ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL ZINSMEISTER

Représentation conforme et courbes presque lipschitziennes

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 29-44

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_29_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 29-44.

REPRÉSENTATION CONFORME ET COURBES PRESQUE LIPSCHITZIENNES

par Michel ZINSMEISTER

1. Introduction.

Un arc paramétré localement rectifiable du plan est dit presque-lipschitzien (P.L.) s'il existe une constante $C > 0$ (*) telle que sa paramétrisation par la longueur d'arc $z: \mathrm{I} \to \mathbf{C}$ (I; intervalle de R) vérifie :

$$(1) \qquad \forall z_0 \in \mathbf{C}, \quad \forall r > 0, \qquad |\{s \in \mathrm{I};\ |z(s) - z_0| \leqslant r\}| \leqslant \mathrm{C}r,$$

où « $|.|$ » désigne la mesure de Lebesgue.

Cette notion a été introduite par G. David [4] en liaison avec le problème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy.

Plus précisément, cet auteur démontre que les arcs P.L. sont les arcs rectifiables les plus généraux pour lesquels pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z(y)-z(x)|>\varepsilon} \frac{f(y)\, dy}{z(x) - z(y)} = \mathrm{T}f(x)$$

existe presque partout et définit un opérateur borné sur L^2.

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier ces courbes du point de vue de la représentation conforme. Nous appellerons domaine presque-lipschitzien tout domaine simplement connexe du plan dont le bord est le support d'un arc P.L. Rappelons qu'un domaine quasi-conforme (resp. un

(*) Le même symbole C sera utilisé tout au long de ce travail pour désigner les différentes constantes y apparaissant.

domaine de Lavrentiev) est un domaine dont le bord est une courbe de Jordan Γ telle que

$$\exists C > 0, \qquad \forall z_1, z_2 \in \Gamma, \qquad d(z_1, z_2) \leqslant C|z_1 - z_2|,$$
$$(\text{resp. } \ell(z_1, z_2) \leqslant C|z_1 - z_2|),$$

où $d(z_1, z_2)$ désigne le plus petit des diamètres des deux sous-arcs de Γ joignant z_1 et z_2 (l'un des deux sous-arcs pouvant éventuellement passer par l'infini) et $\ell(z_1, z_2)$ la plus petite des deux longueurs de ces deux sous-arcs. Une première remarque est qu'un domaine est de Lavrentiev si, et seulement si, il est à la fois quasi-conforme et P.L.

Comme Pommerenke l'a montré [11] (voir aussi [8], [14]), si Φ désigne une fonction holomorphe univalente dans D $(= D(0,1)$, le disque unité de $C)$, alors $\Phi(D)$ est un domaine de Lavrentiev borné si, et seulement si :

(2) $\Phi(D)$ est quasi-conforme,

(3) Φ' est une fonction extérieure,

(4) $|\Phi'(e^{i\theta})|$ appartient à la classe de Muckenhoupt $A^\infty(\partial D)$.

Rappelons que $A^\infty(\partial D) = \bigcup_{p>1} A^p(\partial D)$ où

$$A^p(\partial D) = \left\{\omega : \partial D \to R_+ \,;\, \sup_{I \subset \partial D} \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-1/p-1}\right)^{p-1} < +\infty\right\}.$$

(On a un énoncé analogue pour les domaines non bornés en remplaçant D par le demi-plan R^2_+, lorsque $\Phi(\infty) = \infty$).

Dans les parties 2 et 3, nous allons préciser ce théorème grâce à l'introduction des domaines presque-lipschitziens.

Plus précisément dans la partie 2, nous montrons que si Ω est un domaine P.L. borné contenant 0 et si Φ est la représentation conforme de D sur Ω normalisé par $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) > 0$, alors Φ' est extérieure et $|\Phi'(e^{i\theta})|^\alpha$ appartient à $A^\infty(\partial D)$ si $\alpha < \frac{1}{5}\cdot$ Ceci montre en particulier que $\operatorname{Log} \Phi' \in \mathrm{BMOA}(D)$ pour de tels domaines. Notons que la constante $\frac{1}{5}$ n'est certainement pas la meilleure possible.

La réciproque de ce théorème est évidemment fausse. Considérons par exemple $\Omega = \{(x,y) \in R^2 ; y > \sin(x^2)\}$. Ω n'est pas un domaine presque-lipschitzien et pourtant si Φ désigne une transformation conforme de R^2_+

sur Ω telle que $\Phi(\infty) = \infty$, on sait par le théorème de Helson-Szegö (le bord de Ω est en effet un graphe) que Φ' est extérieure et que $|\Phi'|^\alpha$ appartient à $A^\infty(\mathbf{R})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

C'est le but de la partie 3 d'établir une sorte de réciproque. Nous caractérisons en effet dans cette partie les domaines vérifiant (3) et (4) et il apparaît que ces domaines sont en particulier P.L. Signalons que ce résultat a été récemment démontré par Pommerenke [12]. Nous incluons cependant notre preuve car elle est différente et qu'elle fait le lien avec les courbes de G. David.

Dans la quatrième partie enfin, par analogie avec un théorème d'Ahlfors [1] et un théorème de Gehring [6], nous montrons que pour une certaine topologie l'ensemble des domaines de Lavrentiev est l'intérieur de l'ensemble des domaines P.L.

