ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTER O. KISELMAN

Croissance des fonctions plurisousharmoniques en dimension infinie

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n^o 1 (1984), p. 155-183

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_155_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 1 (1984), 155-183

CROISSANCE DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES EN DIMENSION INFINIE

par Christer O. KISELMAN

PLAN

1. Introduction.

Les ensembles polaires dans $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire les ensembles où une fonction plurisousharmonique qui n'est pas $-\infty$ identiquement admet cette valeur, apparaissent comme des ensembles exceptionnels dans beaucoup de problèmes en analyse complexe. C'est par exemple le cas pour les ensembles négligeables, définis comme des ensembles où on a $u < u^*$ pour une fonction $u = \limsup u_j$ avec u_j plurisousharmoniques, comme l'ont montré récemment Bedford et Taylor [1]. Les questions de croissance d'une fonction entière de deux groupes de variables $x \in \mathbf{C}^n$ et $y \in \mathbf{C}^m$ ont été étudiées depuis longtemps, cf. l'introduction de Kiselman [10]. Il apparaît alors que la croissance est essentiellement la même en y pour toutes les valeurs de x, sauf quand x appartient à un ensemble polaire. Notre but ici est d'établir un énoncé de ce type, très général et précis, quand x et y varient dans des espaces de dimension infinie ; voir le théorème 4.1.

C'est grâce au principe du minimum établi dans Kiselman [8] qu'on trouve de façon assez constructive des fonctions plurisousharmoniques qui montrent que les ensembles où la croissance est faible sont polaires. En particulier les résultats sont indépendants de toute théorie de capacité.

Une conséquence facile du théorème 4.1 est que tous les bornés de certains espaces de Fréchet sont polaires ; voir le corollaire 4.2. Cette question a été étudiée par Lelong [16] et Dineen, Meise et Vogt [2], [3].

Lelong [13, 14] a étudié d'autres problèmes en dimension infinie pour lesquels les ensembles exceptionnels sont polaires.

Nous démontrerons comme application du théorème 4.1 un résultat (le théorème 6.2) sur la croissance de la composition $v \circ x$ d'une fonction plurisousharmonique v définie dans $\mathbf{C}^n$ et des applications holomorphes x de $\mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^n$. Cette composition a une croissance maximale pour toutes x sauf celles qui appartiennent à un ensemble polaire dans l'espace de Banach de toutes les applications considérées. Cela veut dire, d'une part, que l'ensemble des applications holomorphes avec une croissance plus lente que maximale est très petit, et, d'autre part, que la restriction $v|\mathrm{X}$ de v à l'image $\mathrm{X} = x(\mathbf{C}^n)$ de x croît aussi vite que v globalement excepté d'une petite classe d'ensembles X. Bref, la croissance de $v \circ x$ peut être lente pour deux raisons différentes : ou bien x croît lentement, ou bien v croît lentement sur l'image de x, mais l'un ou l'autre n'arrive que si x est dans un ensemble polaire. Voir à ce sujet aussi les travaux [11] et [12] de l'auteur.

Pour démontrer le théorème 6.2 nous aurons besoin de la résolution d'un problème d'interpolation pour les fonctions entières d'une variable complexe (voir le paragraphe 5) : il s'agit de trouver, étant donnés des points $a_j \in \mathbf{C}$ sans point d'accumulation, φ entière satisfaisant à des majorations très précises et avec des valeurs $\varphi(a_{j_p}) = b_p$ prescrites, mais en revanche seulement pour certaines sous-suites (a_{j_p}) de (a_j). C'est donc un énoncé de type tout à fait classique mais que nous n'avons pas trouvé dans la littérature.

Nous montrerons par des exemples que les conditions sur la croissance données aux paragraphes 5 et 6 sont très précises. En ce qui concerne les conditions au paragraphe 4 ceci a été fait déjà dans notre travail [10] ; voir les théorèmes 2.4 et 2.5 de celui-ci. Dans la même direction, Lokŝin [17] a montré que, étant donné un ensemble polaire E de classe F_σ dans $\mathbf{C}^n$, il existe f entière dans $\mathbf{C}^{n+1}$ telle que l'ordre $\rho(z)$ de $t \longmapsto f(z, t)$ soit 0 pour $z \in E$ mais que $\sup \rho(z) = 1$.

Je tiens à remercier Leif Abrahamsson, Christer Borell, Urban Cegrell, Lawrence Gruman, Pierre Lelong, Reinhold Meise et Mikael Pettersson de toutes les discussions intéressantes sur les sujets traités ici que j'ai eues avec eux, et tout particulièrement Mikael et Larry qui ont lu et commenté le manuscrit.

2. Les fonctions plurisousharmoniques.

Nous utiliserons dans cet article une définition des fonctions plurisousharmoniques qui est la plus vaste possible, c'est-à-dire celle où les propriétés topologiques requises sont les plus faibles. Rappelons-en ici les propriétés les plus élémentaires.

Soit E un espace vectoriel complexe. Une partie X de E est dite *finiment ouverte* si elle coupe tout sous-espace G de E de dimension finie suivant une partie ouverte pour la topologie usuelle de G (c'est-à-dire celle obtenue en identifiant G à un espace cartésien $\mathbf{C}^n$). La famille de toutes les parties finiment ouvertes de E définit la *topologie finie* de E. (Voir Hille [4, p. 71].)

Soit X une partie finiment ouverte de E et u : $X \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ une fonction numérique qui ne prend pas la valeur $+\infty$. On dit que u est *plurisousharmonique dans* X, $u \in \mathrm{PSH}(X)$, si u est semicontinue supérieurement par rapport à la topologie finie et si u satisfait à l'inégalité de la moyenne $u(x) \leqslant \int_0^1 u(x + e^{2\pi i s} y)\, ds$ pour tout $x \in X$ et tout $y \in E$ tels que le disque $x + Dy = \{x + ty \in E\,; t \in \mathbf{C}, |t| \leqslant 1\}$ soit contenu dans X. Il revient au même de dire que, pour toute application linéaire $f : \mathbf{C}^n \longrightarrow E$, la fonction composée $u \circ f$ est définie dans un ouvert et y est plurisousharmonique au sens classique.

Bien que la topologie finie ne soit pas une topologie vectorielle en général (voir Kakutani et Klee [6]), les résultats fondamentaux sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces de dimension finie – et parmi eux notamment le théorème de convergence, voir Kiselman [9, Th. 5.2] – demeurent vrais.

Soit t une topologie sur E et X une partie t-ouverte de E. Nous noterons $\mathrm{PSH}_t(X)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques dans X qui sont semicontinues supérieurement par rapport à t.

Une partie Y de X sera dite *polaire dans* X s'il existe $u \in \mathrm{PSH}(X)$ telle que $u(x) = -\infty$ pour tout $x \in Y$ et telle que u ne soit identiquement $-\infty$ dans aucune composante connexe de X. On dit que Y est *strictement polaire dans* X si en outre u peut être choisie $\leqslant 0$. De même on dit que Y est (*strictement*) *polaire pour* $\mathrm{PSH}_t(X)$ si u peut être prise dans cette classe et non identiquement $-\infty$ dans aucune composante connexe de X par rapport à t. Si t est plus faible que la topologie finie, $\mathrm{PSH}_t(X)$ est contenu dans $\mathrm{PSH}(X)$; si, de plus, X est un t-ouvert dont toute t-composante connexe est aussi connexe pour la topologie finie, alors tout ensemble polaire pour $\mathrm{PSH}_t(X)$ est polaire. Enfin si E est un espace vectoriel topologique et X un ouvert de E nous dirons "polaire dans X" tout court au lieu de "polaire pour $\mathrm{PSH}_t(X)$ où t est la topologie dans X induite par E".

3. La convolution infimale et la transformation de Legendre.

Quand il s'agit de comparer la croissance de deux fonctions convexes, la convolution infimale apparaît comme une opération fondamentale, en effet aussi fondamentale que l'addition qui lui est duale sous la transformation de Legendre. Le but du présent paragraphe est d'en rappeler les définitions. Pour la théorie générale des fonctions convexes nous renvoyons à Rockafellar [19] ou Ioffe et Tihomirov [5]. Cependant, en ce qui concerne l'arithmétique de la droite achevée $[-\infty, +\infty]$ nous avons préféré suivre Moreau [18], car c'est les additions supérieure et inférieure qui rendent le maniement des quantités infinies le moins pénible et les exceptions qu'elles causent dans les énoncés le moins difficiles à retenir pour le cerveau humain.

L'addition, considérée comme opération $+ : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, admet un prolongement semicontinu supérieurement $+^* : [-\infty, +\infty]^2 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ et de même un prolongement semicontinu inférieurement $+_*$, donc

$$a +^* b = \limsup_{\substack{x,y \in \mathbf{R} \\ (x,y) \to (a,b)}} x + y\,, \quad (a\,,b) \in [-\infty, +\infty]^2\,;$$

cette opération prolongée, nous l'appellerons *addition supérieure,* et l'autre *addition inférieure.* Nous écrirons $a + b$ au lieu de $a +^* b$ quand $a +^* b = a +_* b$.

Si f et g sont deux fonctions convexes définies sur un espace vectoriel, alors leur somme supérieure $f +^* g$ est elle aussi convexe (par contre, leur somme inférieure ne l'est en général pas). Parmi les règles formelles concernant ces opérations notons les suivantes :

LEMME 3.1. – *Soient* $f : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty]$ *une fonction numérique et* $a \in [-\infty, +\infty]$ *une constante. Alors*

$$\sup_{x \in \mathrm{X}} (a +_* f(x)) = a +_* \sup_{x \in \mathrm{X}} f(x)\,. \tag{3.1}$$

On a $\sup_{x \in \mathrm{X}} (a +^* f(x)) = a +^* \sup_{x \in \mathrm{X}} f(x)$ *sauf si* $a = +\infty$, $\mathrm{X} = \emptyset$ *où* $a = -\infty$, $f < +\infty$, $\sup f = +\infty$;

et $\sup_{x\in X} (a +^* f(x)) = a +_* \sup_{x\in X} f(x)$ *sauf si* $a = +\infty$, $X \neq \emptyset$, $f = -\infty$ *identiquement ou* $a = -\infty$ *et* f *admet la valeur* $+\infty$.

