M}$, *à coefficients polynômes en* $x = (x_1,x_2,\ldots,x_M)$ *et en* $z = (z_1,z_2,\ldots,z_R)$, *(*x *étant les coordonnées de* $\mathbf{R}^M$ *et* z *celles de* Ω*), avec un dénominateur qui divise*

$$\pi(\Delta_n) \in (\sqrt{-1})^{d(\Delta_n)}\mathbf{R}[z_1,z_2,\ldots,z_R].$$

Considérés comme des opérateurs agissant dans $L^2(\Omega \times \mathbf{R}^M)$ *les éléments* $\pi(X)$ *pour* $X \in \mathfrak{g}$ *sont antisymétriques et la représentation* π *est canonique et unique à une transformation canonique au sens des opérateurs Fourier-Intégraux près.*

A un facteur $\sqrt{-1}$ *près, l'algèbre* $\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ *contient les opérateurs de*

(5) Voir la définition ci-dessous.

multiplication par x_i *(comme image de* Q_i*) et les opérateurs* $\pi(\Delta_n)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *(comme image de* $\Delta_n P_i$*) ainsi que les opérateurs multiplication par* z_j *(comme image de* Z_j*).*

Nous montrerons dans un travail ultérieur que la représentation π ici exposée est la forme infinitésimale (et algébrique, analytique) de la Transformation de Fourier-Plancherel du groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

La représentation π est la représentation de Schrödinger des relations de commutations standard. Elle consiste à représenter les opérateurs P_i comme des opérateurs d'impulsion et les opérateurs Q_i comme des opérateurs de position. Comme nous désirons tenir compte de l'antiautomorphisme principal et le faire correspondre à l'adjonction nous poserons, en gardant les notations du Théorème A :

$$\begin{aligned} \pi(Q_i) &= (\sqrt{-1})^{d(Q_i)}x_i \\ \pi(P_i) &= (\sqrt{-1})^{-d(Q_i)}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,\ldots,M) \\ \pi(Z_j) &= (\sqrt{-1})^{d(Z_j)}z_j \qquad (j=1,2,\ldots,R). \end{aligned}$$

La représentation π est alors algébriquement déterminée sur A_M et par suite sur $\mathfrak{g}$. Par construction du degré $d(?)$ (cf. Proposition 2), le degré des variables Q_i et Z_j est exactement leur filtration dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et donne leur parité sous l'action de τ. Par conséquent leurs images par π ont la même parité sous l'adjonction. Comme les P_i sont obtenus par des combinaisons d'éléments de $\mathfrak{g}$ avec des coefficients ayant exactement la parité convenable sous τ et comme on a introduit des produits symétrisés, chaque P_i est de même parité que Q_i sous l'action de τ. En conséquence $\pi(P_i)$ est encore de même parité sous l'adjonction. Donc la représentation π transforme τ en l'adjonction sur la base algébrique constituée par les P_i, Q_i, Z_j et cette propriété se prolonge à tout A_M. Revenant à l'expression des éléments de $\mathfrak{g}$ en fonction de la base standard, ce que nous donne l'assertion 9 de la Proposition 2, on vérifie que les opérateurs différentiels sont bien conformes à la description donnée ici.

La représentation π est canonique car elle ne dépend que du choix de la base standard : les différents choix possibles de cette base standard sont décrits au paragraphe 15 en ce qui concerne les P_i et Q_i et pour les Z_j on peut choisir une base pure quelconque, pourvu que la parité sous l'action de τ soit explicite. Les différents choix des Z_i correspondent à différents paramétrages de l'ouvert Ω constitué par les places entières (i.e. finies sur $\mathbf{K}_{n,n+1} \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g})$) et unitaires (i.e. telles que l'antiautomorphisme principal correspond à la conjugaison complexe) et qui n'annulent pas Δ_n. Quant aux différents choix des P_i, Q_i ils peuvent clairement se décrire en termes de transformations canoniques des opérateurs Fourier-Intégraux. Ainsi est démontré le Théorème B. Nous abordons maintenant le cas des algèbres résolubles.

19. Représentation analytique d'une algèbre de Lie résoluble réelle.

Nous nous restreignons dans ce qui suit au cas où la représentation infinitésimale est analytique et l'ouvert de Zariski Ω de $\mathbf{K}^-$ défini par la non-nullité d'un semi-invariant Δ adéquat (i.e. quand la primitive de la 2-forme ω peut être prise analytique, sans fonction multiforme). Dans le cas général, qui correspond à un groupe dont le dual réduit n'est pas de type I, la représentation infinitésimale n'est pas canonique à cause du choix du revêtement et il ne nous paraît pas intéressant de la décrire autrement qu'en vue du calcul de la Transformation de Fourier-Plancherel.