2. La représentation conforme des domaines P.L.

Considérons tout d'abord Ω, un domaine P.L. borné. Il existe alors $L > 0$ et $z : [0,L] \to \mathbf{C}$ telle que :

- $z(0) = z(L)$,
- z est absolument continue et $|z'(s)| = 1$ presque partout,
- z vérifie (1),
- $z([0,L]) = \partial\Omega$.

Soit Φ une représentation conforme du disque unité D sur Ω; on sait déjà [10] que Φ' appartient à l'espace de Hardy $H^1(D)$ et que

$$\int_0^{2\pi} |\Phi'(e^{it})|\, dt \leqslant \pi L .$$

THÉORÈME 1. — *Φ' est une fonction extérieure et $|\Phi'(z)|^\alpha$ appartient à la classe de Muckenhoupt $A^\infty(\partial D)$ si $\alpha < \frac{1}{5}\cdot$ En particulier* $\operatorname{Log} \Phi' \in \mathrm{BMOA}(D)$.

Le théorème 1 va se déduire de l'inégalité suivante :

Pour $\zeta \in D$, on note $I(\zeta)$ l'intervalle de ∂D de centre $\zeta/|\zeta|$ et de longueur $(1-|\zeta|)$.

LEMME 1. — *Soit* $\alpha < \frac{1}{5}\cdot$ *Il existe une constante* $C_\alpha > 0$ *telle que*

$$(2)\quad \forall \zeta \in D, \quad \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|^\alpha\, |dz| \leqslant C_\alpha (1-|\zeta|)|\Phi'(\zeta)|^\alpha .$$

Passons à la démonstration du lemme 1; grâce à l'inégalité de Hölder nous pouvons écrire :

$$\int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|^\alpha\, |dz| \leqslant \left\{\int_{I(\zeta)} \frac{|\Phi'(z)|}{|\Phi(z)-\Phi(\zeta)|^2}\, |dz|\right\}^\alpha \left\{\int_{I(\zeta)} |\Phi(z)-\Phi(\zeta)|^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\, |dz|\right\}^{1-\alpha}.$$

Majorons tout d'abord la première parenthèse. Soit Ω_ζ le domaine transformé de Ω par l'inversion $z \mapsto \dfrac{1}{z-\Phi(\zeta)}$: le bord de Ω_ζ est le support de l'arc paramétré $s \mapsto \dfrac{1}{z(s)-\Phi(\zeta)}$ $(s \in [0,L])$. D'autre part, $\Phi_\zeta(z) = \left(\Phi\left(\dfrac{1+\zeta z}{z+\zeta}\right) - \Phi(\zeta)\right)^{-1}$ définit la représentation conforme de $\mathbf{C}\backslash D$ sur Ω_ζ. D'après [10] nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} |\Phi_\zeta'(z)|\, |dz| &= \int_{\partial D} \frac{|\Phi'(z)|}{|\Phi(z)-\Phi(\zeta)|^2}\, |dz| \\ &\leqslant \pi \int_0^L \frac{ds}{|z(s)-\Phi(\zeta)|^2}.\end{aligned}$$

LEMME 2. — $\displaystyle\int_0^L \frac{ds}{|z(s)-\Phi(\zeta)|^2} \leqslant \frac{C}{\operatorname{dist}(\Phi(\zeta), \partial\Omega)} \leqslant \frac{4C}{(1-|\zeta|)|\Phi'(\zeta)|}.$

La deuxième inégalité provient du théorème de distorsion de Koebe. Pour établir la première on écrit :

$$\int_0^L \frac{ds}{|z-\Phi(\zeta)|^2} = \sum_{n\geqslant 0} \int_{E_n} \frac{ds}{|z-\Phi(\zeta)|^2}$$

où

$$E_n = \left\{ s \in [O,L];\ 2^n \leqslant \frac{|z(s)-\Phi(\zeta)|}{\operatorname{dist}(\Phi(\zeta), \partial\Omega)} < 2^{n+1} \right\}.$$

Par (1) il vient $|E_n| \leqslant C\,2^n d$ et $\dfrac{1}{|z(s)-\Phi(\zeta)|^2} \leqslant \dfrac{1}{4^n d^2}$ pour $s \in E_n$ ($d = \operatorname{dist}(\Phi(\zeta), \partial\Omega))$. L'inégalité s'en déduit aisément. Nous avons donc montré :

$$(5) \qquad \left\{\int_{I(\zeta)} \frac{|\Phi'(z)|\,|dz|}{|\Phi(z)-\Phi(\zeta)|^2}\right\}^{\alpha} \leqslant \frac{C_\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha |\Phi'(\zeta)|^\alpha}.$$

Pour majorer la seconde parenthèse, on introduit la fonction

$$\varphi_\zeta(z) = \frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}$$

qui induit un difféomorphisme de ∂D et on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{I(\zeta)} |\Phi(z)-\Phi(\zeta)|^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}|dz| &= \int_{\varphi_\zeta^{-1}(I(\zeta))} |\Phi(\varphi_\zeta(z))-\Phi(\zeta)|^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}|\varphi_\zeta'(z)|\,|dz| \\ &\leqslant C(1-|\zeta|)\int_{\partial D} |\Phi(\varphi_\zeta(z))-\Phi(\zeta)|^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}|dz|,\end{aligned}$$

cette dernière inégalité découlant du fait que $|\varphi_\zeta'(z)| \leqslant C(1-|\zeta|)$ si $\varphi_\zeta(z) \in I(\zeta)$. Posons $\tilde{\Phi}(z) = \dfrac{\Phi(\varphi_\zeta(z)) - \Phi(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)\Phi'(\zeta)}$. $\tilde{\Phi}$ appartient à la classe S des fonctions holomorphes et univalentes dans D telles que $\tilde{\Phi}(0) = 0$, $\tilde{\Phi}(0) = 1$.

