JEAN-FRANÇOIS JAULENT

S-classes infinitésimales d'un corps de nombres algébriques

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 1-27.

$\mathcal{S}$-CLASSES INFINITÉSIMALES D'UN CORPS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Jean-François JAULENT

Nous introduisons dans cet article certains groupes de nombres et d'idéaux, canoniquement attachés à un corps de nombres algébriques, et que nous appelons infinitésimaux parce que leur logarithme ℓ-adique, pour un premier donné ℓ, est identiquement nul. Notre propos est de montrer comment ces groupes, qui interviennent de façon naturelle dans l'étude du groupe de Galois $\mathcal{A}(K)$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale d'un corps de nombres K, comme dans celle de son sous-groupe de torsion $\mathcal{T}(K)$, permettent de ce fait d'éclairer les problèmes de ℓ-ramification. Disons un mot sur leur définition :

Si K est un corps de nombres de degré fini sur $\mathbf{Q}$, le tensorisé $\mathcal{K} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} K^\times$ du groupe multiplicatif de ses éléments non nuls s'envoie canoniquement dans son complété profini au-dessus de ℓ, défini comme la complétion projective $\varprojlim_m \left(\bigoplus_{\mathfrak{l}|\ell} K_{\mathfrak{l}}^\times / K_{\mathfrak{l}}^{\times \ell^m} \right)$ du composé des groupes multiplicatifs des complétés de K pour les places au-dessus de ℓ. Le noyau de cette application est ce que nous appelons le ℓ-groupe des éléments infinitésimaux de K; son image $\mathcal{P}_\infty(K)$ dans le tensorisé $\mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} P(K)$ du groupe des idéaux principaux est le ℓ-groupe des idéaux principaux-infinitésimaux; et nous disons qu'un idéal de K est infinitésimal lorsqu'une de ses puissances non nulles tombe dans $\mathcal{P}_\infty(K)$.

Bien entendu, le principal intérêt des groupes présentés est de rendre compte des propriétés de ℓ-ramification, tout en dissimulant sous un formalisme commode les problèmes souvent fastidieux de passage à la limite.

C'est ainsi que dans une première partie nous montrons comment le ℓ-

groupe des idéaux principaux-infinitésimaux apparaît comme limite des groupes de rayons associés par la théorie du corps de classes aux extensions abéliennes ℓ-ramifiées, et nous relions ce résultat à la description idélique traditionnelle du groupe $\mathcal{A}(\mathrm{K})$. Auparavant, nous précisons la structure des groupes d'unités infinitésimales du corps K, qui gouvernent la répartition des sous-groupes de décomposition des places de K dans la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de ce corps.

Enfin, dans les deux dernières parties nous mettons en œuvre les résultats précédents pour étudier les questions de classes ambiges et de théorie des genres dans une extension galoisienne finie L/K :

a) La suite exacte des classes ambiges.

Ces considérations sur les classes ambiges trouvent leur origine dans un article de G. Gras (cf. [5]) qui souligne l'analogie entre le comportement du groupe de défaut de la conjecture de Leopoldt vis-à-vis du groupe $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ et celui du groupe des unités vis-à-vis du groupe des classes d'idéaux. Nous avons choisi une méthode d'exposition de la formule des classes ambiges qui s'appuie sur des résultats de cohomologie tout à fait semblables à ceux développés par Iwasawa dans sa note sur les unités (cf. [9]), mais nous aurions pu aussi bien, du moins dans le cas cyclique, reprendre la démonstration plus élémentaire de Chevalley (cf. [1]), pour la transposer dans le cas qui nous intéresse, le parallélisme des résultats étant éclatant. Reprenant une idée de [6], nous montrons ensuite comment l'extension du logarithme aux groupes d'idéaux permet, dans bien des cas, d'élucider la structure du sous-groupe de torsion $\mathcal{T}(\mathrm{K})$.

b) La suite exacte des genres.

Nous reprenons ici des considérations de théorie des genres, que nous avons développées ailleurs dans un tout autre contexte (cf. [10]). Après avoir étudié l'application norme dans une extension finie L/K, nous regardons plus attentivement le cas abélien dans lequel nous étendons au groupe $\mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{K}^\times$ les symboles de Hasse pour généraliser aux éléments infinitésimaux la réciproque de la formule du produit. Nous introduisons enfin la notion de genre infinitésimal d'une extension galoisienne L/K, et nous montrons en particulier que les ℓ-groupes d'inertie des places ramifiées dans L/K sont déployés dans le corps des genres associé, dès que la conjecture de Leopoldt est vérifiée dans K.

1. DESCRIPTION DES GROUPES DE CLASSES ET D'UNITÉS

Dans ce paragraphe, K désigne un corps de nombres de degré fini sur le corps des rationnels, ℓ un nombre premier, et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de places de K étrangères à ℓ, contenant les places à l'infini.

a. Définition du groupe de défaut et des éléments infinitésimaux.

Convenons d'écrire $K^\times$ le groupe multiplicatif du corps K, puis $E^{\mathcal{S}}(K)$ le sous-groupe des $\mathcal{S}$-unités (i.e. des éléments unités en dehors de $\mathcal{S}$) et $E'(K)$ celui des ℓ-unités, $E(K)$ enfin celui des unités de l'anneau des entiers de K. Nous notons $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K)$, $\mathcal{E}'(K)$, $\mathcal{E}(K)$ leurs tensorisés ℓ-adiques respectifs, c'est-à-dire les fermetures de leurs images respectives dans le groupe $\mathcal{K} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} K^\times$, pour la topologie des sous-groupes d'indice fini.

Pour chaque place $\mathfrak{l}$ de K au-dessus de ℓ, introduisons le groupe $\mathfrak{U}_\mathfrak{l}$ des unités principales du complété $K_\mathfrak{l}$ de K en $\mathfrak{l}$; faisons choix d'une uniformisante $\pi_\mathfrak{l}$ de $K_\mathfrak{l}$; et notons $\mu_\mathfrak{l}$ le groupe des racines de l'unité d'ordre étranger à ℓ contenues dans $K_\mathfrak{l}$. Le groupe multiplicatif du corps $K_\mathfrak{l}$ s'écrit comme produit direct $K_\mathfrak{l}^\times = \mu_\mathfrak{l} . \pi_\mathfrak{l}^{\mathbf{Z}} . \mathfrak{U}_\mathfrak{l}$, ce qui permet de définir son complété profini en posant : $\mathcal{K}_\mathfrak{l} = \pi_\mathfrak{l}^{\mathbf{Z}_\ell} . \mathfrak{U}_\mathfrak{l}$ (cette définition étant indépendante du choix de l'uniformisante $\pi_\mathfrak{l}$). Le complété profini de K au-dessus de ℓ, $\mathfrak{K} = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{K}_\mathfrak{l}$, produit des complétés $\mathcal{K}_\mathfrak{l}$ pour les places au-dessus de ℓ, contient naturellement le groupe $\mathcal{U}(K) = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathfrak{U}_\mathfrak{l}$ des unités semi-locales de K et sa filtration canonique $\mathcal{U}_m(K) = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} (1+\mathfrak{l}^m)$, pour $m \in \mathbf{N}$.

Cela étant, l'injection diagonale de $K^\times$ dans le produit de ses complétés $\prod_{\mathfrak{l}|\ell} K_\mathfrak{l}^\times$ se prolonge par continuité en une surjection s du tensorisé $\mathcal{K}$ sur le complété profini $\mathfrak{K}$. La filtration transportée

$$\mathcal{K}_m = \{ \mathfrak{x} \in \mathcal{K} \,|\, s(\mathfrak{x}) \in \mathcal{U}_m(K) \}$$

prolonge celle de K, et le noyau de s est le groupe $\mathscr{K}_\infty = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \mathscr{K}_m$ des *éléments infinitésimaux*. Son intersection avec $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}(\mathrm{K})$ est le groupe $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_\infty(\mathrm{K})$ des *$\mathscr{S}$-unités infinitésimales*, et son sous-groupe $\mathscr{E}_\infty(\mathrm{K})$, noyau de la restriction de s à $\mathscr{E}(\mathrm{K})$, est le groupe de défaut de la conjecture de Leopoldt.

Bien entendu, c'est le théorème d'approximation simultanée qui assure la surjectivité de l'application s, le groupe $s(\mathscr{E}^{\mathscr{S}}(\mathrm{K}))$ recouvrant $\mathscr{U}(\mathrm{K})$ dès que $\mathscr{S}$ est assez grand. Plus précisément :

LEMME 1. — *Étant donné un ensemble fini $\mathscr{S}$ de places de* K, *ne contenant pas les places à l'infini, il existe un $\mathscr{S}'$ fini ne rencontrant pas $\mathscr{S}$ tel que la restriction de s aux $\mathscr{S}'$-unités recouvre $\mathscr{K}$.*

Démonstration. — Soient $x_1, \ldots, x_n$ une famille finie d'éléments de K dont les images par s engendrent ℓ-adiquement $\mathscr{U}(\mathrm{K})$. Quel que soit $\mathscr{S}$ ensemble fini de places finies de K, nous pouvons résoudre pour chacun des indices $i = 1, \ldots, n$ le système de congruences (où $\nu_{\mathfrak{l}}$ est le degré de $\mathfrak{l}$-hyperprimarité) :

$$y_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad \forall \mathfrak{p} \in \mathscr{S} \qquad \text{et} \qquad y_i \equiv x_i \pmod{\mathfrak{l}^{\nu_{\mathfrak{l}}}}, \qquad \forall\, \mathfrak{l} | \ell .$$

Les y_i obtenus sont étrangers à $\mathscr{S}$, et les relations

$$s(y_i) \equiv s(x_i) \pmod{\mathscr{U}(\mathrm{K})^\ell}$$

nous montrent que leurs images par s engendrent le $\mathbf{Z}_\ell$-module $\mathscr{U}(\mathrm{K})$. L'ensemble $\mathscr{S}'$ réunion des places à l'infini et de celles intervenant dans les y_i convient donc.