THÉORÈME C. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble réelle.*

On suppose que le 2-cocycle ω *à valeurs centrales donné par la Proposition 7 admet une primitive analytique sur un ouvert* Ω *de places entières et unitaires de* $\mathbf{K}$ *définies par la non-nullité des différents semi-invariants avec lesquels on a localisé* [6].

Il existe alors une représentation π *de* $\mathfrak{g}$ *par des opérateurs différentiels formellement antisymétriques de degré au plus 2 opérant sur* $\Omega \times \mathbf{R}^m$ *(cf. Théorème A). Lorsque l'on paramètre* Ω *par* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_r) \in \mathbf{R}^r$ *et* $\mathbf{R}^m$ *par* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *tels que*

$$\begin{aligned}
\pi(Q_i) &= (\sqrt{-1})^{d(Q_i)} x_i && (i = 1, 2, \ldots, m) \\
\pi(Z_j) &= (\sqrt{-1})^{d(Z_j)} z_j && (j = 1, 2, \ldots, r) \\
\pi(P_i) &= (\sqrt{-1})^{-d(Q_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} && (i = 1, 2, \ldots, m),
\end{aligned}$$

(6) Entière signifie finie sur $\mathbf{K} \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ et unitaire signifie telle que l'antiautomorphisme principal correspond à la conjugaison complexe. On note Δ le p.p.c.m. des semi-invariants par lesquels on a localisé pendant la construction algébrique.

π est définie sur la base $(S_1, S_2, \ldots, S_s)$ choisie en Théorème A.III.1 *par* ([7])

$$\pi(S_k) = \sum_{l=1}^{r} (\sqrt{-1})^{d(Z_l)}\pi([S_k, Z_l]) \vee \frac{\partial}{\partial z_l} + \pi(R(S_k)) + v_k$$

où v_k est une fonction rationnelle des z_j, hormis éventuellement une combinaison linéaire de fonctions logarithmes de variables résolubles réels (au sens de la Proposition 5).

La représentation π est canonique et unique à une transformation canonique d'opérateurs Fourier-Intégraux près. Elle réalise $\mathfrak{g}$ par des opérateurs différentiels de degré au plus 2 *en x et au plus* 1 *en z, avec des coefficients polynômes en x et z éventuellement divisés par le dénominateur $\pi(\Delta)$ et avec un terme constant pouvant contenir les fonctions v_k.*

La représentation π consiste à réaliser l'algèbre de Weyl A_m par la représentation de Schrödinger, à réaliser les générateurs Z_i par la multiplication par les coordonnées sur l'ouvert de Zariski Ω et à traduire en fonction de ces coordonnées les dérivations de $\mathbf{K}$ définies par les éléments S_k. Elle est donc toute naturelle et ne demande pas d'autres explications. En ce qui concerne l'antisymétrie des opérateurs qui représentent $\mathfrak{g}$, cela est acquis par la construction même du degré dans $\mathbf{K}_{n+1}$ et la preuve est la même que pour le cas nilpotent. Par contre il est peut-être nécessaire d'expliciter la construction de la primitive v_k de la 2-forme ω. Il est clair que la primitive peut se calculer dans n'importe quelle base. On peut choisir une base de $\mathfrak{h}^{\sim}$ donnée par A.III.3 et A.III.4 : $(S_1^{\sim}, S_2^{\sim}, \ldots, S_u^{\sim}, S_{u+1}^{\sim}, \ldots, S_s^{\sim})$ est une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{h}_{n+1}^{\sim}$ dans $\mathfrak{h}^{\sim}$ telle que $(S_1^{\sim}, S_2^{\sim}, \ldots, S_u^{\sim})$ induit une base des dérivations nilpotentes et $(S_{u+1}^{\sim}, S_{u+2}^{\sim}, \ldots, S_s^{\sim})$ définit des dérivations qui annulent toute variable nilpotente. D'après la Proposition 7, on peut choisir dans la classe de ω une 2-forme qui contient $S_1^{\sim}, S_2^{\sim}, \ldots, S_u^{\sim}$ dans son noyau et qui ne prend que des valeurs centrales. En particulier, on voit facilement que cette 2-forme s'annule sur les éléments de $\mathfrak{g}_n$ et sur $\mathfrak{h}_{n+1}^{\sim}$. Il ne lui reste que des valeurs sur les $S_{u+1}^{\sim}, \ldots, S_s^{\sim}$ qui forment une matrice antisymétrique. Pour obtenir une primitive, on doit introduire des variables conjuguées aux $S_i^{\sim}$; comme ce sont des dérivations du type résoluble (notées R_k dans le Lemme 6), une variable conjuguée apparaît comme un logarithme de certaine variable résoluble (notée y_l dans le même Lemme).

