

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HENRI BUCHWALTER

GILLES CASSIER

## **Mesures canoniques dans le problème classique des moments**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 34, n° 2 (1984), p. 45-52

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1984\\_\\_34\\_2\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_45_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MESURES CANONIQUES DANS LE PROBLÈME CLASSIQUE DES MOMENTS

par H. BUCHWALTER et G. CASSIER

---

On sait, en consultant par exemple [1], que le problème classique des moments de Hamburger consiste, étant donnée une suite  $\alpha = (\alpha_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , telle que la matrice infinie  $M = [\alpha_{i+j}]$  soit de type positif, à caractériser toutes les mesures positives  $\mu$  sur la droite numérique telles que  $\alpha_k = \int t^k d\mu(t)$  pour tout  $k$ . On distingue le cas déterminé lorsque la solution  $\mu$  est unique et le cas indéterminé lorsqu'elle ne l'est pas. En éliminant le cas des mesures à support fini, on se ramène à supposer que la matrice  $M$  est de type défini positif. On peut alors plonger l'espace  $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X]$  des polynômes dans chacun des espaces  $L^2(\mu)$ , le produit scalaire induit ne dépendant que de la suite  $\alpha$  puisque

$$(P|Q) = \sum_{i,j} \alpha_{i+j} p_i \bar{q}_j \quad \text{si} \quad P = \sum p_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum q_j X^j.$$

En complétant abstraitement  $\mathcal{P}$  on obtient un espace de Hilbert fondamental  $H = H(\alpha)$ , dont une base orthonormale importante  $(P_k)$ , formée de polynômes tels que  $d^\circ P_k = k$ , s'obtient par le procédé habituel d'orthonormalisation. Avec quelques précautions on peut identifier isométriquement  $H$  à l'adhérence  $\bar{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P}$  dans  $L^2(\mu)$ .

Un cas particulier intéressant est celui où  $\mathcal{P}$  est dense dans  $L^2(\mu)$ . On sait alors que le problème peut être déterminé ou indéterminé. S'il est indéterminé on dit que  $\mu$  est une solution N-extrémale.

*Les mesures  $m$ -canoniques.* — En suivant [1], on introduit, à côté des mesures  $N$ -extrémales, les mesures  $m$ -canoniques pour  $m \geq 0$ , entier fini, les mesures  $N$ -extrémales correspondant au cas  $m = 0$ . On trouve dans [1] deux définitions possibles des mesures  $m$ -canoniques. L'une est donnée par le biais de la représentation de Nevanlinna et nécessiterait d'assez longs détours de présentation. L'autre, équivalente, est plus directement accessible. Pour l'écrire, associons à chaque mesure  $\mu$  et à chaque entier  $m \geq 0$  la mesure  $d\mu_m(t) = (1+t^2)^{-m} d\mu(t)$ . Alors en suivant [1], p. 121, on a :

**DÉFINITION 1.** — *Soit  $\mu$  une mesure ayant des moments de tous les ordres. On dit que  $\mu$  est  $m$ -canonique, avec  $m \geq 1$ , lorsque l'espace  $\mathcal{P}$  est dense dans  $L^2(\mu_m)$  et ne l'est pas dans  $L^2(\mu_{m-1})$ .*

L'objet de cet article est de fournir une caractérisation nouvelle des mesures  $m$ -canoniques, en terme de codimension, faisant clairement apparaître le défaut de densité de  $\mathcal{P}$  dans l'espace  $L^2(\mu)$ . Le théorème essentiel est le suivant :

**THÉORÈME 1 (de la codimension).** — *Soit  $m \geq 1$ . Une mesure  $\mu$  est  $m$ -canonique si, et seulement si, l'espace fondamental  $H = \mathcal{P}$  est exactement de codimension  $m$  dans  $L^2(\mu)$ .*

Ce théorème a déjà été présenté dans [3] et [4], avec une démonstration assez longue. Nous reprenons ici la question en apportant quelques éléments nouveaux, permettant des simplifications dans la preuve. Rappelons tout d'abord un résultat classique de M. Riesz, à savoir

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $\mu$  une mesure ayant des moments de tous les ordres. Pour que  $\mathcal{P}$  soit dense dans  $L^2(\mu)$ , il faut et il suffit que la mesure  $\mu_1$  soit déterminée.*

Avec la définition 1 on a sans difficulté :

**PROPOSITION 2.** — *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mu$  soit  $m$ -canonique est que la mesure  $\mu_m$  soit  $N$ -extrémale.*

Dégageons maintenant un résultat fréquemment utile, qui n'est pas correctement explicité dans la littérature relative au problème des moments. Désignons par  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{C})$  l'espace de Montel des fonctions entières sur le plan complexe.