Quant à la détermination effective du $\mathbf{Z}_\ell$-rang du groupe $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_\infty(\mathrm{K})$, elle est naturellement subordonnée à l'étude des propriétés ℓ-adiques des $\mathscr{S}$-unités. Dans le cas le plus simple, celui des unités, qui fait l'objet de la conjecture de Leopoldt, le résultat $(\mathscr{E}_\infty(\mathrm{K}) = 1)$ n'est connu que pour les corps abéliens sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire, et quelques autres. Dans le cas général, la structure du groupe $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_\infty(\mathrm{K})$ (qui n'est jamais nul dès que $\mathscr{S}$ est assez grand) est gouvernée par la conjecture ℓ-adique de Schanuel et il est possible d'en donner une description conjecturale que l'on peut vérifier par le théorème de Baker-Brumer sous certaines hypothèses d'abélianité (cf. [12]).

b. Introduction des groupes de classes d'idèles.

Notons $\mathrm{I}(\mathrm{K})$ le groupe des idèles du corps K. Par la théorie du corps de classes, le groupe de Galois $\mathrm{A}(\mathrm{K})$ de l'extension abélienne maximale de K qui est non ramifiée en dehors de ℓ s'identifie au quotient :

$$\mathrm{A}(\mathrm{K}) = \mathrm{I}(\mathrm{K})/\overline{\mathrm{K}^{\times} . \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathrm{U}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{K})}$$

(où $\mathrm{U}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{K})$ représente le groupe des unités du complété $\mathfrak{p}$-adique de K). Sa ℓ-partie $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ s'identifie par conséquent à la limite projective :

$$\mathcal{A}(\mathrm{K}) = \varprojlim_{m} \mathrm{A}(\mathrm{K})/\mathrm{A}(\mathrm{K})^{\ell^m} = \left[\left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}\right) \oplus \mathfrak{R}\right]/j(\mathcal{K}),$$

où j est induite par le plongement diagonal du groupe multiplicatif de K dans le groupe des idèles : pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$, l'application $j_{\mathfrak{p}}$ est induite par la valuation $(j_{\mathfrak{p}}(\mathrm{r}) = \pi_{\mathfrak{p}}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathrm{r})})$, et pour les places au-dessus de ℓ, l'image d'un élément r dans $\mathfrak{R}$ n'est autre que $s(\mathrm{r})$.

La décomposition directe du groupe $\mathfrak{R}$ donnée dans la section *a*) permet d'écrire le groupe $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ sous une forme légèrement différente :

$$\mathcal{A}(\mathrm{K}) = \left[\left(\bigoplus_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}\right) \oplus \mathcal{U}(\mathrm{K})\right]/j(\mathcal{K}),$$

qui redonne immédiatement la suite exacte bien connue :

$$\text{(i)} \quad 1 \to \mathcal{U}(\mathrm{K})/s(\mathcal{E}(\mathrm{K})) \to \mathcal{A}(\mathrm{K}) \xrightarrow{p} \mathcal{C}\ell(\mathrm{K}) \to 1,$$

où l'application p associe à la classe dans $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ de l'élément $\left(\sum_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{a_{\mathfrak{p}}}\right) + u$, celle, dans le ℓ-groupe des classes d'idéaux du corps K, de l'idéal $\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}}$.

Plus généralement, si $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de places de K étrangères à ℓ, le groupe de Galois $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ de la ℓ-extension abélienne maximale $\hat{\mathrm{K}}^{\mathcal{S}}$ de K qui est non ramifiée en dehors de ℓ et où les places de $\mathcal{S}$ se décomposent complètement s'écrit comme quotient de $\mathcal{A}(\mathrm{K})$:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) = \left[\left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}\right) \oplus \mathcal{U}(\mathrm{K})\right]/j^{\mathcal{S}}(\mathcal{K});$$

d'où, comme plus haut, une suite exacte courte :

$$\text{(ii)}\quad 1 \to \mathcal{U}(K)/s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K)) \to \mathcal{A}^{\mathcal{S}}(K) \xrightarrow{p} \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(K) \to 1\,,$$

dans laquelle $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(K)$ représente le ℓ-groupe des $\mathcal{S}$-classes du corps K, i.e. le quotient de $\mathcal{C}\ell(K)$ par le sous-groupe engendré par les classes dans $\mathcal{C}\ell(K)$ des idéaux de $\mathcal{S}$. En particulier, pour $\mathcal{S}$ assez grand, les $\mathcal{S}$-unités épuisent le groupe $\mathcal{U}(K)$ et $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(K)$ se réduit à $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(K)$.

c. Interprétation en termes de classes d'idéaux.

Introduisons le groupe $J(K)$ des idéaux de K qui sont étrangers à ℓ, désignons par $P(K)$ le sous-groupe constitué par ceux qui sont principaux, puis, pour tout naturel m, par $P_m(K)$ le groupe de rayon :

$P_m(K) = \{\mathfrak{a} \in P(K) |,\ \exists x \in K,\ \mathfrak{a} = (x) \text{ et } x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}},\ \forall \mathfrak{f} | \ell\}$. Notons

$\mathcal{J}(K) = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} J(K)$, $\mathcal{P}(K) = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} P(K)$, et $\mathcal{P}_m(K) = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} P_m(K)$

leurs tensorisés respectifs (de sorte que le ℓ-groupe des classes $\mathcal{C}\ell(K)$ s'identifie canoniquement au quotient $\mathcal{J}(K)/\mathcal{P}(K)$); l'intersection $\mathcal{P}_\infty(K) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \mathcal{P}_m(K)$ des groupes $\mathcal{P}_m(K)$ est le groupe des *idéaux principaux-infinitésimaux* du corps K, et nous disons que le groupe $\mathcal{J}_\infty(K) = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{J}(K) | \exists m \in \mathbf{N},\ \mathfrak{a}^{\ell^m} \in \mathcal{P}_\infty(K)\}$ est le groupe des *idéaux infinitésimaux* de K. Cela étant, la théorie du corps de classes permet d'interpréter le groupe de Galois $\mathcal{A}(K)$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale $\hat{K}$ de K comme limite projective des groupes de classes de rayon :

$$\mathcal{A}(K) \simeq \varprojlim_m \mathcal{J}(K)/\mathcal{P}_m(K) = \mathcal{J}(K)/\mathcal{P}_\infty(K)\,.$$

Et nous disons que $\mathcal{A}(K)$ est le *ℓ-groupe des classes infinitésimales* du corps K. Il vient en effet :

LEMME 2. — *Les idéaux principaux-infinitésimaux sont les idéaux principaux engendrés par les éléments infinitésimaux.*

Démonstration. — Soit x un élément de $\mathcal{K}$ engendrant un idéal principal-infinitésimal. Par définition de $\mathcal{P}_\infty(K)$, nous pouvons trouver pour chaque naturel n une unité ε_n dans $\mathcal{E}(\mathrm{K})$ et un élément x_n dans $\mathcal{K}_n$ vérifiant : $x = \varepsilon_n x_n$. Maintenant, le groupe $\mathcal{E}(\mathrm{K})$ étant compact, nous pouvons extraire de (ε_n) une sous-suite convergente, ce qui nous permet d'écrire $x = \varepsilon_\infty x_\infty$, avec $\varepsilon_\infty \in \mathcal{E}$ et $x_\infty \in \mathcal{K}_\infty$ comme annoncé.

Plus généralement, si $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de places de K étrangères à ℓ, convenons de noter $\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ le sous-$\mathbf{Z}_\ell$-module de $\mathcal{J}(\mathrm{K})$ engendré par les places de $\mathcal{S}$, et $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ celui engendré par les places étrangères à $\mathcal{S}$; posons alors $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) = \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \cap \mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\mathcal{P}(\mathrm{K})$ (le groupe des idéaux $\mathcal{S}$-principaux), puis $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) = \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \cap \mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\mathcal{P}_\infty(\mathrm{K})$ (le groupe des idéaux $\mathcal{S}$-principaux-infinitésimaux). Nous obtenons sans peine les isomorphismes :

$$\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) = \mathcal{J}(\mathrm{K})/\mathcal{P}(\mathrm{K})\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \simeq \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$$

et

$$\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) = \mathcal{J}(\mathrm{K})/\mathcal{P}_\infty(\mathrm{K})\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \simeq \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}).$$

En effet :

LEMME 3. — *Toute classe de $\mathcal{C}\ell(\mathrm{K})$ (respectivement de $\mathcal{A}(\mathrm{K})$) peut être représentée par un idéal étranger à un ensemble fini de places donné.*

Démonstration. — C'est bien connu pour $\mathcal{C}\ell(\mathrm{K})$. Cela étant, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{J}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de places, il existe x dans $\mathcal{K}$ tel que $x\mathfrak{a}$ soit étranger à $\mathcal{S}$; puis, par le lemme 1, il existe $\mathfrak{y}$ étranger à $\mathcal{S}$ tel que l'élément $x\mathfrak{y}$ soit infinitésimal. L'idéal $\mathfrak{b} = x\mathfrak{y}\mathfrak{a}$ convient donc.

Nous disons, par analogie, que $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ est le *ℓ-groupe des $\mathcal{S}$-classes infinitésimales* du corps K. Revenant alors sur les suites exactes courtes introduites dans la section *c*), nous voyons qu'elles peuvent encore s'écrire :

$$\text{(i')}\quad 1 \to \mathcal{P}(\mathrm{K})/\mathcal{P}_\infty(\mathrm{K}) \to \mathcal{J}(\mathrm{K})/\mathcal{P}_\infty(\mathrm{K}) \to \mathcal{J}(\mathrm{K})/\mathcal{P}(\mathrm{K}) \to 1,$$

$$\text{(ii')}\quad 1 \to \mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) \to \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) \to \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \to 1.$$

Et, bien entendu, pour $\mathcal{S}$ assez grand le groupe $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ est nul, et $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K})$ se confond avec $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$.

d. Description du sous-groupe de torsion.