Un théorème de Prawitz [13] affirme que pour tout $p < \frac{1}{2}$, S est une partie bornée de l'espace de Hardy $H^p(D)$. Comme $\dfrac{2\alpha}{1-\alpha} < \dfrac{1}{2}$, on en déduit l'existence d'une constante $C_\alpha > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}(6) \quad \left\{\int_{I(\zeta)} |\Phi(z)-\Phi(\zeta)|^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}|dz|\right\}^{1-\alpha} &\leqslant C_\alpha\left\{(1-|\zeta|)[(1-|\zeta|)|\Phi'(\zeta)|]^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\right\}^{1-\alpha} \\ &= C_\alpha(1-|\zeta|)^{1+\alpha}|\Phi'(\zeta)|^{2\alpha}.\end{aligned}$$

En multipliant (5) et (6), on obtient le lemme 1.

Terminons à présent la démonstration du théorème 1.

On sait que si $\alpha < 1/6$ alors $(\Phi')^\alpha$ est la dérivée d'une transformation conforme Φ_α telle que $\Phi_\alpha(D)$ soit un domaine quasi conforme [10]. Cette observation, jointe à (2) prouve en fait que $\Phi_\alpha(D)$ est un domaine de Lavrentiev [11], Φ' est donc une fonction extérieure [9], et les résultats de [11] ajoutés à (2) prouvent que $|\Phi'|^\alpha$ est un poids de la classe de Muckenhoupt pour $\alpha < \frac{1}{5}$.

Ajoutons pour terminer que les conclusions du théorème 1 subsistent si l'on considère un domaine Ω P.L. non borné, Φ étant alors la transformation conforme de $\mathbf{R}^2_+$ sur Ω telle que $\Phi(\infty) = \infty$.

3. Sur un théorème de Pommerenke.

Soit E un fermé de $\mathbf{C}$ et k un réel $\geqslant 1$. Nous dirons que E est k-uniformément localement connexe (en abrégé k-ulc) si pour tout point z_0 de $\mathbf{C}$ et tout $r > 0$, $E \cap \bar{D}(z_0, r)$ est inclus dans une composante connexe de $E \cap \bar{D}(z_0, kr)$.

Dans tout ce qui suit Ω désigne un domaine simplement connexe borné contenant 0 et Φ est la représentation conforme de D sur Ω normalisée par $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) > 0$.

Nous nous proposons de donner une démonstration du théorème suivant dû à Pommerenke [12].

THÉORÈME 2. — *Φ' est extérieure et $|\Phi'(e^{i\theta})| \in A^\infty(\partial D)$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(7) *Ω est un domaine presque-lipschitzien.*
(8) *Il existe $k \geqslant 1$ tel que $\mathbf{C}\backslash\Omega$ soit k-ulc.*

Avant de passer à la démonstration, énonçons trois lemmes qui en sont les ingrédients essentiels. Les lemmes 3 et 4 sont dus à Pommerenke [10], [11], le lemme 5 à Gehring et Hayman [7].

LEMME 3. — *Φ' est une fonction extérieure et $|\Phi'| \in A^\infty(\partial D)$ si, et seulement si, il existe une constante $K(\Phi) > 0$ telle que*

$$(9) \qquad \forall \zeta \in D, \quad \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant K(\Phi) \operatorname{dist}(\Phi(\zeta), \partial\Omega).$$

LEMME 4. — *Pour tout* $\alpha > 0$ *il existe une constante* $K(\alpha)$ *indépendante de* Φ *telle que pour tout* $\zeta \in D$ *et tout* $E \subset \partial D$ *dont la mesure harmonique par rapport à* ζ *est* $\geqslant \alpha$, *il existe un segment non euclidien* δ *de* ζ *à* E *tel que :*

$$\int_\delta |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant K(\alpha)\,\mathrm{dist}\,(\Phi(\zeta),\partial\Omega).$$

LEMME 5. — *Si* Φ *est continue sur* $\bar{D}$, *il existe une constante* C *indépendante de* Φ *telle que :*

$$\forall\zeta \in D\ \mathrm{diam}\ \Phi(I(\zeta)) \geqslant C\ \mathrm{dist}\,(\Phi(\zeta),\partial\Omega).$$

Passons alors à la démonstration du théorème 2.

Supposons tout d'abord que Φ' est extérieure et que $|\Phi'|$ appartient à $A^\infty(\partial D)$. Faisons également dans un premier temps l'hypothèse que Ω est un domaine de Jordan. Soit γ un « intervalle » de $\partial\Omega$ et I l'intervalle de ∂D tel que $\Phi(I) = \gamma$.

On montre alors facilement en appliquant les trois lemmes précédents qu'il existe une constante $C_1 > 1$ indépendante de Φ et un chemin $\delta \subset \Omega$ joignant $\Phi(\zeta_I)$ à γ tels que :

$$\frac{1}{K(\Phi)}\ \text{longueur}\ (\gamma) \leqslant \mathrm{dist}\ (\Phi(\zeta_I),\partial\Omega) \leqslant \text{longueur}\ (\delta) \leqslant C_1\ \mathrm{diam}\,(\gamma)$$

(pour I intervalle de ∂D on appelle ζ_I l'élément de D tel que $I = I(\zeta_I)$).