Heureusement on n'a besoin que du premier cas ici.

DEFINITION 3.2. – *Etant données deux fonctions numériques* $f, g : F \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ *définies dans un espace vectoriel* F *nous définissons leur convolution infimale de rapport* ϵ, *où* $0 < \epsilon < 1$, *comme suit* :

$$f \,\square_\epsilon\, g(y) = \inf_{x,z\in F} ((1-\epsilon) f(x) +^* \epsilon g(z) \,;\, (1-\epsilon)x + \epsilon z = y),\, y \in F.$$

Nous utiliserons $f \,\square_\epsilon\, g$ comme une espèce d'interpolation entre f et g ; la proposition 3.5 ci-dessous en fournira une explication. La définition ici est une variante de la convolution infimale ordinaire, qui est $f \,\square\, g(y) = 2(f \,\square_{1/2}\, g)(y/2)$; d'autre part on peut exprimer $\square_\epsilon$ à l'aide de $\square$: $f \,\square_\epsilon\, g = f_{1-\epsilon} \,\square\, g_\epsilon$ où $g_\epsilon(z) = \epsilon g(z/\epsilon)$. Il s'en suit que $f \,\square_\epsilon\, g(y)$ est fonction convexe de $(y, \epsilon) \in F \times]0, 1[$ si f et g sont convexes.

Exemples. – Une fonction f est convexe si et seulement si $f \,\square_\epsilon\, f = f$ (ou $f \,\square_\epsilon\, f \geqslant f$) pour tout ϵ satisfaisant à $0 < \epsilon < 1$. Si f est convexe et si nous définissons $f_\alpha(x) = \alpha f(x/\alpha)$, alors $f_\alpha \,\square_\epsilon\, f_\gamma = f_\beta$ où $\beta = (1-\epsilon)\alpha + \epsilon\gamma$. Soit i_A l'indicatrice de $A \subset F$, à savoir $i_A(x) = 0$ si $x \in A$ et $i_A(x) = +\infty$ si $x \in F \setminus A$. Alors $i_{A_0} \,\square_\epsilon\, i_{A_1} = i_{A_\epsilon}$ où $A_\epsilon = (1-\epsilon)A_0 + \epsilon A_1$.

DEFINITION 3.3. – *Soit* F^* *le dual algébrique d'un espace vectoriel réel* F. *On définit la transformée de Legendre* $\tilde{f}$ *d'une fonction numérique* $f : F \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ *par*

$$\tilde{f}(\eta) = \sup_{y\in F} (\langle y, \eta\rangle - f(y)) = -f \,\square\, \eta(0),\ \eta \in F^*.$$

PROPOSITION 3.4. – *En identifiant un espace vectoriel* F *à son bidual algébrique* F^{**}, *on a* $\tilde{\tilde{f}} \leqslant f$ *pour toute fonction numérique* $f : F \longrightarrow [-\infty, +\infty]$. *Si* f *est convexe on a* $\tilde{\tilde{f}}(a) = f(a)$ *pour tout point* a *qui est intérieur pour la topologie finie dans l'ensemble* $\{y \in F ; f(y) < +\infty\}$.

On note que le dual algébrique est le dual topologique par rapport à la topologie localement convexe la plus forte de F, et que f est continue pour cette topologie en tout point tel que f soit finie dans un ensemble finiment ouvert le contenant. La proposition découle donc de la théorie des fonctions convexes dans les espaces localement convexes, cf. Ioffe et Tihomirov [5, p. 175].

Remarque. – Si la dimension de Hamel de F est non-dénombrable, il existe une fonction convexe sur F à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ qui est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie finie mais qui satisfait à $\tilde{\tilde{f}}(0) < f(0) = +\infty$. Cette fonction n'est donc pas semi-continue inférieurement par rapport à la topologie localement convexe la plus forte de F.

PROPOSITION 3.5. – *Soient f et g deux fonctions numériques définies dans un espace vectoriel* F. *Alors on a*

$$(f \,\square\, g)^{\sim} = \tilde{f} +_{*} \tilde{g}$$

et

$$(f \,\square_{\epsilon}\, g)^{\sim} = (1-\epsilon)\tilde{f} +_{*} \epsilon\tilde{g} \text{ dans } F^{*}$$

pour tout ϵ satisfaisant à $0 < \epsilon < 1$.

Notons que $\tilde{f} +_{*} \tilde{g}$ est convexe car cette fonction vaut $\tilde{f} +^{*} \tilde{g}$ sauf si elle est constante. Grâce à la règle (3.1) concernant l'opération "sup", la démonstration de cette proposition est très facile et consiste en un calcul direct. Cf. Rockafellar [19, Th. 16.4] et Ioffe & Tihomirov [5, p. 178].

L'utilisation de la transformation de Legendre en analyse complexe repose sur le résultat suivant :

THEOREME 3.6 (*Le principe du minimum*). – *Soient* X *une partie finiment ouverte d'un espace vectoriel complexe et* $Y = F \oplus iF$ *le complexifié d'un espace vectoriel réel* F. *Soit* $u \in \mathrm{PSH}(X \times Y)$ *indépendante de la partie imaginaire de* $y \in Y$ *dans le sens que* $u(x, y_1) = u(x, y_2)$ *si* $y_k = y'_k + iy''_k$ *avec* $y'_k, y''_k \in F$, $k = 1,2$, *et* $y'_1 = y'_2$. *Alors*

$$v(x) = \inf_{y \in Y} u(x, y), \quad x \in X,$$

est plurisousharmonique dans X.

Dans Kiselman [8, Th. 2.2] nous avons démontré ce théorème dans le cas où les espaces sont de dimension finie. La réduction à cette situation est triviale pour X, un peu moins triviale pour Y. Soit G un sous-espace de F de dimension finie et posons

$$v_{\mathrm{G}}(x) = \inf_{y \in \mathrm{G}+i\mathrm{G}} u(x,y), \ x \in \mathrm{X}.$$

Du principe du minimum en dimension finie on déduit que v_{G} est plurisousharmonique dans X, car il suffit de regarder les traces de v_{G} aux sous-espaces de dimension finie. On a $v = \inf_{\mathrm{G}} v_{\mathrm{G}}$ où G varie dans l'ensemble filtré de tous les sous-espaces de dimension finie. Bien que cette famille ne soit pas dénombrable en général on peut conclure que v satisfait à l'inégalité de la moyenne. La démonstration en est très semblable à celle que nous avons donnée dans Kiselman [7, p. 42].

On sait que la fonction u du théorème 3.6 est convexe en y et comme u ne prend jamais la valeur $+\infty$ dans $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ on a toujours, d'après la proposition 3.4,

$$u(x,y) = \tilde{\tilde{u}}(x,y) = \sup_{\eta \in \mathrm{F}^*} (\langle \mathrm{Re}\, y, \eta\rangle - \tilde{u}(x,\eta)), \ (x,y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \tag{3.2}$$

où $\tilde{u}$ est la transformée de Legendre partielle, c'est-à-dire par rapport à y : $\tilde{u}(x,\eta) = \sup_{y \in \mathrm{F}} (\langle y, \eta\rangle - u(x,y)), (x,\eta) \in \mathrm{X} \times \mathrm{F}^*$ (nous avons identifié F au sous-espace $\mathrm{F} \oplus i0$ de Y). Bien entendu cela est tout à fait indépendant de l'analyse complexe. Mais le principe du minimum nous fournit l'information supplémentaire que dans la représentation (3.2) de u comme enveloppe supérieure de fonctions affines en y, chaque terme est aussi une fonction plurisousharmonique des variables $(x,y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Ce sont ces termes qui nous serviront d'éléments dans la construction du paragraphe suivant.

4. Croissance des restrictions des fonctions plurisousharmoniques.

THEOREME 4.1. – *Soient* X *une partie finiment ouverte d'un espace vectoriel complexe* E, *et* $\mathrm{Y} = \mathrm{F} \oplus i\mathrm{F}$ *le complexifié d'un espace vectoriel réel* F. *On se donne une topologie* t *dans*

E *qui est plus faible que la topologie finie, et une fonction* $u \in \mathrm{PSH}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ *indépendante de la partie imaginaire de* $y \in \mathrm{Y}$ *et telle que la fonction partielle* $x \longmapsto u(x, y)$ *soit semicontinue supérieurement par rapport à* t *quel que soit* $y \in \mathrm{F}$. *Etant données trois fonctions* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{R}$, *localement bornée supérieurement par rapport à* t, *et* $g, h : \mathrm{F} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, *on pose*

$$\mathrm{X}(f;g) = \{x \in \mathrm{X} ; u(x, y) \leqslant f(x) + g(y) \text{ pour tout } y \in \mathrm{F}\} \quad (4.1)$$

et
$$\mathrm{X}(f;g, h) = \bigcup_{0<\epsilon<1} \mathrm{X}(f;g \,\square_\epsilon\, h). \quad (4.2)$$

Soit ω *une partie t-ouverte et t-connexe de* $\mathrm{X}(f;g)$. *Alors, si*

$$\omega \cap \bigcap_{\delta>0} \mathrm{X}(f+\delta ; g, h) \neq \omega, \quad (4.3)$$

cet ensemble est polaire pour $\mathrm{PSH}_t(\omega)$; *plus généralement* $\omega \cap \mathrm{X}(f_1 ; g, h)$ *et* $\omega \cap \mathrm{X}(f_1 ; h)$ *sont polaires quel que soit la fonction* f_1 *à valeurs réelles. Si* f *vaut zéro identiquement et si*

$$\omega \cap \mathrm{X}(0 ; g, h) \neq \omega, \quad (4.4)$$

alors $\omega \cap \mathrm{X}(0 ; g, h)$ *et* $\omega \cap \mathrm{X}(0 ; h)$ *sont strictement polaires pour* $\mathrm{PSH}_t(\omega)$.