La suite exacte (i) de la section a montré que le groupe $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ est un $\mathbf{Z}_\ell$-module noethérien (de même rang que le quotient $\mathcal{U}(\mathrm{K})/s(\mathcal{E}(\mathrm{K}))$), somme directe comme tel d'un $\mathbf{Z}_\ell$-module libre de rang fini et d'un module fini $\mathcal{T}(\mathrm{K})$. D'après ce qui précède, nous avons immédiatement :

$$\mathcal{T}(\mathrm{K}) = \mathcal{J}_\infty(\mathrm{K})/\mathcal{P}_\infty(\mathrm{K}).$$

De façon semblable, si $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de places de K, le sous-groupe de torsion de $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ peut être défini par le quotient $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) = \mathcal{J}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$, où le groupe $\mathcal{J}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ est donné par :

$$\mathcal{J}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) | \exists m \in \mathbf{N},\ \mathfrak{a}^{\ell^m} \in \mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\}.$$

Pour éclairer la structure du groupe des idéaux infinitésimaux $\mathcal{J}_\infty(\mathrm{K})$, il est possible de faire appel au logarithme ℓ-adique : supposons pour simplifier que K soit un corps à conjugaison complexe (i.e. une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel). Dans ce cas, l'application Log_ℓ s'étend canoniquement à la composante relative $\mathcal{J}^-(\mathrm{K})$ du tensorisé du groupe des idéaux de K (i.e. au sous-groupe de $\mathcal{J}(\mathrm{K})$ constitué des idéaux dont le conjugué complexe est égal à l'inverse). En effet, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{J}^-(\mathrm{K})$, toute puissance principale $\mathfrak{a}^{\ell^m}$ de $\mathfrak{a}$ admet, à une racine de l'unité près, un unique générateur $\alpha \in \mathcal{K}$ qui vérifie $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$, ce qui permet de poser sans ambiguïté (cf. [6], § 2) :

$$\mathrm{Log}_\ell\, \mathfrak{a} = \frac{1}{\ell^m}\, \mathrm{Log}_\ell\, s(\alpha).$$

Le groupe $\mathcal{J}_\infty^-(\mathrm{K})$ est alors de façon claire le noyau dans $\mathcal{J}^-(\mathrm{K})$ de l'application logarithme; d'où la suite exacte canonique :

$$\text{(iii)}\quad 1 \to [\mathcal{P}(\mathrm{K}) \cap \mathcal{J}_\infty(\mathrm{K})/\mathcal{P}_\infty(\mathrm{K})]^- \to \mathcal{T}^-(\mathrm{K}) \to \mathcal{C}\ell^-(\mathrm{K})$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Log}_\ell} \mathrm{Log}_\ell\, \mathcal{J}^-(\mathrm{K})/\mathrm{Log}_\ell\, \mathcal{U}(\mathrm{K}) \to 1,$$

qui précise, en ce qui concerne les composantes relatives, la situation du ℓ-corps de classes de Hilbert relativement au composé des $\mathbf{Z}_\ell$-extensions de K (cf. [6]), puisque le quotient $[\mathcal{P}(\mathrm{K}) \cap \mathcal{J}_\infty(\mathrm{K})/\mathcal{P}_\infty(\mathrm{K})]^-$ du groupe des idéaux principaux qui sont infinitésimaux par le sous-groupe des idéaux principaux-infinitésimaux s'identifie canoniquement, via l'application s, à la composante relative du quotient $\left(\prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mu(K_{\mathfrak{l}})\right)/\mu(K)$ du produit des ℓ-groupes de racines de l'unité locales par son sous-groupe global.

Plus généralement, si K est abélien sur un sous-corps H, de degré relatif [K : H] étranger à ℓ, et si φ est un caractère ℓ-adique irréductible du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/H)$ qui n'est pas représenté dans le $\mathbf{Q}_\ell[G]$-module $\mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} E^{\mathscr{S}}$, la restriction du logarithme aux φ-composantes donne lieu à une suite exacte :

$$\text{(iv)}\quad 1 \to [\mathscr{P}^{\mathscr{S}}(K) \cap \mathscr{I}^{\mathscr{S}}_{\infty}(K)/\mathscr{P}^{\mathscr{S}}_{\infty}(K)]_{\varphi} \to \mathscr{T}^{\mathscr{S}}_{\varphi}(K) \to \mathscr{C}\ell^{\mathscr{S}}_{\varphi}(K)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Log}_\ell} \mathrm{Log}_\ell\, \mathscr{I}_{\varphi}(K)/\mathrm{Log}\, \mathscr{U}_{\varphi}(K) \to 1,$$

de sorte qu'en pratique, la connaissance d'un système de générateurs de $\mathscr{C}\ell^{\mathscr{S}}_{\varphi}(K)$ suffit pour comparer $\mathscr{T}^{\mathscr{S}}_{\varphi}(K)$ et $\mathscr{C}\ell^{\mathscr{S}}_{\varphi}(K)$.

2. LA SUITE EXACTE DES CLASSES AMBIGES DANS UNE EXTENSION GALOISIENNE

Nous considérons une extension galoisienne L de degré fini sur K, dont nous notons G le groupe de Galois. Nous reprenons les notations du paragraphe précédent et nous notons en outre $\mathfrak{L}$ le complété profini du groupe multiplicatif $L^\times$ du corps L, et $\mathscr{L} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} L^\times$ son tensorisé par $\mathbf{Z}_\ell$. En particulier, $\mathscr{L}_\infty$ désigne ainsi le groupe des éléments infinitésimaux du corps L.

a. Résultats préliminaires.

Il s'agit des trois lemmes de cohomologie suivants :

LEMME 4. — *Le groupe de cohomologie* $H^1(G, \mathscr{I}^{\mathscr{S}}(L))$ *est nul.*

Démonstration. — Ce n'est rien d'autre que le théorème 90 de Hilbert pour les idéaux.

LEMME 5. — *Le groupe de cohomologie* $H^1(G,\mathscr{L}_\infty)$ *est nul.*

Démonstration. — Partons de la suite exacte courte qui définit les éléments infinitésimaux :

$$1 \to \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L} \xrightarrow{s_L} \mathfrak{L} \to 1\,.$$

Elle donne naissance à la suite exacte de cohomologie :

$$1 \to \mathscr{K}_\infty \to \mathscr{K} \xrightarrow{s_K} \mathfrak{K} \to H^1(G,\mathscr{L}_\infty) \to H^1(G,\mathscr{L});$$

l'application s_K est naturellement surjective, et le groupe $H^1(G,\mathscr{L})$ est nul d'après le théorème 90 de Hilbert; d'où le résultat.

LEMME 6. — *Le quotient* $\mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(L)^G/\mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(K)$ *s'identifie au groupe de cohomologie* $H^1(G,\mathscr{E}_\infty^{\mathscr{S}}(L))$.

Démonstration. — D'après le lemme 5, la suite exacte courte qui définit le groupe $\mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(L)$:

$$1 \to \mathscr{E}_\infty^{\mathscr{S}}(L) \to \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(L) \to 1\,,$$

donne naissance, en effet, à la suite exacte de cohomologie :

$$1 \to \mathscr{E}_\infty^{\mathscr{S}}(K) \to \mathscr{K}_\infty \to \mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(L)^G \to H^1(G,\mathscr{E}_\infty^{\mathscr{S}}(L)) \to 1\,.$$

b. Énoncé de la suite exacte.

Considérons la suite exacte courte :

$$1 \to \mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(L) \to \mathscr{I}^{\mathscr{S}}(L) \to \mathcal{C}\ell^{\mathscr{S}}(L) \to 1\,.$$

La suite exacte de cohomologie associée :

$$1 \to \mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(L)^G \to \mathscr{I}^{\mathscr{S}}(L)^G \to \mathcal{C}\ell^{\mathscr{S}}(L)^G \to H^1(G,\mathscr{P}_\infty^{\mathscr{S}}(L))$$

s'arrête en vertu du lemme 4. L'application $i^{\mathcal{S}}$ induite par l'extension des idéaux donne lieu par conséquent au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \arrow[r] \arrow[d, "i^{\mathcal{S}}"] & 1 & \\
1 \arrow[r] & \mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} \arrow[r] & \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} \arrow[r] & \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})) \arrow[r] & 1\,.
\end{tikzcd}$$

qui conduit, par le lemme du serpent, à la suite exacte :

$$\begin{aligned} 1 \to \operatorname{Ker} i^{\mathcal{S}} \to \mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) \to \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \\ \to \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/i^{\mathcal{S}}(\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})) \to 1\,. \end{aligned}$$

Compte tenu du lemme 6, nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME 2. — *Dans une extension galoisienne finie* L/K *de corps de nombres, de groupe de Galois* G, *le sous-groupe ambige du* ℓ*-groupe des* $\mathcal{S}$*-classes infinitésimales du corps* L *est donné par la suite exacte suivante, où l'application corestriction* $i^{\mathcal{S}}$ *est induite par l'extension des idéaux, et où tous les termes sont finis :*

$$\begin{aligned} 1 \to \operatorname{Ker} i^{\mathcal{S}} \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})) \to \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \\ \to \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/i^{\mathcal{S}}(\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})) \to 1\,. \end{aligned}$$

Démonstration. — Seule reste à vérifier la finitude des différents termes de la suite. Or, puisque G est d'ordre fini, les groupes de cohomologie qui lui sont attachés ont un exposant qui divise la ℓ-partie de son ordre. Ainsi $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))$ est bien fini, puisque $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})$ a un rang fini, et $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))$ l'est aussi, comme quotient de $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}$, qui a un rang fini. Enfin, le groupe $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ est bien connu depuis Chevalley et mesure ici la ramification en dehors de $\mathcal{S}$ et de ℓ (cf. par exemple [10], prop. 1) :

LEMME 7. — *Désignons par* $\mathcal{S}_{\mathrm{r}}$ *l'ensemble des places finies ramifiées dans l'extension* L/K *et étrangères à* ℓ; *puis, pour toute place* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathcal{S}_{\mathrm{r}}$, *notons* $e_{\mathfrak{p}}$ *la* ℓ*-valuation de son indice de ramification relatif. Alors, le quotient* $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ *admet la décomposition directe :*

$$\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{\mathrm{r}}\setminus\mathcal{S}} \mathbf{Z}_{\ell}/\ell^{e_{\mathfrak{p}}}\mathbf{Z}_{\ell}\,.$$

Corollaire 1. (Formule des classes ambiges). — *Sous les hypothèses du théorème, l'application d'extension des idéaux induit un pseudo-isomorphisme* $i^{\mathscr{S}}$ *de* $\mathcal{C}\ell^{\mathscr{S}}(\mathrm{K})$ *dans* $\mathcal{C}\ell^{\mathscr{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}$ *dont le noyau et le conoyau sont liés par l'identité :*

$$|\mathrm{Coker}\ i^{\mathscr{S}}| = |\mathrm{Ker}\ i^{\mathscr{S}}|(\mathscr{J}^{\mathscr{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} : \mathscr{J}^{\mathscr{S}}(\mathrm{K}))\ \frac{|\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{P}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))|}{|\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))|}.$$

Plus précisément, lorsque l'extension L/K *est non-ramifiée en dehors de* $\mathscr{S}$ *et de* ℓ, *il vient exactement :*

$$\mathrm{Ker}\ i^{\mathscr{S}} \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L})) \qquad et \qquad \mathrm{Coker}\ i^{\mathscr{S}} \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{P}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L})).$$

Corollaire 2. — *L'application* $i^{\mathscr{S}}$ *est injective dès que le groupe de cohomologie* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))$ *est nul. Cela a lieu en particulier lorsque le rang du groupe* $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}$ *des* $\mathscr{S}$*-unités infinitésimales est constant dans l'extension* L/K.