Soit maintenant $z_0 \in \partial\Omega$ et $r > 0$. $D(z_0,r) \cap \partial\Omega$ est formé d'une suite d'intervalles $(\gamma_n)_{n\in N}$. On prolonge alors tous les γ_n de chaque côté en s'arrêtant dès que l'on sort de $D(z_0,2r)$. On obtient ainsi une famille (Γ_i) d'intervalles de $\partial\Omega \cap D(z_0,2r)$ (nécessairement finie car chaque Γ_i a une longueur $\geqslant 2r$).

Montrons que le nombre N des Γ_i est en fait borné indépendamment de r. Soient $\Omega_1,\ldots,\Omega_k$ les composantes connexes de $\Omega \cap D(z_0,2r)\backslash\bar{D}(z_0,r)$ dont la frontière rencontre $\{|z-z_0|=r\}$. Il est facile de voir que $k = N$. Pour $i \in \{1,\ldots,N\}$ soit z_i un point de $\partial\Omega_i$ tel que $|z_i - z_0| = \dfrac{3r}{2}\cdot$

Soit γ_i l'intervalle de $\partial\Omega$ de centre z_i et de longueur $\frac{r}{10C_1}$.

Si I_i désigne l'intervalle de ∂D tel que $\Phi(I_i) = \gamma_i$, alors

$$\operatorname{dist}(\Phi(\zeta_{I_i}), \partial\Omega) \geqslant \frac{r}{10C_1K(\Phi)},$$

et il existe un chemin de longueur $\leqslant \frac{r}{10}$ joignant dans $\Omega\,\Phi(\zeta_{I_i})$ à γ_i.

Tout ceci prouve que le disque de rayon $\frac{r}{10C_1K(\Phi)}$ centré en $\Phi(\zeta_{I_i})$ est inclus dans Ω_i. Les N boules ainsi construites sont alors disjointes et il vient

$$N\pi \frac{r^2}{100C_1^2K(\Phi)^2} \leqslant 3\pi r^2,$$

et par conséquent :

$$\sum_{n\in N} \text{longueur } (\gamma_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \text{longueur } (\Gamma_n) \leqslant N(2rC_1K(\Phi)) \leqslant 300C_1^3K(\Phi)^3r.$$

Ce qui prouve que $\partial\Omega$ est presque lipschitzienne avec une constante inférieure à $CK(\Phi)^3$.

Montrons à présent que $\mathbf{C}\backslash\Omega$ est k-ulc pour un certain $k \geqslant 1$.

S'il n'en était pas ainsi on pourrait trouver pour tout $M > 1$ un point z_0 de $\mathbf{C}$, un réel $r > 0$ et deux points z_1, z_2 de $\mathbf{C}\backslash\bar{\Omega} \cap D(z_0,r)$ ne pouvant être joints dans $\mathbf{C}\backslash\bar{\Omega} \cap D(z_0,Mr)$. Il existe alors deux intervalles Γ_1 et Γ_2 de $\partial\Omega \cap D(z_0,Mr)$, qui séparent z_1 de z_2 dans $D(z_0,Mr)$. Appelons a_i et b_i les extrémités de Γ_i. Soient $z_i' \in \Gamma_i \cap \bar{D}(z_0,r)$, $i = 1, 2$ tels que

$$|z_1' - z_2'| = \inf\{d(z,t);\, z \in \Gamma_1 \cap \bar{D}(z_0,r),\ t \in \Gamma_2 \cap \bar{D}(z_0,r)\}.$$

Alors le segment $]z_1', z_2'[$ est inclus dans U, la composante connexe de $D(z_0, Mr)\backslash(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ ne contenant ni z_1 ni z_2. Soit $\widehat{a_ib_i}$ la portion du cercle $\{|z - z_0| = Mr\}$ telle que $\widehat{a_ib_i} \cup \Gamma_i$ soit la courbe de Jordan entourant z_i. Pour $c_i \in \widehat{a_i b_i}$ on peut alors construire un arc simple γ_i reliant c_i et z'_i à l'intérieur de $\widehat{a_i b_i} \cup \Gamma_i$.

On pose enfin $\gamma = \gamma_1 \cup [z'_1, z'_2] \cup \gamma_2$. En prolongeant Γ_1 de part et d'autre de z'_1 on appelle a'_1 et b'_1 les deux premiers points tels que :

$$|a'_1 - z_0| = \frac{Mr}{2}, \qquad |b'_1 - z_0| = \frac{Mr}{2}.$$

LEMME 6. — *a'_1 et b'_1 sont séparés par γ dans $D(z_0, Mr)$.*

Supposons en effet qu'il existe un chemin Λ reliant a'_1 et b'_1 dans $D(z_0, Mr)$ et ne rencontrant pas γ. En prolongeant Λ par Γ_1 entre a'_1 et $a_1 b'_1$ et b_1 respectivement on construit alors un chemin $\tilde{\Lambda}$ reliant a_1 et b_1 dans $D(z_0, Mr)$ tel que $\tilde{\Lambda}$ et γ ne se coupent pas. Mais ceci est impossible car c_1, c_2 séparent a_1 et b_1 dans $\{|z - z_0| = Mr\}$.