THÉORÈME 2. — Pour qu'une mesure  $\mu$ , ayant des moments de tous les ordres, soit indéterminée, il faut et il suffit que le disque

$$D_2(\mu) = D_2 = \left\{ P \in \mathcal{P}; \int |P|^2 d\mu \leq 1 \right\}$$

soit relativement compact dans l'espace  $\mathcal{H}$ . Cela revient à dire que l'injection canonique  $\mathcal{P} \cap L^2(\mu) \rightarrow \mathcal{H}$  est continue (et même compacte).

Preuve. — a) Supposons  $\mu$  indéterminée. Elle est alors à support infini de sorte qu'on a  $\mathcal{P} \subset L^2(\mu)$ . Par ailleurs la suite orthonormale polynomiale  $(P_k)$  est telle que la série  $\sum |P_k(z)|^2$  est uniformément convergente sur tout compact  $K$  de  $\mathbb{C}$ . Il suit de là, par Cauchy-Schwarz, que tout  $P = \sum a_k P_k \in D_2$  est tel que

$$\|P\|_K \leq C_K = \text{Sup}_{z \in K} \left[ \sum_0^\infty |P_k(z)|^2 \right]^{1/2}$$

et ainsi  $D_2$  est borné, donc relativement compact, dans  $\mathcal{H}$ .

b) Réciproquement si la propriété est satisfaite alors  $\mu$  est à support infini. Pour voir que  $\mu$  est indéterminée, il faut prouver que l'on a  $\sum_0^\infty |P_k(z)|^2 < +\infty$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , ou même pour un seul  $z = z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Pour cela commençons par remarquer qu'il est facile de vérifier que sur le disque  $D_2$  la topologie faible de  $L^2(\mu)$  est séparée et moins fine que celle de  $\mathcal{H}$ , de sorte qu'elle lui est en fait identique par compacité. Pour toute suite  $a = (a_k) \in \ell^2$ , telle que  $\|a\|_2 \leq 1$ , la suite  $S_n = \sum_0^n a_k P_k$  est de Cauchy dans  $L^2(\mu)$ , donc est aussi suite de Cauchy faible. Par conséquent elle est encore suite de Cauchy dans  $\mathcal{H}$ , donc convergente. Il suit de là que la série  $\sum a_k P_k(z)$  est convergente pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et toute suite  $a = (a_k) \in \ell^2$ . Alors la suite  $(P_k(z))$  est bien élément de  $\ell^2$ , et  $\mu$  est indéterminée.  $\square$

COROLLAIRE 1. — Soit  $\mu$  une mesure indéterminée. Alors dans l'espace  $L^2(\mu)$  on a la décomposition en somme directe topologique (non orthogonale)

$$H = \mathcal{P} = C1 \oplus \overline{(t-i)\mathcal{P}}.$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que la forme linéaire  $P \rightarrow P(i)$  est continue pour la norme de  $L^2(\mu)$ .  $\square$

COROLLAIRE 2. — Pour toute mesure  $N$ -extrémale  $\mu$ , l'injection naturelle  $L^2(\mu) \rightarrow \mathcal{H}$  est compacte.

Avant de passer à la preuve du théorème 1, il convient de remarquer que les espaces  $L^2(\mu)$  et  $L^2(\mu_m)$  sont canoniquement isométriques dans l'isométrie surjective

$$J_m : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu_m), \quad g \rightarrow J_m g = (t-i)^m g.$$

*Preuve du théorème 1.* — a) Supposons  $\mu$   $m$ -canonique. Alors  $\mu_m$  est  $N$ -extrémale donc  $L^2(\mu_m) = C1 \oplus \overline{(t-i)\mathcal{P}}$  topologiquement. Avec l'isométrie  $J_m^{-1}$  on a donc topologiquement

$$L^2(\mu) = C J_m^{-1} 1 \oplus \overline{(t-i)^{-(m-1)} \mathcal{P}}$$

d'où il résulte aisément que  $\overline{\mathcal{P}}$  est de codimension  $m$  dans  $L^2(\mu)$ , et même que  $L^2(\mu)$  est engendré algébriquement par  $H = \overline{\mathcal{P}}$  et les  $m$  fonctions  $(t-i)^{-k}$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