Démonstration. — C'est là une généralisation immédiate d'un résultat de G. Gras(cf. [3], th. II, 1 et prop. II, 3). L'hypothèse sur les rangs entraîne que $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{K})$ est d'indice fini dans $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L})$. Mais, le groupe $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L})$ étant sans torsion, cela ne peut avoir lieu qu'avec l'égalité $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) = \mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L})$: en effet, si pour chaque $\mathscr{S}$-unité infinitésimale $\varepsilon \in \mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L})$, il existe un naturel m tel que ε^{ℓ^m} soit dans $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{K})$, il suit $\varepsilon^{(\sigma-1)\ell^m} = 1$, pour tout σ de G, i.e. $\varepsilon^{\sigma-1} = 1$, comme attendu.

Notons que cette hypothèse sur les rangs est toujours vérifiée (au moins à partir d'un certain rang) dans une tour cyclotomique : le défaut de la conjecture de Leopoldt y est effet borné (cf. [4], th. 1, cor.) et chaque nombre premier est finiment décomposé dans la tour; mais ces deux résultats peuvent être en défaut dans une $\mathbf{Z}_\ell$-extension quelconque (cf. [7] et [11]).

Corollaire 3. — *Supposons l'extension* L/K *cyclique, et désignons par* $\mathscr{N}_{\infty} = N_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathscr{L}_{\infty})$ *le groupe des normes infinitésimales. Le groupe de cohomologie* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{P}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))$ *s'identifie au quotient* $\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) \cap \mathscr{N}/N_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))$ *de sorte que la formule des classes ambiges prend la forme :*

$$\frac{|\mathrm{Coker}\ i^{\mathscr{S}}|}{|\mathrm{Ker}\ i^{\mathscr{S}}|} = \frac{(\mathscr{J}^{\mathscr{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} : \mathscr{J}^{\mathscr{S}}(\mathrm{K}))}{(\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) : \mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) \cap \mathscr{N}_{\infty})} \cdot \frac{|\mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty})|}{|\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathscr{E}^{\mathscr{S}}_{\infty})|}.$$

Démonstration. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$ de norme unité sur K. Par définition du groupe $\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$, nous pouvons écrire $\mathfrak{a} = \mathfrak{x}\mathfrak{b}$ pour un $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{L}_\infty$ et un $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$; et la condition $N_{\mathrm{L/K}}(\mathfrak{a}) = 1$ nous assure que l'élément $\varepsilon = N_{\mathrm{L/K}}(\mathfrak{x})$ est une $\mathcal{S}$-unité de K. L'isomorphisme annoncé s'obtient alors par passage au quotient.

c. Étude du sous-groupe de torsion.

Revenons au cas général où L est une extension galoisienne de degré fini sur K. La capitulation Ker $i^{\mathcal{S}}$ étant bornée, elle n'intéresse en fait que le sous-groupe de torsion $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ de $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$. Et comme l'application corestriction $i^{\mathcal{S}}$ applique évidemment $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ dans le sous-groupe ambige de $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$, nous pouvons reprendre pour le groupe de torsion $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ la construction de la section précédente, à partir cette fois de la suite exacte courte :

$$1 \to \mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \to \mathcal{I}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \to \mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \to 1\,.$$

Une difficulté toutefois se présente : le groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{I}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))$ n'étant généralement pas nul, la suite exacte de cohomologie associée :

$$1 \to \mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} \to \mathcal{I}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} \to \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))$$

ne s'arrête pas, non plus par conséquent que celle déduite par le lemme du serpent du diagramme commutatif donné par l'application $i^{\mathcal{S}}$:

$$1 \to \mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \to \mathcal{I}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \to \mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))\,.$$

D'après le lemme 5 en revanche, la suite exacte de cohomologie associée à celle :

$$1 \to \mathcal{E}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \to \mathcal{L}_\infty \to \mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \to 1\,,$$

qui définit $\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$, nous prouve que le groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{P}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))$ s'injecte dans celui de $\mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathcal{E}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))$ qui est, *a priori*, mieux connu : Par exemple, lorsque $\mathcal{S}$ se réduit aux places à l'infini, le groupe $\mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathcal{E}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))$ est nul dès que le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt.

Il vient donc :

THÉORÈME 3. — *Dans une extension galoisienne finie* L/K *de corps de nombres, qui vérifie la condition* $\mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathcal{E}_\infty^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})) = 1$, *le sous-groupe ambige* *du groupe de torsion* $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$ *est donné par la suite exacte* (*où* $i^{\mathcal{S}}$ *est l'application corestriction de* $\mathcal{Cl}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ *dans* $\mathcal{Cl}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$) :

$$1 \to \operatorname{Ker} i^{\mathcal{S}} \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})) \to \mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) \to \mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/i^{\mathcal{S}}(\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})) \to 1\,.$$

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème, l'ordre du groupe ambige* $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}$ *est donné par la formule :*

$$|\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}| = \frac{|\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})|}{|\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))|}\cdot(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} : \mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}))$$
$$= \frac{|\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})|}{|\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L}))|}\,\frac{(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} : \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}))}{(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} : \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}).\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}})}\,.$$

Démonstration. — L'égalité de gauche provient directement du théorème. Cela étant, puisque la capitulation $\operatorname{Ker} i^{\mathcal{S}}$ est bornée, l'intersection $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \cap \mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})$ se réduit à $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K})$ et le quotient $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K})$ s'écrit encore $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}.\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$, d'où le résultat annoncé.

Bien entendu, lorsque le groupe $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}$ des $\mathcal{S}$-unités est cohomologiquement trivial dans l'extension galoisienne L/K, la corestriction $i^{\mathcal{S}}$ est injective et la formule précédente donne l'ordre de $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}$ comme produit de deux entiers :

$$|\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}| = |\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})|\cdot\frac{(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} : \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}))}{(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} : \mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}).\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}})}\,.$$

Le numérateur du quotient étant donné par le lemme 7, disons un mot sur le dénominateur : Pour chaque premier $\mathfrak{p}_i$ de K étranger à $\mathcal{S}$ et à ℓ, qui se ramifie dans l'extension L/K, notons $\mathfrak{P}_i$ le composé des idéaux de L au-dessus de $\mathfrak{p}_i$; désignons par $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ le sous-module de $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$ engendré par les $\mathfrak{p}_i$, et par $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$ celui qui est engendré par les $\mathfrak{P}_i$. Le groupe $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ des idéaux ambiges modulo les étendus s'identifie au quotient $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})/\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$. Comme, de plus, pour m assez grand, les idéaux de $\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\ell^m}$ sont les étendus d'idéaux principaux de K, le choix de générateurs permet de représenter $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ comme quotient de deux groupes de nombres $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$ et $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})$ contenus dans $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \simeq \mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})/\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) \simeq \mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\ell^m}/\mathcal{D}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})^{\ell^m} \simeq \mathcal{C}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})/\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\,.$$

Prenant le logarithme, nous obtenons alors la formule :

$$\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\,.\,\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}} \simeq \mathrm{Log}_{\ell}\,\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})/\mathrm{Log}_{\ell}\,\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}),$$

qui permet le calcul pratique du dénominateur. Dans deux cas particuliers au moins, celle-ci se simplifie considérablement :

– lorsque K est totalement réel et vérifie la conjecture de Leopoldt, le quotient $\mathcal{U}(\mathrm{K})/s(\mathcal{E}(\mathrm{K}))$ est de rang 1, de sorte que le groupe $\mathcal{J}(\mathrm{K})$ contient $\mathcal{J}_{\infty}(\mathrm{K})\mathcal{J}(\mathbf{Q})$ comme sous-groupe d'indice fini. Le quotient $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}/\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}$ peut ainsi se descendre dans $\mathbf{Q}$; c'est la situation exploitée dans [5] (cf. [3], lemme III.6).

– lorsque K en revanche est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel, le logarithme ℓ-adique s'étend à la composante relative du groupe $\mathcal{J}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}}$, ce qui permet d'écrire directement (cf. [6], th. 5.1) :

$$(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}})^{-}/(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}})^{-} \simeq \mathrm{Log}_{\ell}\,(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^{\mathrm{G}})^{-}/\mathrm{Log}_{\ell}\,(\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}))^{-}\,.$$

3. L'APPLICATION NORME DANS UNE EXTENSION FINIE

Nous supposons ici que L est une extension finie d'un corps de nombres K. Suivant l'usage, nous repérons par une étoile le noyau de la norme arithmétique $N_{\mathrm{L/K}}$.

a. Suites exactes du serpent associées à l'application norme.