Appelons Γ'_1 le sous-arc de Γ_1 d'extrémités a'_1 et b'_1. Pour tout $z \in \Gamma'_1$ soit γ_z l'intervalle de $\partial\Omega$ de centre z et de longueur $\dfrac{Mr}{10C_1}$ et $\zeta(z)$ l'élément de D tel que $\gamma_z = \Phi(I(\zeta(z)))$. On vérifie facilement que l'application $z \mapsto \Theta(z) = \Phi(\zeta(z))$ est continue de Γ'_1 dans U et que γ ne sépare pas a'_1 de $\Theta(a'_1)$ ni b'_1 de $\Theta(b'_1)$. On en conclut que γ sépare $\Theta(a'_1)$ de $\Theta(b'_1)$ et par conséquent il existe $z_3 \in \Gamma'_1$ tel que $\Theta(z_3) \in \gamma$. Mais comme $\Theta(z_3) \in U$, il ne peut appartenir ni à γ_1 ni à γ_2 et par conséquent $\Theta(z_3) \in]z'_1, z'_2[\subset D(z_0, r)$. Mais on a alors :

$$\frac{Mr}{10C_1K(\Phi)} \leqslant \operatorname{dist}(\Theta(z_3), \partial\Omega) \leqslant r,$$

et l'on aboutit à une contradiction dès que $M > 10C_1K(\Phi)$.

Nous avons donc montré que si $\Phi' \in A^\infty A(D)$ alors $\mathbf{C}\backslash\Omega$ est k-ulc pour $k \geqslant 10C_1K(\Phi)$.

Pour achever la démonstration de la première partie du théorème 2, il faut maintenant s'affranchir de l'hypothèse a priori que Ω est un domaine de Jordan. Pour cela, on remarque que si Φ vérifie (9) alors Φ_r : $z \to \Phi(rz)$ vérifie uniformément (9) pour $r \in]0,1[$. Comme $\Phi_r(D)$ est un domaine de Jordan, un simple argument de passage à la limite et le raisonnement précédent prouvent que $\Omega = \Phi(D)$ est presque lipschitzien.

Pour voir que $\mathbf{C}\backslash\Omega$ est k-ulc, fixons $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Il existe $k \geqslant 1$ tel que $\mathbf{C}\backslash\Omega_\lambda = \mathbf{C}\backslash\Phi_\lambda(\mathrm{D})$ soit k-ulc pour tout $\lambda < 1$. Soit alors K_λ la composante connexe de $\mathbf{C}\backslash\Omega_\lambda \cap \bar{\mathrm{D}}(z_0, kr)$ contenant $\bar{\mathrm{D}}(z_0, r) \cap \mathbf{C}\backslash\Omega_\lambda$. Alors $\mathrm{K} = \bigcap_{\lambda<1} \mathrm{K}_\lambda$ est un compact connexe contenant $\bar{\mathrm{D}}(z_0, r) \cap \mathbf{C}\backslash\Omega$ ce qui prouve que $\mathbf{C}\backslash\Omega$ est k-ulc.

Montrons à présent la réciproque. Soit donc Ω un domaine P.L. borné tel que $\mathbf{C}\backslash\Omega$ soit k-ulc pour un réel $k \geqslant 1$.

D'après la partie 2, Φ' est alors une fonction extérieure de $\mathrm{H}^1(\mathrm{D})$ et en particulier Φ se prolonge continûment à $\bar{\mathrm{D}}$. Le lemme 5 s'applique donc et, compte-tenu du lemme 1, si l'on suppose que $|\Phi'| \notin \mathrm{A}^\infty(\partial\mathrm{D})$, on peut trouver pour tout $\mathrm{M} > 1$ un point ζ de D tel que :

$$\operatorname{dist}(\Phi(\zeta), \partial\Omega) \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}} \int_{\mathrm{I}(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}} \mathrm{C}(\Omega) \operatorname{diam}(\Phi(\mathrm{I}(\zeta)))$$

où $\mathrm{C}(\Omega)$ est la constante de la condition P.L.

Soient I_1 et I_2 les intervalles jouxtant $\mathrm{I}(\zeta)$ et de même longueur. D'après le lemme 4, il existe une constante absolue $\mathrm{C}_2 > 0$ et $z_i \in \mathrm{I}_i\ (i=1,2)$ tels que $|\Phi(z_i) - \Phi(\zeta)| \leqslant \mathrm{C}_2 \operatorname{dist}(\Phi(\zeta), \partial\Omega)$. On peut supposer $\operatorname{diam}\Omega \geqslant 100 \operatorname{diam}\Phi(\mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}(\zeta) \cup \mathrm{I}_2)$. Posons alors $z_0 = \Phi(\zeta)$, $r = 2\mathrm{C} \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ et $\lambda = \dfrac{\mathrm{M}}{20\mathrm{C}_2\mathrm{C}(\Omega)}$. Soit z_3 un point de $\mathrm{I}(\zeta)$ tel que $|\Phi(z_3) - z_0| \geqslant \dfrac{1}{2} \operatorname{diam}\Phi(\mathrm{I}(\zeta))$ et z_4 un point de $\partial\mathrm{D}$ tel que $|\Phi(z_4) - z_0| \geqslant 50 \operatorname{diam}\Phi(\mathrm{I}(\zeta))$. Alors z_3, z_4 séparent z_1, z_2 sur $\partial\mathrm{D}$ et l'on peut trouver Γ un arc simple inclus dans Ω joignant $\Phi(z_3)$, z_0, $\Phi(z_4)$. Alors Γ sépare $\Phi(z_1)$ et $\Phi(z_2)$ dans $\bar{\mathrm{D}}(z_0, \lambda r)$ et l'on aboutit à une contradiction dès que $\lambda > k$. Nous avons donc montré que si Ω est P.L. et $\mathbf{C}\backslash\Omega$ est k-ulc, alors $|\Phi'| \in \mathrm{A}^\infty(\partial\mathrm{D})$ avec une constante $\mathrm{K}(\Phi) = \mathrm{C}k\mathrm{C}(\Omega)$. Le théorème 2 est entièrement démontré.