b) Réciproquement si  $\overline{\mathcal{P}}$  est de codimension  $m$  dans  $L^2(\mu)$ , avec  $m \geq 1$ , alors  $\mu$  est déjà indéterminée. De plus on a  $L^2(\mu) = \overline{\mathcal{P}} \oplus L_m$ , où  $L_m = [\mathcal{P}]^\perp$  est de dimension  $m$ . Par l'isométrie  $J_1$  on a  $L^2(\mu_1) = \overline{J_1 \mathcal{P}} \oplus J_1 L_m$ , et de la proposition 1 on déduit que la mesure  $\mu_1$  est indéterminée. Avec le corollaire 1 du théorème 2, on voit que  $\overline{J_1 \mathcal{P}} = \overline{(t-i)\mathcal{P}}$  est de codimension 1 dans  $\overline{\mathcal{P}}$ , d'où l'on tire que  $\overline{\mathcal{P}}$  est de codimension  $(m-1)$  dans  $L^2(\mu_1)$ . Il suffit de recommencer le raisonnement pour aboutir au fait que  $\mu_m$  est indéterminée et que  $\overline{\mathcal{P}}$  est de codimension nulle dans  $L^2(\mu_m)$ , ce qui montre que  $\mu_m$  est  $N$ -extrémale, donc que  $\mu$  est  $m$ -canonique.  $\square$

*Remarque.* — Dans tout cela il est facile de voir que le polynôme  $(t-i)^m$  peut être remplacé par n'importe quel polynôme  $R(t) = (t-z_1) \dots (t-z_m)$  avec  $z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , la mesure  $\mu_m$  étant alors remplacée par la mesure  $d\mu_R = |R|^{-2} d\mu$ . En particulier on obtient ainsi que si  $\mu$  est  $m$ -canonique alors l'espace  $L^2(\mu)$  est engendré algébriquement par  $H = \overline{\mathcal{P}}$  et les  $m$  fonctions  $[(t-z_1) \dots (t-z_k)]^{-1}$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

En remarquant déjà que la proposition 2 implique que toute mesure  $m$ -canonique est à support discret, on a

PROPOSITION 3. — Soit  $\mu$  une mesure à support non discret, ayant des moments de tous les ordres. On a l'alternative :

- a) ou bien  $\mathcal{P}$  est dense dans  $L^2(\mu)$  et  $\mu$  est déterminée;  
 b) ou bien  $\mathcal{P}$  est de codimension hilbertienne infinie dans  $L^2(\mu)$  et  $\mu$  est indéterminée.

Exemple. — Introduisons l'espace  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R})$  de Schwartz et à toute  $\varphi \in \mathcal{S}$  associons la mesure  $d\mu = |\varphi|^2 dt$ , qui est tributaire de l'alternative. On dichotomise ainsi l'espace  $\mathcal{S}$  en deux classes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , et un problème intéressant serait peut-être de caractériser chacune de ces deux classes et leurs propriétés algébriques et topologiques. Ces deux classes ne sont d'ailleurs pas vides puisque  $\mathcal{S}_1$  contient les fonctions de Gauss tandis que  $\mathcal{S}_2$  contient la fonction  $\varphi \in \mathcal{S}$  telle que  $|\varphi|^2$  soit la densité de la distribution log-normale. De plus on a évidemment, pour  $\psi \in \mathcal{S}$  :

$$\begin{array}{ll} \varphi \in \mathcal{S}_1 & \text{et} \quad |\psi| \leq |\varphi| \Rightarrow \psi \in \mathcal{S}_1 \\ \varphi \in \mathcal{S}_2 & \text{et} \quad |\psi| \geq |\varphi| \Rightarrow \psi \in \mathcal{S}_2. \end{array}$$

*Perturbation de mesures m-canoniques.* — On utilise maintenant le théorème 2 de la codimension pour généraliser au cas des mesures m-canoniques des résultats de perturbation donnés dans [2] pour le cas des mesures N-extrémales. Donnons tout d'abord deux lemmes dont le premier n'est autre que le lemme 2 de [2] :

LEMME 1. — Soit  $\mu$  une mesure déterminée. Pour tout  $a > 0$  et tout  $x \in \mathbf{R}$  tel que  $\mu(\{x\}) = 0$ , on pose  $\lambda = \mu + a\delta_x$ . Alors  $\mathcal{P}$  est dense dans l'espace  $L^2(\lambda)$ .