Partons de la suite exacte (ii) établie au § 1.c); en faisant opérer la norme arithmétique, nous pouvons former le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 \to & \mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L}) & \to & \mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) & \to & \mathfrak{H}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) & \to 1 \\
& \downarrow{\scriptstyle \nu^{\mathcal{S}}} & & \downarrow{\scriptstyle N_{\mathrm{L/K}}} & & \downarrow{\scriptstyle N_{\mathrm{L/K}}} & \\
1 \to & \mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) & \to & \mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) & \to & \mathfrak{H}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) & \to 1,
\end{array}$$

qui nous conduit à la suite exacte du serpent :

$$1 \to \operatorname{Ker} v^{\mathcal{S}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^* \to \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^* \to \operatorname{Coker} v^{\mathcal{S}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})) \to \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})) \to 1,$$

dans laquelle les deux termes de droite sont donnés par la théorie du corps de classes : le quotient $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))$ correspond à la ℓ-sous-extension abélienne $\mathcal{S}$-décomposée de L/K qui est ℓ-ramifiée, et le quotient $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))$ à celle qui est non ramifiée.

Pour évaluer les ordres du noyau et du conoyau de l'application $v^{\mathcal{S}}$, formons maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})) & \to & \mathcal{U}(\mathrm{L}) & \to & \mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{L}) & \to & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle N_{\mathrm{L/K}}} & & \downarrow{\scriptstyle N_{\mathrm{L/K}}} & & \downarrow{\scriptstyle v^{\mathcal{S}}} & & \\
1 & \to & s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})) & \to & \mathcal{U}(\mathrm{K}) & \to & \mathcal{P}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})/\mathcal{P}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) & \to & 1 .
\end{array}$$

La suite exacte du serpent associée s'écrit :

$$1 \to s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))^* \to \mathcal{U}(\mathrm{L})^* \to \operatorname{Ker} v^{\mathcal{S}} \to s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}))/N_{\mathrm{L/K}}(s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})) \to \mathcal{U}(\mathrm{K})/N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{U}(\mathrm{L})) \to \operatorname{Coker} v^{\mathcal{S}} \to 1,$$

de sorte que $v^{\mathcal{S}}$ est un pseudo-isomorphisme dès que $s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))^*$ est d'indice fini dans $\mathcal{U}(\mathrm{L})^*$. Et nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME 4. — *Soient* L/K *une extension finie de corps de nombres, et* $\mathcal{S}$ *un ensemble fini de places de* K *tel que le groupe* $s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))^*$ *soit d'indice fini dans* $\mathcal{U}(\mathrm{L})^*$. *Dans ces conditions, l'ordre du sous-groupe de* $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$, *qui est annulé par la norme arithmétique, est donné par la formule :*

$$|\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^*| = |\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^*| \frac{(\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})))}{(\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})))} (\mathcal{U}(\mathrm{L})^* : s(\mathcal{E}(\mathrm{L}))^*) \frac{(s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{K})) : N_{\mathrm{L/K}}(s(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}))))}{(\mathcal{U}(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{U}(\mathrm{L})))}.$$

COROLLAIRE. — *Dans une extension finie* L/K *de corps de nombres totalement réels, vérifiant la conjecture de Leopoldt, l'ordre du sous-groupe de*

$\mathcal{T}(\mathrm{L})$ *annulé par la norme arithmétique est donné par la formule :*

$$|\mathcal{T}(\mathrm{L})^*| = |\mathcal{C}\ell(\mathrm{L})^*| \frac{(\mathcal{A}(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{A}(\mathrm{L})))}{(\mathcal{C}\ell(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{C}\ell(\mathrm{L})))} (\mathcal{U}(\mathrm{L})^* : s(\mathcal{E}(\mathrm{L})^*)) \frac{(\mathcal{E}(\mathrm{K}) : N_{L/K}(\mathcal{E}(\mathrm{L})))}{(\mathcal{U}(\mathrm{K}) : N_{L/K}(\mathcal{U}(\mathrm{L})))}.$$

Dans l'expression obtenue, les indices $(\mathcal{A}(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{A}(\mathrm{L})))$ et $(\mathcal{C}\ell(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{C}\ell(\mathrm{L})))$ sont donnés, comme nous l'avons dit, par le corps de classe global; l'indice $(\mathcal{U}(\mathrm{K}) : N_{\mathrm{L/K}}(\mathcal{U}(\mathrm{L})))$ provient, lui, du corps de classes local : il mesure la ℓ-ramification sauvage. Enfin, lorsque l'extension L/K est abélienne, le nombre $|\mathcal{C}\ell(\mathrm{L})^*|$ s'exprime simplement à partir de l'ordre du sous-groupe des genres $\mathcal{C}\bar{\ell}(\mathrm{L})$, ce qui permet de retrouver la formule donnée par G. Gras dans ce cas particulier (cf. [5], th. III, 3).

b. Le symbole de Hasse dans une extension abélienne.

Nous nous restreignons un instant au cas où l'extension L est abélienne sur K. Son groupe de Galois Gal (L/K) est alors canoniquement le produit direct de ses sous-groupes de Sylow, ce qui permet de définir le ℓ-symbole de Hasse $\mathfrak{h}_\mathfrak{p} = \left(\frac{,\mathrm{L/K}}{\mathfrak{p}}\right)$ attaché à une place finie $\mathfrak{p}$ de K comme composé du symbole de Hasse au sens usuel (cf. [8]) et de la surjection naturelle de Gal (L/K) sur son ℓ-Sylow G. En particulier, l'image du groupe multiplicatif de K par le symbole $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ est donc le ℓ-Sylow $\mathrm{D}_\mathfrak{p}$ du sous-groupe de décomposition de la place $\mathfrak{p}$ dans l'extension L/K. De plus, le groupe G étant supposé fini, le symbole $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ est localement constant sur $\mathrm{K}^\times$, et se prolonge donc de façon évidente en un $\mathbf{Z}_\ell$-morphisme (que nous continuons par abus à noter $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$) du tensorisé $\mathcal{K} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_\mathbf{Z} \mathrm{K}^\times$ sur le ℓ-sous-groupe de décomposition $\mathrm{D}_\mathfrak{p}$, ayant pour noyau le sous-module de $\mathcal{K}$ engendré par les éléments de $\mathrm{K}^\times$ qui sont normes locales en $\mathfrak{p}$.

Plus généralement, si L est une extension abélienne infinie, réunion dénombrable d'une famille croissante de sous-extensions finies $\mathrm{L}^k (k \in \mathbf{N})$, il est toujours possible de définir le ℓ-symbole de Hasse d'un élément de $\mathcal{K}$ dans l'extension L/K comme la limite projective de la famille des symboles associée aux sous-extensions L^k/K :

$$\left(\frac{\mathfrak{x}, \mathrm{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = \varprojlim_k \left(\frac{\mathfrak{x}, \mathrm{L}^k/\mathrm{K}}{\mathfrak{p}}\right), \qquad \forall \mathfrak{x} \in \mathcal{K}$$

(la cohérence de la définition étant assurée par le fait que la restriction du symbole de Hasse à une sous-extension n'est autre que le symbole de Hasse pris dans cette sous-extension). Si maintenant l'extension L/K n'est ramifiée qu'en un nombre fini de places, le symbole $\left(\frac{x\,,\,L/K}{\mathfrak{p}}\right)$ vaut 1 pour presque tout $\mathfrak{p}$ (en fait pour toute place finie étrangère à x, qui ne se ramifie pas dans L/K), et la famille des ℓ-symboles $(\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ envoie le $\mathbf{Z}_\ell$-module $\mathcal{X}$ dans la somme directe des ℓ-groupes de décomposition $D_{\mathfrak{p}}$ et, plus précisément, en vertu de la formule du produit, dans le sous-groupe Γ de cette somme directe constitué des familles $(\sigma_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ qui vérifient l'identité $\prod_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}} = 1$. Réciproquement, il est bien connu, lorsque l'extension L/K est finie, que les familles $(\sigma_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ qui vérifient la formule du produit sont précisément les images par les symboles de Hasse des éléments de $K^{\times}$, ce que nous pouvons traduire par la suite exacte :

$$\text{(v)} \quad 1 \to \mathcal{N} \to \mathcal{X} \xrightarrow{\mathfrak{h}} \bigoplus_{\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{p}} \to G \to 1,$$

où $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} \mathfrak{h}$ désigne le sous-module de $\mathcal{X}$ engendré par les éléments de $K^{\times}$ partout normes locales dans L/K (mais ce résultat est en défaut lorsque L/K est infinie (cf. par exemple [11])).

Supposons maintenant que $\mathfrak{p}$ divise ℓ. Le symbole $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ se factorise alors via l'homomorphisme s, de sorte que la restriction de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ aux éléments infinitésimaux est identiquement nulle. Autrement dit $\mathfrak{h}$ envoie $\mathcal{X}_\infty$ dans le sous-groupe Γ_∞ constitué des éléments de Γ qui valent 1 pour les places au-dessus de ℓ. Réciproquement :

THÉORÈME 5. — *Dans une extension abélienne finie* L/K, *les éléments* $(\sigma_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ *de la somme directe* $\oplus D_{\mathfrak{p}}$ *des* ℓ*-groupes de décomposition des places finies, qui vérifient la formule du produit* $\prod_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}} = 1$ *et la condition* $\sigma_{\mathfrak{p}} = 1$ *pour les places au-dessus de* ℓ, *sont les images des infinitésimaux par les* ℓ*-symboles de Hasse.*

En particulier, nous avons donc la suite exacte :

$$\text{(vi)} \quad 1 \to \mathcal{N}_\infty \to \mathcal{X}_\infty \xrightarrow{\mathfrak{h}} \bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid \ell} D_{\mathfrak{p}} \to G \to 1,$$

où $\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N} \cap \mathcal{X}_\infty$ *désigne le sous-groupe des éléments infinitésimaux qui sont normes locales partout dans l'extension* L/K.