Démonstration. — On va étudier des fonctions de la forme

$$\mathrm{U}(x) = \Sigma\, c_j(\widetilde{g}(\eta_j) - \widetilde{u}(x, \eta_j)), x \in \omega,$$

où $c_j > 0$ et où les $\eta_j \in \mathrm{F}^*$ sont choisis de façon que $\widetilde{g}(\eta_j) \in \mathbf{R}$. La fonction $x \longmapsto -\widetilde{u}(x, \eta) = \inf_{y\in\mathrm{F}} (u(x, y) - \langle y, \eta\rangle)$ est semicontinue supérieurement par hypothèse et plurisousharmonique d'après le principe du minimum (voir le théorème 3.6). Comme les $\widetilde{g}(\eta_t)$ sont des nombres réels, chaque terme dans la série définissant U est une fonction t-plurisousharmonique. Pour étudier la convergence de celle-là on note qu'on a toujours

$$u(x, y) \leqslant f(x) + g(y), (x, y) \in \mathrm{X}(f;g) \times \mathrm{F},$$

et par conséquent, en prenant la transformée de Legendre par rapport à y, $-\widetilde{u}(x, \eta) \leqslant f(x) - \widetilde{g}(\eta)$, $(x, \eta) \in \mathrm{X}(f;g) \times \mathrm{F}^*$, d'où $c_j(\widetilde{g}(\eta) - \widetilde{u}(x, \eta)) \leqslant c_j f(x) < +\infty$ si $\widetilde{g}(\eta) \in \mathbf{R}$.

Si la série $\Sigma\, c_j$ converge il s'ensuit que U est t-plurisousharmonique, car pour tout $x_0 \in \omega$ il existe un t-voisinage de x_0 où f est bornée supérieurement, disons $f(x) \leqslant \mathrm{A}$, et U peut s'écrire

$$\mathrm{U}(x) = \sum_2^\infty c_j(\widetilde{g}(\eta_j) - \widetilde{u}(x, \eta_j))$$
$$= \lim_{m\to+\infty} \sum_2^m c_j(\widetilde{g}(\eta_j) - \widetilde{u}(x, \eta_j) - \mathrm{A}) + \mathrm{A} \sum_2^\infty c_j ,$$

donc comme limite d'une suite décroissante de fonctions t-plurisous-harmoniques. Notons que si f vaut zéro identiquement, on peut prendre $\mathrm{A} = 0$ et l'hypothèse que $\Sigma\, c_j$ converge devient inutile.

Nous avons donc établi que $\mathrm{U} \in \mathrm{PSH}_t(\omega)$; examinons son ensemble polaire. Toute inégalité de la forme

$$u(x, y) \leqslant f_1(x) + g \,\square_\epsilon\, h(y) ,\ y \in \mathrm{F} , \tag{4.5}$$

conduit à une majoration

$$-\widetilde{u}(x, \eta) \leqslant f_1(x) - (g \,\square_\epsilon\, h)^\sim (\eta)$$
$$= f_1(x) - ((1-\epsilon)\,\widetilde{g}(\eta) +_* \epsilon\widetilde{h}(\eta)) ,\ \eta \in \mathrm{F}^* , \tag{4.6}$$

où l'égalité découle de la proposition 3.5 ; donc si $\widetilde{g}(\eta)$ est un nombre réel :

$$\widetilde{g}(\eta) - \widetilde{u}(x, \eta) \leqslant f_1(x) - \epsilon(\widetilde{h}(\eta) - \widetilde{g}(\eta)) , \eta \in \mathrm{F}^* .$$

Si les c_j sont choisis de façon que $\Sigma\, c_j < +\infty$ et

$$\Sigma\, c_j(\widetilde{h}(\eta_j) - \widetilde{g}(\eta_j)) = +\infty \tag{4.7}$$

il vient, pour tout x satisfaisant à (4.5),

$$\mathrm{U}(x) \leqslant f_1(x)\, \Sigma\, c_j - \epsilon\, \Sigma\, c_j(\widetilde{h}(\eta_j) - \widetilde{g}(\eta_j)) = -\infty$$

et donc U vaut $-\infty$ sur $\omega \cap \mathrm{X}(f_1 \,; g , h)$ ainsi que sur $\omega \cap \mathrm{X}(f_1 \,; h)$; il suffit pour voir cela de définir $g \,\square_1\, h = h$ dans le calcul précédent. Si $f_1 = 0$ on peut admettre que $\Sigma\, c_j$ diverge.

Finalement il faut voir que U ne vaut pas $-\infty$ identiquement dans ω. Toute inégalité de la forme (4.6) entraîne

$$\widetilde{\widetilde{u}}(x, y) \leqslant f_1(x) + (g \,\square_\epsilon\, h)^{\approx} (y) \leqslant f_1(x) + (g \,\square_\epsilon\, h)(y) , y \in \mathrm{F} .$$

Or, comme $y \longmapsto u(x, y)$ est convexe et ne prend pas la valeur $+\infty$ on a $\widetilde{\widetilde{u}} = u$ (voir la proposition 3.4) : il s'ensuit que (4.6) donne $u(x, y) \leqslant f_1(x) + (g \,\square_\epsilon\, h)(y) , y \in \mathrm{F}$, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{X}(f_1 \,; g \,\square_\epsilon\, h)$. Si

$$a \in \omega \subset \mathrm{X}(f ; g) \text{ et } a \notin \bigcap_{\delta > 0}\ \bigcup_{0 < \epsilon < 1} \mathrm{X}(f + \delta \,; g \,\square_\epsilon\, h)$$

il existe alors $\delta > 0$ tel qu'on n'ait pas (4.6) pour $x = a$,

$f_1 = f + \delta$ et $\epsilon = 1/j$, $j = 2, 3, \ldots$; il existe donc des points $\eta_j \in \mathrm{F}^*$ tels que

$$-\tilde{u}(a, \eta_j) > f(a) + \delta - (g \,\square_{1/j}\, h)^{\sim}\,(\eta_j),\ j = 2, 3, \ldots. \tag{4.8}$$

D'autre part le fait que $a \in \mathrm{X}(f\,; g)$ montre que

$$-\tilde{u}(a, \eta) \leqslant f(a) - \tilde{g}(\eta), \tag{4.9}$$

d'où en particulier

$$f(a) - \tilde{g}(\eta_j) > f(a) + \delta - (g \,\square_{1/j}\, h)^{\sim}\,(\eta_j)$$
$$= f(a) + \delta - ((1 - 1/j)\,\tilde{g}(\eta_j) +_{*} (1/j)\,\tilde{h}(\eta_j)).$$

Or, cette inégalité stricte est impossible si $\tilde{g}(\eta_j) = +\infty$ ou si $\tilde{g}(\eta_j) = -\infty$. On a donc bien $\tilde{g}(\eta_j) \in \mathbf{R}$, et (4.8) et (4.9) peuvent s'écrire

$$0 > -\delta \geqslant \tilde{g}(\eta_j) - \tilde{u}(a, \eta_j) - f(a) - \delta > (1/j)\,(\tilde{g}(\eta_j) - \tilde{h}(\eta_j)).$$

Il existe donc des nombres $c_j > 0$ tels qu'on ait $\Sigma\, c_j < +\infty$, (4.7) et en même temps

$$\mathrm{U}(a) = \Sigma\, c_j(\tilde{g}(\eta_j) - \tilde{u}(a, \eta_j)) > -\infty, \tag{4.10}$$

où, répétons le, $-\infty < \tilde{g}(\eta_j) < +\infty$ et $-\infty < \tilde{h}(\eta_j) \leqslant +\infty$, $j = 2, 3, \ldots$. Ceci montre que $\mathrm{U}(a) > -\infty$ et donc que l'ensemble $\omega \cap \mathrm{X}(f_1\,; g, h)$ où U vaut $-\infty$ est polaire dans ω.

Pour la dernière affirmation du théorème on prend $a \in \omega \backslash \mathrm{X}(0\,; g, h)$ et on obtient donc une majoration

$$0 \geqslant \tilde{g}(\eta_j) - \tilde{u}(a, \eta_j) > (1/j)\,(\tilde{g}(\eta_j) - \tilde{h}(\eta_j))$$

ce qui garantit l'existence des $c_j \geqslant 0$ satisfaisant à (4.7) et (4.10) mais, cette fois, peut-être avec $\Sigma\, c_j = +\infty$. Comme nous l'avons déjà remarqué, cela ne gêne pas, et on a même $\mathrm{U} \leqslant 0$ dans ω, donc $\omega \cap \mathrm{X}(0\,; g, h)$ strictement polaire.

Parmi les conséquences du théorème notons :

COROLLAIRE 4.2. – *Soient* E *un espace vectoriel complexe et* $u \in \mathrm{PSH}(\mathrm{E} \times \mathbf{C})$ *indépendante de la partie imaginaire de* $y \in \mathbf{C}$. *Supposons que* $p_y(x) = e^{u(x,y)}$ *est une seminorme pour tout* $y \in \mathbf{R}$ *et que l'espace* E *muni de la topologie définie par toutes ces seminormes est séparé et complet. Alors ou bien* E *est un espace de Banach ou bien toute partie bornée de* E *est polaire dans* E.

En particulier on peut prendre $E = \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ et

$$u(x, y) = \sup_{|z| \leqslant |e^y|} \log |x(z)|, \quad (x, y) \in E \times \mathbf{C}.$$

Toute partie polaire dans E est bien entendu strictement polaire dans un ouvert convenable la contenant. Que les bornés de E admettent cette dernière propriété a été démontré par Lelong [16, Th. 10 et Corol. 1]. Dineen, Meise et Vogt [2] et [3] ont poursuivi l'étude des espaces où toute partie compacte est polaire. En particulier, le corollaire 4.2 est une conséquence de leur théorème 7 [3]. Voir aussi Lelong [15, Corol. du Th. 5].

Démonstration du corollaire 4.2. – Soit M une partie bornée de E ; on a $h(y) = \sup_{x \in M} u(x, y) < +\infty$, $y \in \mathbf{R}$, et h est donc une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ à valeurs $< +\infty$. Il s'ensuit que $g \,\square_\epsilon\, h$ est $< +\infty$ partout sur $\mathbf{R}$ pour tout ϵ avec $0 < \epsilon < 1$ et toute fonction g non identiquement $+\infty$. Nous allons prendre $g(y) = c$ quand y appartient à un intervalle compact non vide $[a, b]$ et $g(y) = +\infty$ quand $y \in \mathbf{R} \setminus [a, b]$. Ici la constante c sera choisie telle que $+\infty > c \geqslant \sup_{y \in [a, b]} h(y)$; notons que cela entraîne que $g \,\square_\epsilon\, h(y)$ est fonction décroissante de ϵ, $0 < \epsilon < 1$.