4. Lien avec les domaines de Lavrentiev.

Rappelons que le Schwarzien d'une fonction méromorphe f est la fonction méromorphe :

$$\mathrm{S}_f(z) = \left(\frac{f''}{f'}\right)'(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}(z)\right)^2.$$

Pour toute homographie α on a $S_\alpha \equiv 0$ et $S_{\alpha\circ f} = S_f$. De plus S_f détermine f à une homographie près si f est localement univalente. Introduisons l'espace de Banach E des fonctions f holomorphes dans le demi-plan $\mathbf{R}^2_+$ telles que $y^3|f(x+iy)|^2$ soit une mesure de Carleson sur $\mathbf{R}^2_+$, muni de la norme

$$\|f\|_E = \sup_{I\subset \mathbf{R}} \left\{\frac{1}{|I|}\iint_{I\times[0,|I|]} y^3|f(x+iy)|^2\,dx\,dy\right\}^{1/2},$$

le sup étant pris sur l'ensemble des intervalles de $\mathbf{R}$.

LEMME 7. — *Si Φ est holomorphe et univalente sur $\mathbf{R}^2_+$ et si* $\operatorname{Log}\Phi' \in \mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$, *alors* S_Φ *appartient à* E *et sa norme ne dépasse pas* $C\|\operatorname{Log}\Phi'\|_{\mathrm{BMO}}$.

En effet $y^3 S_\Phi^2 = y^3\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)'^2 + \frac{1}{4}y^3\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^4 - y^3\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)'$. Or d'après le théorème de distorsion de Koebe, il existe une constante absolue $C > 0$ telle que :

$$y\left|\frac{\Phi''}{\Phi'}\right| + y^2\left|\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)'\right| \leqslant C,$$

et le lemme découle alors de [5].

Posons alors :

$\mathscr{D} = \{S_\Phi;\ \Phi : \mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{C}$ conforme et $\Phi(\mathbf{R}^2_+)$ est un domaine P.L.$\}$.

$\mathscr{L} = \{S_\Phi,\ \Phi : \mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{C}$ conforme et $\Phi(\mathbf{R}^2_+)$ est un domaine de Lavrentiev$\}$.

THÉORÈME 3. — *$\mathscr{L}$ est un ouvert de* E.

Pour démontrer ce théorème, nous introduisons l'espace de Banach F des fonctions f holomorphes sur $\mathbf{R}^2_+$ telles que $y|f(x+iy)|^2$ soit une mesure de Carleson, muni de la norme :

$$\|f\|_F = \sup_{I\subset \mathbf{R}} \left\{\frac{1}{|I|}\iint_{I\times[0,|I|]} y|f(x+iy)|^2\,dx\,dy\right\}^{1/2}.$$

Réunissons dans une proposition tous les résultats dont nous aurons besoin dans la suite :

PROPOSITION 1. — *a) Il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

(10) $\forall \varphi \in F, \ \forall x + iy \in \mathbf{R}^2_+, \quad y|\varphi(x+iy)| \leqslant C\|\varphi\|_F.$

(11) $\forall \varphi \in E, \ \forall x + iy \in \mathbf{R}^2_+, \quad y^2|\varphi(x+iy)| \leqslant C\|\varphi\|_E.$

b) L'application $f \mapsto f'$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$ *sur* F.

c) L'application $f \mapsto f'$ *est un isomorphisme de* F *sur* E.

Démontrons (10); la démonstration de (11) est analogue.

Soit $x + iy \in \mathbf{R}^2_+$ et B la boule de centre $x + iy$ et de rayon $y/2$. Puisque $\varphi \in F$, il vient

$$\iint_B y'|\varphi(x'+iy')|^2 \, dx' \, dy' \leqslant Cy\|\varphi\|_F^2.$$

Mais d'autre part,

$$\begin{aligned}\iint_B y'|\varphi(x'+iy')|^2 \, dx' \, dy' &\geqslant \frac{y}{2}|B| \frac{1}{|B|} \iint_B |\varphi(x'+iy')|^2 \, dx' \, dy' \\ &\geqslant \frac{1}{4} y^3 |\varphi(x+iy)|^2,\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de la propriété de la moyenne des fonctions harmoniques.

(*b*) découle facilement de [5] et du fait que, d'après (10), si $f' \in F$ alors $x \mapsto f(x+iy)$ appartient à $L^1\left(\dfrac{dx}{1+x^2}\right)$ pour tout $y > 0$.

Grâce à (*b*) et aux résultats de [5] on en déduit que l'application $f \mapsto f'$ est injective de F dans E et continue.