Démonstration. — Soit $(\sigma_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ une telle famille. D'après (v), nous pouvons trouver un $\mathfrak{x}$ de $\mathscr{X}$ qui vérifie

$$\mathfrak{h}_\mathfrak{p}(\mathfrak{x}) = \sigma_\mathfrak{p}, \qquad \text{pour chaque place } \mathfrak{p}.$$

La condition $\sigma_\mathfrak{p} = 1$, pour les $\mathfrak{p}$ au-dessus de ℓ, nous dit que $\mathfrak{x}$ est norme locale en ℓ, i.e. qu'il existe un ε dans $\mathfrak{L}$ vérifiant $N(\varepsilon) = s(\mathfrak{x})$. Relevons ε en un élément $\mathfrak{y}$ de $\mathscr{L}$, et posons $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}/N(\mathfrak{y})$. Nous avons alors $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}(\mathfrak{z}) = \sigma_\mathfrak{p}$, pour tout $\mathfrak{p}$ (puisque nous n'avons modifié $\mathfrak{x}$ que par une norme globale), et $s(\mathfrak{z}) = s(\mathfrak{x})/N(\varepsilon) = 1$, comme attendu.

Scolie. — *Dans une extension cyclique* N/K, *les éléments de* $\mathscr{X}_\infty$ *qui sont normes locales partout sont précisément les normes d'infinitésimaux.*

Démonstration. — D'après le principe des normes de Hasse, les normes locales partout sont exactement les normes globales. Soit donc $\mathfrak{x} = N(\mathfrak{y})$ un infinitésimal. L'égalité $N(s(\mathfrak{y})) = s(N(\mathfrak{y})) = s(\mathfrak{x}) = 1$ et le théorème 90 de Hilbert appliqué dans l'extension $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ nous permettent d'écrire $s(\mathfrak{y}) = \varepsilon^{\sigma-1}$ pour un σ de G et ε dans $\mathfrak{L}$. Relevons ε en un $\mathfrak{z}$ de $\mathscr{L}$; l'élément $\mathfrak{y}\mathfrak{z}^{1-\sigma}$ est alors l'infinitésimal cherché.

Le théorème 5 admet le raffinement suivant :

Proposition. — *Sous les hypothèses du théorème 5, si nous supposons en outre que la famille* $(\sigma_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ *vérifie la condition* $\sigma_\mathfrak{p} = 1$, *pour chaque facteur premier* $\mathfrak{p}$ *d'un idéal entier donné* $\mathfrak{f}$ *de* K, *alors nous pouvons imposer à l'infinitésimal dont elle provient par les symboles de Hasse d'être étranger à* $\mathfrak{f}$; *ce qui se traduit par l'exactitude de la suite :*

$$\text{(vi)}' \quad 1 \to \mathscr{N}_\infty^\mathfrak{f} \to \mathscr{X}_\infty^\mathfrak{f} \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid \ell\mathfrak{f}} \mathrm{D}_\mathfrak{p} \to \mathrm{G} \to 1,$$

où $\mathscr{N}_\infty^\mathfrak{f}$ *et* $\mathscr{X}_\infty^\mathfrak{f}$ *désignent respectivement les intersections de* $\mathscr{N}_\infty$ *et* $\mathscr{X}_\infty$ *avec le groupe* $\mathscr{X}^\mathfrak{f}$ *des éléments de* $\mathscr{X}$ *étrangers à* $\mathfrak{f}$.

Démonstration. — Elle s'effectue comme pour le théorème, à partir cette fois de la suite exacte :

$$\text{(v)}' \quad 1 \to \mathscr{N}^\mathfrak{f} \to \mathscr{X}^\mathfrak{f} \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} \mathrm{D}_\mathfrak{p} \to \mathrm{G} \to 1,$$

en s'appuyant sur le lemme 1 pour relever ε en un élément $\mathfrak{y}$ de $\mathscr{L}$ étranger à $\mathfrak{f}$.

c. La suite exacte des genres dans une extension galoisienne.

Nous supposons désormais que L est une extension galoisienne finie de K; nous notons L_0 la sous-extension maximale de L qui est abélienne sur K, puis $\mathcal{N}$ le tensorisé par $\mathbf{Z}_\ell$ du groupe des éléments de $K^\times$ qui sont normes locales partout dans L/K, et $\mathfrak{f}$ le conducteur (au sens normique) de l'extension galoisienne L/K; enfin nous utilisons les notations $\mathcal{R}^{\mathfrak{f}}$, $\mathcal{P}^{\mathfrak{f}}$ et $\mathcal{I}^{\mathfrak{f}}$ pour désigner les tensorisés respectifs par $\mathbf{Z}_\ell$ du rayon modulo $\mathfrak{f}$, du groupe des idéaux principaux étrangers à $\mathfrak{f}$ et du groupe des idéaux étrangers à $\mathfrak{f}$.

Introduisons le ℓ-corps de classes de Hilbert $\bar{K}$ de K et celui $\bar{L}$ de L, puis le ℓ-corps des genres $\tilde{L}$ de L/K (i.e. la ℓ-extension maximale non ramifiée de L qui provient par composition d'une extension abélienne de K). Nous obtenons le schéma galoisien (où sont représentés les corps et les groupes de Galois) :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, dash, "\mathcal{C}\ell(L)/\mathcal{C}\ell^*(L)"] \arrow[rr, dash, bend left, "\mathfrak{G}(L)"] \arrow[d, dash] & L\bar{K} \arrow[r, dash, "\mathcal{C}\ell^*(L)/\overline{\mathcal{C}\ell}(L)"] \arrow[d, dash] & \tilde{L} \arrow[r, dash, "\overline{\mathcal{C}\ell}(L)"] \arrow[d, dash] & \bar{L} \\
L_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L_0\bar{K} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \tilde{L}_0 & \\
L\cap\bar{K} \arrow[r, dash, "N_{L/K}(\mathcal{C}\ell(L))"] \arrow[d, dash] & \bar{K} & & \\
K \arrow[ur, dash, bend right, "\mathcal{C}\ell(K)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

D'après la théorie du corps de classes, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\tilde{L}_0/K)$ s'identifie au groupe de classes de rayon :

$$\mathcal{R}^{\mathfrak{f}}(K)N_{L/K}(\mathcal{K}^{\mathfrak{f}}(\bar{L}))/\mathcal{R}^{\mathfrak{f}}(K) = \mathcal{R}^{\mathfrak{f}}(K)N_{L/K}(\mathcal{P}^{\mathfrak{f}}(L))/\mathcal{R}^{\mathfrak{f}}(K);$$

ce qui conduit à la définition classique du genre principal :

$$\overline{\mathcal{C}\ell}(L) = \{c\ell(\mathfrak{A}) \in \mathcal{C}\ell(L) | \mathfrak{A} \in \mathcal{I}^{\mathfrak{f}}(L) \quad \text{et} \quad N_{L/K}(\mathfrak{A}) = (x) \text{ avec } x \in \mathcal{N}\}$$

(le quotient $\mathfrak{G}(L) = \mathcal{C}\ell(L)/\overline{\mathcal{C}\ell}(L)$ étant le ℓ-quotient des genres, et son ordre le ℓ-nombres de genres).

Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K qui se ramifie dans L, notons $\mathfrak{I}_\mathfrak{p}$ son ℓ-groupe d'inertie dans l'extension abélienne $\tilde{\mathfrak{L}}_0/K$. La description précédente nous montre qu'un élément x de $\mathscr{K}$, étranger à $\mathfrak{f}$, est norme locale en $\mathfrak{p}$ dans l'extension abélienne $\tilde{\mathfrak{L}}_0/K$ si et seulement s'il l'est dans l'extension galoisienne L/K, autrement dit (cf. [3]) que $\mathfrak{I}_\mathfrak{p}$ s'identifie au ℓ-groupe d'inertie de la sous-extension abélienne d'une quelconque des extensions locales $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ au-dessus de L/K. Cela étant, l'expression classique du nombre de genres permet de conclure à l'exactitude de la suite courte obtenue par action des ℓ-symboles de Hasse $\left(\left(\frac{,\tilde{\mathfrak{L}}_0/K}{\mathfrak{p}}\right)\right)_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}$ sur les unités de K :

$$\text{(vii)}\quad 1 \to \mathscr{E}(K)/\mathscr{E}(K)\cap\mathscr{N} \xrightarrow{\mathfrak{h}} \bigoplus_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \mathfrak{I}_\mathfrak{p} \xrightarrow{p} \mathrm{Gal}(\tilde{\mathfrak{L}}_0/\tilde{K}) \to 1\,.$$

Plus généralement (cf. [9], § 4), si $\mathscr{S}$ est un ensemble fini de places de K (étrangères à ℓ dans le cas qui nous intéresse ici), la suite exacte (vii) se généralise sous la forme :

$$\text{(viii)}\quad 1 \to \mathscr{E}^\mathscr{S}(K)/\mathscr{E}^\mathscr{S}(K)\cap\mathscr{N} \xrightarrow{\mathfrak{h}^\mathscr{S}} \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathscr{S}} \mathfrak{D}_\mathfrak{p}^\mathscr{S}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p}\notin\mathscr{S}} \mathfrak{I}_\mathfrak{p}^\mathscr{S}\Big) \xrightarrow{p^\mathscr{S}} \mathrm{Gal}(\tilde{\mathfrak{L}}_0^\mathscr{S}/\tilde{K}^\mathscr{S}) \to 1\,.$$

Dans celle-ci, $\tilde{K}^\mathscr{S}$ désigne le ℓ-corps de classes de Hilbert en dehors de $\mathscr{S}$ (i.e. la plus grande sous-extension de $\tilde{K}$ qui est $\mathscr{S}$-décomposée sur K), $\tilde{\mathfrak{L}}^\mathscr{S}$ le ℓ-corps des genres en dehors de $\mathscr{S}$ relatif à L/K (i.e. la plus grande sous-extension de $\tilde{\mathfrak{L}}$, $\mathscr{S}$-décomposée sur L, qui provient par composition d'une extension abélienne de K), $\tilde{\mathfrak{L}}_0^\mathscr{S}$ la sous-extension maximale de $\tilde{\mathfrak{L}}^\mathscr{S}$ qui est abélienne sur K ; $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}^\mathscr{S}$ et ${}^0\mathfrak{I}_\mathfrak{p}^\mathscr{S}$ sont les ℓ-sous-groupes de décomposition et d'inertie d'une place $\mathfrak{p}$ dans l'extension abélienne $\tilde{\mathfrak{L}}_0^\mathscr{S}/K$; enfin $\mathfrak{h}^\mathscr{S}$ est le composé des ℓ-symboles de Hasse $\left(\frac{,\tilde{\mathfrak{L}}_0^\mathscr{S}/K}{\mathfrak{p}}\right)_\mathfrak{p}$ et $p^\mathscr{S}$ est la surjection canonique.