Avec la notation (4.1) nous avons

$$E(f ; g) = \{x \in E ; u(x, y) \leqslant f(x) + g(y) \text{ pour tout } y \in \mathbf{R}\}.$$

Pour que $E(f;g)$ soit l'espace E tout entier il suffit que

$$f(x) + c \geqslant \sup_{y \in [a, b]} u(x, y) = \sup(u(x, a), u(x, b)) = \log \sup(p_a(x), p_b(x)).$$

Avec une telle f on a donc $E(f; g) = E$ et nous pouvons choisir $\omega = E$, l'intérieur de $E(f;g)$ par rapport à la topologie t qui sera celle définie par les seminormes p_y, $y \in \mathbf{R}$, ou, ce qui revient au même, p_k, $k \in \mathbf{Z}$.

Définissons maintenant

$$M_j = E(j ; g \,\square_{1/j}\, h) = \{x \in E ; u(x, y) \leqslant j + g \,\square_{1/j}\, h(y) \text{ pour tout } y \in \mathbf{R}\} ;$$

c'est un ensemble borné, fermé, convexe et symétrique dans E. Alors deux cas se présentent : ou bien la réunion des M_j, $j = 2, 3, \ldots,$

est égale à E, ou bien il existe un élément dans le complémentaire de $\cup M_j$. Dans le premier cas le théorème de Baire nous garantit l'existence d'un point intérieur dans un des bornés M_j, et par conséquent E est un espace de Banach. Dans le deuxième cas nous allons vérifier la condition (4.3). Soit x_0 un élément dans $E \setminus \cup M_j$ qui existe par hypothèse, et supposons que $x_0 \in E(f+1\,; g, h)$. Il existe donc un ϵ, $0 < \epsilon < 1$, tel que

$$u(x_0, y) \leqslant f(x_0) + 1 + g \,\square_\epsilon\, h(y),\ y \in \mathbf{R}.$$

En prenant j satisfaisant à $j \geqslant f(x_0) + 1$ et $j \geqslant 1/\epsilon$ nous avons $g \,\square_\epsilon\, h(y) \leqslant g \,\square_{1/j}\, h(y)$ et donc $u(x_0, y) \leqslant j + g \,\square_{1/j}\, h(y)$, c'est-à-dire $x_0 \in M_j$, contradiction qui montre que

$$x_0 \in \omega \setminus E(f+1\,; g, h) \subset \omega \setminus \bigcap_{\delta > 0} E(f+\delta\,; g, h).$$

Donc (4.3) est satisfaite et le théorème 4.1 nous dit que $\omega \cap E(0\,; h)$ est polaire dans $\omega = E$. Or $E(0\,; h)$ contient par définition l'ensemble M donné.

5. Interpolation des fonctions entières.

Dans les applications du théorème 4.1 c'est la condition (4.3) ou (4.4) qui garantit que la fonction plurisousharmonique construite ne soit pas identiquement $-\infty$. Il s'agit donc de démontrer l'existence d'un élément qui n'admet pas une certaine majoration, et dans le cas que nous aborderons dans le paragraphe suivant cela veut dire trouver une fonction entière qui n'est pas trop petite. C'est cela que nous ferons ici : nous exprimerons le résultat comme la solution d'un problème d'interpolation.

Ce paragraphe a donc un caractère auxiliaire par rapport au reste de l'article – notons cependant qu'il y a un trait commun dans la mesure où la transformation de Legendre est utilisée.

Soit $\varphi : \mathbf{C}^m \longrightarrow \mathbf{C}^n$ une application entière et mesurons sa croissance par

$$f(t) = \sup_{|z| \leqslant e^t} \log |\varphi(z)|,\ t \in \mathbf{R}, \tag{5.1}$$

où $|z|$ et $|\varphi(z)|$ sont des normes quelconques dans $\mathbf{C}^m$ et $\mathbf{C}^n$. En développant φ en une série

$$\varphi(z) = \sum_{j\in\mathbf{N}} p_j(z) \tag{5.2}$$

où les p_j sont des polynômes homogènes de degré j, on s'aperçoit que, dans chaque domaine où l'un des p_j domine les autres, la fonction f est près d'une fonction affine de pente j. Cela fait que f peut être approchée par une fonction polygonale F ; posons

$$F(t) = \sup_{j\in\mathbf{N}} (jt - \tilde{f}(j)), t \in \mathbf{R}, \tag{5.3}$$

où $\tilde{f}(\tau) = \sup_{t\in\mathbf{R}} (\tau t - f(t)), \tau \in \mathbf{R}$, est la transformée de Legendre de f. La fonction F est donc la plus grande minorante convexe et croissante de f dont les pentes sont des entiers ; en particulier on a $f_1 \leqslant F \leqslant f$, où f_1 est définie par l'équation

$$f_1(t) = \sup_{|z|\leqslant e^t} \log \sup_{j\in\mathbf{N}} |p_j(z)|, t \in \mathbf{R},$$

analogue à (5.1).

PROPOSITION 5.1. – *Soit* $\varphi : \mathbf{C}^m \longrightarrow \mathbf{C}^n$ *une application entière, et soient* f *et* F *définies par (5.1) et (5.3) respectivement. Alors* $F \leqslant f \leqslant F + \log 3$.

LEMME 5.2. (*Les inégalités de Cauchy*). – *Si les polynômes* p_j *sont définis par (5.2), on a*

$$|p_j(z)| \leqslant |z|^j e^{-\tilde{f}(j)}, z \in \mathbf{C}^m, j \in \mathbf{N}.$$

Démonstration. – En effet, les inégalités de Cauchy nous permettent de dire que $|p_j(z)| \leqslant e^{f(\log|z|)}$ dès que $|\Sigma p_j(z)| \leqslant e^{f(\log|z|)}$. Donc $|p_j(z)| = |z|^j e^{-js} p_j(e^s z/|z|) \leqslant |z|^j e^{-js+f(s)}$ et en faisant varier le nombre réel s on obtient l'inégalité désirée.

LEMME 5.3. – *Soient* φ *comme dans la proposition 5.1 et* f *et* p_j *définies par (5.1) et (5.2). Si* $\tilde{f}(k)$ *est fini, alors*

$$\left|\sum_k^\infty p_j(z)\right| \leqslant |z|^k \frac{e^{-\tilde{f}(k)}}{1 - |z|\, e^{\tilde{f}(k)-\tilde{f}(k+1)}} \tag{5.4}$$

pour tout z *tel que le dénominateur soit strictement positif, c'est-à-dire tel que* $|z| < e^{-\tilde{f}(k)+\tilde{f}(k+1)}$, *et*

$$|\sum_{0}^{k} p_j(z)| \leqslant |z|^k \frac{e^{-\tilde{f}(k)}}{1 - |z|^{-1} e^{-\tilde{f}(k-1)+\tilde{f}(k)}} \tag{5.5}$$

pour tout z *tel que* $|z| > e^{-\tilde{f}(k-1)+\tilde{f}(k)}$.

Démonstration. – La série dans (5.4) peut être majorée par une série géométrique dont le premier terme est $|z|^k\ e^{-\tilde{f}(k)}$ et dont le rapport est

$$|z|^{j+1}\ e^{-\tilde{f}(j+1)}/|z|^j\ e^{-\tilde{f}(j)} = |z|\ e^{\tilde{f}(j)-\tilde{f}(j+1)} \leqslant |z|\ e^{\tilde{f}(k)-\tilde{f}(k+1)},$$

et (5.5) s'obtient de façon tout à fait analogue.

LEMME 5.4. – *Notons* t_j *les points de brisure de* F, *à savoir* $t_j = \tilde{f}(j+1) - \tilde{f}(j)$, *défini si* $\tilde{f}(j)$ *ou* $\tilde{f}(j+1)$ *est fini. Alors on a, pour tout* t *satisfaisant à une des inégalités*

$$t_{j-1} + \delta \leqslant t \leqslant t_{j+1} - \delta$$

où $\delta > 0$: $f(t) \leqslant \mathrm{F}(t) + \log 2 - \log(1 - e^{-\delta})$.

Démonstration. – On a, vu la définition (5.3) de F,

$$|z|^k\ e^{-\tilde{f}(k)} \leqslant e^{\mathrm{F}(\log|z|)}$$

et donc le lemme précédent donne, si $\tilde{f}(k)$ est fini :

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| &\leqslant |\sum_{k+1}^{\infty} p_j(z)| + |\sum_{0}^{k} p_j(z)| \\
&\leqslant e^{\mathrm{F}(\log|z|)} \left\{ \frac{1}{1 - |z|\ e^{-t_{k+1}}} + \frac{1}{1 - |z|^{-1}\ e^{t_{k-1}}} \right\} \\
&\leqslant e^{\mathrm{F}(t)} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-\delta}} + \frac{1}{1 - e^{-\delta}} \right\}
\end{aligned}$$

si $t = \log|z|$, $t - t_{k+1} \leqslant -\delta$ et $t_{k-1} - t \leqslant -\delta$. Ceci est valable même si $\tilde{f}(k+1)$ ou $\tilde{f}(k-1)$ est infini.

Démonstration de la proposition 5.1. – Soit $]q, r[\cap \mathbf{N}$ l'ensemble des entiers où $\tilde{f}$ admet une valeur finie, $-1 \leqslant q < r \leqslant +\infty$. Les t_j du lemme 5.4 sont donc définis si $q - 1 < j < r$ et finis si $q < j < r - 1$. Choisissons pour tout j satisfaisant à $q + 1 < j < r - 1$ un point $x_j \in \mathbf{R}$ tel que

$$\tilde{f}(j) = \sup_{t \in \mathbf{R}} (jt - f(t)) = jx_j - f(x_j).$$

On note qu'on a $f(x_j) = F(x_j)$ et que $t_{j-1} \leqslant x_j \leqslant t_j$ si $q + 1 < j < r - 1$.

