ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DAVID BEKOLLE

Le dual de l'espace des fonctions holomorphes intégrables dans des domaines de Siegel

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 3 (1984), p. 125-154

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_3_125_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1984), 125-154

LE DUAL DE L'ESPACE DES FONCTIONS HOLOMORPHES INTÉGRABLES DANS DES DOMAINES DE SIEGEL

par David BEKOLLE

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ un domaine de Siegel symétrique de type II. V désigne la mesure de Lebesgue dans Ω. L'espace de Bergman $A^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < +\infty$, est le sous-espace de $L^p(dV)$ constitué par les fonctions holomorphes dans Ω.

Une caractérisation du dual de A^1 est bien connue en dimension un, $\Omega = \pi^+ = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Dans π^+, tout élément du dual de A^1 peut être représenté par une fonction holomorphe et cette fonction holomorphe est dans un certain sens la projection de Bergman d'une fonction bornée. Dans [3], R. Coifman et R. Rochberg donnent une démonstration de ce résultat (voir remarques consécutives à la démonstration du théorème 2' de [3]) et ils posent le problème de sa généralisation en dimension supérieure.

Dans [1], nous avons généralisé cette caractérisation du dual de A^1 comme projection de Bergman de L^∞ au transformé de Cayley de la boule unité de $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, donné par

$$\{\zeta = (\zeta_1, \zeta') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1} : \operatorname{Im} \zeta_1 > |\zeta'|^2\}.$$

Le but de cet article est le suivant :

1) établir les mêmes résultats pour le complexifié $\mathbf{R}^{n+1} + i\Gamma$ du cône sphérique Γ de $\mathbf{R}^{n+1}$ défini par

$$\Gamma = \{(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1} ;\ y_0 y_1 - y_2^2 - \ldots - y_n^2 > 0,\ y_0 > 0\} ;$$

2) démontrer que ces résultats s'étendent à un produit de domaines du type précédent (demi-plan supérieur, transformé de Cayley de la boule et complexifié du cône sphérique).

Rappelons brièvement la situation. Soit Ω un domaine de Siegel symétrique de type II. En vertu du théorème de Hahn-Banach, tout élément L du dual de $A^1(\Omega)$ peut être représenté par une fonction bornée ℓ.

Comme le projecteur de Bergman P de Ω reproduit les fonctions de $A^1(\Omega)$, alors quel que soit $f \in A^1(\Omega)$, on a :

$$L(f) = \langle \ell, f \rangle = \langle \ell, Pf \rangle .$$

Puis comme le projecteur de Bergman est auto-adjoint, on est tenté d'écrire : $L(f) = \langle P\ell, f \rangle$.

Mais, dans tout domaine de Siegel (symétrique de type II), le noyau de Bergman $B(\zeta, z)$ n'est pas intégrable par rapport à z, ce qui entraîne que l'expression $P\ell(\zeta) = \int_\Omega B(\zeta, z)\, \ell(z)\, dV(z)$ n'a pas de sens. Néanmoins, lorsque Ω est le complexifié du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$, nous définirons la projection de Bergman de $\ell \in L^\infty(\Omega)$ comme en dimension un ($\Omega = \pi^+$) et pour le transformé de Cayley de la boule (voir [1]) : nous déterminerons un noyau $B_0(\zeta, z)$, "assez proche" de $B(\zeta, z)$ quand z tend vers l'infini, qui vérifie les propriétés suivantes :

1) relativement à ζ, $B_0(\zeta, z)$ est une fonction holomorphe, orthogonale à $A^1(dV(\zeta))$;

2) relativement à z, $B_0(\zeta, z)$ satisfait l'estimation : $(B - B_0)(\zeta, z) \in L^1(dV(z))$.

En plus, quel que soit $\ell \in L^\infty(\Omega)$, l'expression

$$P\ell(\zeta) = \int_\Omega (B - B_0)(\zeta, z)\, \ell(z)\, dV(z)$$

définit une fonction holomorphe dans Ω : nous l'appellerons la projection de Bergman de la fonction bornée ℓ.

La définition de la classe de Bloch de Ω est liée à un opérateur différentiel défini dans Ω, l'opérateur de Riemann-Liouville. Lorsque Ω est le complexifié du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$, cet opérateur est l'opérateur des ondes $\square$ défini par $\square_z = 4 \dfrac{\partial^2}{\partial z_0\, \partial z_1} - \dfrac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \dots - \dfrac{\partial^2}{\partial z_n^2}$: nous l'appellerons "carré". Désignons par m le plus petit entier strictement supérieur à $\dfrac{n-1}{2}$; nous dirons qu'une fonction g, holomorphe dans Ω, est une fonction de Bloch, si elle satisfait $\sup_{z\in\Omega} \{|\square^{(m)} g(z)| B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z)\} < +\infty$, où $\square^{(m)} = \square \circ \ldots \circ \square$ est le composé m fois de $\square$.

Nous démontrerons que la projection de Bergman d'une fonction bornée ℓ est une fonction de Bloch et qu'elle définit une forme linéaire qui coïncide avec la forme linéaire définie par ℓ. La classe de Bloch sera l'espace-quotient des fonctions de Bloch par les fonctions holomorphes qui annulent $\square^{(m)}$.

Dans la première partie de cet article, nous déterminons le noyau $B_0(\zeta, z)$ à retrancher du noyau de Bergman $B(\zeta, z)$ du complexifié Ω du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$, en vue de définir la projection de Bergman d'une fonction bornée. Ici, dès que $n > 1$, le choix du noyau $B_0(\zeta, z)$ est moins trivial que dans le cas du transformé de Cayley de la boule. Nous déduirons d'abord de résultats généraux de S.G. Gindikin [4] deux expressions du noyau de Bergman de Ω : l'une est explicite, l'autre est une transformée de Fourier (§ 1).

Dans le deuxième paragraphe de cette partie, nous démontrons une condition suffisante pour qu'une fonction holomorphe soit orthogonale à $A^1(\Omega)$. Rappelons que dans le cas $n = 1$, les constantes, c'est-à-dire les fonctions f vérifiant $\frac{\partial}{\partial\zeta} f \equiv 0$, sont orthogonales à A^1. Ici, on remplace l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial\zeta}$ par l'opérateur de Riemann-Louville de Ω : le carré, $\square$. Puis, à partir de l'expression du noyau de Bergman comme transformée de Fourier, nous construisons un noyau $B'_0(\zeta, z)$ vérifiant $\square_\zeta B'_0(\zeta, z) \equiv 0$, qui sera le premier terme du noyau $B_0(\zeta, z)$ à retrancher du noyau de Bergman $B(\zeta, z)$.

Nous corrigerons convenablement le noyau $B'_0(\zeta, z)$ pour obtenir un noyau $B_0(\zeta, z)$ qui vérifie les bonnes estimations (§ 3).

Dans la deuxième partie, nous pouvons alors définir dans Ω la projection de Bergman d'une fonction bornée et comme pour le transformé de Cayley de la boule, nous établissons que le dual de $A^1(\Omega)$ coïncide avec la classe de Bloch.

Dans la troisième partie, nous étendons ces résultats à un produit de domaines de trois sortes : 1) demi-plans, 2) transformés de Cayley de boules, 3) complexifiés de cônes sphériques (§ 1).

Au paragraphe deux, Ω est encore un produit de domaines du type précédent. On désigne par $A^{1,r}(\Omega)$ l'espace de Bergman de Ω, relatif à la mesure $B^{-r}(z,z)\,dV(z)$, constitué par les fonctions holomorphes dans Ω et intégrables relativement à la mesure $B^{-r}(z,z)\,dV(z)$ dans Ω: pour que $A^{1,r}(\Omega) \neq \{0\}$, il faut la condition $r > -\epsilon_\Omega$, où ϵ_Ω est une constante strictement positive ne dépendant que de Ω. Nous démontrons que comme dans le cas classique du disque unité du plan complexe, quel que soit $r > -\epsilon_\Omega$, le dual de $A^{1,r}(\Omega)$ coïncide avec la classe de Bloch et ne dépend donc pas de r : ceci répond à une autre question de R. Coifman et R. Rochberg dans [3].

Une partie des résultats de cet article a été annoncée dans [2].

Dans tout le texte, nous adoptons la convention d'utiliser la même lettre "c" pour désigner des constantes qui peuvent être différentes d'une ligne à l'autre.

Nous remercions vivement A. Bonami : cet article a bénéficié de son attention constante et de son bon conseil. R. Coifman doit également être remercié pour ses remarques et ses suggestions.

Enfin, l'auteur exprime sa gratitude à ses collègues de Brest, M. Broise, Y. Déniel et P. le Bihan, pour leur assistance au cours de ce travail, et à Mesdames D. Gac et A. Nicolle qui ont initialement assuré une excellente réalisation dactylographique du manuscrit.