Introduisons maintenant le corps $\hat{K}^\mathscr{S}$ déjà défini (analogue ℓ-ramifié de $\tilde{K}^\mathscr{S}$), notons $\check{\mathfrak{L}}^\mathscr{S}$ la sous-extension maximale de $\hat{\mathfrak{L}}^\mathscr{S}$ qui provient par composition d'une extension abélienne de K (analogue ℓ-ramifié de $\tilde{\mathfrak{L}}^\mathscr{S}$), et $\check{\mathfrak{L}}_0^\mathscr{S}$ la plus grande sous-extension de $\check{\mathfrak{L}}^\mathscr{S}$ qui est abélienne sur K. Nous obtenons le schéma galoisien (où $\mathscr{A}^\mathscr{S}(L)$ est le sous-groupe de

$\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(L)$ qui fixe $\check{L}^{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{G}^{\mathcal{S}}(L)$ le quotient correspondant) :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, dash, "\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(L)/\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(L)^*"] \arrow[rr, bend left, dash, "\mathcal{G}^{\mathcal{S}}(L)"] \arrow[d, dash] & L\hat{K}^{\mathcal{S}} \arrow[r, dash, "\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(L)^*/\bar{\mathcal{A}}^{\mathcal{S}}(L)"] \arrow[d, dash] & \check{L}^{\mathcal{S}} \arrow[r, dash, "\bar{\mathcal{A}}^{\mathcal{S}}(L)"] \arrow[d, dash] & \check{L}^{\mathcal{S}} \\
L_0 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L_0\hat{K}^{\mathcal{S}} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \check{L}_0^{\mathcal{S}} & \\
L \cap \hat{K}^{\mathcal{S}} \arrow[r, dash, "N_{L/K}(\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(L))"] \arrow[d, dash] & \hat{K}^{\mathcal{S}} & & \\
K \arrow[ur, bend left, dash, "\mathcal{A}^{\mathcal{S}}(K)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Et nous disons que $\check{L}^{\mathcal{S}}$ est le ℓ-corps des $\mathcal{S}$-genres infinitésimaux de L/K.

Considérons l'extension (en général infinie) $\check{L}_0^{\mathcal{S}}/K$: pour toute famille $(\sigma_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ d'éléments de la somme directe $\left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}} \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\notin\mathcal{S}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\right)$ des groupes de décomposition ou d'inertie des places de K dans $\check{L}_0^{\mathcal{S}}/K$, qui vérifie la formule du produit $\prod_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}} = 1$, et tout sous-corps M de $\check{L}_0^{\mathcal{S}}$ de degré fini sur K, la suite exacte (viii), appliquée à l'extension abélienne M/K, nous assure l'existence d'une $\mathcal{S}$-unité ε_M qui vérifie l'identité $\left(\frac{\varepsilon_M, M/K}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma_{\mathfrak{p}}|_M$ pour chaque place $\mathfrak{p}$. Le groupe $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K)$ étant compact, nous en concluons que les éléments $\sigma_{\mathfrak{p}}$ proviennent tous, via les symboles de Hasse $\left(\frac{\ ,\check{L}_0^{\mathcal{S}}/K}{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}}$, d'une même $\mathcal{S}$-unité ε de $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K)$; autrement dit, que nous avons la suite exacte courte :

$$\text{(ix)}\quad 1 \to \mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K)/\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K) \cap \mathcal{N} \to \left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}} \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{p}\notin\mathcal{S}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\right) \to \mathrm{Gal}(\check{L}_0^{\mathcal{S}}/\hat{K}^{\mathcal{S}}) \to 1.$$

Si maintenant $\sigma_{\mathfrak{p}}$ est égal à 1 pour les places au-dessus de ℓ, l'élément ε obtenu est dans le sous-groupe $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\sim}(K)$ de $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}(K)$ constitué des $\mathcal{S}$-

unités qui sont normes locales en ℓ dans l'extension $\check{L}_0^{\mathcal{S}}/K$; ce qui se traduit par l'exactitude de la suite courte (où tous les termes sont finis) :

$$\text{(x)}\quad 1 \to \mathcal{E}_{\sim}^{\mathcal{S}}(K)/\mathcal{E}_{\sim}^{\mathcal{S}} \cap \mathcal{N} \to \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}} \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{\mathfrak{p}\notin\mathcal{S}\\ \mathfrak{p}\nmid\ell}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\Big) \to \mathrm{Gal}\,(\check{L}_0^{\mathcal{S}}/\check{K}^{\mathcal{S}}) \to 1\,.$$

Le but de la section qui suit est d'établir que dans la suite exacte (x), le groupe $\mathcal{E}_{\sim}^{\mathcal{S}}(K)$ peut être remplacé par le sous-groupe infinitésimal $\mathcal{E}_{\infty}^{\mathcal{S}}(K)$. Énonçons ce résultat :

THÉORÈME 6. — *Dans une extension galoisienne finie* L/K *de corps de nombres, les ℓ-symboles de Hasse attachés à la sous-extension maximale $\check{L}_0^{\mathcal{S}}$ abélienne sur* K *du ℓ-corps des $\mathcal{S}$-genres infinitésimaux de* L/K *donnent naissance à la suite exacte des genres :*

$$\text{(xi)}\quad 1 \to \mathcal{E}_{\infty}^{\mathcal{S}}(K)/\mathcal{E}_{\infty}^{\mathcal{S}}(K) \cap \mathcal{N} \to \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}} \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{\mathfrak{p}\notin\mathcal{S}\\ \mathfrak{p}\nmid\ell}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{S}}\Big) \to \mathrm{Gal}\,(\check{L}_0^{\mathcal{S}}/\hat{K}^{\mathcal{S}}) \to 1\,.$$

COROLLAIRE. — *Lorsque le corps* K *vérifie la conjecture de Leopoldt, le groupe de Galois de l'extension $\check{L}_0/\hat{K}$ s'identifie à la somme directe $\bigoplus_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ des ℓ-groupes d'inertie des places qui ne divisent pas ℓ.*

Nous disons que la ramification est déployée dans $\check{L}_0/K$.

d. Genre infinitésimal d'une extension abélienne.

Désignons par $\mathcal{N}_{\infty}^{\mathfrak{f}}$ le sous-module des éléments de $\mathcal{N}$ qui sont infinitésimaux et étrangers à $\mathfrak{f}$. Nous savons, par le lemme 3, que toute classe de $\mathcal{C\ell}(L)$ peut être représentée par un idéal de $\mathcal{I}^{\mathfrak{f}}(L)$. Cela étant, la théorie du corps de classes nous dit que le sous-module $\bar{\mathcal{C\ell}}(L)$ associé à la sous-extension maximale de $\hat{L}$ qui provient par composition d'une extension abélienne sur K est engendrée par les classes dans $\mathcal{C\ell}(L)$ de ceux des idéaux de $\mathcal{I}^{\mathfrak{f}}(L)$ dont la norme sur K peut s'écrire :

$$N_{L/K}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{x}\,.\,N_{\hat{L}/K}(\mathfrak{B})\,,\qquad \text{avec}\qquad \mathfrak{x}\in\mathcal{N}_{\infty}^{\mathfrak{f}}\qquad \text{et}\qquad \mathfrak{B}\in\mathcal{I}^{\mathfrak{f}}(\hat{L})\,.$$

Mais comme le groupe d'Artin de $\hat{L}/L$ est précisément $\mathscr{P}_\infty(L)$, l'idéal $N_{\hat{L}/K}(\mathfrak{B})$ est dans $N_{L/K}(\mathscr{P}_\infty(L))$, et la condition précédente signifie simplement que $N_{L/K}(\mathfrak{A})$ est un idéal principal engendré par un infinitésimal qui est norme locale partout dans l'extension L/K. D'où la définition du genre infinitésimal :

$$\check{\mathcal{C}\ell}(L) = \{c\ell(\mathfrak{A}) \in \mathcal{C}\ell(L) | \mathfrak{A} \in \mathscr{I}^{\mathfrak{f}}(L) \quad \text{et} \quad N_{L/K}(\mathfrak{A}) = (x), \text{ avec } x \in \mathcal{N}^{\mathfrak{f}}_\infty\}.$$

Maintenant, notons $\mathscr{P}^{\mathfrak{f}}_\infty$ le groupe des idéaux principaux-infinitésimaux étrangers à $\mathfrak{f}$ et définissons le rayon infinitésimal par :

$$\mathscr{R}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) = \{\mathfrak{a} \in \mathscr{P}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) | \mathfrak{a} = (x), \quad \text{avec} \quad x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}_\ell\ \mathfrak{f})\}$$

(la congruence signifiant que l'élément x doit être pris dans le groupe $(1+\mathfrak{f})^{\mathbf{Z}_\ell}$). Par l'isomorphisme du corps de classes, le groupe de Galois de l'extension abélienne $\check{L}_0/K$ s'identifie au quotient :

$$\mathrm{Gal}\,(\check{L}_0/K) = \mathscr{I}^{\mathfrak{f}}(K)/\mathscr{R}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) N_{L/K}(\mathscr{P}^{\mathfrak{f}}_\infty(L)).$$

Et son sous-groupe $\mathrm{Gal}\,(\check{L}_0/\hat{K})$ est ainsi :

$$\mathrm{Gal}\,(\check{L}_0/\hat{K}) \simeq \mathscr{P}^{\mathfrak{f}}_\infty(K)/\mathscr{R}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) N_{L/K}(\mathscr{P}^{\mathfrak{f}}_\infty(L)).$$

Notons alors $\mathscr{K}^{\mathfrak{f}}_\infty$ le groupe des infinitésimaux de $\mathscr{K}$ qui sont étrangers à $\mathfrak{f}$, puis $\mathscr{U}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) = \{x \in \mathscr{K}^{\mathfrak{f}}_\infty | x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}_\ell\ \mathfrak{f})\}$.