Si $r = q + 1$, la fonction φ vaut zéro, et $f = F = -\infty$; si $r = q + 2$, φ est homogène, $\varphi = p_{q+1}$, et $f = F$; si $r = q + 3, \varphi = p_{q+1} + p_{q+2}$ et on voit facilement que $f \leqslant F + \log 2$. On pourra donc supposer dans la suite de la démonstration que $r \geqslant q + 4$: dans ce cas il y a au moins un point x_j.

Si t se trouve entre deux des points x_j, disons $x_j < t < x_{j+1}$, où $q + 1 < j < r - 2$, la dérivée de f (à gauche ou à droite) est comprise entre j et $j + 1$ ce qui nous donne

$$f(t) \leqslant f(x_j) + (j + 1)(t - x_j) \leqslant F(t) + t - x_j$$

et $$f(t) \leqslant f(x_{j+1}) + j(t - x_{j+1}) \leqslant F(t) + x_{j+1} - t.$$

De même, si r est fini et $t \geqslant x_{r-2}$, la dérivée de droite de f est comprise entre $r - 2$ et $r - 1$, d'où

$$f(t) \leqslant f(x_{r-2}) + (r - 1)(t - x_{r-2}) \leqslant F(t) + t - x_{r-2}.$$

Avec un inégalité semblable pour $t \leqslant x_{q+2}$ on voit que $f(t) \leqslant F(t) + \log 3$ si la distance de t à un des points x_j est au plus égale à $\log 3$.

Il nous suffit donc de regarder un point t tel que $|t - x_j| > \log 3$ pour tout j. Il peut alors arriver que t se trouve entre deux points x_j et x_{j+1} avec

$$t_{j-1} \leqslant x_j < t - \log 3 < t < t + \log 3 < x_{j+1} \leqslant t_{j+1}$$

et alors le lemme 5.4, avec $\delta = \log 3$, nous donne le résultat voulu. Ou bien t se trouve à gauche ou à droite de tous les points x_j. Si $t < x_{q+2} - \log 3$ on applique le lemme 5.4 avec $j = q + 1$ et $\delta = \log 3$: $f(t) \leqslant F(t) + \log 2 - \log(1 - e^{-\delta}) = F(t) + \log 3$ pour tout t satisfaisant à $-\infty = t_q + \log 3 \leqslant t \leqslant t_{q+2} - \log 3$. Or $x_{q+2} \leqslant t_{q+2}$ et donc l'inégalité $f(t) \leqslant F(t) + \log 3$ est valable si $t \leqslant x_{q+2} - \log 3$. Si, d'autre part, r est un nombre fini et $t > x_{r-2} + \log 3$, on peut appliquer le lemme 5.4 avec $j = r - 2$ ce qui donne le résultat voulu pour tout t satisfaisant à $t_{r-3} + \log 3 \leqslant t \leqslant t_{r-1} - \log 3 = +\infty$ et donc en particulier pour tout $t \geqslant x_{r-2} + \log 3$. Cela termine la démonstration de la proposition 5.1.

Remarque. – Si $m = 1$ on peut regarder les fonctions holomorphes dans un domaine annulaire :

$$\varphi(z) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j z^j \,, \quad e^{s_0} < |z| < e^{s_1} \,,$$

et les résultats sont les mêmes quitte à remplacer F par

$$F(t) = \sup_{j \in \mathbf{Z}} (jt - \widetilde{f}(j)) \,, s_0 < t < s_1 \,.$$

Soit maintenant g une fonction à valeurs réelles définie sur l'axe réel. On définit

$$\|\varphi\|_g = \sup_{\substack{z \in \mathbf{C} \\ z \neq 0}} |\varphi(z)| \, e^{-g(\log |z|)} \,, \tag{5.6}$$

et on note E_g l'espace de Banach de toutes les fonctions holomorphes $\varphi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ telles que $\|\varphi\|_g$ soit finie. On pose

$$G(t) = \sup_{j \in \mathbf{N}} (jt - \widetilde{g}(j)) \leqslant g(t) \,, t \in \mathbf{R} \,, \tag{5.7}$$

et on sait, d'après la proposition 5.1, que

$$\|\varphi\|_g \leqslant \|\varphi\|_G \leqslant 3 \, \|\varphi\|_g \tag{5.8}$$

car $f \leqslant g + \log \|\varphi\|_g$ donne $F \leqslant G + \log \|\varphi\|_g$ et ensuite

$$f - \log 3 \leqslant F \leqslant G + \log \|\varphi\|_g$$

d'où $\|\varphi\|_G \leqslant 3 \, \|\varphi\|_g$. Les espaces E_G et E_g sont donc les mêmes comme espaces vectoriels topologiques.

Nous dirons qu'*une propriété a lieu pour toute suite suffisament espacée* s'il existe des fonctions $f_p : \mathbf{N}^p \longrightarrow \mathbf{N}$ telles que toute suite $(j_p)_0^\infty$ avec $j_p \geqslant f_p(j_0, \ldots, j_{p-1})$ admette cette propriété.

PROPOSITION 5.5. – *Soit* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *convexe et croissante et soit* G *définie par (5.7). On suppose que* g *(et par conséquent* G*) croît plus vite que toute fonction linéaire. Etant donnée une suite* (a_j) *de nombres complexes sans point d'accumulation et un nombre* $\epsilon > 0$, *toute suite* (j_p) *suffisamment espacée admet la propriété suivante : pour toute suite* (b_p) *de nombres complexes il existe une fonction entière* φ *telle que* $\varphi(a_{j_p}) = b_p$, $p \in \mathbf{N}$, *et*

$$\|\varphi\|_g \leqslant \|\varphi\|_G \leqslant (1 + \epsilon) \sum_p |b_p| \exp(-G(\log |a_{j_p}|)) \,. \tag{5.9}$$

Il existe une suite de nombres réels γ_k tels que $G(\gamma_k) = g(\gamma_k)$. S'il y a une infinité d'indices j tels qu'il existe un k avec $\log |a_j| = \gamma_k$ on pourra donc choisir les j_p parmi eux, et on aura $\|\varphi\|_g \leqslant (1 + \epsilon) \sum_p |b_p| \exp(- g(\log |a_{j_p}|))$.

Or ceci n'est pas possible pour des suites (a_j) quelconques comme nous allons le voir. Supposons qu'on peut résoudre un problème d'interpolation $\varphi(a_{j_p}) = b_p$ avec une φ satisfaisant à

$$\|\varphi\|_g \leqslant C \sum |b_p| \, e^{-g(\log |a_{j_p}|)} . \tag{5.10}$$

En ne prenant qu'un $b_p \neq 0$ on aura donc

$$|b_p| \, e^{-G(\log |a_{j_p}|)} \leqslant \|\varphi\|_G \leqslant 3 \, \|\varphi\|_g \leqslant 3C \, |b_p| \, e^{-g(\log |a_{j_p}|)}$$

et ensuite $g(\log |a_{j_p}|) \leqslant G(\log |a_{j_p}|) + \log(3C)$. Si par exemple

$$\begin{aligned} g(t) &= t \log t , & t &\geqslant 1 , \\ &= 0 , & t &\leqslant 1 , \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tau) &= e^{\tau - 1} , & \tau &\geqslant 1 , \\ &= \tau , & 0 &\leqslant \tau \leqslant 1 \\ &= + \infty , & \tau &< 0 , \end{aligned}$$

et les points de brisure de G sont $t_j = e^{j-1} (e - 1)$. On a, avec une constante $c > 0$: $g(t_j) - G(t_j) = c e^{j-1}$, et il est donc impossible de résoudre le problème d'interpolation avec la majoration (5.10) si les a_j sont choisis tels que $\log |a_j| = t_j$.

LEMME 5.6. – *On pose*

$$S(x)(z) = \sum x_k \, e^{-\tilde{g}(m_k)} \, z^{m_k} , \quad \textit{où } x \in \ell^1 , z \in \mathbf{C} , m_k \in \mathbf{N} .$$

Alors S *est une application de* ℓ^1 *dans* E_G *de norme au plus égale à un.*

Démonstration. – On a

$$\begin{aligned} |S(x)(z)| &\leqslant \sum |x_k| \, e^{-\tilde{g}(m_k) + m_k \log |z|} \\ &\leqslant \|x\|_1 \exp(\sup(m_k \log |z| - \tilde{g}(m_k)) \\ &\leqslant \|x\|_1 \exp(G(\log |z|)) . \end{aligned}$$

Donc $\|S(x)\|_G \leqslant \|x\|_1$.

LEMME 5.7. — *Etant données* (a_{j_p}) *et* g *comme dans la proposition 5.5 on choisit pour tout* $p \in \mathbf{N}$ *un nombre* m_p *tel que*

$$G(\alpha_{j_p}) = \sup_{m \in \mathbf{N}} (m\,\alpha_{j_p} - \tilde{g}(m)) = m_p\,\alpha_{j_p} - \tilde{g}(m_p) \qquad (5.11)$$

où $\alpha_j = \log |a_j|$. *On pose* $T(\varphi)_p = e^{\tilde{g}(m_p)}\, a_{j_p}^{-m_p}\, \varphi(a_{j_p})$, $p \in \mathbf{N}$, *où* φ *est une fonction entière, et* $T(\varphi) = (T(\varphi)_p)_{p \in \mathbf{N}}$. *Alors* T *applique* E_G *dans* ℓ^∞ *avec norme au plus égale à un.*

Démonstration. — on a

$$|T(\varphi)_p| \leqslant |\varphi(a_{j_p})| \exp(-m_p\,\alpha_{j_p} + \tilde{g}(m_p)) = |\varphi(a_{j_p})| \exp(-G(\alpha_{j_p}))$$

$$\leqslant \|\varphi\|_G .$$

LEMME 5.8. — *Avec les notations des lemmes 5.6 et 5.7 on a : pour toute suite suffisamment espacée* (j_p), T *applique* E_G *dans* ℓ^1 *(et non seulement dans* ℓ^∞*) et* $T \circ S : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ *est bijective avec* $\|(T \circ S)^{-1}\| \leqslant 1 + \epsilon$, ϵ *étant strictement positif donné.*

Démonstration. — On a

$$T \circ S(x)_p - x_p = e^{\tilde{g}(m_p)}\, a_{j_p}^{-m_p} \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, e^{-\tilde{g}(m_k)}\, a_{j_p}^{m_k} - x_p$$

d'où

$$|T \circ S(x)_p - x_p| \leqslant \|x\|_1 \sup_{k \neq p} \exp(\tilde{g}(m_p) - m_p\,\alpha_{j_p} - \tilde{g}(m_k) + m_k\,\alpha_{j_p})$$

$$= \|x\|_1 \sup_{k \neq p} \exp(-G(\alpha_{j_p}) - \tilde{g}(m_k) + m_k\,\alpha_{j_p})$$

où l'égalité provient de la relation (5.11). On va montrer qu'il est possible de choisir (j_p) de façon que

$$G(\alpha_{j_p}) + \tilde{g}(m_k) - m_k\,\alpha_{j_p} \geqslant c_{kp} \qquad (5.12)$$

où c_{kp} sont des nombres quelconques asujettis à la seule condition $c_{kk} = 0$. En particulier on pourra choisir $c_{kp} = (p+1)\,c$, $k \neq p$, et il vient $|T \circ S(x)_p - x_p| \leqslant \|x\|_1\, e^{-(p+1)c}$, $p \in \mathbf{N}$, d'où en sommant $\|T \circ S(x) - x\|_1 \leqslant \|x\|_1 \dfrac{e^{-c}}{1 - e^{-c}}$.