I. LE CAS DU COMPLEXIFIE DU CONE SPHERIQUE : DETERMINATION DU NOYAU B_0 A RETRANCHER DU NOYAU DE BERGMAN

Dans cette partie, nous désignons par Ω le domaine $\Omega = \mathbf{R}^{n+1} + i\Gamma$, où Γ est le cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$:

$$\Gamma = \{(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : \quad y_0 y_1 - y_2^2 - \ldots - y_n^2 > 0,\ y_0 > 0\}.$$

En dimension deux, Ω est le bi-demi-plan $(\pi^+)^2$ et son noyau de Bergman $B(\zeta, z)$ est le produit de deux noyaux de Bergman du demi-plan supérieur :

$$B(\zeta, z) = c(\zeta_1 - \bar{z}_1)^{-2}(\zeta_2 - \bar{z}_2)^{-2}, \zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \ z = (z_1, z_2).$$

Dans ce cas, on trouve facilement, à partir des résultats sur le demi-plan, le noyau $B_0(\zeta, z)$ à retrancher de $B(\zeta, z)$ pour définir la projection de Bergman d'une fonction bornée. On prend B_0 tel que

$$(B - B_0)(\zeta, z) = c[(\zeta_1 - \bar{z}_1)^{-2} - (i - \bar{z}_1)^{-2}][(\zeta_2 - \bar{z}_2)^{-2} - (i - \bar{z}_2)^{-2}].$$

En dimension supérieure, la situation est différente ; le domaine Ω est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'est pas biholomorphe à un produit de domaines de dimension strictement inférieure. En particulier, Ω n'est pas biholomorphe au produit de $n + 1$ demi-plans complexes. Pour ces résultats, on consultera l'article de synthèse de S. Vagi [7].

Dans la suite, nous supposerons $n \geqslant 2$.

1. Détermination du noyau de Bergman de Ω et rappels de résultats.

Ω étant un domaine de Siegel symétrique de type I (donc de type II), on peut lui appliquer les théorèmes généraux de S.G. Gindikin [4] et R. Coifman et R. Rochberg [3]. On obtient les expressions suivantes pour le noyau de Bergman de Ω :

PROPOSITION I.1.1. — *Le noyau de Bergman* $B(\zeta, z)$ *de* Ω *est donné par*

$$(1)\ B(\zeta, z) = c_n[(\zeta_0 - \bar{z}_0)(\zeta_1 - \bar{z}_1) - (\zeta_2 - \bar{z}_2)^2 - \dots - (\zeta_n - \bar{z}_n)^2]^{-(n+1)}$$

$$(2)\ \qquad = c'_n \int_\Gamma (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \dots - \lambda_n^2)^{\frac{n+1}{2}} e^{i\langle\lambda, \zeta - \bar{z}\rangle} d\lambda,$$

où $\langle \lambda, \zeta - \bar{z} \rangle = \lambda_0 \dfrac{\zeta_0 - \bar{z}_0}{2} + \lambda_1 \dfrac{\zeta_1 - \bar{z}_1}{2} + \lambda_2(\zeta_2 - \bar{z}_2) + \dots + \lambda_n(\zeta_n - \bar{z}_n).$

Dans la suite, nous utiliserons fréquemment cette notation $<,>$.

On définit les espaces de Bergman avec poids

$$A^{p,r}(\Omega)\,,\ 0<p<+\infty\,,\ r>-\frac{1}{n+1}\,,$$

par $$A^{p,r}(\Omega)=L^p\,(B^{-r}\,(z\,,z)\,dV(z))\cap H(\Omega)\,,$$

où $H(\Omega)$ est l'espace des fonctions holomorphes dans Ω. Nous utiliserons la proposition suivante qui est un cas particulier d'un résultat de R. Coifman et R. Rochberg (proposition Al de l'appendice de [3]) :

PROPOSITION I.1.2. – *Soit* $r>-\dfrac{1}{n+1}$. *Une fonction* f *appartient à* $A^{2,r}(\Omega)$ *si et seulement si* f *s'écrit :*

$$f(z)=c\int_\Gamma \widetilde{f}(\lambda)\,e^{i\langle\lambda,z\rangle}\,d\lambda\,,$$

où $\widetilde{f}$ *est une fonction définie dans* Γ *qui vérifie l'estimation*

$$\int_\Gamma |\widetilde{f}(\lambda)|^2\,(\lambda_0\,\lambda_1-\lambda_2^2-\ldots-\lambda_n^2)^{-(n+1)\left(r+\frac{1}{2}\right)}\,d\lambda<+\infty.$$

Cette dernière intégrale est alors égale à

$$c_r\int_\Omega |f(z)|^2\ B^{-r}\,(z\,,z)\,dV(z)\,.$$

Nous utiliserons également le lemme suivant, démontré dans le cas général par S.G. Gindikin [4] :

LEMME I.1.1. – *Soient* $\rho_0\,,\rho_1$ *deux nombres complexes tels que* $\operatorname{Re}\rho_0>\dfrac{n-1}{2}$ *et* $\operatorname{Re}\rho_1>0$ *et soit* z *un point de* Ω.

On a l'identité :

$$z_0^{\rho_1-\rho_0}\,(z_0\,z_1-z_2^2-\ldots-z_n^2)^{-\rho_1}$$
$$=c_n\int_\Gamma \lambda_1^{\rho_1-\rho_0}\,(\lambda_0\,\lambda_1-\lambda_2^2-\ldots-\lambda_n^2)^{\rho_0-\frac{n+1}{2}}\,e^{i\langle\lambda,z\rangle}\,d\lambda\,,$$

où $z=(z_0\,,z_1\,,z_2\,,\ldots,z_n)$.

Nous nous servirons également du lemme suivant :

LEMME I.1.2. – *Si* $r > -\dfrac{1}{n+1}$ *et* $\alpha > r + \dfrac{n-1}{2(n+1)}$, *on a* :

$$\int_\Omega |B(\zeta, z)|^{1+\alpha} B^{-r}(z, z)\, dV(z) = C_{\alpha,r} B^{\alpha-r}(\zeta, \zeta),$$

où $C_{\alpha,r}$ *ne dépend pas de* ζ.

Démonstration. – En vertu de la proposition I.1.1 et du lemme I.1.1, $[B(\zeta, z)]^{\frac{1+\alpha}{2}}$ s'écrit :

$$B^{\frac{1+\alpha}{2}}(\zeta, z) = c_\alpha [(\zeta_0 - \bar{z}_0)(\zeta_1 - \bar{z}_1) - (\zeta_2 - \bar{z}_2)^2 - \ldots - (\zeta_n - \bar{z}_n)^2]^{-\frac{(n+1)(1+\alpha)}{2}}$$

$$= c'_\alpha \int_\Gamma (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{\frac{(n+1)\alpha}{2}} e^{i\langle\lambda, \zeta - \bar{z}\rangle} d\lambda.$$

Maintenant, en vertu de la formule de Plancherel donnée par la proposition I.1.2, on a :

$$\int_\Omega |B(\zeta, z)|^{1+\alpha} B^{-r}(z, z)\, dV(z) = c_{\alpha,r}$$

$$\int_\Gamma (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{(n+1)(\alpha - r - \frac{1}{2})} e^{-\langle\lambda, t\rangle} d\lambda, \quad t = \operatorname{Im} \zeta.$$

Il suffit alors de démontrer que cette dernière intégrale converge ; on conclut en vertu du lemme I.1.1 parce que $\alpha > r + \dfrac{n-1}{2(n+1)}$. On obtient :

$$\int_\Omega |B(\zeta, z)^{1+\alpha} B^{-r}(z, z)\, dV(z) = c'_{\alpha,r} B^{\alpha-r}(\zeta, \zeta).$$

Le lemme est démontré.

Remarque. – On remarque que si l'intégrale

$$\int_\Omega |B(\zeta, z)|^{1+\alpha} B^{-r}(z, z)\, dV(z)$$

converge quels que soient α, r, $\alpha > r > -\dfrac{1}{n+1}$, dans les cas du demi-plan supérieur $(n = 1)$ et du transformé de

Cayley de la boule unité de $\mathbf{C}^n$, elle ne converge dans le complexifié du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$ que si $\alpha > r + \frac{n-1}{2(n+1)}$, $r > -\frac{1}{n+1}$, contrairement à ce qui est affirmé dans [3].

Nous démontrons ensuite le lemme suivant :

LEMME I.1.3. – *Si* $m > \frac{n-1}{2}$, *alors quel que soit* $w \in \Omega$, *on a :*

$$\int_\Omega |w_0 - \bar{z}_0|^{-(m-1)} |B(w,z)|^{\frac{n+2}{n+1}} dV(z) < +\infty,$$

où $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

Démonstration du lemme. I.1.3. – En vertu de l'homogénéité de Ω, on peut prendre $w = e$, où $e = (i, i, 0, \ldots, 0)$. La démonstration est semblable à celle du lemme I.1.2.