([7]) π est déjà définie algébriquement sur les polynômes en Q_i, Z_j. Le polynôme $R(S_k)$ est défini au paragraphe 14 par exemple.

La primitive sera analytique quand elle ne fait pas intervenir de fonctions multiformes, i.e. aucune fonction logarithme d'une variable résoluble complexe. Lorsque l'on tient compte des deux termes de cette primitive, une provenant du choix de la 2-forme représentant la classe et l'autre qui est une combinaison linéaire de logarithmes réels, on a l'expression du terme constant ν_k. La représentation π est déterminée uniquement, hormis l'arbitraire des choix des bases standard vus au paragraphe 15 et des choix des primitives de la 2-forme ω. On voit sans aucune difficulté que des choix différents donnent la même représentation, à une transformation canonique près.

20. Remarques finales.

L'utilisation de représentations de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ sous forme d'opérateurs différentiels à coefficients polynômes ou rationnels pour obtenir des informations sur la structure de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ n'est pas nouvelle : on peut citer les travaux de Gelfand et Kirillov [6, 7] et de N. Conze-Berline [2] par exemple. Le premier travail est très proche du nôtre, car les opérateurs différentiels utilisés proviennent d'une représentation du groupe (dans notre cas, on utilisera la démarche inverse). Le second travail utilise des opérateurs de degré non borné et est en fait d'une optique toute différente.

Notre travail procède d'une stratégie nouvelle : on construit un anneau de Weyl le plus grand possible dans $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ et qui est caractéristique. On introduit la représentation de Schrödinger de cet anneau, ce qui généralise de manière non commutative la notion de l'espace des caractères d'un anneau commutatif. En faisant ensuite opérer l'algèbre de Lie sur la représentation de Schrödinger (ce qui donnera encore des orbites) on construit des représentations du groupe. On a alors des procédés pour repasser à la théorie des orbites de Kirillov [1, 12]; en particulier on peut calculer des formes linéaires et des sous-algèbres subordonnées lorsque l'on part d'une sous-représentation irréductible de la représentation de Schrödinger [10]. L'outil algébrique que nous venons de construire peut ainsi servir à paramétrer les orbites de la représentation co-adjointe en position générale en même temps qu'un choix de polarisations, et ceci de manière algébrique (donc analytique). Ceci explique le caractère analytique et global de la représentation que nous obtenons.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, etc., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Paris, Dunod, 1972.

[2] N. CONZE, Quotients primitifs des algèbres enveloppantes et algèbres d'opérateurs différentiels, *C.R.A.S.*, Paris, 277 (1973), 1033-1036.

[3] J. DIXMIER, Sur les Algèbres de Weyl, *Bull. Sci. Math.*, 94 (1970), 289-301.

[4] J. J. DUISTERMAAT et L. HÖRMANDER, Fourier-integral operators II, *Acta Math.*, 128 (1972), 183-269.

[5] J. J. DUISTERMAAT, Fourier-integral operators, *Lecture note Courant Institute of Math. Sci. New York*, 1973.

[6] I. M. GELFAND et A. A. KIRILLOV, Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 31 (1966), 5-20.

[7] I. M. GELFAND et A. A. KIRILLOV, Structure des corps liés aux algèbres de Lie semi-simples déployés, *Fonct. analiz i evo pril.*, Vol. 3, n° 1 (1969), 7-26.

[8] L. HÖRMANDER, Fourier-integral operators I, *Acta Math.*; 127 (1971), 79-183.

[9] NGHIÊM XUÂN HAI, Réduction de produits semi-directs et conjecture de Gelfand et Kirillov, *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 241-267.

[10] NGHIÊM XUÂN HAI, Sur certaines représentations d'une algèbre de Lie résoluble complexe I, *Bull. Sci. Math.*, 2e Série 97 (1973), 105-128.

[11] NGHIÊM XUÂN HAI, Construction analytique de la transformation de Fourier-Plancherel des groupes de Lie. Cours de 3e Cycle Orsay, Université de Paris-Sud (1979), *Publ. Math. Orsay*, 79-06.

[12] L. PUKANSZKY, Unitary representation of solvable Lie Groups, *Ann. Sci. E.N.S.*, 4e Série, 4 (1971), 457-608.

[13] F. TRÈVES, *Introduction to pseudodifferential operators and Fourier-integral operators. Vol. I & II*, Plenum Press, New York and London, 1980.

Manuscrit reçu le 9 octobre 1981
révisé le 4 février 1983.

NGHIÊM XUÂN HAI,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.