La série de Neumann $\sum_0^\infty (I - T \circ S)^k$ définit donc l'inverse de $T \circ S$, et la norme $\|I - T \circ S\|$ ainsi que la différence $\|(T \circ S)^{-1}\| - 1 \leqslant \sum_1^\infty \|I - T \circ S\|^k$ peuvent être aussi petites qu'on veut avec un choix convenable de (j_p) et donc de c. Reste à montrer (5.12).

Supposons que (5.12) a été démontrée pour $0 \leqslant k$, $p < q$, $k \neq p$. Il s'agit donc de choisir α_{j_q} de façon que l'inégalité soit vraie aussi pour $k = q$, $p < q$ et $p = q$, $k < q$, le nombre m_q étant défini (bien que peut-être pas de façon univoque) par α_{j_q} grâce à (5.11). Or ceci est facile comme g et $\widetilde{g}$ croissent plus vite que toute fonction linéaire : $G(\alpha) - m_k \alpha$ est aussi grand qu'on veut avec α quel que soit m_k, $k = 0, \ldots, q-1$, et de même $\widetilde{g}(m) - m\alpha_{j_p}$ est aussi grand qu'on veut avec m quel que soit α_{j_p}, $0 \leqslant p < q$. Pour trouver α_{j_q} on n'a donc qu'à satisfaire un nombre fini d'inégalités, car les m_p tendent vers l'infini avec les α_{j_p}. Toutes les conditions sur j_q peuvent donc être résumées en une seule inégalité $j_q \geqslant f_q(j_0, \ldots, j_{q-1})$, ce qui démontre le lemme 5.8.

Démonstration de la proposition 5.5. – On choisit (j_p) d'après le lemme 5.8. Alors il vient avec $T^{-1} = S \circ (T \circ S)^{-1}$:

$$\|T^{-1}\| \leqslant \|S\| \, \|(T \circ S)^{-1}\| \leqslant 1 + \epsilon .$$

Donc $\varphi = T^{-1}(x)$ satisfait à $\|\varphi\|_G \leqslant (1 + \epsilon)\, \|x\|_1 = (1 + \epsilon) \Sigma\, |x_p|$ et $x_p = T(\varphi)_p = e^{\widetilde{g}(m_p)}\, a_{j_p}^{-m_p}\, \varphi(a_{j_p})$.

En introduisant $b_p = e^{-\widetilde{g}(m_p)}\, a_{j_p}^{m_p}\, x_p$ on a finalement

$$|b_p| = |x_p| \exp(-\widetilde{g}(m_p) + m_p\, \alpha_{j_p}) = |x_p| \exp G(\alpha_{j_p})$$

(voir (5.11)), et $\|\varphi\|_G \leqslant (1 + \epsilon)\, \Sigma\, |b_p| \exp(-G(\alpha_{j_p}))$ ainsi que $\varphi(a_{j_p}) = b_p$, $p \in \mathbf{N}$.

Cela donne donc la solution du problème d'interpolation si le membre de droite de (5.9) est fini, car alors $x \in \ell^1$. Sinon, on n'a aucune condition sur la croissance de φ et la solution est classique.

Il est facile de formuler une version de la proposition 5.5 pour des applications $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^n$. Soit $E_g(\mathbf{C}, \mathbf{C}^n)$ l'espace de toutes les applications holomorphes $\varphi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^n$ telles que $\|\varphi\|_g$ soit finie, où la norme est définie par (5.6) avec $|\varphi(z)|$ désignant une norme quelconque dans $\mathbf{C}^n$; notons N une constante telle que $|w| \leqslant \mathrm{N} \sup |w_k| \leqslant \mathrm{N}^2 |w|, w \in \mathbf{C}^n$.

PROPOSITION 5.9. – *Soient* g, G, (a_j) *et* ϵ *comme dans la proposition 5.5. Alors pour toute suite suffisamment espacée* (j_p) *le problème d'interpolation* $\varphi(a_{j_p}) = b_p \in \mathbf{C}^n$ *admet une solution entière* $\varphi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^n$ *avec*

$$\|\varphi\|_{\mathrm{G}} \leqslant \mathrm{N}^2(1+\epsilon) \Sigma |b_p| \exp(-\mathrm{G}(\log |a_{j_p}|)).$$

Démonstration. – Nous prenons une sous-suite (a_{j_p}) d'après la proposition 5.5 et pouvons donc résoudre les équations scalaires $\varphi_k(a_{j_p}) = b_{pk}$, $p \in \mathbf{N}$, $k = 1, \ldots, n$ avec φ_k satisfaisant à (5.9). L'application $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ satisfait à $\|\varphi\|_g \leqslant \mathrm{N} \sup \|\varphi_k\|_g$, d'où le résultat. (Il importe donc que la suite (j_p) ne dépende pas de (b_p).)

6. Croissance de la composition d'une fonction plurisousharmonique avec des applications entières.

Notons $\mathrm{E}_g(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$ ou seulement E_g l'espace de toutes les applications holomorphes $x : \mathbf{C}^m \longrightarrow \mathbf{C}^n$ telles que

$$\|x\|_g = \sup_{\substack{z \in \mathbf{C}^m \\ z \neq 0}} |x(z)| \, e^{-g(\log |z|)} < +\infty, \tag{6.1}$$

où $|x(z)|$ et $|z|$ sont des normes quelconques dans $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^m$, respectivement. La croissance globale d'une fonction plurisousharmonique v sera mesurée par $\hat{v}(t) = \sup_{|z| \leqslant e^t} v(z)$, $t \in \mathbf{R}$, de façon qu'on a toujours $v(z) \leqslant \hat{v}(\log |z|), z \in \mathbf{C}^n$, et

$$v(x(z)) \leqslant \hat{v}(\log \|x\|_g + g(\log |z|)), x \in \mathrm{E}_g, z \in \mathbf{C}^m. \tag{6.2}$$

Etant donnée une fonction $g : \mathbf{R} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ on pose comme au paragraphe précédent

$$\mathrm{G}(t) = \sup_{j \in \mathbf{N}} (jt - \tilde{g}(j)) \leqslant \tilde{\tilde{g}}(t) \leqslant g(t). \tag{6.3}$$

DEFINITION 6.1. – *Soient* $g, h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *deux fonctions convexes et croissantes. Nous dirons que* h *est petite par rapport à* g *s'il existe des nombres positifs* $x_j < y_j < z_j$, $j \in \mathbf{N}$, *tels que*

$$\frac{y_j - x_j}{z_j - x_j} \longrightarrow 0\,,\ et \tag{6.4}$$

$$\mathrm{G}(y_j) - \sup(g(x_j)\,, h(z_j)) \longrightarrow +\infty \ \textit{quand}\ j \longrightarrow +\infty\,, \tag{6.5}$$

G *étant définie par* (6.3).

Au paragraphe suivant nous donnerons quelques conditions plus simples qui sont suffisantes pour qu'une fonction soit petite par rapport à une autre.

THEOREME 6.2. – *Soient* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *et* $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *deux fonctions convexes et croissantes. On suppose que* g *croît plus vite que toute fonction linéaire, que* $h \leqslant g$ *et que* h *est petite par rapport à* g *dans le sens de la définition 6.1. Soient* v *plurisousharmonique dans* $\mathbf{C}^n$ *et non constante et* $f : \mathrm{E}_g(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n) \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction quelconque. Alors l'ensemble*

$$\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E}_g(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)\,;\ v(x(z)) \leqslant \hat{v}(f(x) + h(\log |z|)) \quad \textit{pour tout} \quad z \in \mathbf{C}^m\}$$

est polaire dans $\mathrm{E}_g(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$.

Pour illustrer la précision des conditions de croissance nous allons regarder le rôle de la fonction G dans le théorème 6.2. Soit $h = \mathrm{G}$. On a toujours $v(x(z)) \leqslant \hat{v}(\log \|x\|_h + h(\log |z|))$ et donc, d'après la proposition 5.1,

$$v(x(z)) \leqslant \hat{v}(\log \|x\|_g + \log 3 + h(\log |z|)) = \hat{v}(f(x) + h(\log |z|))\,.$$

Donc dans ce cas $\mathrm{P} = \mathrm{E}_g$, un ensemble non polaire. Or si $g(t) = t \log t$, $t \geqslant 1$, la condition $g(y_j) - \sup(g(x_j), h(z_j)) \longrightarrow +\infty$ semblable à (6.5), est facile à satisfaire, par exemple avec

$$z_j = e^{j-1}(e-1)\,, x_j = z_j - j\,, y_j = x_j + 1\,.$$

Cela montre qu'on ne peut pas remplacer G par g dans (6.5). Avec $g(t) = t^\alpha$, $t \geqslant 0$, $1 < \alpha < 2$, la conclusion est pareille.