En vertu du lemme I.1.1, on a :

$$(i - \bar{z}_0)^{-\frac{m-1}{2}} [B(e,z)]^{\frac{n+2}{2(n+1)}} = C_{n,m} \int_\Gamma \lambda_1^{-\frac{m-1}{2}} \times (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{\frac{m}{2}} e^{i\langle \lambda, e - \bar{z}\rangle} d\lambda.$$

Ainsi, en vertu du lemme I.1.1, on a l'égalité :

$$\int_\Omega |i - \bar{z}_0|^{-(m-1)} |B(e,z)|^{\frac{n+2}{n+1}} dV(z) = C_{n,m} \int_\Gamma \lambda_1^{-(m-1)} (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{m - \frac{n+1}{2}} e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)} d\lambda.$$

On conclut parce que en vertu du lemme I.1.1, cette dernière intégrale converge : le lemme I.1.3 est démontré.

LEMME I.1.4. – *Si* $m > \frac{n-1}{2}$, *alors quel que soit* w *dans* Ω, *on a :*

$$\int_\Omega |w_0 - \bar{z}_0|^{-\left(m - \frac{1}{3}\right)} |B(w,z)|^{\frac{3n+5}{3(n+1)}} dV(z) < +\infty.$$

Démonstration du lemme I.1.4. – La démonstration est la même que celle du lemme I.1.3 : nous l'omettrons.

Nous démontrons ensuite le lemme suivant :

LEMME I.1.5. – *Si* $m \geqslant \frac{n}{2}$, *alors quel que soit* w *dans* Ω *et quel que soit* $k = 2, \ldots, n$, on a :

$$\int_\Omega \frac{|w_k - \bar{z}_k|^2}{|w_0 - \bar{z}_0|^{m+\frac{1}{3}}} |B(w, z)|^{\frac{3n+7}{3(n+1)}} dV(z) < +\infty .$$

Démonstration du lemme I.1.5. – Il suffit à nouveau de prendre $w = e = (i, i, 0, \ldots, 0)$. Nous écrirons la démonstration pour $k = 2$. On a :

$$\bar{z}_2 (i - \bar{z}_0)^{-\frac{3m+1}{6}} [i - \bar{z}_0)(i - \bar{z}_1) - \bar{z}_2^2 - \ldots - \bar{z}_n^2]^{-\frac{3n+7}{6}}$$
$$= C_{n,m} \times \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} (i - \bar{z}_0)^{-\frac{3m+1}{6}} [(i - \bar{z}_0)(i - \bar{z}_1) - \bar{z}_2^2 - \ldots - \bar{z}_n^2]^{-\frac{3n+1}{6}} .$$

En vertu du lemme I.1.1, on a :

$$(i - \bar{z}_0)^{-\frac{3m+1}{6}} [(i - \bar{z}_0)(i - \bar{z}_1) - \bar{z}_2^2 - \ldots - z_n^2]^{-\frac{3n+1}{6}}$$
$$= C'_{n,m} \times \int_\Gamma \lambda_1^{-\frac{3m+1}{6}} (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{\frac{m}{2} - \frac{1}{6}} e^{i\langle \lambda, e - \bar{z} \rangle} d\lambda .$$

En vertu de la proposition I.1.2, on obtient :

$$\int_\Omega |z_2|^2 \, |i - \bar{z}_0|^{-(m+\frac{1}{3})} |B(e, z)|^{\frac{3n+7}{3(n+1)}} dV(z)$$
$$= C_{n,m} \times \int_\Gamma \lambda_1^{-(m+\frac{1}{3})} \lambda_2^2 (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{m - \frac{1}{3} - \frac{n+1}{2}} e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)} d\lambda .$$

Il suffit pour conclure de démontrer que cette dernière intégrale converge ; désignons-la par I_Γ.

Estimons I_Γ ; nous intégrons d'abord par rapport à λ_0 en effectuant le changement de variable

$$u = \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2 ;$$

on est amené à calculer

$$\frac{1}{\lambda_1} \int_0^{+\infty} u^{m - \frac{1}{3} - \frac{n+1}{2}} e^{-\frac{u + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}{\lambda_1}} du .$$

Cette dernière intégrale converge parce que $m - \frac{1}{3} - \frac{n+1}{2} > -1$; on la calcule en effectuant le nouveau changement de variable $v = \frac{u}{\lambda_1}$. On obtient

$$I_\Gamma = C_{n,m} \int_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^{n-1}} \lambda_2^2 \lambda_1^{-\frac{2}{3} - \frac{n+1}{2}} e^{-\left(\frac{\lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2}{\lambda_1} + \lambda_1\right)} d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_n .$$

On intègre ensuite par rapport à $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ en effectuant le changement de variables

$$\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1}\, u_2 , \ \lambda_3 = \sqrt{\lambda_1}\, u_3 , \dots , \lambda_n = \sqrt{\lambda_1}\, u_n ;$$

on obtient $I_\Gamma = C'_{n,m} \int_{\mathbf{R}^+} \lambda_1^{-2/3} e^{-\lambda_1} d\lambda$.

On conclut ainsi que I_Γ est fini, ce qui démontre le lemme I.1.5.

Enfin, nous utiliserons le lemme suivant, démontré dans le cas général dans [3], lemme 2.3 :

LEMME I.1.6. – *d désigne la distance de Bergman sur Ω. Il existe une constante c_Ω telle que si z, ζ, ζ_0 sont trois points de Ω et si $d(\zeta, \zeta_0) < 10$, alors :*

$$\left| \frac{B(\zeta, z)}{B(\zeta_0, z)} - 1 \right| \leqslant c_\Omega\, d(\zeta, \zeta_0) .$$

2. Résultats préliminaires.

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, le problème est de trouver un noyau $B_0(\zeta, z)$

1) holomorphe relativement à la variable ζ et orthogonal à $A^1(dV(\zeta))$,

2) vérifiant de bonnes estimations relativement à z.

Ici on pourrait démontrer qu'on ne peut pas effectuer un choix trivial de ce noyau $B_0(\zeta, z)$ à retrancher du noyau de Bergman, en prenant par exemple une fonction ne dépendant que de z, ou encore un noyau ne dépendant que de ζ_0 comme fonction de $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$.

Soit $\square$ (carré) l'opérateur différentiel défini sur Ω par

$$\square_\zeta = 4 \frac{\partial^2}{\partial\zeta_0\, \partial\zeta_1} - \frac{\partial^2}{\partial\zeta_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial\zeta_n^2}$$

et soit m le plus petit entier strictement supérieur à $\dfrac{n-1}{2}$. Nous choisirons un noyau $B_0(\zeta, z)$ qui annule l'opérateur différentiel $\square^{(m)}$, obtenu en composant m fois $\square$; pour justifier ce choix, nous démontrons le lemme suivant :

LEMME I.2.1. – *Soit* $F(\zeta)$ *une fonction holomorphe dans* Ω, *telle que à* $t \in \Gamma$ *fixé,* $\zeta = s + it$, $F(s+it)$ *est borné, ainsi que toutes les dérivées partielles* $\dfrac{\partial^k}{\partial s^k} F(s+it)$ *d'ordre* $|k| \leqslant 2m - 1$. *On suppose en plus que* $\square_s^{(m)} F \equiv 0$.

Alors F *est orthogonal à* $A^1(\Omega)$.

La démonstration de ce lemme utilise les deux lemmes suivants :

LEMME I.2.2. – *Si* f *est une fonction holomorphe dans* Ω, *on a* $\square_\zeta f = c\, \square_s f$, $\zeta = s + it$.

LEMME I.2.3. – *Toute fonction* $f \in A^1(\Omega)$ *s'écrit* $f = \square^{(m)} h$, *où* h *est une fonction holomorphe dans* Ω *dont, à* t *fixé,* $\zeta = s + it$, *toutes les dérivées* $\dfrac{\partial^k}{\partial s^k} h(\zeta)$ *d'ordre* $|k| \leqslant 2m-1$ *tendent vers zéro quand* s *tend vers l'infini.*

Démonstration des lemmes I.2.2 *et* I.2.3. – Le lemme I.2.2 découle immédiatement des conditions de Cauchy-Riemann.

Pour démontrer le lemme I.2.3, on utilise le fait que le noyau de Bergman reproduit $f \in A^1(\Omega)$; ainsi :

$$f(\zeta) = \int_\Omega B(\zeta, z) f(z)\, dV(z).$$

En utilisant le lemme I.1.1, on obtient aisément que

$$\sup_{z\in\Omega} |B(\zeta, z)| = B(\zeta, \zeta) ;$$

d'autre part, il est facile de vérifier que

$$\square_s^{(m)} [B(\zeta, z)]^{1-\frac{m}{n+1}} = c_{n,m} B(\zeta, z).$$

On prend alors

$$h(\zeta) = c_{n,m}^{-1} \int_\Omega [B(\zeta, z)]^{1-\frac{m}{n+1}} f(z)\, dV(z). \tag{3}$$

L'estimation sur la régularité de h à l'infini est de vérification immédiate.