*Preuve.* — Donnons une preuve différente de celle de [2], intéressante par elle-même. Soit  $g \in L^2(\lambda)$ , orthogonale à  $\mathcal{P}$ . Pour tout  $P \in \mathcal{P}$  on a donc

$$ag(x)\overline{P(x)} = - \int g\overline{P} d\mu = - (g|P)_{L^2(\mu)}.$$

Si l'on suppose  $g(x) \neq 0$ , alors on voit avec la base orthonormale  $(P_k)$ , que la suite  $(P_k(x))$  est élément de  $\ell^2$ . Il suit classiquement de là que l'opérateur auto-adjoint  $T$ , égal à la multiplication par  $t$  sur  $L^2(\mu)$ , admet la valeur propre  $x$ . On a donc  $\mu(\{x\}) > 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi  $g(x) = 0$  et  $g$  est orthogonale à  $\mathcal{P}$  dans  $L^2(\mu)$ , donc  $g = 0$  dans  $L^2(\mu)$ , et par suite  $g = 0$  dans  $L^2(\lambda)$ .  $\square$

LEMME 2. — Soit  $\mu$  une mesure indéterminée et  $\lambda = \mu + a\delta_x$ , avec  $a > 0$  et  $x \notin \text{supp } \mu$ . Alors la mesure  $\lambda_1$  est indéterminée.

*Preuve.* — On applique le critère du théorème 2 et soit  $P \in D_2(\lambda_1)$ .

Posons  $P = P(x) + (t-x)Q(t)$  et remarquons que

$$(t-x)^2|Q|^2 \leq 2[|P|^2 + |P(x)|^2]$$

d'où l'on déduit

$$\int \frac{(t-x)^2|Q|^2}{1+t^2} d\mu(t) \leq 2 \left[ \int \frac{|P|^2}{1+t^2} d\mu + |P(x)|^2 \int \frac{d\mu}{1+t^2} \right] \leq C_1$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $P \in D_2(\lambda_1)$ . Par ailleurs la condition  $x \notin \text{supp } \mu$  garantit l'existence d'une constante  $k > 0$  telle que  $(t-x)^2 \geq k(1+t^2)$   $\mu$ -presque partout, d'où il suit que l'on a  $\int |Q|^2 d\mu \leq C_2$ , avec une constante  $C_2$  convenable. Mais  $\mu$  étant indéterminée, l'ensemble des polynômes  $Q$  est borné dans l'espace  $\mathcal{H}$ , et comme  $P \in D_2(\lambda_1)$  implique  $a|P(x)|^2 \leq 1 + x^2$ , on voit que le disque  $D_2(\lambda_1)$  est aussi borné dans  $\mathcal{H}$ , ce qui suffit.  $\square$

On tire de là un premier résultat de perturbation additive relatif aux mesures N-extrémales.

THÉORÈME 3. — Soit  $\mu$  une mesure ayant des moments de tous les ordres et  $\lambda = \mu + a\delta_x$  avec  $a > 0$  et  $\mu(\{x\}) = 0$ . On a les équivalences :

- a)  $\mu$  est N-extrémale ;
- b)  $\lambda$  est 1-canonique.

*Preuve.* — Si  $\mu$  est N-extrémale, elle est indéterminée et à support discret donc  $x \notin \text{supp } \mu$ . Par le lemme 2 la mesure  $\lambda_1$  est indéterminée, et  $\mu_1$  est indéterminée par la proposition 1, donc  $\lambda_1 = \mu_1 + b\delta_x$ , avec  $b = a(1+x^2)^{-1}$ , est telle que  $\mathcal{P}$  soit dense dans  $L^2(\lambda_1)$  par le lemme 1. Ainsi  $\lambda_1$  est N-extrémale.

Réciproquement supposons que  $\lambda_1$  soit N-extrémale. Alors  $\mu_1$  est déterminée par le théorème 7 de [2]. De plus  $\mu$  est indéterminée, car dans le cas contraire,  $\mathcal{P}$  serait dense dans  $L^2(\lambda)$  par le lemme 1, ce qui est absurde d'après le théorème 2 de la codimension puisque  $\lambda$  est 1-canonique. Ainsi  $\mu$  est N-extrémale d'après la proposition 1.  $\square$

Par itération on déduit aisément du théorème 3 l'énoncé plus général.

PROPOSITION 4. — Soit  $\mu$  une mesure ayant des moments de tous les ordres,  $m \geq 1$  un entier,  $x_1, \dots, x_m$  des points distincts de  $\mathbf{R}$  n'appartenant pas au support de  $\mu$ , et  $a_1, \dots, a_m$  des constantes strictement positives. On a alors les équivalences :

- a)  $\mu$  est N-extrémale;
- b)  $\lambda = \mu + \sum_{k=1}^m a_k \delta_{x_k}$  est m-canonique.

Comme conséquence on en tire deux résultats généraux de perturbation figurant déjà dans [3] et [4].