Reste à montrer la surjectivité. Soit donc $\varphi \in E$. Grâce à (11) on peut considérer la fonction

$$\Psi(x+iy) = -\int_y^{+\infty} \varphi(x+it) \, dt$$

qui est bien une primitive de φ. Montrons que $\Psi \in F$.

Soit x_0, $y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\int_0^{y_0} y|\Psi(x+iy)|^2\,dx\,dy &= \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\int_0^{y_0} y\left|\int_y^{+\infty} t\,\frac{1}{t}\,\varphi(x+it)\,dt\right|^2 dy \\ &\leqslant \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\int_0^{y_0}\left(\int_y^{+\infty} t^2|\varphi(x+it)|^2\,dt\right)dy \\ &= \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\int_0^{+\infty} t^2|\varphi(x+it)|^2\left(\int_0^{y_0} 1_{[y,+\infty[}(t)\,dy\right)dt\,dx \\ &= \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\int_0^{y_0} t^3|\varphi(x+it)|^2\,dt\,dx \\ &\quad + y_0\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\left(\int_{y_0}^{+\infty} t^2|\varphi x+it)|^2\,dt\right)dx \leqslant C\|\varphi\|_E^2\,y_0,\end{aligned}$$

car $\varphi \in E$ et vérifie en particulier (11). La proposition 1 est démontrée.

Remarques. — 1° (b) et (c) prouvent que E et F sont deux espaces de Banach isomorphes à BMOA $(\mathbf{R}_+^2)$.

2° Dans [1], Ahlfors a introduit l'espace de Banach B des fonctions φ holomorphes dans $\mathbf{R}_+^2$ telles que $\|\varphi\|_B = \sup_{x,y} y^2|\varphi(x+iy)| < +\infty$.

(11) montre que $E \subset B$ et que la norme de E est plus fine que celle de B.

Revenons à la démonstration du théorème 3.

On considère l'application Λ: $F \to E$; $f \mapsto f' - \frac{1}{2}f^2$. Cette application est de classe C^1 sur F et sa différentielle est donnée par

$$\forall f \in F, \qquad \Lambda'(f).h = h' - hf.$$

LEMME 8. — *Soit* Ω *un domaine de Lavrentiev non borné et* Φ : $\mathbf{R}_+^2 \to \Omega$ *conforme telle que* $\Phi(\infty) = \infty$. *Alors il existe un voisinage* U *de* $\frac{\Phi''}{\Phi'}$ *dans* F *et un voisinage* V *de* $\Lambda\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)$ *dans* E *tels que* Λ *soit un difféomorphisme de* U *sur* V.

D'après le théorème d'inversion locale, il suffit, pour démontrer ce lemme, de montrer que $L_\Phi = \Lambda'\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)$ est un isomorphisme de F sur E.

— L_Φ est injective. En effet, la solution générale de l'équation $y' - \frac{\Phi''}{\Phi'} y = 0$ est $y = \lambda\Phi'$ où $\lambda \in \mathrm{C}$. Mais $|\Phi'| \in A^\infty(\mathbf{R})$ et donc d'après le lemme 3 et [3], il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$(12)\quad y|\Phi'(x+iy)| \geqslant C\int_{x-y}^{x+y} |\Phi'(t)|\,dt \geqslant Cy^\alpha \int_{x-1}^{x+1} |\Phi'(t)|\,dt$$

et donc, si $\lambda \neq 0$, $y|\lambda\Phi'(x+iy)|$ n'est pas borné, ce qui prouve que la seule solution f de F de $L_\Phi f = 0$ est $f = 0$.

— L_Φ est surjective : soit $\varphi \in E$. Par (11) il existe $C > 0$ telle que $|\varphi(x+iy)| \leqslant \frac{C}{y^2}\cdot$ En tenant compte de (12) on peut alors considérer la fonction

$$h(x+iy) = \Phi'(x+iy)\int_{+\infty}^{y} \frac{\varphi(x+it)}{\varphi'(x+it)}\, i\,dt$$

et l'on vérifie sans peine que $L_\Phi h = \varphi$. Montrons que $h \in F$.

LEMME 9. — *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2_+, \qquad y|h(x+iy)| \leqslant C.$$

En effet $y|h(x+iy)| \leqslant C\int_y^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{y|\Phi'(x+iy)|}{t|\Phi'(x+it)|}\,dt.$

Mais, en utilisant les lemmes 3 et 5 et la condition A^∞, on peut écrire :

$$\exists C > 0,\quad \frac{y|\Phi'(x+iy)|}{t|\Phi'(x+it)|} \leqslant C\frac{\int_{x-y}^{x+y} |\Phi'(u)|\,du}{\int_{x-t}^{x+t} |\Phi'(u)|\,du} \leqslant C\left(\frac{y}{t}\right)^\alpha,$$

et donc

$$y|h(x+iy)| \leqslant Cy^\alpha \int_y^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \leqslant C.$$

Démontrons alors que $h \in F$, où ce qui revient au même, que $h' \in E$. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $C = I \times [0,|I|]$.

Alors :

$$\left\{\iint_C y^3|h'(x+iy)|^2\,dx\,dy\right\}^{1/2} \leqslant \|\varphi\|_E + \left\{\iint_C y^3\left|\frac{\Phi''}{\Phi'}\right|^2 |h|^2\,dx\,dy\right\}^{1/2}$$

et le résultat se déduit du fait que $\operatorname{Log}\Phi' \in \operatorname{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$ et du lemme 9.