Démonstration du lemme I.2.1. – En vertu des lemmes I.2.2 et I.2.3 , il s'agit de montrer que quelle que soit la fonction h de la forme (3), on a : $\langle F(\zeta), \square_s^{(m)} h(\zeta)\rangle = 0$, $\zeta = s + it$.

On intègre d'abord par rapport à s. Deux intégrations par parties permettent d'écrire :

$$\int F(\zeta)\, \square_s^{(m)} \overline{h}(\zeta)\, ds = \int \square_s F(\zeta)\, \square_s^{(m-1)} \overline{h}(\zeta)\, ds ;$$

en effet, les termes tout intégrés sont nuls, du fait que, en vertu du lemme I.2.3 , $\square^{(m-1)} h$ ainsi que $\dfrac{\partial}{\partial s_j} \square_s^{(m-1)} h$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, tendent vers zéro quand s tend vers l'infini.

En renouvelant l'opération, on obtient :

$$\int F(\zeta)\, \square_s^{(m)} \overline{h}(\zeta)\, ds = \int \square_s^{(2)} F(\zeta)\, \square_s^{(m-2)} \overline{h}(\zeta)\, ds = \ldots$$
$$= \int \square_s^{(m)} F(\zeta)\, \overline{h}(\zeta)\, ds.$$

On conclut parce que par hypothèse, $\square_s^{(m)} F \equiv 0$. Le lemme I.2.1 est ainsi démontré.

Nous pouvons maintenant expliquer le choix du noyau $B_0(\zeta, z)$ à retrancher du noyau de Bergman $B(\zeta, z)$. Considérons l'égalité (2) de la proposition I.1.1 :

$$B(\zeta, z) = c_n \int_\Omega (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{\frac{n+1}{2}} e^{i\langle\lambda, \zeta - \bar{z}\rangle}\, d\lambda. \tag{2}$$

Le noyau $B_0(\zeta, z)$ doit être "assez proche" de $B(\zeta, z)$ quand z tend vers l'infini. Pour obtenir B_0, nous allons remplacer la fonction exponentielle de l'expression (2) de B par un "polynôme exponentiel" solution holomorphe de l'équation homogène $\square_\zeta^{(m)} = 0$ et qui est "assez proche" de la fonction exponentielle de (2) quand z tend vers l'infini.

Intégrons l'expression (2) de $B(\zeta, z)$ par rapport à λ_0 en faisant le changement de variable $u = \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2$; nous obtenons :

$$\int_{\frac{\lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}{\lambda_1}}^{+\infty} (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{\frac{n+1}{2}} e^{i\lambda_0 \frac{\zeta_0 - \bar{z}_0}{2}} d\lambda_0$$
$$= \frac{1}{\lambda_1} e^{i\frac{\lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}{\lambda_1} \frac{\zeta_0 - \bar{z}_0}{2}} \times \int_0^{+\infty} u^{\frac{n+1}{2}} e^{i\frac{u}{\lambda_1} \frac{\zeta_0 - \bar{z}_0}{2}} du.$$

Nous intégrons ensuite en faisant le nouveau changement de variable $v = -\dfrac{u}{\lambda_1} \dfrac{\zeta_0 - \bar{z}_0}{2}$;

il s'ensuit que

$$B(\zeta, z) = c_n (\zeta_0 - \bar{z}_0)^{-\frac{n+3}{2}} \int_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^{n-1}} \lambda_1^{\frac{n+1}{2}}$$
$$\times \exp \left\{ i \left[\frac{\lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}{\lambda_1} \frac{\zeta_0 - \bar{z}_0}{2} + \lambda_1 \frac{\zeta_1 - \bar{z}_1}{2} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda_2 (\zeta_2 - \bar{z}_2) + \ldots + \lambda_n (\zeta_n - \bar{z}_n) \right] \right\} d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_n.$$

On remarque alors que le carré de l'intégrale précédente est nul, parce que l'exponentielle qui y figure est de carré nul (par rapport à ζ) ; on remarque aussi que quel que soit $k = 1, 2, \ldots, m$, on a :

$$\square_\zeta^{(k)} \left\{ (\zeta_0 - \bar{z}_0)^{k-1} \right.$$
$$\left. e^{i \left[\frac{\lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}{\lambda_1} \frac{\zeta_0 - \bar{z}_0}{2} + \lambda_1 \frac{\zeta_1 - \bar{z}_1}{2} + \lambda_2 (\zeta_2 - \bar{z}_2) + \ldots + \lambda_n (\zeta_n - \bar{z}_n) \right]} \right\} \equiv 0.$$

De tels "polynômes exponentiels" solutions de $\square^{(k)} = 0$ sont également considérés dans [6], où F. Trèves caractérise toutes les solutions de cette équation homogène.

Nous prendrons pour premier terme du noyau $B_0(\zeta, z)$:

$$\frac{B(\zeta, z)}{(i-\bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}+m-1}} \left\{ (\zeta_0 - \bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}+m-1} \right.$$

$$+ \frac{\frac{n+3}{2}+m-1}{1!} (i-\zeta_0)(\zeta_0 - \bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}+m-2}$$

$$+ \frac{\left(\frac{n+3}{2}+m-1\right)\left(\frac{n+3}{2}+m-2\right)}{2!} (i_0 - \zeta_0)^2 (\zeta_0 - \bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}+m-3}$$

$$+ \dots + \frac{\left(\frac{n+3}{2}+m-1\right)\left(\frac{n+3}{2}+m-2\right)\dots\left(\frac{n+3}{2}+1\right)}{(m-1)!}$$

$$\left. (i-\zeta_0)^{m-1} (\zeta_0 - \bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}} \right\}$$

et nous lui ajouterons des termes indépendants de $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ en vue d'obtenir l'estimation $(B - B_0)(\zeta, z) \in L^1(dV(z))$ qui permet de définir la fonction

$$P\ell(\zeta) = \int_\Omega (B - B_0)(\zeta, z)\, \ell(z)\, dV(z), \quad \ell \in L^\infty(\Omega).$$

3. Le lemme principal.

Plus précisément nous démontrons le résultat suivant :

Lemme principal. – *Soit dans* Ω *le noyau* B_0 *défini par*

$$(B - B_0)(\zeta, z) = Q(\zeta, z)\{B(\zeta, z) - B((\zeta_0, i, 0, \dots 0), z)\},$$

où $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, $z = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_n)$ *et*

$$Q(\zeta, z) = (i-\bar{z}_0)^{-\left(\frac{n+3}{2}+m-1\right)} \left\{ (i-\bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}+m-1} \right.$$

$$- (\zeta_0 - \bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}+m-1} - \frac{\frac{n+3}{2}+m-1}{1!} (i-\zeta_0)(\zeta_0 - \bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}+m-2}$$

$$\left. - \dots - \frac{\left(\frac{n+3}{2}+m-1\right)\left(\frac{n+3}{2}+m-2\right)\dots\left(\frac{n+3}{2}+1\right)}{(m-1)!} (i-\zeta_0)^{m-1} (\zeta_0 - \bar{z}_0)^{\frac{n+3}{2}} \right\}.$$

B_0 *possède les propriétés suivantes :*

1) *relativement à* ζ, $B_0(\zeta, z)$ *est une fonction holomorphe qui annule* $\square^{(m)}$;

2) *relativement à* z, *le noyau* $B_0(\zeta, z)$ *satisfait l'estimation* $(B - B_0)(\zeta, z) \in L^1(dV(z))$.

Démonstration. – La vérification de la propriété 1) est élémentaire. Démontrons la propriété 2).

En vertu de l'égalité (1) de la proposition I.1.1, on a :

$$|(B - B_0)(\zeta, z)| = |Q(\zeta, z)| \times |[(\zeta_0 - \bar{z}_0)(\zeta_1 - \bar{z}_1) - (\zeta_2 - \bar{z}_2)^2 - \ldots - (\zeta_n - \bar{z}_n)^2]^{-(n+1)} - [(\zeta_0 - \bar{z}_0)(i - \bar{z}_1) - \bar{z}_2^2 - \ldots - \bar{z}_n^2]^{-(n+1)}| .$$

L'estimation suivante découle immédiatement de la formule de Taylor ; quel que soit $z \in \Omega$, on a :

$$|Q(\zeta, z)| \leqslant C(\zeta) \frac{|i - \zeta_0|^m}{|i - \bar{z}_0|^m} .$$

En utilisant l'identité

$$a^{-(n+1)} - b^{-(n+1)} = (b - a) \sum_{k=0}^{n} a^{-(n+1-k)} b^{-(k+1)} ,$$

on déduit que

$$|(B - B_0)(\zeta, z)| \leqslant C(\zeta) \frac{|\zeta_0 - i|^m}{|i - \bar{z}_0|^m} (|(i - \zeta_1)(\zeta_0 - \bar{z}_0) + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2| + |\zeta_2 \bar{z}_2 + \ldots + \zeta_n \bar{z}_n|) \sum_{k=0}^{n} |B(\zeta, z)|^{\frac{n+1-k}{n+1}} |B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)|^{\frac{k+1}{n+1}} . \quad (4)$$

Remarquons que quel que soit $z \in \Omega$, on a $|i - \bar{z}_0| \geqslant 1$ et quels que soient ζ et z dans Ω, on a : $\dfrac{|\zeta_0 - \bar{z}_0|}{|i - \bar{z}_0|} \leqslant C(\zeta)$.