THÉORÈME 4 (de soustraction). — Soit  $\mu$  une mesure m-canonique, avec  $m \geq 0$ . Pour toute partie finie J du support de  $\mu$ , de cardinal  $n(J)$ , on note  $\nu_J$  la mesure  $\mu - \mu|_J$ . On a alors les deux cas :

- a) si  $n(J) \leq m$ , la mesure  $\nu_J$  est  $m'$ -canonique avec  $m' = m - n(J)$ ;
- b) si  $n(J) > m$ , la mesure  $\nu_J$  est déterminée.

THÉORÈME 5 (de perturbation). — Soit  $\mu$  une mesure m-canonique, avec  $m \geq 0$ . Pour toute partie finie J du support de  $\mu$ , de cardinal  $n(J)$ , et pour toute mesure  $\tau$  à support fini  $S(\tau)$  disjoint du support de  $\nu_J$  et de même cardinal  $n(J)$ , la mesure perturbée  $\lambda = \nu_J + \tau$  est encore m-canonique.

Application. Réponse à une question de Diaconis. — L'intérêt des théorèmes de perturbation, issus du théorème de la codimension, apparaît clairement dans la construction de contre-exemples répondant à une question de Diaconis : existe-t-il des mesures déterminées  $\mu$  et  $\nu$  dont le produit de convolution  $\mu * \nu$  soit une mesure indéterminée ? Une réponse plus générale est fournie ci-dessous. Avant de l'énoncer rappelons qu'on désigne par  $\mu \square \nu$  le produit de convolution multiplicatif, image de la mesure  $\mu \otimes \nu$  par l'application produit  $(s,t) \rightarrow st$ , et telle que le n-ième moment de  $\mu \square \nu$  soit égal au produit des n-ièmes moments de  $\mu$  et  $\nu$ .

PROPOSITION 5. — Pour tout entier  $m \geq 0$  il existe une mesure  $\mu$ , déterminée et à support discret, et une mesure  $\nu$  à support fini, telles que le produit de convolution  $\lambda = \mu * \nu$  (resp. le produit de convolution multiplicatif  $\lambda = \mu \square \nu$ ) soit une mesure indéterminée telle que l'espace  $\mathcal{P}$  soit de codimension hilbertienne  $\geq m$  (éventuellement infinie) dans l'espace  $L^2(\lambda)$ .



*Preuve.* — Fixons une mesure  $m$ -canonique  $\rho = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta_{x_k}$ . Par le théorème 4 la mesure  $\mu = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \delta_{x_k}$  est déterminée et à support discret et on peut supposer  $x_{m+1} \neq 0$ . La mesure

$$v = \delta_1 + \sum_{k=0}^m \frac{a_r}{a_{m+1}} \delta_{x_r/x_{m+1}}$$

est telle que  $\lambda = \mu \square v \geq \rho$ , d'où l'on tire  $\lambda_m \geq \rho_m$ . On sait que  $\rho_m$  est  $N$ -extrémale, donc indéterminée, ce qui implique que  $\lambda_m$  est indéterminée elle aussi par le théorème 2. Il est alors facile de voir que  $\bar{\mathcal{P}}$  est de codimension  $q$  dans  $L^2(\lambda)$ , avec  $m \leq q \leq +\infty$ , et bien entendu  $\lambda$  est indéterminée. Pour le produit de convolution ordinaire  $*$ , il suffit de reprendre le même raisonnement avec la mesure

$$v = \delta_0 + \sum_{k=0}^m \frac{a_r}{a_{m+1}} \delta_{x_r - x_{m+1}}. \quad \square$$

*Ajouté à la correction des épreuves :*

Depuis le 5 Juillet 1983, les auteurs ont eu connaissance d'un résultat de C. Berg, à paraître aux *Proc. Amer. Math. Soc.*, répondant négativement à la question de Diaconis, en donnant l'exemple d'une mesure déterminée  $\mu$  telle que la mesure  $\mu * \mu$  soit indéterminée.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. I. AKHIEZER, *The classical moment problem*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.
- [2] C. BERG et J. P. R. CHRISTENSEN, Density questions in the classical theory of moments, *Ann. Inst. Fourier*, 31-3 (1981), 99-114.
- [3] G. CASSIER, Mesures canoniques dans le problème classique des moments, *C.R.A.S.*, Paris, Série I, 296 (1983), 717-719.
- [4] G. CASSIER, Problème des moments  $n$ -dimensionnels, mesures quasi-spectrales et semi-groupes, Thèse 3<sup>e</sup> Cycle, Lyon (1983), 1-118.

Manuscrit reçu le 9 mars 1983  
révisé le 5 juillet 1983.

H. BUCHWALTER et G. CASSIER,  
Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle  
Département de Mathématiques  
Université Claude Bernard - Lyon 1  
69622 Villeurbanne Cedex.