Concluons la preuve du théorème 3. Soit $f \in \mathscr{L}$. Il existe donc Φ conforme sur $\mathbf{R}^2_+$ telle que $S_\Phi = f$ et $\Phi(\mathbf{R}^2_+)$ soit un domaine de Lavrentiev. Quitte à remplacer $\Phi(z)$ par $\dfrac{1}{\Phi(z)-\Phi(\infty)}$, ce qui ne change pas le Schwarzien, on peut supposer que $\Phi(\infty)=\infty$. Comme la norme de E est plus fine que la norme de B (voir remarque 2), on peut considérer, en utilisant un théorème d'Ahlfors [1] que tout $g \in V$, le voisinage du lemme 8, est de la forme S_Ψ où Ψ est la représentation conforme d'un domaine quasi conforme.

D'autre part, comme $|\Phi'(x)| \in A^\infty(\mathbf{R})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|\operatorname{Log}\Psi' - \operatorname{Log}\Phi'\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon \;\Rightarrow\; |\Psi'(x)| \in A^\infty(\mathbf{R}).$$

Grâce au lemme 8, on peut donc trouver un voisinage W de S_Φ tel que $g \in W \Rightarrow g = S_\Psi$ où $\Psi(\mathbf{R})$ est un quasi-cercle, $\operatorname{Log}\Psi' \in \operatorname{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$ et $|\Psi'(x)| \in A^\infty(\mathbf{R})$. Mais on sait alors sous ces conditions que $\Psi(\mathbf{R})$ est une courbe de Lavrentiev, ce qui termine la preuve du théorème 3.

THÉORÈME 4. — *$\mathscr{L}$ est l'intérieur de $\mathscr{D}$ dans* E.

La seule chose restant à démontrer est que si S_Φ est un point intérieur de $\mathscr{D}$ alors $\Omega = \Phi(\mathbf{R}^2_+)$ est quasi conforme. S'il n'en était pas ainsi, d'après [6] on pourrait trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre complexe c tel que $|1-c| \leqslant \varepsilon$ et deux points $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathbf{C}\backslash\Omega$ tels que la fonction : $f(z) = \left(\dfrac{z-\omega_1}{z-\omega_2}\right)^c$ ne soit pas univalente dans Ω.

Posons alors $\Psi(z) = f\circ\Phi(z)$. Un calcul facile donne :

$$S_\Psi(z) - S_\Phi(z) = \frac{1-c^2}{2}\,\Phi'^2(z)\left(\frac{1}{\Phi(z)-\omega_1} - \frac{1}{\Phi(z)-\omega_2}\right)^2$$

d'où l'on tire :

$$(13)\quad y^3|S_\Psi(z)-S_\Phi(z)|^2 = \frac{|1-c^2|^2}{4}\,y^3\left|\frac{d}{dz}\left(\operatorname{Log}\frac{\Phi(z)-\omega_1}{\Phi(z)-\omega_2}\right)\right|^4.$$

Par ailleurs un théorème de Baernstein [2] nous apprend l'existence d'une constante absolue $C > 0$ telle que, pour $\omega \notin \Omega$,

$$\|\mathrm{Log}(\Phi(z)-\omega)\|_{\mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)} \leqslant C. \tag{14}$$

De (13) et (14) on déduit que $\|S_\Phi - S_\Psi\|_E \leqslant C\varepsilon$ ce qui contredit le fait que S_Φ est un point intérieur de $\mathscr{D}$, car Ψ n'est pas univalente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Ahlfors, Lectures on quasi conformal mappings, Princeton, 1966.
[2] A. Baernstein, Univalence and bounded mean oscillation, *Mich. Math. Journal*, 23 (1976), 217-223.
[3] R. Coifman et C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.*, 51 (1974), 241-249.
[4] G. David, A paraître, *Ann. Sci. de l'ENS.*
[5] C. Fefferman et E. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, 129 (1972), 137-193.
[6] F. Gehring, Univalent functions and the Schwarzian derivative, *Comm. Math. Helv.*, 62 (1977), 561-573.
[7] F. Gehring et W. Hayman, An inequality in the theory of conformal mapping, *J. Math. Pures Appl.*, (9), 41 (1962), 353-361.
[8] D. Jerison et C. Kenig, Hardy spaces, A^∞ and singular integrals on chord-arc domains (preprint).
[9] M. Keldysh et M. Lavrentiev, Sur la transformation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, *Ann. Sci. de l'ENS*, (3), 54 (1937), 1-38.
[10] C. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck et Ruprecht, Göttingen, (1975).
[11] C. Pommerenke, Schlichte Funktionen und BMOA, *Comm. Math. Helv.*, 62 (1977), 591-602.
[12] C. Pommerenke, One-sided smootheness conditions and conformal mapping, *J. of the London Math. Soc.*, 26 (1) (1982), 77-89.
[13] H. Prawitz, Uber die Mittelwerte analytischer Funktionen, *Ark. Math. Astr. Fys.*, 20 A (1927), 1-12.
[14] M. Zinsmeister, Courbes de Jordan vérifiant une condition corde-arc, *Ann. Inst. Fourier*, 32, 2 (1982), 13-21.

Manuscrit reçu le 21 mars 1983.

Michel Zinsmeister,
Département de Mathématiques
Université de Rouen
Boîte postale n° 67
76130 Mont Saint-Aignan.