Ainsi le second membre de (4) est inférieur à $C'(\zeta)[B_1(\zeta, z) + B_2(\zeta, z)]$, où :

$$B_1(\zeta, z) = |i - \bar{z}_0|^{-(m-1)} \sum_{k=0}^{n} |B(\zeta, z)|^{\frac{n+1-k}{n+1}} |B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)|^{\frac{k+1}{n+1}} ,$$

$$B_2(\zeta, z) = \frac{(|z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}}{|i - \bar{z}_0|^m} \sum_{k=0}^{n} |B(\zeta, z)|^{\frac{n+1-k}{n+1}} |B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)|^{\frac{k+1}{n+1}} .$$

Il suffit alors de démontrer que $B_1(\zeta, z)$ et $B_2(\zeta, z)$ appartiennent à $L^1(dV(z))$, ou encore que quel que soit $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, on a :

$$\int_\Omega |i - \bar{z}_0|^{-(m-1)} |B(\zeta, z)|^{\frac{n+1-k}{n+1}} |B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)|^{\frac{k+1}{n+1}} dV(z) < +\infty; \tag{5}$$

$$\int_\Omega \frac{(|z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}}{|i - \bar{z}_0|^m} |B(\zeta, z)|^{\frac{n+1-k}{n+1}} |B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)|^{\frac{k+1}{n+1}} dV(z) < +\infty. \tag{6}$$

Démontrons d'abord (5). En vertu de l'inégalité de Hölder, le premier membre de (5) est inférieur à

$$\left(\int_\Omega |i - \bar{z}_0|^{-(m-1)} |B(\zeta, z)|^{\frac{n+2}{n+1}} dV(z)\right)^{\frac{n+1-k}{n+2}}$$
$$\times \left(\int_\Omega |i - \bar{z}_0|^{-(m-1)} |B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)|^{\frac{n+2}{n+1}} dV(z)\right)^{\frac{k+1}{n+2}}.$$

On conclut en vertu du lemme I.1.3.

Démontrons ensuite l'inégalité (6). En vertu de l'inégalité de Hölder, le premier membre de (6) est inférieur au produit

$$[B_3(\zeta)]^{\frac{k+1}{n+1}} [B_4(\zeta)]^{\frac{n+1-k}{n+1}}, \text{ où :}$$

$$B_3(\zeta) = \int_\Omega \frac{(|z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}}{|i - \bar{z}_0|^m} |B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)|^{\frac{n+2}{n+1}} dV(z),$$

$$B_4(\zeta) = \int_\Omega \frac{(|z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}}{|i - \bar{z}_0|^m} |B(\zeta, z)|^{\frac{n+2}{n+1}} dV(z).$$

Nous allons démontrer que quel que soit $\zeta \in \Omega$, $B_k(\zeta) < +\infty$, $k = 3,4$.

Démontrons-le d'abord par $k = 3$. Nous découpons Ω en $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où :

$$\Omega_1 = \{|z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 < (|i - \bar{z}_0|\, |(\zeta_0 - \bar{z}_0)(i - \bar{z}_1) - \bar{z}_2^2 - \ldots - \bar{z}_n^2|)^{2/3}\}$$

et

$$\Omega_2 = \{|z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 > (|i - \bar{z}_0|\, |(\zeta_0 - \bar{z}_0)(i - \bar{z}_1) - \bar{z}_2^2 - \ldots - \bar{z}_n^2|)^{2/3}\}.$$

Dans Ω_1, la fonction à intégrer est inférieure à

$$|i-\bar{z}_0|^{m-\frac{1}{3}}\ |B((\zeta_0\,,i\,,0\,,\ldots,0)\,,z)|^{\frac{3n+5}{3(n+1)}}$$

et son intégrale sur Ω_1 converge en vertu du lemme I.1.4.

Maintenant dans Ω_2, la fonction à intégrer est inférieure à :

$$\frac{|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2}{|i-\bar{z}_0|^{m+\frac{1}{3}}}\ |B((\zeta_0\,,i\,,0\,,\ldots,0)\,,z)|^{\frac{3n+7}{3(n+1)}}\,.$$

Remarquons que $m \geqslant \dfrac{n}{2}$; on conclut que son intégrale sur Ω_2 converge, en vertu du lemme I.1.5.

Maintenant, pour terminer la démonstration du lemme principal, il reste à démontrer que l'intégrale

$$B_4(\zeta)=\int_\Omega \frac{(|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2)^{1/2}}{|i-\bar{z}_0|^m}\ |B(\zeta\,,z)|^{\frac{n+3}{n+1}}\,dV(z)$$

converge, quel que soit $\zeta\in\Omega$. Mais, en vertu du lemme I.1.6, il existe une constante $C(\zeta)$ telle que quel que soit $z\in\Omega$, on a :

$$|B(\zeta\,,z)|\leqslant C(\zeta)\ |B((\zeta_0\,,i\,,0\,,\ldots,0)\,,z)|\,.$$

Il s'ensuit que $B_4(\zeta)\leqslant C(\zeta)\,B_3(\zeta)$ et nous venons de démontrer que quel que soit ζ dans Ω, $B_3(\zeta)$ est fini. Ceci achève la démonstration du lemme principal.

II. DUAL DE A[1] ET FONCTIONS DE BLOCH DANS LE COMPLEXIFIE DU CONE SPHERIQUE

Dans cette partie, Ω désigne le complexifié du cône sphérique Γ de $\mathbf{R}^{n+1}$, $n\geqslant 2$.

Le lemme principal nous permet de démontrer le théorème suivant. Les notations sont celles du lemme principal.

THEOREME II.1. — *Quelle que soit la fonction bornée* ℓ, *on définit une fonction holomorphe dans* Ω *en posant :*

$$P\ell(\zeta) = \int_{\Omega} [B(\zeta, z) - B_0(\zeta, z)]\, \ell(z)\, dV(z), \zeta \in \Omega. \tag{1}$$

Nous appellerons *projection de Bergman de la fonction bornée* ℓ, l'expression $P\ell$ définie par (1).

Démonstration. — En vertu du lemme principal, l'expression $P\ell$ définit bien une fonction. Pour obtenir que cette fonction est holomorphe, il suffit de prouver que l'on peut prendre les dérivées $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_j}$ sous le signe intégral, c'est-à-dire que l'on a le lemme suivant :

LEMME II.1. — *Quand* ζ *parcourt un compact de* Ω, *il existe une fonction* $M(z)$ *intégrable dans* Ω *telle que quel que soit* $j = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \zeta_j} (B - B_0)(\zeta, z) \right| \leqslant M(z).$$

Démonstration du lemme II.1. — Nous écrirons la démonstration pour $j = 0$; pour $j = 1, 2, \ldots, n$, la démonstration est la même, avec des simplifications notables.

Soit $Q(\zeta, z)$ le polynôme défini dans l'énoncé du lemme principal. On a $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_0} (B - B_0)(\zeta, z) = \mathrm{I} + \mathrm{II}$, où

$$\mathrm{I} = -(n+1)\, Q(\zeta, z) \{(\zeta_1 - \bar{z}_1)[B(\zeta, z)]^{\frac{n+2}{n+1}} - (i - \bar{z}_1)[B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)]^{\frac{n+2}{n+1}}\}$$

et

$$\mathrm{II} = \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_0} Q(\zeta, z) \right] \{B(\zeta, z) - B((\zeta_0, i, 0, \ldots, 0), z)\}.$$

Maintenant, en raisonnant sur I et II comme dans la démonstration du lemme principal, on remarque que ces termes se comportent bien mieux que $(B - B_0)(\zeta, z)$: le lemme II.1 découle de ces remarques et le théorème II.1 est ainsi démontré.

Remarque. — En vertu de la démonstration du théorème II.1, on peut dériver sous le signe intégral l'expression (1) de la projection de Bergman $P\ell$ d'une fonction bornée ℓ : pour cela la condition $m > \frac{n-1}{2}$ est nécessaire. En effet, comme

$$\square^{(m)} B(\zeta, z) = C_{n,m} [B(\zeta, z)]^{\frac{n+1+m}{n+1}},$$

on a :

$$\square^{(m)} P\ell(\zeta) = C_{n,m} \int_\Omega [B(\zeta, z)]^{\frac{n+1+m}{n+1}} \ell(z)\, dV(z) ;$$

mais pour que cette intégrale soit bien définie, on doit avoir

$$\int_\Omega |B(\zeta, z)|^{\frac{n+1+m}{n+1}} dV(z) < +\infty,$$

ce qui, en vertu du lemme I.1.2, suppose $m > \frac{n-1}{2}$. Ainsi, par exemple, pour $n = 2$, on prendra $m = 1$; pour $n = 3$, $m = 2$, etc.