D'autre part, si on remplace g par G dans le théorème 6.2 on obtient un résultat vrai, car $\mathrm{E}_\mathrm{G} = \mathrm{E}_g$; cf. (5.8). La définition 6.1 n'a donc d'intérêt pour nous que si $\mathrm{G} \geqslant g - \mathrm{C}$ pour une constante C. Avec une telle fonction g, on voit que h est petite par rapport à g si et seulement s'il existe des suites (t_j) et (z_j) telles que $g(t_j) \geqslant h(z_j)$ et $g'(t_j)(z_j - t_j) \longrightarrow +\infty$.

Démonstration du théorème 6.2. – On pose

$$u(x\,,y) = \sup_{|z|=|e^y|} v(x(z))\,,\,(x\,,y) \in \mathrm{E}_g \times \mathbf{C}\,.$$

Alors $u \in \mathrm{PSH}(\mathrm{E}_g \times \mathbf{C})$ d'après les propriétés classiques des fonctions plurisousharmoniques : soit

$$\mathrm{U}(x\,,y\,,z) = v(x(ze^y))\,,\,(x\,,y\,,z) \in \mathrm{E}_g \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^m\ ;$$

c'est une fonction plurisousharmonique car c'est la composée de $v \in \mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n)$ avec l'application holomorphe $(x\,,y\,,z) \longmapsto x(ze^y)$, et en prenant le sup de U sur le compact $\{z\,;\,|z| = 1\}$ on obtient u. On note qu'on a la majoration, vu (6.2),

$$u(x\,,y) \leqslant \hat{v}(\log \|x\|_g + g(y))\,,\,(x\,,y) \in \mathrm{E}_g \times \mathbf{R}\,.$$

On va trouver des fonctions f_1, f_2, g_1 et h_1 telles que

$$u(x\,,y) \leqslant \hat{v}(\log \|x\|_g + g(y)) \leqslant f_1(x) + \hat{v}(g_1(y))\,, \tag{6.6}$$

et

$$\hat{v}(f(x) + h(y)) \leqslant f_2(x) + \hat{v}(h_1(y))\,, \tag{6.7}$$

de façon que, avec la notation introduite dans (4.1),

$$\mathrm{E}_g(f_1\,;\hat{v} \circ g_1) = \mathrm{E}_g \ \text{ et } \ \mathrm{E}_g(f_2\,;\hat{v} \circ h_1) \supset \mathrm{P}\,.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 4.1 avec $\omega = \mathrm{E}_g$ et $t =$ la topologie définie par la norme (6.1), nous allons montrer que

$$\mathrm{E}_g(f_1 + 1\,;\hat{v} \circ g_1\,,\ \hat{v} \circ h_1) \neq \mathrm{E}_g\,, \tag{6.8}$$

ce qui montrera que (4.3) est satisfaite et nous permettra de conclure que $\mathrm{E}_g(f_2\,;\hat{v} \circ h_1)$ est polaire, et par conséquent aussi son sous-ensemble P.

LEMME 6.3. – *Soient* $\hat{v}$ *et* g *comme dans le théorème 6.2 et* $g_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction telle que*

$$g \leqslant g_1 \ \textit{ et } \ \lim_{y \to +\infty} (g_1(y) - g(y)) = +\infty.$$

Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *localement bornée telle que* $\hat{v}(t + g(y)) \leqslant \varphi(t) + \hat{v}(g_1(y))\,,\,t\,,y \in \mathbf{R}$.

Démonstration. – Si $t + g(y) \leqslant g_1(y)$ on a

$$\hat{v}(t + g(y)) \leqslant \hat{v}(g_1(y))\,.$$

D'autre part, si $t + g(y) \geqslant g_1(y)$ il vient

$$\begin{aligned}\hat{v}(t + g(y)) - \hat{v}(g_1(y)) &\leqslant \hat{v}'(t + g(y))\,(t + g(y) - g_1(y)\\ &\leqslant \hat{v}'(t + g(y))\,t\end{aligned}$$

où $\hat{v}'$ est la dérivée à gauche de v. Or quand $t + g(y) \geqslant g_1(y)$, y est majoré par une fonction continue de t, disons $y \leqslant a(t)$, et par conséquent

$$\hat{v}(t + g(y)) - \hat{v}(g_1(y)) \leqslant \hat{v}'(t + g(a(t)))\, t = \varphi(t).$$

Il est donc facile à trouver $g_1 \geqslant g$ et $h_1 \geqslant h$ telles que (6.6) et (6.7) soient satisfaites avec une fonction $f_1(x) \geqslant \varphi(\log \|x\|_g)$ qui dépend continûment de $\|x\|_g$ et une fonction $f_2(x) = \varphi(f(x))$ à valeur réelles mais non forcément localement bornée dans E_g, la fonction φ étant fournie par le lemme 6.3. Il importe ici de noter que g_1 et h_1 peuvent être choisies assez proches de g et h respectivement; mettons pour préciser que les suites (x_j), (y_j) et (z_j) qui existent d'après les hypothèses satisfont à

$$G(y_j) - \sup(g(x_j),\, h(z_j)) \geqslant 2j$$

et que g_1 et h_1 sont assez proches de g et h pour satisfaire à

$$G(y_j) - \sup(g_1(x_j),\, h_1(z_j)) \geqslant j.$$

En outre, comme $h \leqslant g$ on pourra supposer que $h_1 \leqslant g_1$. C'est dans ces conditions que nous allons montrer que (6.8) est satisfaite.

Soit $\epsilon_j = (y_j - x_j)/(z_j - x_j)$. Comme $h_1 \leqslant g_1$, la convolution infimale $(\hat{v} \circ g_1) \,\square_\epsilon\, (\hat{v} \circ h_1)$ est fonction décroissante de ϵ, $0 < \epsilon < 1$, et nous pouvons la majorer comme suit pour $\epsilon_j \leqslant \epsilon < 1$:

$$\begin{aligned}(\hat{v} \circ g_1) \,\square_\epsilon\, (\hat{v} \circ h_1)(y_j) &\leqslant (\hat{v} \circ g_1) \,\square_{\epsilon_j}\, (\hat{v} \circ h_1)(y_j) \\ &\leqslant (1 - \epsilon_j)\, \hat{v}(g_1(x_j)) + \epsilon_j \hat{v}(h_1(z_j)) \leqslant \hat{v}(G(y_j) - j). \qquad (6.9)\end{aligned}$$

Soit maintenant $a_j = e^{y_j}$ et choisissons une suite (j_p) d'après la proposition 5.5. Le problème d'interpolation $\varphi(a_{j_p}) = b_p$ peut donc être résolu et nous allons le faire avec $b_p \in \mathbf{C}^n$ définis par les équations suivantes :

$$|b_p| = \exp(G(\log |a_{j_p}|) + \beta_p) = \exp(G(y_{j_p}) + \beta_p)$$

$$v(b_p) = \hat{v}(\log |b_p|) = \sup_{|z| = |b_p|} v(z).$$

Ici on prend (β_p) comme n'importe quelle suite satisfaisant à $\Sigma \exp \beta_p < +\infty$. La solution φ fournie par la proposition 5.9 satisfait à $\varphi(a_{j_p}) = b_p$, et

$\|\varphi\|_g \leqslant \|\varphi\|_G \leqslant N^2(1+\epsilon)\, \Sigma\, |b_p|\, \exp(-\,G(y_{j_p})) = N^2(1+\epsilon)\, \Sigma\, e^{\beta_p}$.
Donc $x = \varphi \circ \pi \in E_g(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$ si $\pi : \mathbf{C}^m \longrightarrow \mathbf{C}$ est une forme linéaire de norme 1. D'autre part, si x appartenait à $E_g(f_1 + 1\,;\hat{v} \circ g_1,\ \hat{v} \circ h_1)$ il existerait ϵ, $0 < \epsilon < 1$, tel que

$$u(x, y) \leqslant f_1(x) + 1 + (\hat{v} \circ g_1) \,\square_\epsilon\, (\hat{v} \circ h_1)(y),\, y \in \mathbf{R},$$

et en particulier, vu (6.9),

$$u(x, y_{j_p}) \leqslant f_1(x) + 1 + \hat{v}(G(y_{j_p}) - j_p),$$

pour tout p assez grand, plus précisément tel que $\epsilon_{j_p} \leqslant \epsilon$. Or

$$\hat{v}(G(y_{j_p}) + \beta_p) = \hat{v}(\log |b_p|) = v(b_p) = v(\varphi(a_{j_p})) \leqslant u(x, y_{j_p})$$

par le choix des points b_p. En combinant ces inégalités on aurait

$$\hat{v}(G(y_{j_p}) + \beta_p) \leqslant f_1(x) + 1 + \hat{v}(G(y_{j_p}) - j_p). \tag{6.10}$$

Comme $\hat{v}$ est une fonction convexe croissante qui ne se réduit pas à une constante, il existe un nombre positif A tel que, pour tout $c \geqslant 0$ on ait :

$$s \geqslant s_c \text{ et } \hat{v}(s) \leqslant c + \hat{v}(t) \text{ entraînent } s \leqslant Ac + t. \tag{6.11}$$

(En effet, on prend s_0 tel que $\hat{v}'(s_0) > 0$, $\hat{v}'$ étant la dérivée à droite, $A = 1/\hat{v}'(s_0)$ et ensuite s_c tel que $\hat{v}(s_c) \geqslant c + \hat{v}(s_0)$.) Comme $G(y_j)$ tend vers $+\infty$ avec j (voir (6.5)), nous pouvons choisir la suite (j_p) telle que $G(y_{j_p}) + \beta_p \longrightarrow +\infty$ (bien que $\beta_p \longrightarrow -\infty$), et en appliquant (6.11) à (6.10) nous aurions

$$G(y_{j_p}) + \beta_p = s \leqslant Ac + t = A(f_1(x) + 1) + G(y_{j_p}) - j_p$$

et $\beta_p \leqslant A(f_1(x) + 1) - j_p$ pour tout p assez grand, à savoir tel que $G(y_{j_p}) + \beta_p$ dépasse une limite qui dépend de x. Or ici (β_p) est une suite fixe, par exemple $\beta_p = -\,2 \log p$, tandis que (j_p) est une suite qui peut être choisie croissante aussi vite qu'on veut. Cette contradiction montre bien que x ne peut pas appartenir à $E_g(f_1 + 1\,; \hat{v} \circ g_1, \hat{v} \circ h_1)$ et par suite toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites et nous pouvons conclure que P est polaire dans E_g.