Nous obtenons sans peine la suite exacte courte :

$$\begin{aligned}1 \to \mathscr{E}_\infty(K)/\mathscr{E}_\infty(K) \cap \mathcal{N} \to \mathscr{K}^{\mathfrak{f}}_\infty/\mathscr{U}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) N_{L/K}(\mathscr{L}^{\mathfrak{f}}_\infty)&\\ \to \mathscr{P}^{\mathfrak{f}}_\infty(K)/\mathscr{R}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) N_{L/K}(\mathscr{P}^{\mathfrak{f}}_\infty(L)) \to 1&\end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la suite (xi) écrite lorsque $\mathscr{S}$ se réduit aux seules places à l'infini :

$$\text{(xii)} \quad 1 \to \mathscr{E}_\infty(K)/\mathscr{E}_\infty(K) \cap \mathcal{N} \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathscr{I}_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Gal}\,(\check{L}_0/\hat{K}) \to 1,$$

en vertu de la décomposition directe

$$\mathscr{K}^{\mathfrak{f}}_\infty/\mathscr{U}^{\mathfrak{f}}_\infty(K) N_{L/K}(\mathscr{L}^{\mathfrak{f}}_\infty) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p} \nmid \ell} U_{\mathfrak{p}}(K)/N(U_{\mathfrak{P}}(\hat{L}_0))$$

et des isomorphismes de réciprocité locaux.

Plus généralement, il est facile de voir que le $\mathcal{S}$-genre infinitésimal de l'extension galoisienne L/K est donné par l'identité :

$$\tilde{\mathcal{C}\ell}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) = \{c\ell(\mathfrak{A}) \in \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{J}^{\mathfrak{f}} \ \text{ et } \ N_{\mathrm{L/K}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{x}\mathfrak{b}, \\ \text{avec } \ \mathfrak{x} \in \mathcal{N}^{\mathfrak{f}}_{\infty} \ \text{ et } \ \mathfrak{b} \in \mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathrm{K})\},$$

qui conduit, comme plus haut, à la suite exacte attendue :

$$\text{(xi)} \quad 1 \to \mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K})/\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) \cap \mathcal{N} \to \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}} \mathcal{D}^{\mathcal{S}}_{\mathfrak{p}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \notin \mathcal{S} \\ \mathfrak{p} \nmid \ell}} \mathcal{J}^{\mathcal{S}}_{\mathfrak{p}}\Big) \to \mathrm{Gal}\,(\check{\mathrm{L}}^{\mathcal{S}}_0/\hat{\mathrm{K}}^{\mathcal{S}}) \to 1,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 6.

Montrons pour conclure comment ce dernier résultat permet de préciser le théorème 5. Supposons, pour simplifier, que $\mathcal{S}$ contienne les places ramifiées dans l'extension galoisienne L/K (sauf, éventuellement, celles au-dessus de ℓ) et considérons le noyau dans $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})$ de la norme arithmétique $N_{\mathrm{L/K}}$:

$$\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^* = \{c\ell(\mathfrak{A}) \in \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{J}^{\mathfrak{f}}(\mathrm{L}) \ \text{ et } \ N_{\mathrm{L/K}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{x}\mathfrak{b}, \\ \text{avec } \ \mathfrak{x} \in \mathcal{K}_{\infty} \ \text{ et } \ \mathfrak{b} \in \mathcal{J}_{\mathcal{S}}(\mathrm{L})\}.$$

Le théorème 6 nous conduit à l'identité :

$$(\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^* : \tilde{\mathcal{C}\ell}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})) = \frac{[\check{\mathrm{L}}^{\mathcal{S}}_0 : \hat{\mathrm{K}}^{\mathcal{S}}]}{[\mathrm{L}_0 : \mathrm{L} \cap \hat{\mathrm{K}}^{\mathcal{S}}]} = \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}} |\mathcal{D}^{\mathcal{S}}_{\mathfrak{p}}|}{(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) : \mathcal{E}^{\mathcal{S}}_{\infty}(\mathrm{K}) \cap \mathcal{N})[\mathrm{L}_0 : \mathrm{L} \cap \hat{\mathrm{K}}]}.$$

Pour la retrouver directement, remarquons que si $\mathfrak{A}$ est un idéal de $\mathcal{J}^{\mathfrak{f}}(\mathrm{L})$ qui représente une classe de $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^*$, les générateurs infinitésimaux $\mathfrak{x}$ de l'idéal $\mathcal{S}$-principal-infinitésimal $N_{\mathrm{L/K}}(\mathfrak{A})$ sont normes locales en dehors de $\mathcal{S}$. Faisons choix, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, d'une place $\mathfrak{P}$ de L au-dessus de $\mathfrak{p}$ et considérons la famille $\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) = ((\mathfrak{x}, \mathrm{L}_{\mathfrak{P}}/\mathrm{K}_{\mathfrak{p}}))_{\mathfrak{p}}$ des symboles de restes normiques associés aux extensions locales correspondantes (par le corps de classes local, le symbole $(\mathfrak{x}, \mathrm{L}_{\mathfrak{P}}/\mathrm{K}_{\mathfrak{p}})$ prend ses valeurs dans le ℓ-Sylow $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}$ du groupe de Galois de la sous-extension abélienne maximale de l'extension locale $\mathrm{L}_{\mathfrak{P}}/\mathrm{K}_{\mathfrak{p}}$). Elle est contenue dans le sous-groupe Γ_{∞} de la somme directe des $\mathrm{D}_{\mathfrak{p}}$ constitué des éléments $(\sigma_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ qui vérifient la relation $\sigma_{\mathfrak{p}} = 1$ pour les places $\mathfrak{p}$ au-dessus de ℓ, et dont les restrictions à la sous-extension abélienne L_0/K satisfont la formule du produit. Et puisque $\mathfrak{x}$ est défini modulo une $\mathcal{S}$-unité infinitésimale, nous obtenons ainsi une application de $\mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^*$ dans $\Gamma_\infty/\mathfrak{h}(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}))$ dont le noyau est précisément $\bar{\mathcal{C}\ell}(\mathrm{L})$. Comme maintenant, l'ordre du quotient $\Gamma_\infty/\mathfrak{h}(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}))$ est précisément :

$$\begin{aligned}(\Gamma_\infty : \mathfrak{h}(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}))) &= \frac{|\Gamma_\infty|}{(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) : \mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) \cap \mathcal{N})} \\ &= \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}} |\mathrm{D}_\mathfrak{p}|}{(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) : \mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) \cap \mathcal{N})[\mathrm{L}_0 : \mathrm{L} \cap \hat{\mathrm{K}}]} \\ &= \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}} |\mathcal{D}^{\mathcal{S}}_\mathfrak{p}|}{(\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) : \mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty(\mathrm{K}) \cap \mathcal{N})[\mathrm{L}_0 : \mathrm{L} \cap \hat{\mathrm{K}}]},\end{aligned}$$

l'égalité des ordres nous permet de conclure à l'exactitude de la suite courte :

$$1 \to \bar{\mathcal{C}\ell}^{\mathcal{S}}(\mathrm{L}) \to \mathcal{C}\ell^{\mathcal{S}}(\mathrm{L})^* \to \Gamma_\infty/\mathfrak{h}((\mathcal{E}^{\mathcal{S}}_\infty)(\mathrm{K})) \to 1.$$

Toute famille de Γ_∞ est ainsi l'image par $\mathfrak{h}$ d'un élément de $\mathcal{K}_\infty$ norme locale en dehors de $\mathcal{S}$, ce qui montre que la formule du produit dans L_0/K est, avec les conditions $\sigma_\mathfrak{p} = 1$, pour $\mathfrak{p}|\ell$, la seule relation entre les symboles de Hasse infinitésimaux attachés à l'extension galoisienne L/K.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Chevalley, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et dans les corps locaux, *J. Fac. Sc. Tokyo*, 2 (1933), 365-476.

[2] A. Fröhlich, The genus field and genus group in finite number fields, *Mathematika*, 6 (1959), 40-46 & 142-146.

[3] Y. Furuta, The genus field and genus number in algebraic number fields, *Nagoya Math. J.*, 29 (1967), 281-285.

[4] R. Gillard, Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante, *Abh. Math. Sem. Hamb.*, 48 (1979), 125-138.

[5] G. Gras, Groupe de Galois de la *p*-extension abélienne *p*-ramifiée maximale d'un corps de nombres, *J. reine angew. Math.*, 333 (1982), 86-132.

[6] G. Gras, Logarithme *p*-adique et groupes de Galois, *J. reine angew. Math.*, 343 (1983), 64-80.

[7] R. Greenberg, On the structure of certain Galois Groups, *Inv. Math.*, 47 (1978), 85-99.

[8] H. HASSE, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, II*, Physica Verlag, Wurzburg (1965).
[9] K. IWASAWA, A note on the group of units of an algebraic number field, *Abh. Math. Sem. Hamb.*, 20 (1956), 189-192.
[10] J.-F. JAULENT, Sur la théorie des genres dans une extension cyclique de degré ℓ^m d'un corps de nombres, métabélienne sur un sous-corps, *Pub. Math. Fac. Sc. Besançon*, (1980-1981).
[11] J.-F. JAULENT, Sous-groupe ambige, quotient des genres, et théorie d'Iwasawa, *Sém. Delange-Pisot-Poitou* (1981-1982).
[12] J.-F. JAULENT, Sur l'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques, *J. Numb. Th.* (à paraître).
[13] K. MASUDA, An application of the general norm residue symbol, *Proc. Am. Math. Soc.*, 10 (1959), 245-252.

Manuscrit reçu le 30 mars 1983.

Jean-François JAULENT,
ERA n° 070654
Université de Franche-Comté
Faculté des Sciences-Mathématiques
F 25030 Besançon Cedex.