Nous introduisons ensuite une classe de fonctions holomorphes dans Ω : la classe de Bloch.

DEFINITION. – *Nous dirons qu'une fonction g, holomorphe dans Ω, est une fonction de Bloch si elle satisfait*

$$\|g\|_* = \sup_{z\in\Omega} \{B^{-\frac{m}{n+1}}(z, z) |\square^{(m)} g(z)|\} < +\infty .$$

Désignons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions de Bloch qui annulent $\square^{(m)}$; nous appellerons *classe de Bloch* $\mathcal{B}$ l'espace-quotient des fonctions de Bloch par $\mathcal{N}$.

La classe de Bloch $\mathcal{B}$ possède la propriété suivante :

PROPOSITION II.1. – *Munie de la norme induite par $\|\ \|_*$, la classe de Bloch $\mathcal{B}$ est un espace de Banach.*

La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur le résultat suivant ([6], p. 477) :

LEMME II.1.2. – *Soit m un entier naturel strictement positif. Si h est une fonction holomorphe dans Ω, il existe une fonction f, holomorphe dans Ω, telle que $\square^{(m)} f = h$.*

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème II.1 et du lemme I.1.2 :

COROLLAIRE II.1. – *Quelle que soit la fonction bornée* ℓ *dans* Ω, *sa projection de Bergman* $P\ell$ *est une fonction de Bloch.*

Maintenant, nous allons démontrer que toute fonction de Bloch (en particulier, la projection de Bergman d'une fonction bornée) définit une forme linéaire bornée sur $A^1(\Omega)$; le résultat est le suivant :

THEOREME II.2. – (i) *Quelle que soit la fonction de Bloch* g *(en particulier, si* g *est la projection de Bergman d'une fonction bornée),* g *définit une forme linéaire bornée sur* $A^1(\Omega)$ *par*

$$g(f) = C_{n,m} \int_\Omega \square^{(m)} g(z)\, B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z) \bar{f}(z)\, dV(z), \quad f \in A^1(\Omega).$$

ii) *Dans le cas où* g *est la projection de Bergman* $P\ell$ *d'une fonction bornée* ℓ, *cette forme linéaire coïncide avec la forme linéaire associée à* ℓ : $\langle \ell, f\rangle = \int_\Omega \ell(z)\bar{f}(z)\, dV(z)$.

Démonstration. – Ce théorème se démontre de la même façon que son analogue dans le transformé de Cayley de la boule (voir [1]) ; nous n'indiquerons que les traits essentiels de la démonstration.

(i) Si g est une fonction de Bloch, alors

$$\square^{(m)} g(z)\, B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z) \in L^\infty(\Omega)$$

(ii) En vertu du théorème II.1, si $g = P\ell$, on a :

$$\square^{(m)} g(z) = C_{n,m} \int_\Omega [B(z,w)]^{\frac{n+1+m}{n+1}} \ell(w)\, dV(w).$$

On conclut parce que quel que soit $f \in A^1(\Omega)$, on a :

$$\bar{f}(w) = C_{n,m} \int_\Omega [B(z,w)]^{\frac{n+1+m}{n+1}} \bar{f}(z)\, B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z)\, dV(z).$$

Comme dans le transformé de Cayley de la boule, on conclut que le dual de A^1 coïncide avec un sous-espace de la classe de Bloch, en vertu du corollaire suivant :

COROLLAIRE II.2. – *Si* g_1 *et* g_2 *sont les projections de Bergman respectives des fonctions bornées* ℓ_1 *et* ℓ_2 *et qu'on ait* $\square^{(m)}(g_1 - g_2) \equiv 0$, *alors* ℓ_1 *et* ℓ_2 *définissent la même forme linéaire sur* $A^1(\Omega)$.

Nous allons maintenant démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute fonction de Bloch g s'écrit $g = P\ell + h$, où $P\ell$ est la projection de Bergman d'une fonction bornée ℓ et h est une fonction holomorphe qui annule l'opérateur différentiel $\square^{(m)}$.

Comme $\square^{(m)} g(z) B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z)$ est borné quand g est une fonction de Bloch, il suffit de démontrer que la fonction

$$h(\zeta) = g(\zeta) - C_{n,m} \int_\Omega \square^{(m)} g(z) B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z)(B - B_0)(\zeta, z)\, dV(z)$$

annule $\square^{(m)}$. Nous démontrerons cette propriété sous la forme équivalente suivante (comparer avec le cas du transformé de Cayley de la boule [1]) :

PROPOSITION II.2. – *Quelle que soit la fonction* G, *holomorphe dans* Ω *et vérifiant* $\sup_{z\in\Omega} \{|G(z)|\, B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z)\} < +\infty$, *on a l'égalité :*

$$G(\zeta) = C_{n,m} \int_\Omega G(z)\, B^{-\frac{m}{n+1}}(z,z)\, [B(\zeta,z)]^{\frac{n+1+m}{n+1}}\, dV(z).$$

Démonstration. – Nous allons nous transporter sur une réalisation bornée de Ω, en utilisant le lemme suivant :

LEMME II.3. – *Dans* $\mathbf{C}^N$, *tout domaine de Siegel symétrique de type II est biholomorphe à un domaine borné* D *qui possède la propriété suivante : si* $z = (z_1, \ldots, z_N)$ *est un point de* D *et si les nombres complexes* α_i *vérifient* $|\alpha_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, N$, *alors* $(\alpha_1 z_1, \ldots, \alpha_N z_N)$ *est aussi un point de* D. *En plus, si* $B_D(\zeta, z)$ *désigne le noyau de Bergman de* D, *il existe une constante* C_D *non nulle telle que* $B_D(0, z) \equiv C_D$.

La première partie de ce lemme a été démontrée par A. Koranyi et J.A. Wolf [5]. Quand à la deuxième partie, elle est démontrée dans la preuve du lemme 2.3 de [3] (lemme I.1.6 ci-dessus) ; cette preuve, que R. Coifman et R. Rochberg doivent à A. Koranyi, utilise entièrement le lemme II.3.

Démontrons la proposition II.2. Soit Φ une transformation biholomorphe d'un domaine borné D, associé à Ω par le lemme II.3, sur Ω, qui envoie l'origine 0 au point $e = (i, i, 0, \dots, 0)$.

Les noyaux de Bergman B_D et B_Ω, de D et Ω respectivement, sont liés par la relation suivante :

$$B_D(\zeta, z) = B_\Omega(\Phi(\zeta), \Phi(z))\, [J\Phi(\zeta)]\, [\overline{J\Phi(z)}], \tag{2}$$

où $J\Phi(w)$ désigne le jacobien de Φ au point w.

En vertu de (2), la proposition II.2 est équivalente à la proposition suivante :

PROPOSITION II.3. – *Quelle que soit la fonction* $\widetilde{G}$, *holomorphe dans* D *et vérifiant*

$$\sup_{z \in D} \{ |\widetilde{G}(z)|\, B_D^{-\frac{m}{n+1}}(z, z)\, |J\Phi(z)|^{\frac{2m}{n+1}} \} < +\infty,$$

on a :

$$\widetilde{G}(\zeta)\, [J\Phi(\zeta)]^{\frac{n+1+m}{n+1}} = C_{n,m} \int_D \widetilde{G}(z)\, [J\Phi(z)]^{\frac{n+1+m}{n+1}}$$

$$\times [B_D(\zeta, z)]^{\frac{n+1+m}{n+1}}\, B_D^{-\frac{m}{n+1}}(z, z)\, dV(z), \quad \zeta \in D.$$

Démonstration de la proposition II.3. – Le noyau de Bergman de D relatif à la mesure $B_D^{-\frac{m}{n+1}}(z, z)$ est $C_{n,m} \times [B_D(\zeta, z)]^{\frac{n+1+m}{n+1}}$. Il suffit alors, pour conclure, de démontrer que la fonction holomorphe $\widetilde{G}(z)\, [J\Phi(z)]^{\frac{n+1+m}{n+1}}$ est dans $L^1(B_D^{-\frac{m}{n+1}}(z, z)\, dV(z))$.

Mais, par hypothèse, la fonction $\widetilde{G}(z)\, [J\Phi(z)]^{\frac{2m}{n+1}}\, B_D^{-\frac{m}{n+1}}(z, z)$ est bornée, il suffit maintenant de démontrer le lemme suivant :

LEMME II.4. – $\int_D |J\Phi(z)|^{\frac{n+1+m}{n+1}}\, dV(z) < +\infty.$

Démonstration du lemme II.4. – Nous transportons le problème sur le domaine Ω. Si l'on pose $\Psi = \Phi^{-1}$, on est amené à prouver que $\int_\Omega |J\Psi(z)|^{\frac{n+1+m}{n+1}} dV(z) < +\infty$.