7. Comparaison des fonctions convexes croissantes.

Au paragraphe précédent nous avons été amenés à introduire une notion de comparaison entre deux fonctions convexes croissantes, à savoir la définition 6.1. Comme la condition (6.5) est assez compliquée à vérifier il est commode d'avoir des critères plus simples pour pouvoir appliquer le théorème 6.2. Ici nous en donnerons deux. Comme nous l'avons constaté au paragraphe 6, seules les fonctions g telles que $G \geqslant g - C$ ont un intérêt, et c'est pourquoi nous ferons toujours cette hypothèse.

LEMME 7.1 – *Soient* g, $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *deux fonctions convexes croissantes dont* g *croît plus vite que toute fonction linéaire. Supposons que, avec une constante* C,

$$G(x) \geqslant g(x) - C , x \geqslant 0 , \tag{7.1}$$

et que

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - h(x)) = +\infty. \tag{7.2}$$

Alors h *est petite par rapport à* g *dans le sens de la définition 6.1.*

Démonstration. – Prenons

$$a_k = \inf \{t \,;\, g'(t) \geqslant 2^k\}, k \in \mathbf{N}, k \geqslant p ,$$

où g' est la dérivée à droite. Par le théorème des accroissements finis on a

$$2^k(y - x) \leqslant g(y) - g(x) \leqslant 2^{k+1} (y - x) \text{ si } a_k \leqslant x \leqslant y \leqslant a_{k+1} ,$$

d'où (7.3)

$$\sum_p^q 2^{-k}(g(a_{k+1}) - g(a_k)) \geqslant \sum_p^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p .$$

Comme $a_{q+1} \longrightarrow +\infty$ avec q, on a forcément, étant donné j, une infinité d'entiers k tels que $g(a_{k+1}) - g(a_k) \geqslant j^2$. Prenons un tel k, assez grand pour que $g(x) - h(x) \geqslant 2j^2$ pour tout $x \geqslant a_k$, et définissons $x_j = a_k$ et z_j par l'équation $g(z_j) = g(x_j) + j^2$; ensuite $y_j = (1 - 1/j)x_j + (1/j)z_j$. Avec ces définitions on a

$$g(y_j) - h(z_j) \geqslant g(y_j) - g(z_j) + 2j^2 \geqslant g(x_j) - g(z_j) + 2j^2 = j^2 .$$

Comme $a_k = x_j < y_j < z_j \leqslant a_{k+1}$ on peut appliquer (7.3) :

$$g(y_j) - g(x_j) \geqslant 2^k(y_j - x_j) = \frac{1}{j} 2^k(z_j - x_j) \geqslant \frac{1}{2j}(g(z_j) - g(x_j)) = \frac{1}{2} j.$$

Finalement, vu (7.1), on a

$$G(y_j) - \sup(g(x_j), h(z_j)) \geqslant j/2 - C \longrightarrow +\infty,$$

c'est-à-dire que h est petite par rapport à g.

Pour des fonctions g qui ont un comportement suffisamment régulier la condition (7.2) peut être affaiblie.

DEFINITION 7.2. – *Soit* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *convexe et croissante. Nous dirons que* g *est de croissance régulière si, pour toutes suites* (x_j) *et* (z_j), $x_j \geqslant 0$, *telles que* $g(z_j) - g(x_j) \longrightarrow +\infty$ *il existe une suite* (y_j) *telle que* $g(y_j) - g(x_j) \longrightarrow +\infty$ *et* $(y_j - x_j)/(z_j - x_j) \longrightarrow 0$.

Il revient au même de dire que, pour tout ϵ, $0 < \epsilon < 1$, il existe une fonction localement bornée $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et une constante c tel que, pour tous $x, y, z > 0$ avec $c \leqslant x \leqslant z$ et $y = (1-\epsilon)x + \epsilon z$, on ait $g(z) - g(x) \leqslant \varphi(g(y) - g(x))$. Pour qu'une fonction convexe et croissante soit de croissance régulière il suffit que $g'(x + a/g'(x))/g'(x)$ soit bornée pour tout $a > 0$ et tout x assez grand (g' étant la dérivée à droite ou à gauche). Exemples : $g(x) = x^\alpha, x \geqslant 0, \alpha \geqslant 1$; $g(x) = e^x$; $g(x) = e^{x^2}, x \geqslant 0$; $g(x) = e^{e^x}$; etc.

LEMME 7.3. – *Soient* $g, h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *deux fonctions convexes et croissantes dont* g *de croissance régulière. Supposons que* $G(x) \geqslant g(x) - C, x \geqslant 0$ *pour une constante* C *et que*

$$\sup_{x \geqslant 0} (g(x) - h(x)) = +\infty. \tag{7.4}$$

Alors h *est petite par rapport à* g.

Démonstration. – Si h est constante la conclusion est facile. Sinon, prenons une suite (z_j) telle que $g(z_j) - h(z_j) \longrightarrow +\infty$ et définissons x_j par l'équation $g(x_j) = h(z_j)$ pour j assez grand. Alors $g(z_j) - g(x_j) = g(z_j) - h(z_j) \longrightarrow +\infty$. D'après la définition 7.2 il existe (y_j) telle que $(y_j - x_j)/(z_j - x_j) \longrightarrow 0$ et $g(y_j) - g(x_j) \longrightarrow +\infty$. Donc

$$G(y_j) - \sup(g(x_j), h(z_j))$$
$$= G(y_j) - g(x_j) \geqslant g(y_j) - g(x_j) - C \longrightarrow +\infty.$$

Il existe deux fonctions convexes et croissantes g et h telles que $h \leqslant g \leqslant G + C$, telles que (7.4) soit satisfaite, mais telles que

h ne soit pas petite par rapport à g. On ne peut donc pas remplacer la condition (7.2) du lemme 7.1 par l'hypothèse plus faible (7.4), ni supprimer l'hypothèse de régularité du lemme 7.3.

Notons enfin qu'il existe trois fonctions convexes et croissantes f, g et h telles que $h \leqslant g \leqslant G + C$ et que (7.4) soit satisfaite, mais telles que, pour tout ϵ avec $0 < \epsilon < 1$, on ait $(f \circ g) \square_\epsilon (f \circ h)(y) \geqslant f(g(y) - A_\epsilon)$, $y \in \mathbf{R}$, où A_ϵ est une constante qui dépend de f, g, h et ϵ, mais non pas de y. Avec de telles fonctions on ne peut donc pas obtenir l'inégalité (6.9) qui est d'une importance capitale dans la démonstration du théorème 6.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BEDFORD et B.A. TAYLOR, A new capacity for plurisubharmonic functions, *Acta Math.*, 149 (1982), 1-40.

[2] S. DINEEN, R. MEISE et D. VOGT, Caractérisation des espaces de Fréchet nucléaires dans lesquels tous les bornés sont pluripolaires, *C.R.A.S.*, Paris, Ser. I Math., 295 (1982), 385-388.

[3] S. DINEEN, R. MEISE et D. VOGT. Characterization of the nuclear Fréchet spaces in which every bounded set is polar. Manuscrit, 1982, 25p.

[4] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 1948, 31.

[5] A.D. IOFFE et V.M. TIHOMIROV, *Theory of extremal problems,* North-Holland, 1979.

[6] S. KAKUTANI et V. KLEE, The finite topology of a linear space, *Arch. Math. (Basel),* 14, (1963), 55-58.

[7] C.O. KISELMAN, On the radius of convergence of an entire function in a normed space, *Ann. Polon. Math.*, 33 (1976), 39-55.

[8] C.O. KISELMAN, The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions, *Invent. Math.*, 49 (1978), 137-148.

[9] C.O. KISELMAN, Plurisubharmonic functions and plurisubharmonic topologies, *Advances in Holomorphy,* (1979), 431-449. North-Holland Mathematics Studies 34, ed. J.A. Barroso.

[10] C.O. KISELMAN, The growth of restrictions of plurisubharmonic functions, *Mathematical Analysis and Applications,* (1981), 435-454. Advances in Math. Suppl. Studies, vol. 7B, ed. L. Nachbin. Academic Press.

[11] C.O. KISELMAN, Stabilité du nombre de Lelong par restriction à une sous-variété. *Séminaire P. Lelong – H. Skoda 1980/81 et Colloque de Wimereux* (1981), 324-336. Lecture Notes in Mathematics 919 (1982), Springer-Verlag.

[12] C.O. KISELMAN, The growth of compositions of a plurisubharmonic function with entire mappings. Manuscrit, 1982, 7p.

[13] P. LELONG, Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires sur une algèbre de fonctions holomorphes, *Séminaire P. Lelong 1969,* 1-20. Lecture Notes in Mathematics 116, (1970), Springer-Verlag.

[14] P. LELONG, Sur l'application exponentielle dans l'espace des fonctions entières. *Infinite Dimensional Holomorphy and Applications,* (1977), 297-311. North-Holland Mathematics studies 12, ed. M.C. Matos.

[15] P. LELONG, Ensembles de contrôle de croissance pour l'analyse complexe dans les espaces de Fréchet., *C.R.A.S.*, Paris 287, Sér. A, (1978), 1097-1100.

[16] P. LELONG, A class of Fréchet complex spaces in which the bounded sets are **C**-polar sets, Manuscrit, 1980, 13p.

[17] B.I. LOKŜIN, O mnoĵestvaĥ poniĵenija porjadka celyĥ funkciĭ v $\mathbf{C}^n$, *Teorija funkciĭ funkcional'nyi analyz i iĥ priloĵenija* 37 (1982), 62-65.

[18] J.J. MOREAU, Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques, *J. Math. Pures Appl.*, 49 (1970), 109-154.

[19] R.T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis,* Princeton University Press (1970).

Manuscrit reçu le 1er mars 1983.

Christer O. KISELMAN,
Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thunbergsvägen 3
752 38 Uppsala (Suède).