Nous utilisons la relation (2) sous sa forme équivalente :

$$B_\Omega(\zeta, z) = B_D(\Psi(\zeta), \Psi(z))\,[J\Psi(\zeta)]\,[\overline{J\Psi(z)}]\,; \qquad (2')$$

en vertu de (2') et du fait que $\Psi(e) = 0$, on a :

$$\overline{J\Psi(z)} = \frac{B_\Omega(z, z)}{J\Psi(0)\,B_D(0, \Psi(z))}\,.$$

Mais en vertu du lemme II.3, $B_D(0, \Psi(z)) \equiv C_D$; ainsi, on conclut parce que, en vertu du lemme I.1.2, comme $m > \frac{n-1}{2}$, on a $\int_\Omega |B_\Omega(e, z)|^{\frac{n+1+m}{n+1}} dV(z) < +\infty$.

Ceci achève la démonstration de la proposition II.3 et par suite, la proposition II.2 est démontrée.

Résumons cette partie ; nous avons établi le théorème suivant :

THEOREME II.3. – *Dans le complexifié Ω du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, le dual de $A^1(\Omega)$ coïncide avec la classe de Bloch $\mathcal{B}$ des fonctions holomorphes dans Ω et le projecteur de Bergman* P, *pris au sens de* (1), *est un opérateur continu de $L^\infty(\Omega)$ sur $\mathcal{B}$.*

Remarques. – 1) Pour chaque entier α strictement positif, on pourrait définir une classe de Bloch $\mathcal{B}_\alpha$ de la manière suivante. Une fonction g, holomorphe dans Ω, est une fonction de Bloch d'ordre α si

$$\|g\|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in\Omega} \{|\square^{(\alpha)} g(z)|\, B^{-\frac{\alpha}{n+1}}(z, z)\} < +\infty.$$

Désignons par $\mathcal{N}_\alpha$ l'espace des fonctions holomorphes qui annulent $\square^{(\alpha)}$; la classe de Bloch $\mathcal{B}_\alpha$ est définie comme l'espace-quotient des fonctions de Bloch d'ordre α par $\mathcal{N}_\alpha$. En particulier, la classe de Bloch $\mathcal{B}$ de l'énoncé du théorème II.3 est la classe $\mathcal{B}_m$ où m est le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{n-1}{2}$.

On démontre facilement que si $\alpha < \beta$, alors $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}_\beta$.

Dans le cas du demi-plan supérieur π^+, il est bien connu que toutes les classes de Bloch $\mathcal{B}_\alpha$ coïncident et ce résultat se généralise au transformé de Cayley de la boule de $\mathbf{C}^n$, $n > 1$. Mais, dans le cas du complexifié du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$, dès que $n \geqslant 3$, nous ne savons, en utilisant ce qui précède, démontrer l'égalité entre les classes $\mathcal{B}_\alpha$ que si $\alpha > \dfrac{n-1}{2}$.

2) Le fait que le noyau de Bergman $B(\zeta, z)$ du complexifié Ω du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n+1}$ n'appartient à $L^p(dV(z))$ que si $p > \dfrac{3n+1}{2(n+1)}$ (lemme I.1.2, $r = 0$) pose également deux problèmes, lorsque $n \geqslant 2$:

(i) déterminer pour quelles valeurs de p, $1 < p < +\infty$, le projecteur de Bergman de Ω s'étend en un opérateur continu de L^p dans lui-même ;

(ii) caractériser le dual de A^p, $1 < p < +\infty$.

L'examen de ces problèmes fera l'objet d'une publication ultérieure.

3) Il n'est pas nécessaire de définir la projection de Bergman de L^∞ pour démontrer que le dual de $A^1(\Omega)$ coïncide avec la classe de Bloch de Ω. En effet, quelle que soit la fonction bornée ℓ, si G désigne la fonction holomorphe définie par

$$G(\zeta) = \int_\Omega B^{1+\frac{m}{n+1}}(\zeta, z)\, \ell(z)\, dV(z),$$

alors quel que soit $f \in A^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \ell(\zeta)\, \overline{f}(\zeta)\, dV(\zeta) = c \int_\Omega G(\zeta)\, \overline{f}(\zeta)\, B^{-\frac{m}{n+1}}(\zeta, \zeta)\, dV(\zeta).$$

En vertu du lemme II.1.2, désignons par g une solution holomorphe de $\square^{(m)} g = G$: g est une fonction de Bloch parce que $G(z)\, B^{-\frac{m}{n+1}}(z, z) \in L^\infty(\Omega)$. On conclut ainsi que le dual de $A^1(\Omega)$ coïncide avec un sous-espace de la classe de Bloch de Ω. La réciproque découle immédiatement du théorème II.2(i).

III. GENERALISATION

1. Le cas d'un produit de domaines.

Dans cette partie, Ω désigne un produit de domaines : $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N$, où Ω_k, $k = 1, \ldots, N$, est l'un des domaines suivants :

1) le transformé de Cayley de la boule unité de $\mathbf{C}^{n_k}$, $n_k \geqslant 1$;

2) le complexifié du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n_k+1}$, $n_k \geqslant 1$.

Nous allons étendre les résultats des parties I et II à un tel produit de domaines.

Désignons par $\mathcal{D}_k$ l'opérateur de Riemann-Liouville de Ω_k, c'est-à-dire

1) $(\mathcal{D}_k)_\zeta = \dfrac{\partial}{\partial \zeta_k^1}$ si $\Omega_k = \{(\zeta_k^1, \zeta_k') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n_k - 1} : \operatorname{Im} \zeta_k^1 > |\zeta_k'|^2\}$ est le transformé de Cayley de la boule unité de $\mathbf{C}^{n_k}$;

2) $(\mathcal{D}_k)_\zeta = \square_\zeta^{(m_k)}$ si Ω_k est le complexifié du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n_k+1}$ et m_k désigne le plus petit entier strictement supérieur à $\dfrac{n_k - 1}{2}$.

Désignons par $B_k(\zeta_k, z_k)$ le noyau de Bergman de Ω_k et par $B_{k,0}(\zeta_k, z_k)$ le noyau à retrancher de $B_k(\zeta_k, z_k)$ pour définir dans Ω_k la projection de Bergman d'une fonction bornée. Rappelons qu'on a : $(\mathcal{D}_k)_\zeta B_{k,0}(\zeta_k, z_k) \equiv 0$.

L'opérateur de Riemann-Liouville $\mathcal{D}$ de Ω est donné par $\mathcal{D} = \prod_{k=1}^{N} \mathcal{D}_k$ et le noyau de Bergman de Ω est $B(\zeta, z) = \prod_{k=1}^{N} B_k(\zeta_k, z_k)$, où $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ et $z = (z_1, \ldots, z_N)$ sont deux points de $\prod_{k=1}^{N} \Omega_k = \Omega$.

Pour définir la projection de Bergman d'une fonction bornée dans Ω, nous retrancherons du noyau de Bergman $B(\zeta, z)$ le noyau $B_0(\zeta, z)$ donné par

$$(B - B_0)(\zeta, z) = \prod_{k=1}^{N} (B_k - B_{k,0})(\zeta_k, z_k).$$

En vertu des résultats des parties I et II, on obtient facilement la proposition suivante :

PROPOSITION III.1.1. – *Le noyau* $B_0(\zeta, z)$ *possède les propriétés suivantes :*

1) *relativement à* ζ, $B_0(\zeta, z)$ *est une fonction holomorphe qui annule l'opérateur* $\mathcal{D}$ *;*

2) *relativement à* z, *on a l'estimation :*

$$\int_\Omega |(B - B_0)(\zeta, z)|\, dV(z) < +\infty .$$

Nous pouvons alors définir la projection de Bergman d'une fonction bornée :

THEOREME III.1.1. – *Quelle que soit la fonction bornée* ℓ *dans* Ω, *on définit une fonction holomorphe dans* Ω *(la projection de Bergman de* ℓ*) on posant :*

$$P\ell(\zeta) = \int_\Omega (B - B_0)(\zeta, z)\, \ell(z)\, dV(z). \tag{1}$$

Nous introduisons ensuite la classe de Bloch de Ω. Quel que soit $k = 1, \dots, N$, nous désignerons par m_k l'entier strictement positif défini de la manière suivante :

1) m_k est le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{n_k - 1}{2}$ si Ω_k est le complexifié du cône sphérique de $\mathbf{R}^{n_k+1}$;

2) $m_k = 1$ si Ω_k est le transformé de Cayley de la boule unité de $\mathbf{C}^{n_k}$.

DEFINITION. – *Une fonction* g, *holomorphe dans* Ω, *est une fonction de Bloch si elle vérifie*

$$\|g\|_* = \sup_{z \in \Omega} \left\{ \prod_{k=1}^{N} B_k^{-\frac{m_k}{n_k+1}}(z_k, z_k)\, |\mathcal{D} g(z)| \right\} < +\infty .$$

La *classe de Bloch* $\mathcal{B}$ de Ω est l'espace-quotient des fonctions de Bloch par les fonctions holomorphes qui annulent $\mathcal{D}$. Munie de la norme induite par $\| \ \|_*$, la classe $\mathcal{B}$ est une espace de Banach.

En vertu des résultats des parties I et II, on obtient le résultat suivant :

THEOREME III.1.2. – *Si* Ω *est un tel produit de domaines, le dual de* $A^1(\Omega)$ *coïncide avec la classe de Bloch* $\mathcal{B}$ *de* Ω *et le projecteur de Bergman* P, *défini par* (1), *est un opérateur continu de* $L^\infty(\Omega)$ *sur* $\mathcal{B}$.

2. Le dual de $A^{1,r}$.

Dans le cas classique du disque unité $\mathbf{D}$ du plan complexe, si l'on désigne par $A^{1,r}(\mathbf{D}), r > -1$, l'espace de Bergman relatif à la mesure $(1 - |z|^2)^r \, dV(z)$, il est bien connu que le dual de $A^{1,r}$ ne dépend pas de r : quel que soit $r > -1$, cet espace coïncide avec la classe de Bloch de $\mathbf{D}$. Nous rappelons que dans $\mathbf{D}$, une fonction holomorphe g est une fonction de Bloch si $\sup_{z \in \mathbf{D}} \{(1 - |z|^2) \, |g'(z)|\} < +\infty$ et la classe de Bloch de $\mathbf{D}$ est l'espace-quotient des fonctions de Bloch par les constantes.

Dans [3], R. Coifman et R. Rochberg posent la question de savoir s'il en est de même pour les domaines de Siegel. Nous allons démontrer que si Ω est un produit de domaines de la forme définie dans la partie III (en particulier si Ω est le transformé de Cayley de la boule ou le complexifié du cône sphérique), la réponse est affirmative.

Dans cette partie, Ω désigne à nouveau un produit de domaines $\Omega = \prod_{k=1}^{N} \Omega_k$ et les notations sont les mêmes que dans la partie III. En plus, nous adoptons les conventions suivantes : soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ un élément de $\mathbf{R}^N$; nous poserons :

(i) $[B(\zeta, z)]^\alpha = \prod_{k=1}^{N} [B_k(\zeta_k, z_k)]^{\alpha_k}$;

(ii) $\alpha > -\dfrac{1}{n+1}$ si, quel que soit $k = 1, \ldots, N$, on a $\alpha_k > -\dfrac{1}{n_k + 1}$.

Enfin, nous posons : $\dfrac{m}{n+1} = \left(\dfrac{m_1}{n_1 + 1}, \ldots, \dfrac{m_N}{n_N + 1}\right)$.

Désignons par $A^{1,r}(\Omega)\,,\, r > -\dfrac{1}{n+1}$, l'espace de Bergman A^1 de Ω relatif à la mesure $[B(z\,,z)]^{-r}\,dV(z)$. Nous allons démontrer le résultat suivant :

THEOREME III.2.1. *Quel que soit* $r > -\dfrac{1}{n+1}$, *le dual de* $A^{1,r}(\Omega)$ *ne dépend pas de* r *: il coïncide avec la classe de Bloch* $\mathcal{B}$ *de* Ω.

Démonstration. – Démontrons d'abord que la classe de Bloch $\mathcal{B}$ est un sous-espace du dual de $A^{1,r}(\Omega)\,,\, r > -\dfrac{1}{n+1}$. Soit g une fonction de Bloch ; il est facile de vérifier qu'elle définit un élément L_r du dual de $A^{1,r}$ par

$$L_r(f) = \int_\Omega \mathcal{D}g(z)\,[B(z\,,z)]^{-\frac{m}{n+1}}\,\overline{f}(z)\,[B(z\,,z)]^{-r}\,dV(z), \qquad f \in A^{1,r}(\Omega)\ ;$$

de plus, $\|L_r\| \leqslant \|g\|_*$.

La démonstration de la réciproque est moins immédiate. Nous nous contenterons d'en esquisser les grandes lignes.

En premier lieu, il convient d'établir l'analogue avec poids du théorème III.1 relativement à la mesure $[B(z\,,z)]^{-r}\,dV(z)$. Le noyau de Bergman B_r relatif à cette mesure est

$$B_r(\zeta\,,z) = c_r[B(\zeta\,,z)]^{1+r}\,.$$

Comme précédemment, il s'agit de trouver un noyau $B_{r,0}(\zeta\,,z)$ possédant les propriétés suivantes :

1) relativement à ζ, $B_{r,0}(\zeta\,,z)$ est une fonction holomorphe telle que $\mathcal{D}_\zeta\, B_{r,0}(\zeta\,,z) \equiv 0$;

2) relativement à z, $B_{r,0}(\zeta\,,z)$ satisfait l'estimation :

$$\int_\Omega |(B_r - B_{r,0})\,(\zeta\,,z)|\,[B(z\,,z)]^{-r}\,dV(z) < +\infty.$$

Il suffit de résoudre ce problème pour $N = 1$: Ω est alors un transformé de Cayley de boule ou un complexifié de cône sphérique. On raisonne comme pour le cas $r = 0$:

1) si Ω est un transformé de Cayley de boule, on prend $B_{r,0}(\zeta\,,z) = B_r((i\,,0)\,,z))$;

2) si Ω est le complexifié du cône sphérique Γ de $\mathbf{R}^{n+1}$, on détermine (comme dans le cas $r = 0$) le noyau $B_{r,0}$ en utilisant l'expression du noyau de Bergman B_r comme transformée de Fourier ; en vertu du lemme I.1.2, on a :

$$B_r(\zeta, z) = c_{n,r} \int_\Gamma (\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2^2 - \ldots - \lambda_n^2)^{\frac{n+1}{2}(1+r)} e^{i\langle\lambda, \zeta - \bar{z}\rangle} d\lambda .$$

Maintenant, pour $N > 1$, l'expression de $B_{r,0}(\zeta, z)$ se déduit du cas $N = 1$ comme quand $r = 0$ (partie III). On démontre de même que quelle que soit la fonction bornée ℓ, on définit une fonction holomorphe (la projection de Bergman de ℓ, relativement à la mesure $[B(z, z)]^{-r} dV(z)$) en posant :

$$P_r \ell(\zeta) = \int_\Omega [B_r(\zeta, z) - B_{r,0}(\zeta, z)]\, \ell(z)\, [B(z, z)]^{-r} dV(z).$$

On vérifie facilement, en vertu du lemme I.1.2, que $P_r \ell$ est une fonction de Bloch. De plus, quelle que soit la fonction bornée ℓ, on a l'égalité :

$$\int_\Omega \ell(z) \bar{f}(z) [B(z, z)]^{-r} dV(z) = c_r$$
$$\times \int_\Omega \mathcal{D}P_r\, \ell(z)\, [B(z, z)]^{-\frac{m}{n+1}} \bar{f}(z) [B(z, z)]^{-r} dV(z), \quad f \in A^1(\Omega),$$

ainsi que l'estimation $\|P_r \ell\|_* \leqslant C_r \|\ell\|_\infty$.

On obtient ainsi que le dual de $A^{1,r}(\Omega)$, $r > -\dfrac{1}{n+1}$, est à son tour un sous espace de la classe de Bloch $\mathcal{B}$; par suite, les deux espaces coïncident : le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BEKOLLE, Le dual de la classe de Bergman A^1 dans le transformé de Cayley de la boule unité de $\mathbf{C}^n$, *C.R.A.S.*, Paris, tome 296, série I (1983), 377-380.

[2] D. BEKOLLE, Le dual de la classe de Bergman A^1 dans le complexifié du cône sphérique (à paraître aux *C.R.A.S.*, Paris).

[3] R. COIFMAN et R. ROCHBERG, Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p, *Astérisque*, 77, (1980), 11-66.

[4] S.G. GINDIKIN, Analysis in homogeneous domains, *Russian Math. Surveys*, 19 (4) (1964), 1-89.

[5] A. KORANYI et J.A. WOLF, The realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, *Ann. of Math.*, 71 (1965), 265-288.

[6] F. TREVES, Linear partial differential equations with constant coefficients, *Mathematics and its applications*, Vol. 6, Gordon and Breach, 1966.

[7] S. VAGI, Harmonic analysis in Cartan and Siegel domains, *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 13, Studies in Harmonic Analysis, J.M. Ash Ed., 1976.

Manuscrit reçu le 12 juillet 1983
révisé le 18 novembre 1983.

David BEKOLLE,
Département de Mathématiques
Université de Bretagne Occidentale
6, avenue Le Gorgeu
29283 Brest Cedex.